

**ION S. ANTONIU**

# **BAZELE ELECTROTEHNICII**

**Vol. II**

**EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI — 1974**



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Dr. doc. ing. ION S. ANTONIU

Membriu corespondent al Academiei Republicii Socialiste România

Profesor la Institutul politehnic București

# **BAZELE ELECTROTEHNICII**

VOLUMUL II



324.524  
EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ  
București — 1974



# TABLA DE MATERII

## Capitolul VI

### STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM PERMANENT

	<u>Pag.</u>
6.1. Metode generale de studiu . . . . .	9
6.1.1. Generalități . . . . .	9
6.1.2. Schemele echivalente ale circuitelor electrice . . . . .	10
6.1.3. Rezolvarea circuitelor electrice de curent alternativ cu ajutorul diagrame- melor fazoriale . . . . .	14
6.1.4. Rezolvarea circuitelor electrice de curent alternativ sinusoidal prin metode analitice, fără utilizarea fazorilor . . . . .	18
6.2. Metode generale de calcul folosind fazorii . . . . .	23
6.2.1. Generalități . . . . .	23
6.2.2. Studiul circuitelor electrice de curent alternativ cu ajutorul teoremelor lui KIRCHHOFF și a metodelor derivate din acestea . . . . .	25
6.2.3. Teoreme asupra rețelelor electrice de curent alternativ complexe servind la studiul acestora . . . . .	34
6.2.4. Metodele matriceale de rezolvare a rețelelor electrice . . . . .	39
6.3. Metode de calcul folosind scheme speciale . . . . .	45
6.3.1. Schemele funcționale ale circuitelor electrice . . . . .	45
6.3.2. Metoda grafurilor de transfer . . . . .	51
6.3.3. Aplicarea teoriei grafurilor la calculul rețelelor electrice . . . . .	64
6.3.4. Noțiuni asupra mărimilor sau unităților relative și utilizarea lor în electro- tehnică . . . . .	75
6.4. Studiul unor circuite tip . . . . .	78
6.4.1. Generalități . . . . .	78
6.4.2. Studiul multipolului . . . . .	80
6.4.3. Studiul multidipolului . . . . .	81
6.4.4. Studiul cuadripolului . . . . .	85
6.4.5. Studiul dipolului . . . . .	129
6.5. Utilizarea inversiunii la studiul circuitelor electrice . . . . .	143
6.5.1. Inversiunea geometrică . . . . .	143
6.5.2. Inversiunea fazorială . . . . .	153
6.6. Diagramele loc-geometrice . . . . .	155
6.6.1. Generalități . . . . .	155
6.6.2. Proprietățile generale ale diagramelor . . . . .	157
6.6.3. Studiul câtorva locuri geometrice particulare . . . . .	158
6.6.4. Despre scările grafice . . . . .	175
6.6.5. Transpunerea unei diagrame loc geometrice într-o curbă caracteristică . .	177
6.6.6. Dreapta puterii . . . . .	178
6.6.7. Aplicații . . . . .	180



## Capitolul VII

### CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM NESTAȚIONAR (TRANZITORIU)

	<u>Pag.</u>
7.1. Metoda generală de calcul . . . . .	190
7.1.1. Generalități . . . . .	190
7.2. Studiul regimului tranzitoriu în circuite electrice de curent alternativ în care se ține seama numai de o singură formă de energie . . . . .	191
7.2.1. Formule utilizate . . . . .	191
7.2.2. Circuite electrice formate dintr-un rezistor legat în serie cu o bobină . . . . .	191
7.2.3. Circuite electrice formate dintr-un rezistor legat în serie cu un condensator . . . . .	197
7.3. Studiul circuitelor electrice de curent alternativ în care se ține seama de ambele forme de energie . . . . .	202
7.3.1. Circuite electrice formate dintr-un rezistor, o bobină și un condensator legate în serie . . . . .	202
7.4. Utilizarea mărimilor complexe la studiul regimului tranzitoriu . . . . .	209
7.4.1. Generalități și definiții . . . . .	209
7.4.2. Metoda generală de calcul a regimurilor tranzitorii cu ajutorul mărimilor complexe . . . . .	211
7.4.3. Fenomene tranzitorii în electrotehnică . . . . .	213
7.4.4. Aplicații la studiul circuitelor electrice cu constante localizate . . . . .	215
7.5. Regimul tranzitoriu al unui câmp magnetic învârtitor . . . . .	222
7.5.1. Scurtcircuitarea alimentării unei armături trifazate producând un câmp magnetic învârtitor . . . . .	222
7.5.2. Expresia generală a regimului tranzitoriu al unui câmp magnetic învîr- titor . . . . .	224
7.5.3. Aplicații . . . . .	226

### PARTEA a III-a

### FUNȚIONAREA SISTEMELOR DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM ANORMAL

## Capitolul VIII

### CURENTUL ALTERNATIV POLIFAZAT NESIMETRIC. REGIMUL DEZECHILIBRAT

8.1. Generalități . . . . .	230
8.2. Metoda directă de calcul a sistemelor nesimetrice și dezechilibrate . . . . .	231
8.2.1. Reprezentarea topografică a tensiunilor . . . . .	231
8.2.2. Calculul curenților la o încărcare nesimetrică și dezechilibrată . . . . .	233
8.3. Sisteme polifazate dezechilibrate. Calculul cu ajutorul coordonatelor simetrice. . . . .	244
8.3.1. Generalități . . . . .	244
8.3.2. Descompunerea în coordonate simetrice a unui sistem trifazat oarecare (Teorema lui STOKVIS-FORTESCUE) . . . . .	245
8.3.3. Realitatea fizică a componentelor simetrice ale unui sistem trifazat oa- recare . . . . .	247
8.3.4. Teoreme privind coordonatele simetrice . . . . .	247
8.3.5. Operații cu sisteme trifazate de fazori . . . . .	250
8.3.6. Determinarea componentelor simetrice ale unui sistem trifazat de fazori dat . . . . .	255



	Pag.
8.3.7. Gradul de dezechilibrare a unui sistem trifazat de fazori . . . . .	260
8.3.8. Măsurarea componentelor simetrice . . . . .	260
8.3.9. Măsurarea reactanțelor directă, inversă și homopolară ale unei mașini sincrone . . . . .	267
8.4. Calculul sistemelor dezechilibrate prin utilizarea coordonatelor simetrice	270
8.4.1. Teoremele lui КИРЧЕНОФ в regim dezechilibrat . . . . .	270
8.4.2. Impedanțele unei rețele trifazate în regimul de coordonate simetrice . .	271
8.4.3. Expresia puterii în regim dezechilibrat . . . . .	274
8.4.4. Calculul circuitelor trifazate dezechilibrate . . . . .	277
8.4.5. Calculul curenților de scurtcircuit în rețele electrice trifazate . . . . .	282
8.4.6. Utilizarea calculului matriceal la studiul rețelelor electrice trifazate deze- chilibrate . . . . .	307
8.4.7. Regimul tranzitoriu în sistemele trifazate . . . . .	316
8.4.8. Câmpul magnetic învârtitor eliptic . . . . .	319

## Capitolul IX

### CURRENTUL ALTERNATIV MONOFAZAT NESINUSOIDAL. REGIMUL DEFORMANT

9.1. Generalități . . . . .	323
9.2. Studiul undelor complexe . . . . .	326
9.2.1. Unde armonice . . . . .	326
9.2.2. Compunerea armonicilor . . . . .	333
9.2.3. Analiza armonică a undelor periodice nesinusoidale cărora li se poate scrie ecuația analitică . . . . .	342
9.2.4. Analiza armonică a undelor periodice nesinusoidale experimentale . . .	351
9.2.5. Dezvoltarea în serie FOURIER a funcțiilor neperiodice . . . . .	357
9.2.6. Seriile FOURIER cu termeni complecși . . . . .	360
9.2.7. Integrala FOURIER . . . . .	363
9.3. Studiul particular al regimului deformant . . . . .	369
9.3.1. Mărimile caracteristice ale regimului deformant . . . . .	369
9.3.2. Puterea în regimul deformant . . . . .	377
9.3.3. Circuite electrice în regim deformant . . . . .	392
9.4. Producerea regimului deformant . . . . .	396
9.4.1. Generalități . . . . .	396
9.4.2. Bobina cu miez de fier . . . . .	397
9.4.3. Originea armonicilor superioare . . . . .	401
9.4.4. Alte surse de armonici . . . . .	404
9.5. Efectele regimului deformant . . . . .	407
9.5.1. Generalități . . . . .	407
9.5.2. Condensator alimentat cu o tensiune deformantă . . . . .	409
9.5.3. Bobină de inductanță alimentată cu o tensiune deformantă . . . . .	410
9.5.4. Efecte diverse . . . . .	415
9.6. Regimul deformant în sisteme trifazate echilibrate . . . . .	415
9.6.1. Forța electromotoare pe fază a unui alternator . . . . .	417
9.6.2. Tensiunea de linie la bornele unui alternator trifazat, cu conectarea în stea cu forța electromotoare pe fază nesinusoidală . . . . .	419
9.6.3. Cuplarea în triunghi a înfășurărilor a unui alternator trifazat . . . . .	420
9.6.4. Efectele fierului în rețelele electrice trifazate . . . . .	420



## Capitolul X

### METODE SPECIALE DE CALCUL ALE REGIMULUI TRANZTORIU

	Pag.
10.1. Generalități . . . . .	423
10.2. Studiul regimului tranzitoriu cu ajutorul calculului simbolic al lui HEAVISIDE . . . . .	424
10.2.1. Generalități asupra calculului simbolic al lui HEAVISIDE . . . . .	424
10.2.2. Exemple de aplicație . . . . .	428
10.3. Utilizarea calculului operațional la studiul circuitelor electrice în regim tranzitoriu . . . . .	432
10.3.1. Teoria circuitului electric al lui HEAVISIDE . . . . .	432
10.4. Utilizarea transformării lui LAPLACE în studiul regimurilor tranzitorii . . . . .	437
10.4.1. Definiții și teoreme fundamentale . . . . .	437
10.4.2. Transformarea ecuațiilor diferențiale și integrodiferențiale . . . . .	444
10.4.3. Imaginea unor funcții uzuale . . . . .	446
10.4.4. Găsirea funcției original a unei funcții imagine . . . . .	455
10.4.5. Metoda generală de calcul a regimurilor tranzitorii . . . . .	465
10.4.6. Calculul fenomenelor tranzitorii la închiderea și deschiderea unui circuit . . . . .	474
10.5. Utilizarea integralei FOURIER la studiul regimului tranzitoriu în circuitele electrice . . . . .	478
10.5.1. Perechile de funcții . . . . .	478
10.5.2. Transformata FOURIER . . . . .	480
10.5.3. Aplicarea integralei FOURIER la studiul circuitelor electrice . . . . .	481

## Capitolul XI

### SISTEME NELINIARE ÎN CURENT ALTERNATIV

11.1. Generalități și definiții . . . . .	493
11.1.1. Generalități . . . . .	493
11.1.2. Clasificarea elementelor neliniare ale rețelelor electrice de curent alternativ . . . . .	494
11.2. Metode generale de calcul ale sistemelor neliniare în curent alternativ . . . . .	498
11.2.1. Metode de calcul în regim permanent . . . . .	498
11.2.2. Metode de calcul în regim tranzitoriu . . . . .	503
11.3. Ferorezonanța circuitelor electrice . . . . .	515
11.3.1. Generalități . . . . .	515
11.3.2. Ferorezonanța în circuitele electrice serie . . . . .	516
11.3.3. Ferorezonanța în circuitele electrice derivație . . . . .	519
11.3.4. Caracteristicile fenomenului de ferorezonanță . . . . .	520
11.3.5. Exemple de fenomene de ferorezonanță . . . . .	521
11.4. Stabilitatea circuitelor electrice . . . . .	523
11.4.1. Generalități . . . . .	523
11.4.2. Criterii de stabilitate . . . . .	528
11.4.3. Exemple de aplicație . . . . .	536
11.4.4. Stabilitatea sistemelor neliniare . . . . .	540



Partea a IV-a  
PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

*Capitolul XII*

TEORIA LINIILOR ELECTRICE LUNGI

	<u>Pag.</u>
12.1. Studiul liniilor electrice lungi în regim cuasistaționar . . . . .	548
12.1.1. Generalități . . . . .	548
12.1.2. Parametrii liniilor electrice lungi . . . . .	549
12.1.3. Ecuațiile liniilor electrice lungi . . . . .	556
12.1.4. Integrarea ecuațiilor liniilor electrice lungi în cazul unui regim periodic alternativ sinusoidal staționar . . . . .	558
12.1.5. Interpretarea fizică a soluțiilor generale . . . . .	564
12.1.6. Funcționarea și proprietățile generale a liniilor de transmitere a energiei electrice . . . . .	579
12.2. Studiul liniilor electrice lungi în regim tranzitoriu . . . . .	601
12.2.1. Generalități . . . . .	601
12.2.2. Ecuațiile liniilor electrice lungi în regim tranzitoriu . . . . .	602

*Capitolul XIII*

LANȚURI DE CUADRIPOLI

13.1. Lanțuri de cuadripoli funcționînd în regim permanent cuasistaționar . . . . .	615
13.1.1. Definiții . . . . .	615
13.1.2. Ecuațiile unui lanț de cuadripoli în regim permanent . . . . .	615
13.1.3. Cazuri particulare de funcționare ale unui lanț de cuadripoli . . . . .	624
13.1.4. Aplicații . . . . .	626
13.2. Lanțuri de cuadripoli funcționînd în regim tranzitoriu . . . . .	631
13.2.1. Ecuațiile unui lanț de cuadripoli în regim tranzitoriu . . . . .	631
13.2.2. Cazuri particulare . . . . .	632
13.2.3. Exemple de aplicație . . . . .	634
13.3. Filtre de frecvență . . . . .	640
13.3.1. Definiții . . . . .	640
13.3.2. Filtrele electrice multicelulare pur reactive . . . . .	641

*Capitolul XIV*

PROPAGAREA CURENȚILOR ELECTRICI ȘI CÎMPURILOR  
ELECTROMAGNETICE ÎN CONDUCTOARE MASIVE,  
ÎN REGIM ARMONIC SINUSOIDAL

14.1. Distribuția curentului electric într-un conductor masiv de formă dreptunghi- ulară . . . . .	648
14.1.1. Generalități . . . . .	648
14.1.2. Studiul cantitativ al fenomenului, în cazul unei bare dreptunghiulare de lungime infinită și a cărei lățime este mică față de înălțime . . . . .	649
14.1.3. Studiul regimului tranzitoriu de stabilire a curentului electric într-un conductor masiv de formă dreptunghiulară . . . . .	652
14.1.4. Repartiția curentului electric în bare masive așezate în creștături . . . . .	660



	<u>Pag.</u>
14.2. Propagarea câmpului magnetic în lame . . . . .	663
14.2.1. Stabilirea ecuației generale . . . . .	663
14.2.2. Integrarea ecuațiilor de propagare în cazul unui regim permanent armon- ic sinusoidal . . . . .	664
14.2.3. Impedanța aparentă a circuitului de excitație . . . . .	665
14.2.4. Pierderi de energie în circuite magnetice . . . . .	668
14.3. Repartiția curentului electric în conductoare cilindrice . . . . .	672
14.3.1. Stabilirea ecuației generale . . . . .	672
14.3.2. Integrarea ecuației în cazul unui curent alternativ sinusoidal, în regim permanent . . . . .	673
14.3.3. Determinarea impedanței proprii a unui conductor cilindric . . . . .	676
14.3.4. Cablul divizat . . . . .	679

## *Capitolul XV*

### PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

15.1. Undele electromagnetice . . . . .	680
15.1.1. Generalități . . . . .	680
15.1.2. Propagarea undelor electromagnetice în medii dielectrice . . . . .	682
15.1.3. Unda electromagnetică staționară . . . . .	692
15.2. Energia transmisă de undele electromagnetice . . . . .	696
15.2.1. Propagarea energiei electromagnetice . . . . .	696
15.2.2. Prezența fenomenelor reactive în propagarea energiei electromagnetice .	701
15.2.3. Propagarea energiei electromagnetice pe liniile electrice . . . . .	703
Index alfabetic . . . . .	707
Bibliografie . . . . .	711
Table des matières . . . . .	722
Contents . . . . .	733



## Capitolul VI

### STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN REGIM PERMANENT

#### 6.1. METODE GENERALE DE STUDIU

##### 6.1.1. GENERALITAȚI

Majoritatea aplicațiilor tehnice utilizează astăzi energia electrică sub forma curentului alternativ, curentul continuu fiind utilizat numai pentru anumite aplicații tehnice — foarte importante și ele — la care curentul alternativ nu oferă aceleași avantaje.

Chiar în cazul în care energia electrică este utilizată sub forma de curent continuu, alimentarea întreprinderilor respective se face tot în curent alternativ urmînd ca, în interiorul acestor întreprinderi să se facă transformarea curentului alternativ în curent continuu.

Rețelele electrice de distribuire a energiei electrice urmăresc în mod necesar traseul complex al străzilor unui oraș sau aglomerațiile de consumatori. Chiar rețelele primare de alimentare (feederii) formează circuite destul de complexe.

Pentru stabilirea unui proiect de distribuție sau pentru verificarea funcționării unei asemenea rețele, este necesar să se calculeze anumite elemente. Dintre acestea, în primul rînd trebuie stabilită circulația de energie, sau, dacă tensiunile sînt constante, circulația curenților.

Pe baza acestei circulații se poate dimensiona rețeaua însăși și se poate stabili protecția ei sau urmările unui defect oarecare.

De asemenea, în cursul exploatării, se pot vedea încărcările ulterioare ce se pot da rețelei sau întăririle necesare ce trebuie făcute pentru a se putea răspunde cererilor de energie.

Calculul rețelelor electrice de curent alternativ este mai complicat decît acela al rețelelor de curent continuu, din cauza apariției defazajului dintre curent și tensiune, defazaj ce se datorează faptului, că în rețelele de curent alternativ, mai apare, în afară de rezistența conductoarelor și inductivitatea sau capacitatea lor.

În afară de acestea, fenomenele care apar în aparatele electrice utilizate în curent alternativ au uneori un caracter mai complex decît cel care rezultă din schema circuitelor electrice ale aparatului. Acest lucru se datorește fie faptului că în curent alternativ apar fenomene noi — din care vom menționa pierderile de energie în dielectric și în circuitul magnetic, efectul pelicular și efectul de vecinătate\* — fie faptului că între elementele schemei există anumite cuplaje parazite capacitive sau inductive. Pentru a ține seamă și de aceste

---

\* Vezi cap. XIV



fenomene schema circuitelor electrice se completează cu elemente suplimentare, obținându-se o nouă schemă, denumită *schema echivalentă*. În unele cazuri, de exemplu la transformatoare, mașini sincrone și mașini asincrone, la care schema circuitelor electrice conține două circuite cuplate pur inductiv, prin schema echivalentă se urmărește obținerea unei scheme obișnuite mai simple și mai sugestive, fără cuplaje inductive\*.

Rezolvarea rețelelor de curent alternativ sinusoidal se poate face prin diferite metode, care se pot grupa după cum urmează:

1. *Metoda diagramelor fazoriale*. Se scriu ecuațiile fazoriale ale rețelei și cu ajutorul lor se construiește diagrama fazorială corespunzătoare. Segmente de dreaptă din diagramă reprezintă, la o scară bine definită, curenți sau tensiuni (căderi de tensiuni) iar unghiurile între fazori reprezintă defazaje. Pe baza proprietăților geometrice ale figurii construite se deduc elementele necunoscute. De observat că diagrama fazorială se poate construi în multe cazuri fără a scrie ecuațiile circuitului. Metoda se aplică de obicei în cazuri simple, când rețeaua nu este prea complicată și are o singură forță electromotoare.

2. *Metode analitice de calcul, fără utilizarea fazorilor*. Această categorie de metode cuprinde: metoda separației puterilor și metoda transfigurării circuitului într-un circuit serie sau derivație, cu ajutorul parametrilor  $Z$ ,  $R$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $G$ ,  $B$ , pe care o vom denumi metoda separației elementelor active și reactive ale rețelei.

3. *Metode analitice de calcul, folosind fazorii*. Se scriu ecuațiile fazoriale ale rețelei, exprimând tensiunile, curenții și impedanțele cu ajutorul fazorilor. Se rezolvă apoi aceste ecuații, aplicând regulile de calcul corespunzătoare.

Prin introducerea cantităților complexe, dificultățile de calcul dispar. În adevăr, s-a văzut că, în acest caz, se introduce în calcul impedanța complexă, se consideră tensiunile și curenții tot cantități complexe și, în aceste condiții, calculul se face ca și în curent continuu. Rămâne ca la sfârșit să se interpreteze rezultatele, stabilind defazajele, curenții activi, curenții reactivi etc.

În consecință, utilizând fazorii, metodele de calcul folosite în curentul continuu vor fi folosite și în curentul alternativ, fără nici un fel de modificare, cu mențiunea că diversele relații sînt scrise cu cantități complexe.

Dintre aceste metode, primele două nu pot fi utilizate decît la calculul circuitelor electrice în *regim permanent* sau *cuasistaționar*, ultima metodă poate fi utilizată pentru calculul circuitelor electrice atît în regim permanent, cît și în *regim tranzitoriu*\*\*.

În acest capitol se vor studia numai circuitele electrice funcționînd în regim permanent, regimul tranzitoriu urmînd a fi studiat în capitolul VII.

## 6.1.2. SCHEMELE ECHIVALENTE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE

6.1.2.1. *Considerații generale*. Schemele electrice ale circuitelor sînt constituite din elemente ale căror parametri (rezistențe, inductanțe sau capa-

\* Vezi [10] pag. 152.

\*\* Se reamintește definiția acestor două regimuri de funcționare ale circuitelor electrice: *Regimul permanent* este regimul de funcționare al unui circuit electric, în care curenții electrice din circuit, sub acțiunea surselor aplicate, își păstrează indefinit aceeași formă — constantă sau periodic variabilă în timp.

*Regimul tranzitoriu* este regimul de funcționare al unui circuit electric în timpul trecerii de la o stare de funcționare în regim permanent la o altă stare de funcționare tot în regim permanent.



cități) pot fi constanți sau variabili, circuitul electric fiind în primul caz liniar, în al doilea neliniar.

Schemele electrice cu parametri constanți pot fi reduse întotdeauna fie la impedanța  $Z_e$ , cuprinzînd o rezistență  $R_e$  în serie cu o reactanță  $X_e$ , fie la admitanța  $Y_e$ , conținînd o conductanță  $G_e$  în paralel cu o susceptanță  $B_e$ .

La schemele cu parametri variabili, în general nu se poate face o asemenea reducere decît pentru o anumită valoare dată a parametrului variabil\*.

Determinarea parametrilor  $Z_e$ ,  $R_e$ ,  $X_e$  sau  $Y_e$ ,  $G_e$ ,  $B_e$  se poate face prin calcul sau experimental.

Pentru determinarea experimentală se alimentează receptorul cu o tensiune  $U$  măsurată cu voltmetrul. Receptorul absoarbe curentul  $I$  măsurat cu un ampermetru și puterea activă  $P$ , măsurată cu un wattmetru. Cu ajutorul acestor date măsurate se deduce:

$$Z_e = \frac{U}{I} ; R_e = \frac{P}{I^2} ; X_e = \pm \sqrt{Z_e^2 - R_e^2} ;$$

sau

$$Y_e = \frac{I}{U} ; G_e = \frac{P}{U^2} ; B_e = \pm \sqrt{Y_e^2 - G_e^2} .$$

Factorul de putere al circuitului echivalent este

$$\cos \varphi_e = \frac{R_e}{Z_e} = \frac{P}{UI}$$

Cu privire la aceste determinări, trebuie precizate următoarele:

— Rezistența  $R_e$  sau conductanța  $G_e$  corespunde atît energiei transformate de circuit în căldură prin efectul trecerii curentului prin rezistențe, cît și energiei transformate în căldură prin pierderile din cîmpul magnetic sau electric și de asemenea energiei transformate în lucru mecanic, radiații, energie chimică etc. În consecință, în general nu există o legătură obligatorie între rezistența echivalentă determinată ca mai sus și rezistențele fizice ale rețelei.

— Determinările făcute mai sus sînt valabile numai pentru frecvența la care au avut loc măsurătorile; ne referim aici nu atît la faptul că reactanța  $X_e$  sau susceptanța  $B_e$  depind de frecvență după o lege cunoscută, cît la faptul că prin schimbarea frecvenței, în general prin mărirea ei, pot apărea fenomene noi sau cuplaje parazite noi, neglijabile la frecvențe mici, așa după cum se va arăta ulterior.

**6.1.2.2. Schema echivalentă a condensatorului real.** Dielectricii folosiți în construcția condensatoarelor, cablurilor, mașinilor etc. sub forma diferiților izolanti, nu sînt dielectrici perfecți. Ei au oarecare conductivitate, ceea ce face ca izolantii să fie parcurși de curenți electrici, foarte mici, atît în cîmp electric constant (curent continuu) cît și în cîmp alternativ (curent alternativ). Acestor curenți le corespunde un consum de putere activă, care se transformă în căldură și reprezintă pierderi.

\* Vezi [10] pag. 152; vezi și [13] pag. 141



Într-un câmp alternativ apar în plus și alte pierderi, de obicei mai mari decât cele precedente, datorită fenomenului de polarizare a dielectricilor și fenomenului de histerezis dielectric\*. Aste pierderi sînt proporționale cu frecvența și cu pătratul valorii maximo a câmpului electric,

$$p_D = k_D f E^2$$

în care  $k_D$  este o constantă caracteristică dielectricului. Pierderile menționate mai sus sînt mici pentru aer, mică, parafină de calitate și porțelanuri speciale, sînt însă mari la hîrtia electroizolantă obișnuită. Din acest motiv, condensatoarele etalon și cele pentru frecvență înaltă se construiesc cu dielectric aer, mică sau alte materiale de calitate.

Curentul absorbit de un condensator este teoretic defazat cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea tensiunii, factorul de putere al condensatorului și puterea activă absorbită fiind nule. La un condensator real, alimentat cu tensiune sinusoidală curentul este defazat cu mai puțin de  $\frac{\pi}{2}$  față de tensiune, iar cu timpul dielectricul se încălzește. În consecință, un condensator real absoarbe și o putere activă care se transformă în căldură, datorită fenomenelor legate de pierderile în dielectric.

Unghiul  $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  pe care-l face fazorul reprezentativ al curentului în condensator cu normala pe direcția fazorului tensiunii  $U$  se numește *unghi de pierderi*.

Ținînd seama de pierderile de putere în condensator, schema condensatorului real trebuie să cuprindă și o rezistență, montată fie în paralel cu o capacitate (fig. 6.1, a) fie în serie cu o capacitate (fig. 6.1, b), ambele scheme fiind

deopotrivă folosite în schemele electrice în curent alternativ. În ambele scheme impedanța totală  $Z$  și unghiul  $\varphi$  sau  $\delta$  trebuie să aibă aceeași valoare.

Se deduce imediat:

— pentru schema echivalentă derivatie

$$G_1 = Y \cos \varphi = Y \sin \delta;$$

$$B_1 = Y \sin \varphi = Y \cos \delta$$

și deci

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{G_1} = \frac{1}{Y \sin \delta} = \frac{Z}{\sin \delta}, \\ X_1 &= \frac{1}{B_1} = \frac{1}{Y \cos \delta} = \frac{Z}{\cos \delta} \\ \text{sau } X_1 &= \frac{1}{C_1 \omega} = \frac{Z}{\cos \delta} \end{aligned} \right\} (6.1)$$

Fig. 6.1. Schemele echivalente ale unui condensator.

a) Schema derivatie; b) Schema serie

— pentru schema echivalentă serie

$$R_2 = Z \cos \varphi = Z \sin \delta; \quad X_2 = \frac{1}{C_2 \omega} = Z \sin \varphi = Z \cos \delta. \quad (6.2)$$

\* Vezi 1.5.2.



Împărțind relațiile (6.1) și (6.2) între ele rezultă :

$$\frac{R_2}{R_1} = \sin^2 \delta; \quad \frac{C_1}{C_2} = \cos^2 \delta.$$

Întrucît unghiul de pierderi  $\delta$  este în general foarte mic, rezultă că  $\sin^2 \delta$  este foarte apropiat de zero, iar  $\cos^2 \delta$  este foarte apropiat de unitate, deci

$$R_2 \ll R_1 \text{ și } C_1 \simeq C_2 = C.$$

Pierderile în dielectric depinzînd de frecvență, parametrii  $R_1, R_2, C_1 \simeq C_2 = C$ ,  $\tan \delta$ , depind și ei de frecvență. În practică, condensatoarele se caracterizează prin capacitatea  $C$  și tangenta unghiului de pierderi  $\tan \delta$  la o frecvență dată, ceea ce permite să se determine și parametrii  $R_1$  sau  $R_2$ .

Într-adevăr, ținînd seama de expresiile din care se deduce valoarea defazajului  $\varphi$  în circuitul serie și cel derivație rezultă :

— pentru schema echivalentă derivație

$$\tan \delta = \cotg \varphi = \frac{X_1}{R_1} = \frac{1}{R_1 C_1 \omega} = \frac{1}{R_1 C \omega};$$

— pentru schema echivalentă serie

$$\tan \delta = \cotg \varphi = \frac{R_2}{X_2} = R_2 C_2 \omega = R_2 C \omega.$$

Din relațiile precedente, în care se cunoaște  $\tan \delta$  și  $C \omega$  se poate deduce rezistența  $R_1$  sau  $R_2$ , după cum se lucrează cu circuitul echivalent derivație sau serie.

Determinarea valorii capacității echivalente  $C$  și a mărimii  $\tan \delta$  se face în laborator prin metode exacte de punte (puntea Dr. SCHERING).

**6.1.2.3. Bobinaje; scheme echivalente.** La frecvențe mici, de exemplu 50 Hz, un bobinaj oarecare (reostat, bobină de reactanță, bobinaj de transformator sau mașină electrică) poate fi considerat ca avînd o rezistență  $R$  în serie cu o inductanță  $L$ . La frecvențe mari sau foarte mari apar fenomene suplimentare care complică schema echivalentă și anume :

a) Rezistența firului de bobinaj  $R$  crește datorită efectului pelicular și datorită efectului de vecinătate cu celelalte spire\*.

b) Între spirele bobinajului există anumite capacități, foarte mici, trasate punctat pe figura 6.2,a. La frecvențe mici reactanța corespunzătoare capacităților este mare, curenții prin aceste capacități sînt mici și deci neglijabili. La frecvențe mari reactanța corespunzătoare capacităților scade, curenții prin capacități devin importanți și nu mai pot fi neglijăți. Datorită acestor curenți, derivați între spire, curentul nu mai este constant pe întreaga lungime a firului de bobinaj. Fenomenul este foarte complex, dar de obicei se simplifică considerînd că toate capacitățile dintre spire se reduc la o capacitate  $C$ , în paralel la bornele bobinajului (fig. 6.2,b).

\* Vezi 14.1.2.3 și 14.3.3.



c) Cîmpul electric alternativ dintre spire, corespunzător capacităților între spire, produce pierderi de putere activă în dielectric. Pentru a ține seama de aceste pierderi se introduce o rezistență  $R$ , tot în paralel cu bornele bobinajului (fig. 6.2,b).

d) Cîmpul magnetic alternativ produs de bobină produce pierderi de putere activă în circuitul magnetic. Aceste pierderi sînt mai mari sau mai mici, depinzînd de construcția circuitului magnetic și se ține seamă de ele prin introducerea unei rezistențe suplimentare  $R_0$  în serie cu circuitul bobinajului.

Scheme electrice complexe ca cele din figura 6.2 intervin în practică pentru reostatele și bobinajele folosite în radiotehnică, cum și în tehnica curenți-

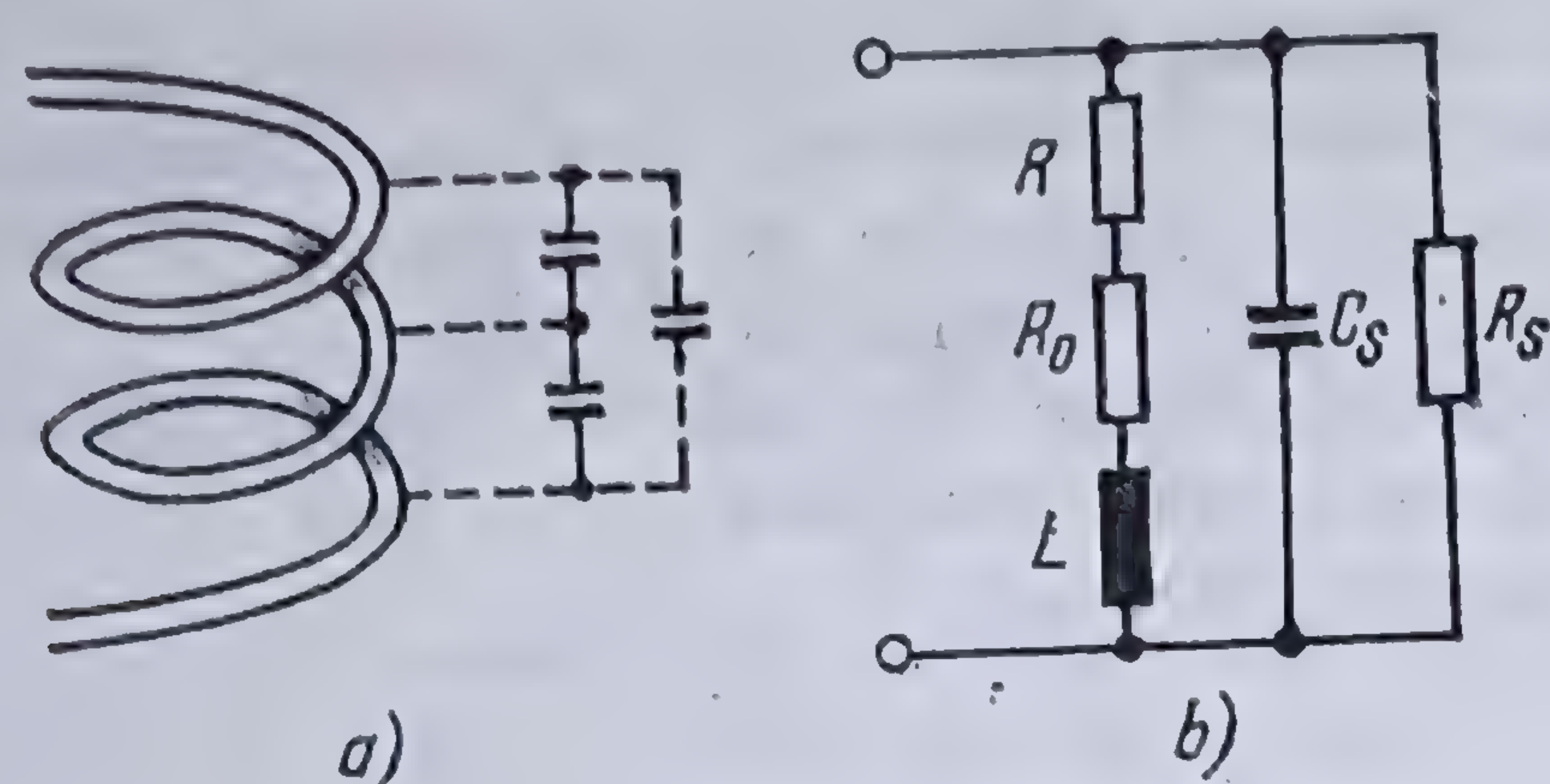


Fig. 6.2. Bobinaj și schema sa echivalentă.

lor industriali la frecvența normală de 50 Hz, în studiul efectului supratensiunilor atmosferice asupra bobinajului mașinilor și transformatoarelor, deoarece aceste supratensiuni sînt fenomene oscilatorii cu o frecvență foarte mare. Mai frecvente sînt însă schemele echivalente care țin seamă de pierderile în fier\*.

### 6.1.3. REZOLVAREA CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV CU AJUTORUL DIAGRAMELOR FAZORIALE

6.1.3.1. **Circuite serie.** Fie un circuit format dintr-un rezistor de rezistență  $R$ , o bobină de inductanță  $L$  și un condensator de capacitate  $C$  legate în serie și căruia i se aplică o tensiune alternativă sinusoidală avînd valoarea efectivă  $U$ . Diagrama fazorială a acestui circuit se construiește\*\* luîndu-se ca origine de fază curenții necunoscut  $I$ , căruia i se atribuie o valoare arbitrară. Alegerea curenților necunoscut ca element de bază pentru construirea diagramei fazoriale se face deoarece curenții este elementul comun celor trei părți constitutive ale circuitului, fazorii reprezentînd tensiunea la bornele diverselor elemente ale circuitului, construindu-se apoi în raport cu acesta mult mai ușor.

Diagrama obținută este deci o diagramă de tensiuni; scara la care s-a efectuat construcția respectivă este arbitrară dat fiind valoarea arbitrară ce s-a luat pentru curenții necunoscut. Scara tensiunilor se determină ușor, deoarece se cunoaște valoarea tensiunii aplicate circuitului și deci modulul fazorului  $U$  reprezentat prin segmentul  $OC$  (fig. 6.3); se deduce apoi scara curenților prin împărțirea scării tensiunii cu valoarea rezistenței  $R$ .

Din diagrama fazorială obținută, se deduce apoi expresia impedanței circuitului, a curenților și a defazajului acestuia față de tensiunea aplicată la bornele circuitului.

\* Vezi [10] pag. 152; vezi și [14] pag. 380.

\*\* Vezi 4.3.4.



În curent alternativ impedanța joacă un rol analog rezistenței din curent continuu\*; această analogie nu poate fi făcută și în cazul mai multor circuite de impedanță diferită legate în serie. În acest caz impedanța totală a circuitului este diferită de suma aritmetică a impedanțelor elementelor constitutive.

Fie  $R_1$  și  $X_1$ ,  $R_2$  și  $X_2$ ,  $R_3$  și  $X_3$ , ...,  $R_n$  și  $X_n$  rezistențele și reactanțele circuitelor legate în serie. Rezistența totală a circuitului este

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

iar reactanța totală este

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

astfel că impedanța totală a circuitului este

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2 + \dots + R_n)^2 + (X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2}$$

expresie care este, în general, diferită de

$$\sqrt{R_1^2 + X_1^2} + \sqrt{R_2^2 + X_2^2} + \dots + \sqrt{R_n^2 + X_n^2}.$$

De asemenea, tensiunea efectivă, la bornele circuitului rezultat nu mai este egală cu suma algebrică a tensiunilor la bornele circuitelor constitutive, ca în curentul continuu. Pentru a arăta aceasta să considerăm un circuit format — spre exemplu — din trei circuite legate în serie (fig. 6.3). Luând ca origine de fază curentul  $\underline{I}$ , comun tuturor elementelor legate în serie, tensiunea la bornele circuitului 1 va fi

$$\overline{OA} = \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I},$$

rezultanta căderilor de tensiune  $R_1 \underline{I}$  și  $X_1 \underline{I}$ .

Tensiunea la bornele circuitului 2 va fi

$$\overline{AB} = \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I},$$

rezultanta căderilor de tensiune  $R_2 \underline{I}$  și  $X_2 \underline{I}$ , iar aceea de la bornele circuitului 3,

$$\overline{BC} = \underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}.$$

Tensiunea la bornele întregului circuit este

$$\overline{OC} = \underline{U} = \underline{Z} \underline{I};$$

rezultă din figură

$$\overline{OC} < \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC}$$

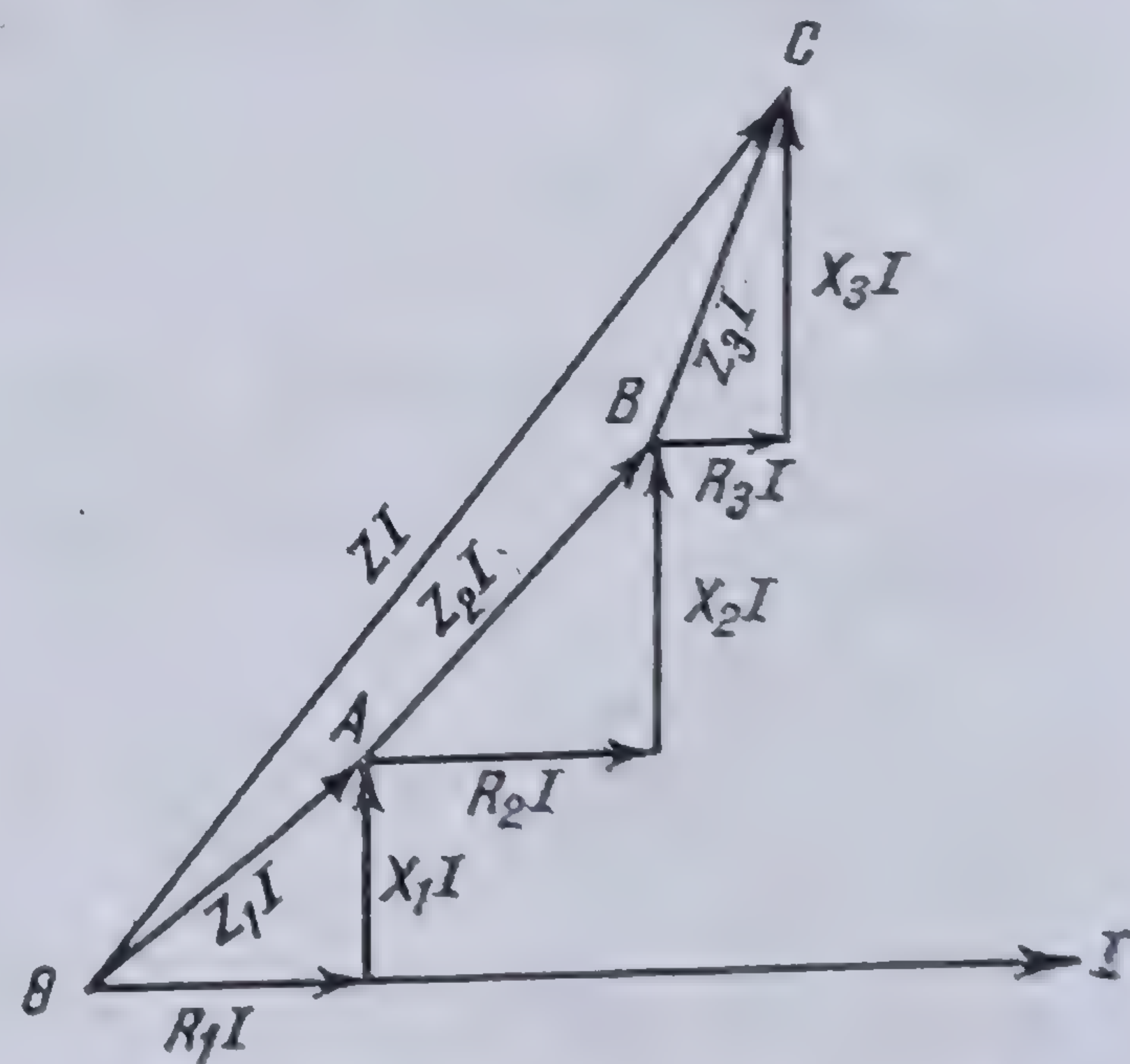


Fig. 6.3. Diagrama fazorială a unui circuit serie.

\* Vezi 4.3.6.3.



și deci

$$\underline{U} < \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3;$$

împărțind ultima relație cu  $\underline{I}$ , rezultă

$$\underline{Z} < \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3.$$

Cele ce preced pot fi extinse la oricâte circuite s-ar lega în serie pentru a forma circuitul rezultat.

**6.1.3.2. Circuite derivație.** Diagrama se realizează\* luându-se ca origine de fază tensiunea comună la bornele tuturor circuitelor legate în paralel și rezolvându-se apoi, fiecare circuit serie component în parte în raport cu această tensiune; curentul rezultat se obține apoi sumând diverșii curenți parțiali.

Este ușor de văzut, că în cazul circuitelor în derivație, admitanța totală a circuitului complet este mai mică decât suma admitanțelor fiecărui circuit component, iar curentul total absorbit de circuit este mai mic decât suma curenților absorbiți de fiecare circuit în parte. Într-adevăr, fie  $G_k$  și  $B_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) conductanțele și susceptanțele echivalente ale fiecărui circuit component în parte. Luând ca origine de fază tensiunea  $\underline{U}$ , comună la bornele tuturor elementelor legate în paralel, curentul care străbate circuitul 1 este

$$\overline{OA_1} = \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U},$$

rezultanta curenților  $G_1 \underline{U}$  și  $B_1 \underline{U}$ .

Curentul care străbate circuitul 2 este

$$\overline{A_1 A_2} = \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U},$$

rezultanta curenților  $G_2 \underline{U}$  și  $B_2 \underline{U}$ ; în general, curentul care străbate circuitul  $k$  este

$$\overline{A_{k-1} A_k} = \underline{I}_k = \underline{Y}_k \underline{U},$$

rezultanta curenților  $G_k \underline{U}$  și  $B_k \underline{U}$  (fig. 6.4).

Curentul absorbit de întregul circuit este deci

$$\overline{OA_n} = \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}$$

și din figură rezultă

$$\overline{OA_n} < \overline{OA_1} + \overline{A_1 A_2} + \dots + \overline{A_{k-1} A_k} + \dots + \overline{A_{n-1} A_n}.$$

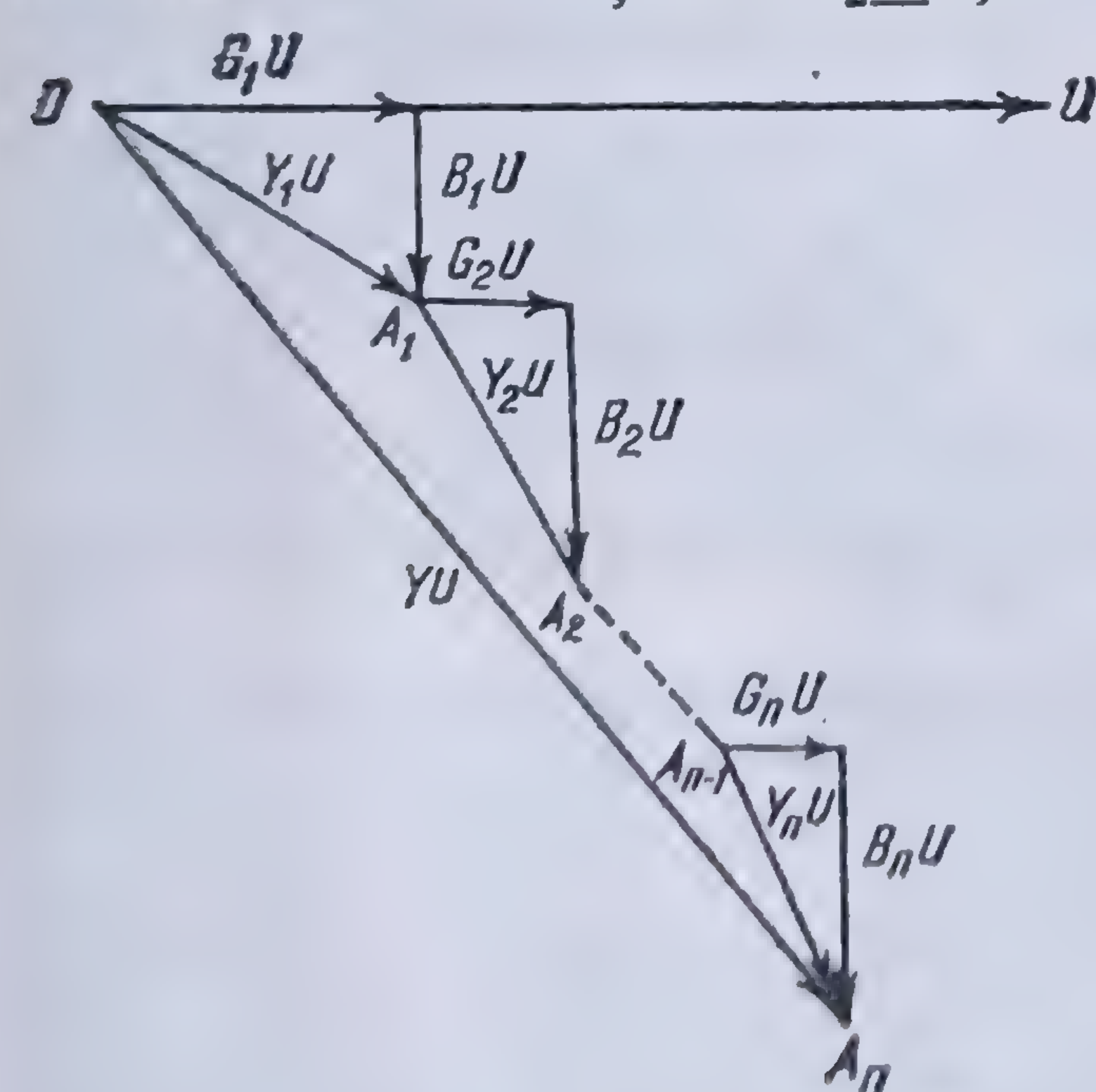


Fig. 6.4. Diagrama fazorială a unui circuit derivație.

\* Vezi 4.3.5.1



În consecință,

$\underline{I} < \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_k + \dots + \underline{I}_n$   
și, împărțind această relație cu  $\underline{U}$  rezultă

$$\underline{Y} < \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_k + \dots + \underline{Y}_n.$$

**6.1.3.3. Circuite mixte.** Circuitete mixte sînt circuite compuse din circuite formate din elemente simple — rezistențe, inductanțe și capacități legate în serie — cuplate între ele într-un mod oarecare în serie și în paralel. Pentru un asemenea circuit nu se poate da o regulă generală de rezolvare prin metoda diagramelor fazoriale, problema fiind cu atît mai greu de rezolvat, cu cît circui-

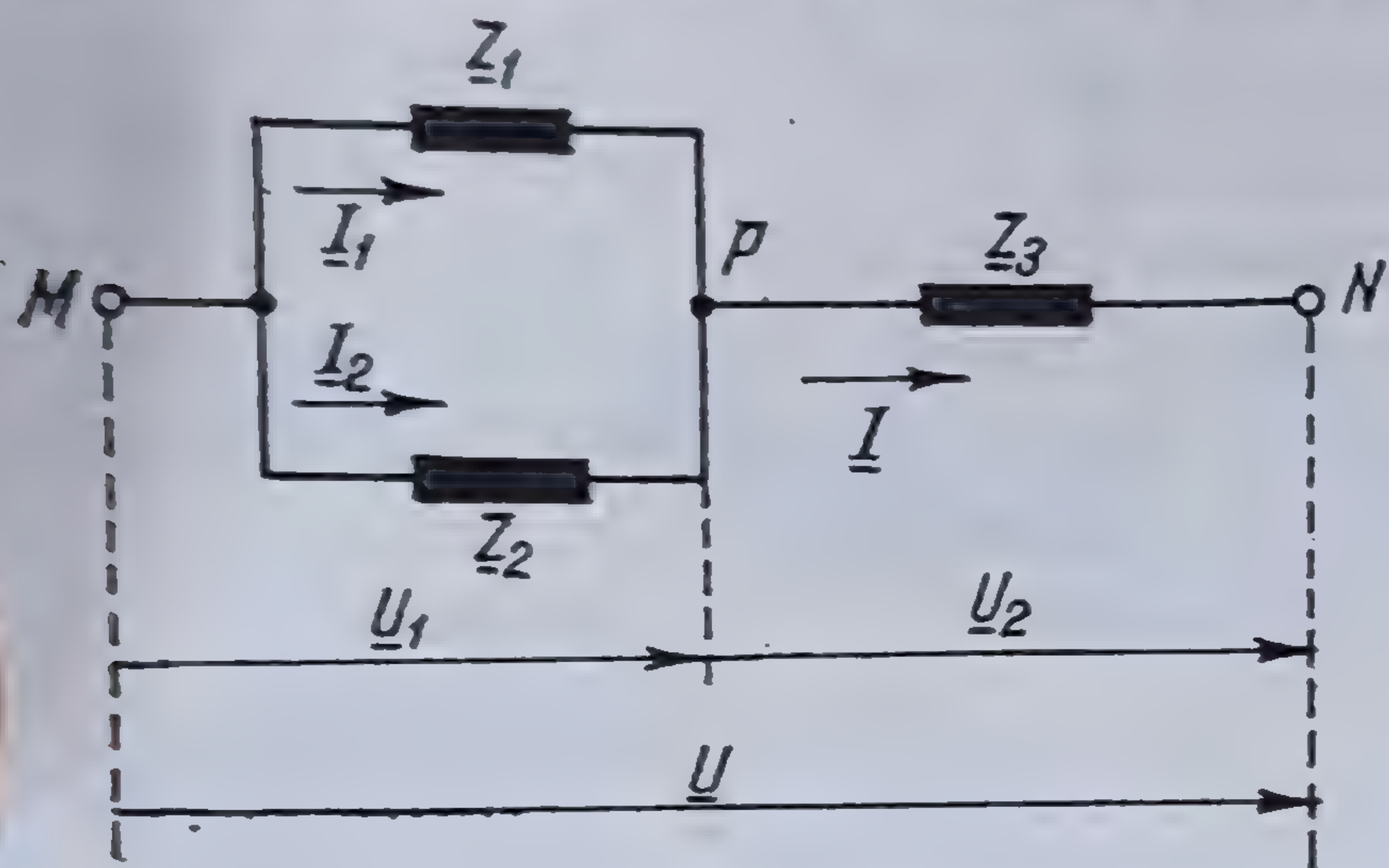


Fig. 6.5. Circuit mixt.

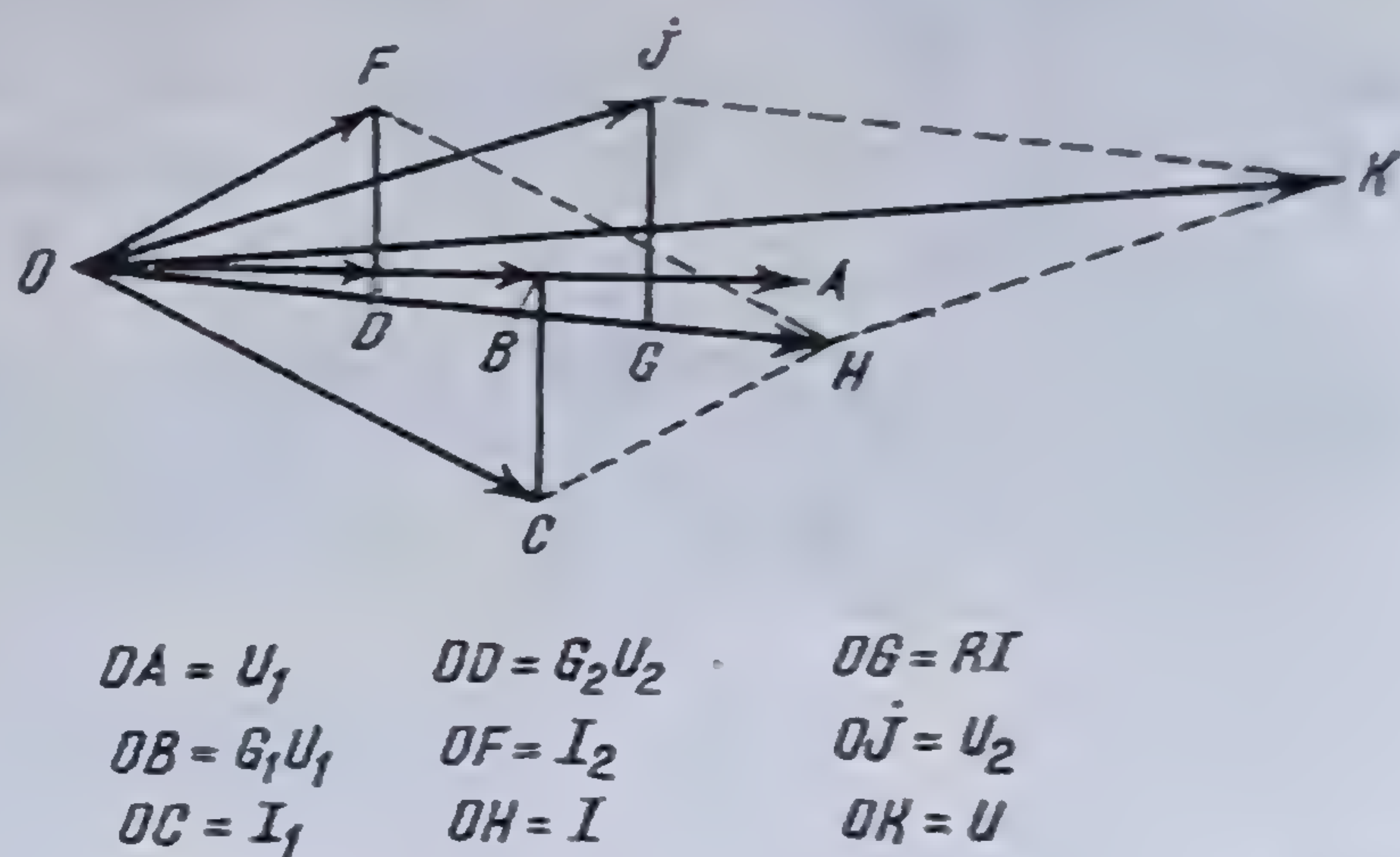


Fig. 6.6. Diagrama fazorială a unui circuit mixt

tul este mai complicat. Ca linie conducătoare în rezolvarea acestui tip de probleme se indică următoarele: se atacă problema de la un element simplu (circuite în paralel în general) care se combină apoi cu un alt element simplu rezolvat în prealabil, și așa mai departe pînă se ajunge la elementul dat în problema studiată, în general tensiunea la bornele circuitului complex considerat.

Pentru ilustrarea celor de mai sus, fie circuitul serie — paralel format din impedanțele  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$  legate în paralel, circuitul astfel format fiind legat în serie cu impedanța  $\underline{Z}$  (fig. 6.5). La bornele  $MN$  ale acestui circuit se aplică tensiunea  $\underline{U}$ ; se caută curenții din diversele ramuri ale acestui circuit.

Rezolvarea acestui circuit nu se poate face luînd ca origine de fază tensiunea  $\underline{U}$ , cunoscută, deoarece nu se poate ști nimic asupra curentului total absorbit de circuit. În acest caz este indicat a se porni de la elementele în paralel,  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$ , luîndu-se ca origine de fază tensiunea necunoscută  $\underline{U}_1$  de la bornele  $MP$ . Diagrama se trasează deci la o scară arbitrară pînă în momentul în care se va determina pe această diagramă un fazor care reprezintă o dată a problemei; lungimea acestui fazor va determina astfel scara diagramei și astfel, valorile diverselor mărimi din circuit.

În aceste condiții, rezolvarea problemei se face după cum urmează (fig. 6.6):

Luînd tensiunea necunoscută  $U_1$  ca origine de fază și ca unitate, se desenează la o scară arbitrară oarecare fazorul  $\overline{OA}$  reprezentînd această tensiune. Fie  $a$  (mm/V) scara aleasă.

Se calculează, cu ajutorul relațiilor (1.84), conductanțele și susceptanțele echivalente ale impedanțelor  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$ ; fie  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $B_1$  și  $B_2$  aceste mărimi. Se determină apoi argumentele  $\psi_1$  și  $\psi_2$  ale celor două impedanțe cu ajutorul rela-



ției (4.63); aceste argumente dau direcția curenților  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  față de originea de fază aleasă.

Curentul în conductanța  $G_1$  este reprezentat la o nouă scară arbitrară (scara curenților), prin fazorul  $\overline{OB} = k \cdot G_1 (\overline{OA})$ , a cărui direcție este confundată cu aceea a lui  $\underline{U}_1$ ,  $k$  fiind o constantă oarecare, aleasă pentru comoditatea trasării diagramei. Din vârful  $B$  se ridică o perpendiculară pînă întâlnește direcția curențului  $\underline{I}_1$ . Se determină astfel, la scara aleasă pentru curenți, mărimea curențului  $\underline{I}_1$ .

Procedînd în același mod, se determină și curentul  $\underline{I}_2$ .

Se efectuează apoi rezultanta curenților  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  obținîndu-se curentul rezultat  $\underline{I}$ , care străbate impedanța  $\underline{Z}$ . Se calculează argumentul impedanței  $\underline{Z}$  cu ajutorul relației (4.63), determinîndu-se direcția tensiunii  $\underline{U}_2$ .

Pe direcția lui  $\underline{I}$  se duce acum segmentul  $\overline{OG} = k \cdot R \cdot \overline{OH}$ , iar din punctul  $G$  se ridică o perpendiculară care determină pe direcția tensiunii  $\underline{U}_2$  segmentul  $\overline{OJ}$  care, la scara tensiunilor reprezintă tensiunea  $\underline{U}_2$  la bornele circuitului  $PN$ .

Adunînd fazorial tensiunile  $\underline{U}_1$  (fazorul  $\overline{OA}$ ) și  $\underline{U}_2$  (fazorul  $\overline{OJ}$ ) se obține tensiunea  $\underline{U}$  (fazorul  $\overline{OK}$ ) aplicată la bornele circuitului și deci o dată a problemei; se determină acum scara tensiunilor diagramei.

Valorile efective ale celor două tensiuni sînt

$$U_1 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OK}} U \quad \text{și} \quad U_2 = \frac{\overline{OJ}}{\overline{OK}} U.$$

Pentru a deduce scara curenților avem

$$RI = \frac{\overline{OG}}{\overline{OK}} U \quad \text{și} \quad k \cdot R \cdot \overline{OH} = \overline{OG},$$

de unde rezultă valorile efective ale acestora

$$I = k \frac{\overline{OH}}{\overline{OK}} U, \quad I_1 = k \frac{\overline{OC}}{\overline{OK}} U, \quad I_2 = k \frac{\overline{OF}}{\overline{OK}} U.$$

În ceea ce privește diversele defazaje dintre curenți și tensiuni, acestea se pot măsura direct pe epură, unghiurile fiind independente de scările alese.

#### 6.1.4. REZOLVAREA CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV SINUSOIDAL PRIN METODE ANALITICE, FĂRĂ UTILIZAREA FAZORILOR

**6.1.4.1. Metoda separației puterilor (Metoda BOUCHEROT).** În unele cazuri, la rețele compuse din circuite derivație, necuplate inductiv, se cunosc sau se pot determina ușor puterile active și reactive consumate de fiecare din circuitele rețelei. Fie  $P_1, P_2, \dots, P_n$  puterile active și  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  puterile reactive. Ținînd seamă de principiul conservării puterilor active și reactive, se deduce puterea activă și cea reactivă furnizată de sursă

$$\left. \begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + \dots + P_n = \Sigma P_i \\ Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = \Sigma Q_i \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$



În consecință, puterea aparentă, curentul și factorul de putere al sursei au valorile

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad I = \frac{S}{U}; \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}, \quad (6.4)$$

în care  $P$  și  $Q$  au semnificațiile din relațiile (6.3).

Ca exemplu de aplicație a metodei fie o rețea formată din trei impedanțe  $Z_1, Z_2, Z_3$ , montate în derivație (fig. 6.7), în care  $Z_1$  reprezintă o rezistență  $R_1$ ,  $Z_2$  reprezintă o rezistență  $R_2$  în serie cu o inductanță  $L_2$ , iar  $Z_3$  reprezintă o capacitate  $C_3$ , alimentate cu tensiunea  $\underline{U}$ .

Puterile active și reactive consumate de aceste impedanțe sînt:

$$P_1 = R_1 I_1^2 = R_1 \frac{U^2}{R_1^2} = \frac{U^2}{R_1}; \quad Q_1 = 0;$$

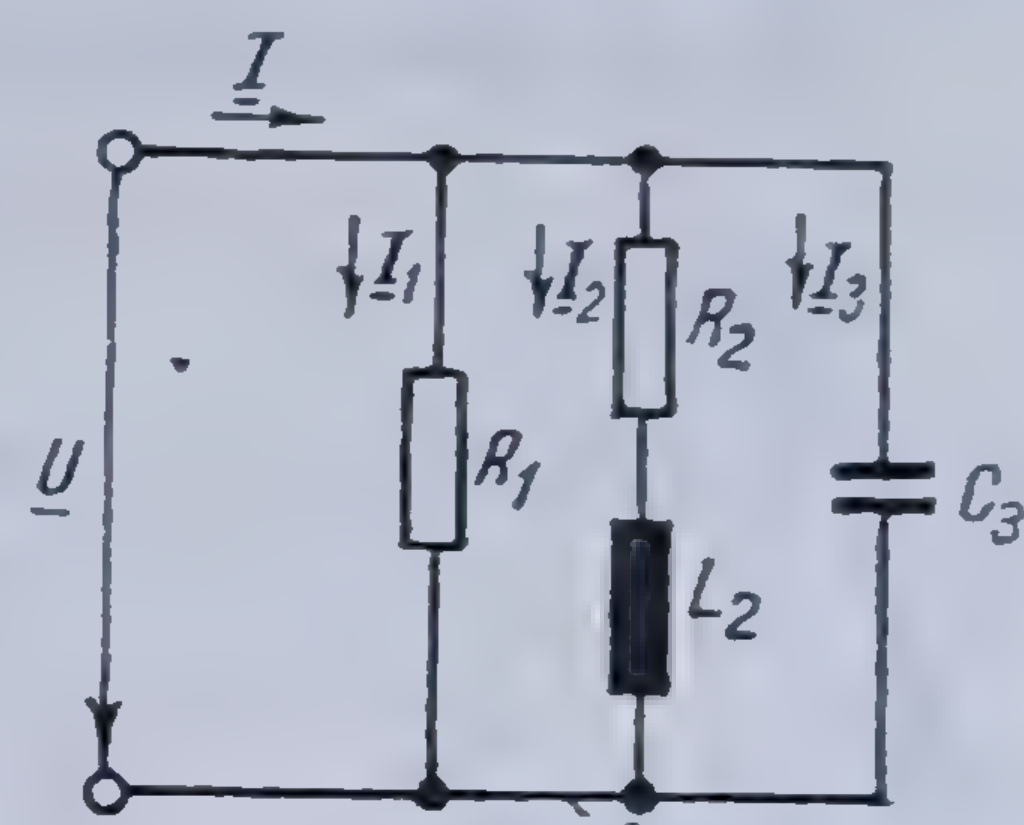


Fig. 6.7. Exemplu de rețea cu circuite în derivație.

$$P_2 = R_2 I_2^2 = R_2^2 \frac{U^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}; \quad Q_2 = X_2 I_2^2 = L_2 \omega \frac{U^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2};$$

$$P_3 = 0; \quad Q_3 = X_3 I_3^2 = -\frac{1}{C_3 \omega} U^2 C_3^2 \omega^2 = -U^2 C_3 \omega.$$

Puterea activă și reactivă la sursă vor fi

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U^2 \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} \right],$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = U^2 \left[ \frac{L_2 \omega}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} - C_3 \omega \right].$$

Din ultimele două relații se deduce puterea aparentă  $S$ , curentul total  $I$  și unghiul  $\varphi$  de defazaj dintre curent și tensiune:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U^2 \sqrt{\left[ \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} \right]^2 + \left[ \frac{L_2 \omega}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} - C_3 \omega \right]^2}$$

$$I = \frac{S}{U} = U \sqrt{\left[ \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} \right]^2 + \left[ \frac{L_2 \omega}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} - C_3 \omega \right]^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\frac{L_2 \omega}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2} - C_3 \omega}{\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}}$$



În unele cazuri, puterea consumată de receptoarele derivație este cunoscută prin puterea aparentă  $S_i$  și valoarea factorului de putere  $\cos \varphi_i$ . În acest caz problema se rezolvă fie grafic, fie analitic.

În primul caz, se întocmește o diagramă vectorială a puterilor aparente (fig. 6.8). Ținând seama că puterile aparente se conservă vectorial, se deduce mai întâi puterea aparentă  $S$  furnizată de sursă, prin însumarea vectorilor  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Pe acest grafic rezultă puterea activă  $P$  furnizată de sursă, puterea reactivă  $Q$  și defazajul  $\varphi$  sau factorul de putere  $\cos \varphi$ , după care se folosesc ultimele două relații (6.4).

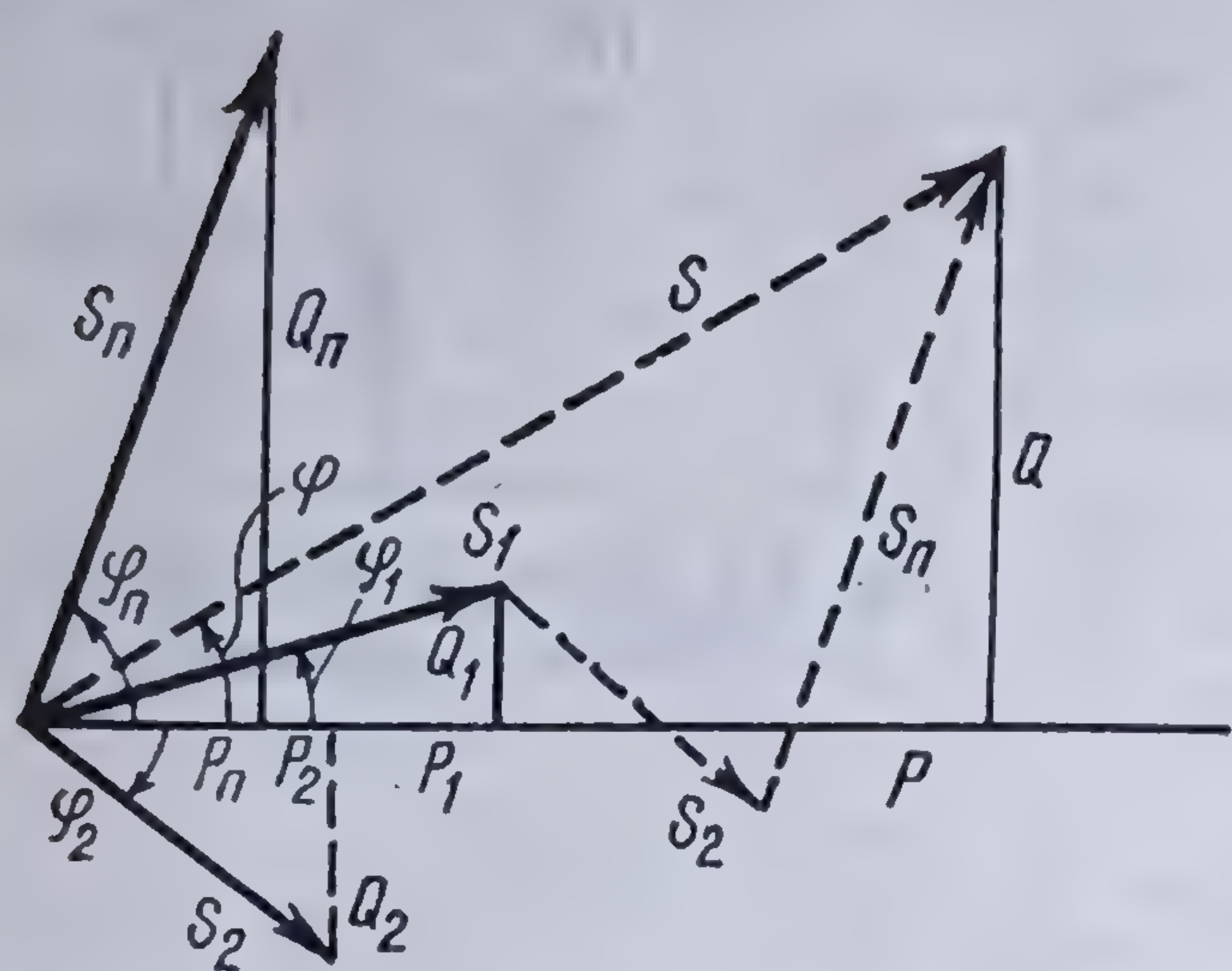


Fig. 6.8. Diagrama vectorială a puterilor aparente.

În al doilea caz se deduc puterile active și reactive ale receptoarelor, cu relațiile  $P_i = S_i \cos \varphi_i$ ,  $Q_i = S_i \sin \varphi_i$ , după care se aplică relațiile (6.3) și (6.4). În alte cazuri, puterea consumată de receptoare este cunoscută prin puterea activă  $P_i$  și factorul de putere  $\cos \varphi_i$ . În acest caz se deduce  $\tan \varphi_i$  și apoi puterile reactive  $Q_i = P_i \tan \varphi_i$ , după care se aplică relațiile (6.3) și (6.4).

Ca aplicație numerică să considerăm două motoare, de putere 6 kW și 10 kW, cu randament 0,75 respectiv 0,833 și factor de putere  $\cos \varphi_1 = 0,707$  și  $\cos \varphi_2 = 0,8$  montate în paralel la o rețea de 220 V. Puterile absorbite de la rețea sînt  $P_1 = 6/0,75 = 8$  kW,  $P_2 = 10/0,833 = 12$  kW. Pentru primul motor  $\sin \varphi_1 = 0,707$ ;  $\tan \varphi_1 = 1$ , iar pentru al doilea  $\sin \varphi_2 = 0,6$ ;  $\tan \varphi_2 = 0,75$ . Puterile reactive absorbite de la rețea sînt  $Q_1 = P_1 \tan \varphi_1 = 8 \cdot 1 = 8$  kVAR,  $Q_2 = P_2 \tan \varphi_2 = 12 \cdot 0,75 = 9$  kVAR. Rețeaua furnizează în total puterea activă  $P = P_1 + P_2 = 8 + 12 = 20$  kW și puterea reactivă  $Q = Q_1 + Q_2 = 8 + 9 = 17$  kVAR. Puterea aparentă furnizată este  $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{20^2 + 17^2} = 26,2$  kVA, curentul furnizat este  $I = S/U = 26\,200/220 = 119$  A, iar factorul de putere rezultat este  $\cos \varphi = P/S = 20/26,2 = 0,764$ .

**6.1.4.2. Metoda separației elementelor active și reactive ale circuitului.** Această metodă este de fapt o metodă de transfigurare care urmărește să reducă rețeaua la o singură impedanță, caracterizată prin rezistența și reactanța echivalentă sau conductanța și susceptanța echivalentă. Transfigurarea se bazează pe următoarele reguli:

1. Mai multe impedanțe  $Z_1 (R_1, X_1), Z_2 (R_2, X_2), \dots, Z_n (R_n, X_n)$  în serie, se înlocuiesc cu o impedanță care are rezistența  $R$  și reactanța  $X$  date de relațiile

$$R = \sum R_i = R_1 + R_2 + \dots + R_n; X = \sum X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

2. Mai multe admitanțe  $Y_1 (G_1, B_1), Y_2 (G_2, B_2), \dots, Y_n (G_n, B_n)$  montate în paralel se înlocuiesc cu o admitanță care are conductanța  $G$  și susceptanța  $B$  date de relațiile

$$G = \sum G_i = G_1 + G_2 + \dots + G_n; B = \sum B_i = B_1 + B_2 + \dots + B_n.$$



3. Unei impedanțe  $Z(R, X)$  îi corespunde o admitanță  $Y(G, B)$  echivalentă cu conductanța  $G$  și susceptanța  $B$  date de relațiile

$$G = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = \frac{X}{Z^2} = \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

4. Unei admitanțe  $Y(G, B)$  îi corespunde o impedanță  $Z(R, X)$  echivalentă cu rezistența  $R$  și reactanța  $X$  date de relațiile

$$R = \frac{G}{Y^2} = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad X = \frac{B}{Y^2} = \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

După reducerea rețelei la o singură impedanță sau admitanță, se aplică una din metodele cunoscute de rezolvare.

**6.1.4.3. Metoda vectorială.** Metoda geometrică examinată în paragraful 6.1.3 a scos în evidență caracterul de vector pe care îl poate căpăta reprezentarea tensiunilor și curenților periodici alternativi sinusoidali. Aceasta a condus la elaborarea unei metode de calcul a circuitelor de curent alternativ, bazată pe calculul vectorial.

Fazorii reprezentativi ai tensiunilor și curenților alternativi sinusoidali nefiind vectori în sensul acestei noțiuni, din întreg calculul vectorial nu se vor putea utiliza decât anumite elemente, care vor putea soluționa un număr de probleme cu un caracter particular.

Fie un vector oarecare,  $\vec{OA}$ , care să reprezinte o tensiune sau un curent (fig. 6.9). Raportându-l la un sistem de referință în plan,  $Ox, Oy$ , se obțin cele două proiecții ale sale  $\vec{OB} = A'$  și  $\vec{OC} = A''$ . Dacă  $\bar{x}$  și  $\bar{y}$  sînt versorii celor două axe, se poate scrie

$$\vec{A} = \bar{x}A' + \bar{y}A''.$$

Să considerăm un circuit format din două receptoare legate în serie și străbătute de curentul  $I$ , raportat la sistemul de referință  $Oxy$ . Fie  $\vec{U}_1 (U'_1, U''_1)$  și  $\vec{U}_2 (U'_2, U''_2)$  tensiunea la bornele celor două receptoare. Se poate scrie

$$\vec{U}_1 = \bar{x}U'_1 + \bar{y}U''_1; \quad \vec{U}_2 = \bar{x}U'_2 + \bar{y}U''_2.$$

Tensiunea totală la bornele circuitului considerat va fi  $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \bar{x}U'_1 + \bar{y}U''_1 + \bar{x}U'_2 + \bar{y}U''_2 = \bar{x}(U'_1 + U'_2) + \bar{y}(U''_1 + U''_2)$ .

Fie tensiunea

$$u = U \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha),$$

reprezentată prin vectorul

$$\vec{U} = \bar{x}U_1 + \bar{y}U_2$$

și curentul

$$i = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \beta),$$

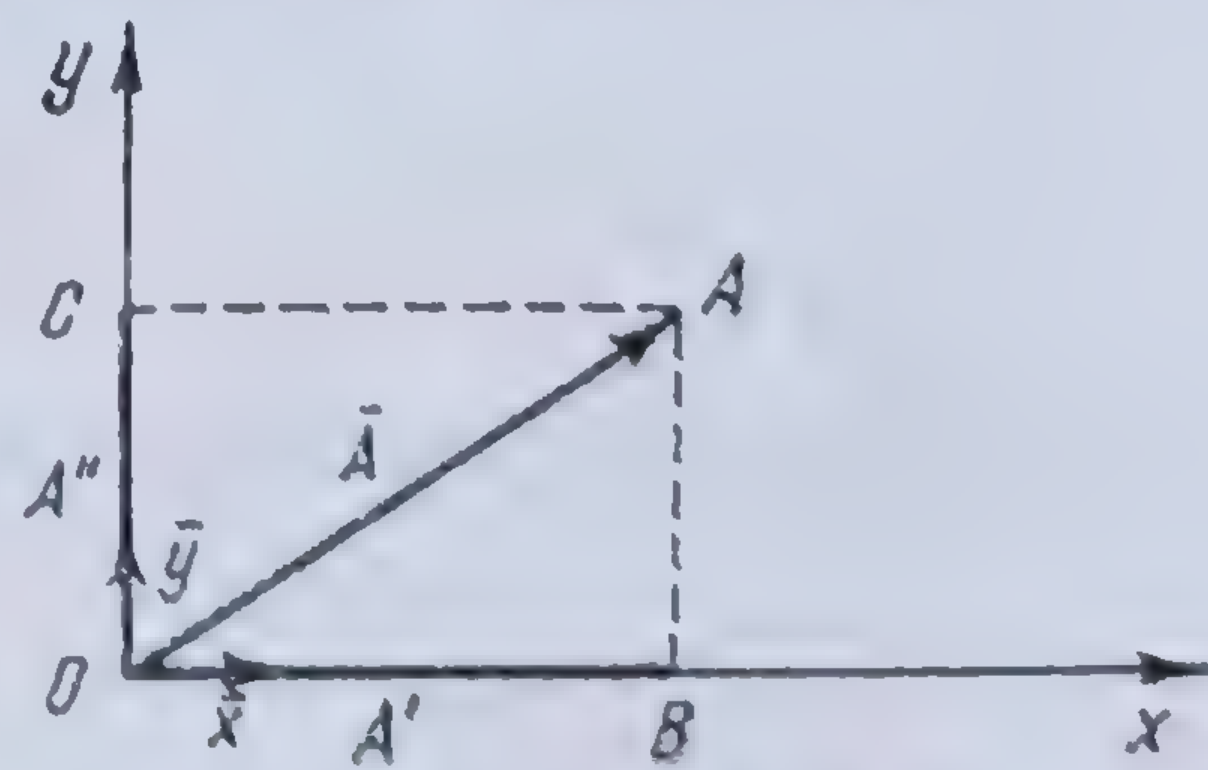


Fig. 6.9. Reprezentarea vectorială a unei mărimi de curent sau de tensiune.



reprezentat prin vectorul

$$\bar{I} = \bar{x} I_1 + \bar{y} I_2.$$

Făcînd produsul scalar între acești doi vectori se obține

$$\bar{U} \cdot \bar{I} = (\bar{x} U_1 + \bar{y} U_2)(\bar{x} I_1 + \bar{y} I_2) = U_1 I_1 + U_2 I_2, \quad (6.5)$$

o mărime scalară care reprezintă *puterea activă* absorbită de un circuit sau produsă de o sursă. Într-adevăr, ținînd seama că

$$U_1 = U \cos \alpha, \quad U_2 = U \sin \alpha, \quad I_1 = I \cos \beta, \quad I_2 = I \sin \beta$$

și punînd  $\alpha - \beta = \varphi$ , relația (6.5) devine

$$\bar{U} \cdot \bar{I} = UI \cos \alpha \cos \beta + UI \sin \alpha \sin \beta = UI \cos \varphi = P.$$

Făcînd produsul vectorial între aceiași vectori se obține

$$\bar{I} \times \bar{U} = (\bar{x} I_1 + \bar{y} I_2) \times (\bar{x} U_1 + \bar{y} U_2) = (U_2 I_1 - U_1 I_2) \bar{n}, \quad (6.6)$$

o mărime vectorială a cărei modul reprezintă *puterea reactivă* absorbită de circuit sau produsă de sursă. Într-adevăr, în acest caz avem :

$$\bar{I} \times \bar{U} = \bar{n} (UI \sin \alpha \cos \beta - UI \sin \beta \cos \alpha) = \bar{n} \cdot UI \sin \varphi = \bar{n} \cdot Q,$$

în care  $\bar{n} = \bar{x} \times \bar{y}$ .

Pentru a vedea cum se aplică această metodă la studiul circuitelor electrice, să examinăm următoarele probleme simple :

1. Fie un circuit format dintr-o rezistență  $R$  și o reactanță  $X$  legate în serie și străbătute de curentul  $\bar{I} = \bar{x}I$ ; curentul este astfel luat ca origine de fază.

Tensiunea la bornele rezistenței este

$$\bar{U}_1 = \bar{x} RI;$$

tensiunea la bornele inductanței este

$$\bar{U}_2 = \bar{y} XI;$$

tensiunea totală, la bornele circuitului va fi

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 = \bar{x} RI + \bar{y} XI$$

a cărei valoare efectivă — egală cu modulul vectorului — este

$$U = I \sqrt{R^2 + X^2}$$



și care are argumentul

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

2. Fie acum un circuit format din impedanța  $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$  legată în paralel cu impedanța  $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$ , cărui i se aplică la borne tensiunea

$$\bar{U} = \bar{x} U,$$

luată ca origine de fază.

Curentul în impedanța  $Z_1$  este

$$\bar{I}_1 = \bar{x} \frac{U}{Z_1} \cos \varphi_1 + \bar{y} \frac{U}{Z_1} \sin \varphi_1 = \bar{x} \frac{R_1 U}{Z_1^2} + \bar{y} \frac{X_1 U}{Z_1^2}$$

căci  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1}{R_1}$  și deci  $\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1}$  și  $\sin \varphi_1 = \frac{X_1}{Z_1}$ .

Curentul din impedanța  $Z_2$  este, în mod analog,

$$\bar{I}_2 = \bar{x} \frac{R_2 U}{Z_2^2} + \bar{y} \frac{X_2 U}{Z_2^2}.$$

Curentul total absorbit de circuit este deci

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{x} \left( \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2} \right) U + \bar{y} \left( \frac{X_1}{Z_1^2} + \frac{X_2}{Z_2^2} \right) U,$$

avînd valoarea efectivă

$$|\bar{I}| = U \sqrt{\left( \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2} \right)^2 + \left( \frac{X_1}{Z_1^2} + \frac{X_2}{Z_2^2} \right)^2}$$

și defazajul față de tensiune

$$\varphi = \arctg \frac{X_1 Z_2^2 + X_2 Z_1^2}{R_1 Z_2^2 + R_2 Z_1^2}.$$

## 6.2. METODE GENERALE DE CALCUL FOLOSIND FAZORII

### 6.2.1. GENERALITĂȚI

Metodele de calcul indicate în paragraful 6.1 au un domeniu de aplicație restrîns, ele utilizîndu-se în general numai în cazul circuitelor simple.

Circuitele electrice complexe se rezolvă folosind cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF sau teoreme derivate din acestea, exprimate cu ajutorul fazorilor.



Ecuatiile matematice de rezolvare se obțin scriind ecuațiile rețelei pentru valorile instantanee ale mărimilor electrice, după care se trece de la valori instantanee la vectorii asociați, exprimați în cantități complexe, conform principiilor indicate la paragraful 4.2.4.7.

Ecuatiile rețelei pot fi scrise și direct în cantități complexe. Sub acest aspect, rezolvarea rețelelor de curent alternativ sinusoidal, în regim permanent, nu se deosebește formal de rezolvarea rețelelor de curent continuu decât prin instrumentul de calcul folosit.

Scrierea ecuațiilor unei rețele electrice necesită însă introducerea unei anumite convenții în ceea ce privește sensul forței electromotoare a diverselor surse și sensul curentului alternativ.

Trebuie observat, că în curent alternativ, curentul își schimbă sensul de circulație de două ori pe perioadă. Prin urmare sensul pozitiv poate fi ales

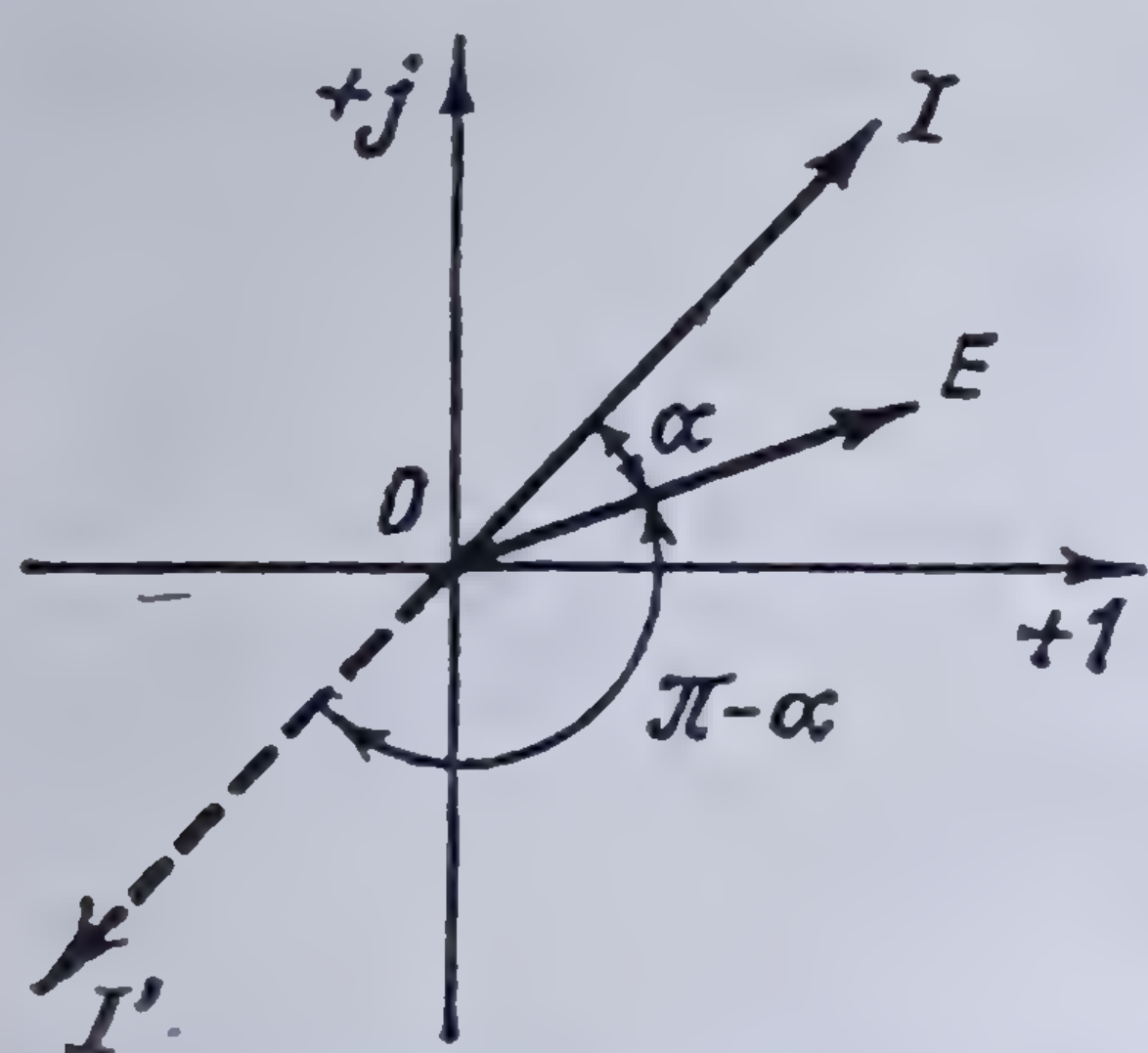


Fig. 6.10. Influența alegerii sensului curentului electric alternativ.

oricare, fără a mai fi necesară corectarea lui, după determinarea valorilor numerice. Este totuși necesar să se definească sensul curentului electric în raport cu o origine de fază întrucât alegerea unui sens pozitiv sau al altuia influențează defazajul, rotind faza mărimii în cauză cu  $\pi$ . Să presupunem că într-o latură a unei rețele există o forță electromotoare  $E$  și pentru un sens pozitiv  $AB$  ales pentru curent, curentul este reprezentat prin fazorul  $I$  (fig. 6.10). Dacă se consideră pozitiv sensul contrar  $BA$ , curentul va fi reprezentat prin fazorul  $I'$  egal, dar în opoziția de fază cu  $I$ ; în primul caz curentul este defazat cu unghiul  $\alpha$  înaintea lui  $E$ , în ultimul caz cu unghiul  $\pi - \alpha$  în urma lui  $E$ .

În general, sensul care se atribuie curentului alternativ, este sensul de curgere a energiei electrice corespunzătoare și anume, se consideră sensul pozitiv sensul socotit de la sursă către receptor. Dacă din calcul iese pentru curent un sens contrar celui fixat arbitrar, înseamnă că și sensul de curgere a energiei este contrar celui presupus.

Metoda de calcul cu fazori conduce mai repede la rezultat și poate fi aplicată în orice rețea — oricât de complicată ar fi ea — în timp ce metodele arătate anterior sînt mai laborioase și pot fi aplicate numai în cazuri simple. Are însă dezavantajul că mecanizează în mare măsură calculul, pierzînd oarecum legătura cu fenomenele fizice; din acest motiv se recomandă, cel puțin pentru început, să se întocmească și diagrama vectorială a rețelei, chiar dacă acest lucru nu este direct util rezolvării.

Ținînd seama de cele ce preced, întreaga teorie a rețelelor electrice de curent continuu și metodele corespunzătoare de studiu, expuse în subcapitolul 2.3 pot fi transpuse în rețelele electrice de curent alternativ dacă rezistențele, respectiv conductanțele, circuitului se înlocuiesc cu impedanțele complexe, respectiv admitanțele complexe, corespunzătoare din circuitul electric în curent alternativ, iar curenților și tensiunilor electrice alternative instantanee li se asociază fazorii respectivi.

Apar unele diferențe datorite inductanțelor mutuale, care nu există în rețelele electrice de curent continuu și care introduc în laturile respective ale rețelei anumite forțe electromotoare suplimentare.

În concluzie, în cele ce urmează se va arăta modul cum se aplică teoria rețelelor electrice stabilită pentru curentul continuu în cazul rețelelor de curent alternativ, fără a se repeta cele arătate în subcapitolul 2.3, indicîndu-se numai particularitățile corespunzătoare.



## 6.2.2. STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV CU AJUTORUL TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF ȘI A METODELOR DERIVATE DIN ACESTEA

6.2.2.1. **Datele fundamentale ale unei rețele electrice.** Să considerăm o rețea electrică formată din  $L$  elemente care leagă între ele  $N$  noduri. Între bornele sale  $A$  și  $B$  un element oarecare  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, L$ ) este constituit, în cazul cel mai general, dintr-un generator de forță electromotoare  $\underline{E}_j$ , fără impedanță interioară, legat în serie cu o impedanță  $\underline{Z}_{jj}$ , totul șuntat cu un injector de curent  $\underline{J}_j$ , fără admitanță interioară (fig. 6.11).

Valoarea acestor mărimi poate fi oarecare, chiar nulă, simultan sau nu. Două laturi oarecare  $j$  și  $k$  pot fi cuplate electromagnetic; ele au astfel impedanțe mutuale  $\underline{Z}_{jk}$  și  $\underline{Z}_{kj}$ . Dacă  $\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj}$  cuplajul este simetric; el este asimetric dacă  $\underline{Z}_{jk} \neq \underline{Z}_{kj}$  și nul dacă  $\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj} = 0$ .

Ca și în curentul continuu, o rețea este complet determinată în curent alternativ dacă se dă:

1. O schemă în care să se arate cum sînt legate între ele diversele elemente;

2. Totalitatea surselor din rețea, poziția lor în rețea, modulul și defazajul lor față de o origine de fază comună, indiferent dacă sînt surse de tensiune sau de curent;

3. Totalitatea receptoarelor din rețea, valoarea impedanțelor lor echivalente și poziția lor;

4. Totalitatea impedanțelor proprii și mutuale ale diverselor elemente de legătură dintre sursă și receptoare.

Trebuie observat, că odată aleasă, în mod arbitrar, o origine de fază, toate elementele rețelei trebuie raportate la aceasta.

Numerele topologice  $L$ ,  $N$  și  $S$  sînt de asemenea date fundamentale ale unei rețele electrice și reamintim caracterul lor arbitrar\*.

În ceea ce privește reprezentarea sensului forțelor electromotoare, tensiunilor și curenților acesta este pur convențional și pe schemele electrice de curent alternativ se adoptă aceeași convenție ca pentru curentul continuu\*\*, aceasta întrucît, utilizînd fazorii, modul de lucru este același. Trebuie observat, că în curent alternativ sensul unui curent poate fi dat atît de modulul lui cît și de argumentul pe care îl are față de originea de fază, întrucît

$$-I|\varphi = I|\pi + \varphi$$

6.2.2.2. **Metoda teoremelor lui KIRCHHOFF.** Cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF\*\*\* pot fi transcrise cu ajutorul fazorilor sub una din forme

$$\sum \underline{I}_i = \sum \underline{I}_e$$

sau

$$\sum \underline{I} = 0 \quad (6.7)$$

pentru prima teoremă și

$$\sum \underline{E} = \sum \underline{Z} \underline{I} \quad (6.8)$$

\* Vezi 2.3.1.4.

\*\* Vezi 2.3.2.1 și 2.3.2.2.

\*\*\* Vezi 2.3.4.

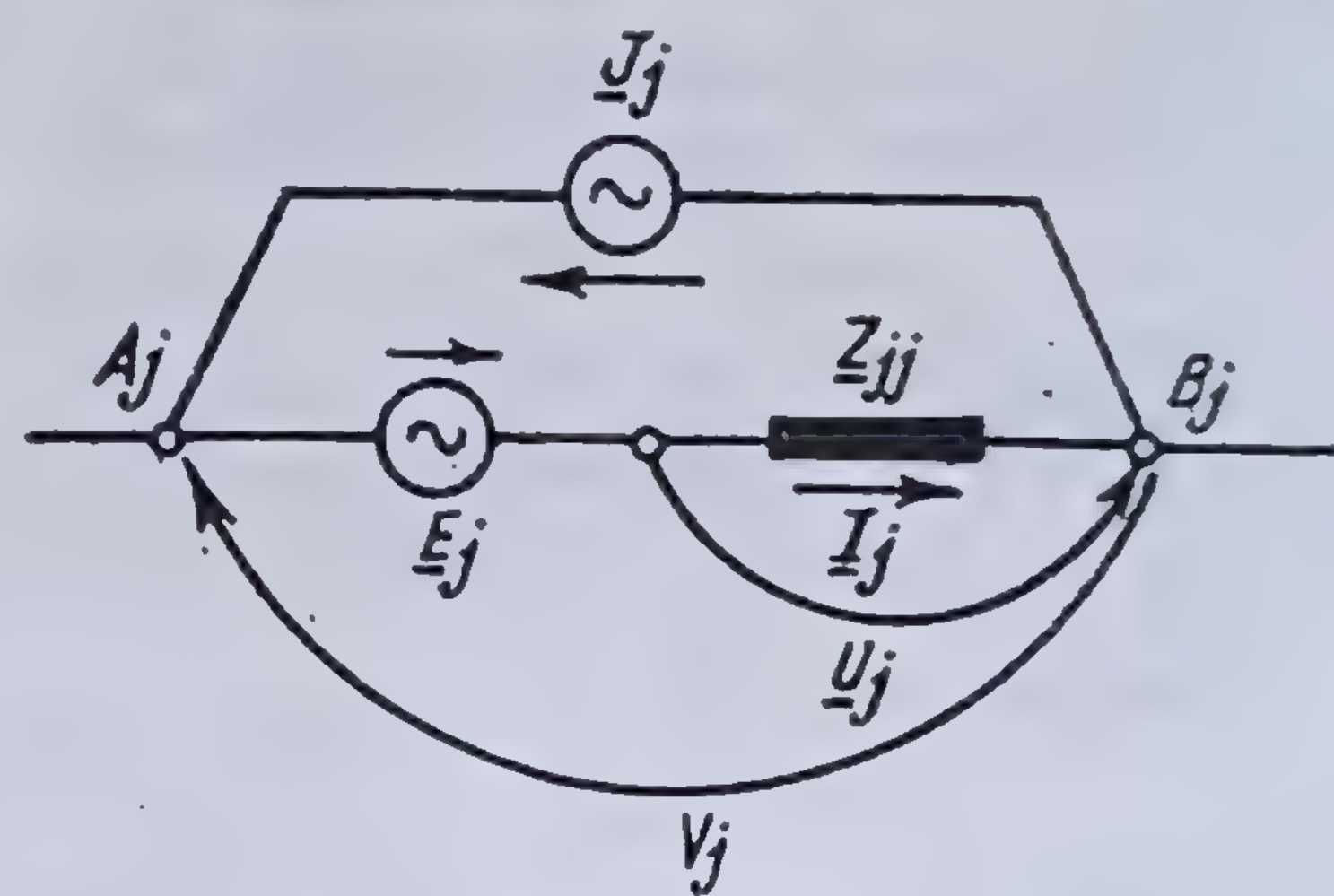


Fig. 6.11. Element general de rețea.



sau

$$\Sigma(\underline{E} - \underline{Z} \underline{I}) = \Sigma(\underline{V}_j - \underline{V}_k) = \Sigma \underline{U} = 0 \quad (6.9)$$

pentru cea de a doua teoremă.

Toate lemele stabilite pentru curenții continui sînt valabile și în cazul curenților alternativi. Trebuie observat de asemenea că relațiile (6.7) la (6.9) sînt valabile numai pentru mărimile fazoriale: ele nu sînt valabile pentru modulele acestor mărimi, ceea ce se poate arăta imediat.

Calculul unei rețele electrice constă în determinarea circulației curenților — respectiv energiei — și în determinarea căderilor de tensiune în diversele ramuri ale acesteia.

Cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF dau numărul suficient de ecuații pentru rezolvarea problemei de găsimă a curenților în diversele laturi ale rețelei și anume, prima teoremă aplicată la cele  $N$  noduri dă  $N$  ecuații de forma (6.7) din care numai  $P = N - S$  ecuații sînt distincte; a doua teoremă a lui KIRCHHOFF aplicată diverselor circuite închise ale rețelei dă  $B$  ecuații de forma (6.9), dintre care numai  $B = L - N + S$  sînt distincte. Se obțin astfel

$$P + B = L$$

ecuații distincte, cu ajutorul cărora se determină cei  $L$  curenți necunoscuți, din laturile rețelei.

Condiția necesară și suficientă ca sistemul de ecuații obținut să fie distinct este ca ecuațiile ce se scriu prin aplicarea relațiilor (6.8) să se obțină prin parcurgerea tuturor laturilor rețelei cel puțin o dată, parcurgîndu-se deci bucle fundamentale.

În cazul rețelelor în care există cuplaje inductive, trebuie să se țină seama și de forțele electromotoare induse în laturi prin inducție mutuală. Presupunînd că o latură  $k$ , parcursă de curențul  $i_k$ , este cuplată inductiv cu o latură  $l$ , parcursă de curențul  $i_l$ , inductanța mutuală fiind  $M_{kl}$ , în latura  $k$  se va induce o forță electromotoare  $e_{kl} = -M_{kl} \frac{di_l}{dt}$ , a cărei expresie complexă este

$$\underline{E}_{kl} = -j\omega M_{kl} \underline{I}_l = -jX_{kl} \underline{I}_l.$$

Termenul  $X_{kl} = \omega M_{kl}$  se numește *reactanța mutuală*, iar  $jX_{kl} = j\omega M_{kl} = \underline{Z}_{kl}$  se numește *impedanța mutuală* a laturii  $l$  față de latura  $k$ .

În consecință

$$\underline{E}_{kl} = -\underline{Z}_{kl} \underline{I}_l.$$

În cazul cînd inductanța mutuală  $M_{kl}$  este egală cu inductanța  $M_{lk}$ , indicii  $l$  și  $k$  nu mai sînt necesari  $M_{lk} = M_{kl} = M$ ,  $X_{lk} = X_{kl} = X_m$ ;  $\underline{Z}_{kl} = \underline{Z}_m = j\omega M = jX_m$ , deci forța electromotoare de inducție mutuală se scrie

$$\underline{E}_m = -jX_m \underline{I}_l = -\underline{Z}_m \underline{I}_l.$$

Forțele electromotoare de inducție mutuală  $\underline{E}_{kl}$  sau  $\underline{E}_m$  trebuie adăugate primului termen din relația (6.8). Aceste forțe electromotoare pot fi privite



ca fiind căderi de tensiune produse de curentul  $\underline{I}_l$  în latura  $k$ . Valoarea acestor căderi de tensiune este

$$\underline{U}_m = -\underline{E}_m = \underline{Z}_m \underline{I}_l.$$

Căderile de tensiune  $\underline{U}_m$  trebuie adăugate în al doilea membru din relația (6.8).

Cuplajele inductive pot fi adiționale (fluxul propriu are același sens cu fluxul indus) sau diferențiale (fluxul propriu are sens contrar cu fluxul indus).

Pentru a identifica modul în care sînt făcute cuplajele, se notează pe scheme, prin steluțe, bornele polarizate ale inductanțelor; dacă ambii curenți intră sau ies simultan prin bornele polarizate, cuplajul este adițional (fig. 6.12, a); dacă un curent intră prin borna polarizată și celălalt prin borna nepolarizată, cuplajul este diferențial (fig. 6.12, b).

Pentru stabilirea practică a semnului cu care trebuie introdusă căderea de tensiune  $\underline{U}_m$  sau  $\underline{U}_{kl}$  în membrul al doilea al ecuației (6.8) scrisă pentru circuitul care conține latura  $k$ , se ține seamă de următoarea regulă:

— în cazul cuplajului adițional, dacă sensul de parcurs coincide cu sensul curentului  $\underline{I}_k$ , căderea de tensiune  $\underline{U}_{kl} = \underline{Z}_{kl} \underline{I}_l$  se introduce cu semn pozitiv, iar dacă sensul de parcurs este contrar cu sensul lui  $\underline{I}_k$ ,  $\underline{U}_{kl}$  se introduce cu semn negativ;

— în cazul cuplajului diferențial, dacă sensul de parcurs coincide cu sensul curentului  $\underline{I}_k$ , termenul  $\underline{U}_{kl}$  se introduce cu semn negativ, iar dacă sensul de parcurs este contrar cu sensul lui  $\underline{I}_k$ , termenul  $\underline{U}_{kl}$  se introduce cu semn pozitiv.

Uneori se obișnuiește ca reactanța  $X_m = \omega M$  să fie considerată cu valoarea numerică pozitivă în cazul cuplajului adițional și cu valoare numerică negativă în cazul cuplajului diferențial. În acest caz se aplică numai regula dată pentru cuplajul adițional. În cele ce urmează s-a adoptat această convenție.

Să examinăm acum cazurile generale care pot apărea în rețelele electrice și care se pot rezolva cu ajutorul teoremelor lui KIRCHHOFF folosind fazorii.

a) *Circuite serie fără cuplaje inductive.* Fie impedanțele  $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), legate în serie și alimentate cu tensiunea  $\underline{U}$ . Aplicînd relația (6.8) se obține

$$\underline{U} = \sum_i \underline{Z}_i \underline{I} = \underline{I} \sum_i \underline{Z}_i = \underline{Z} \underline{I}$$

unde

$$\underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i \quad (6.10)$$

este impedanța echivalentă a circuitului, relație analoagă cu (2.3.4.5). Scriînd relația (6.10) dezvoltat se obține

$$\sum_i \underline{Z}_i = \sum_i R_i + j \sum_i X_i = R + jX,$$

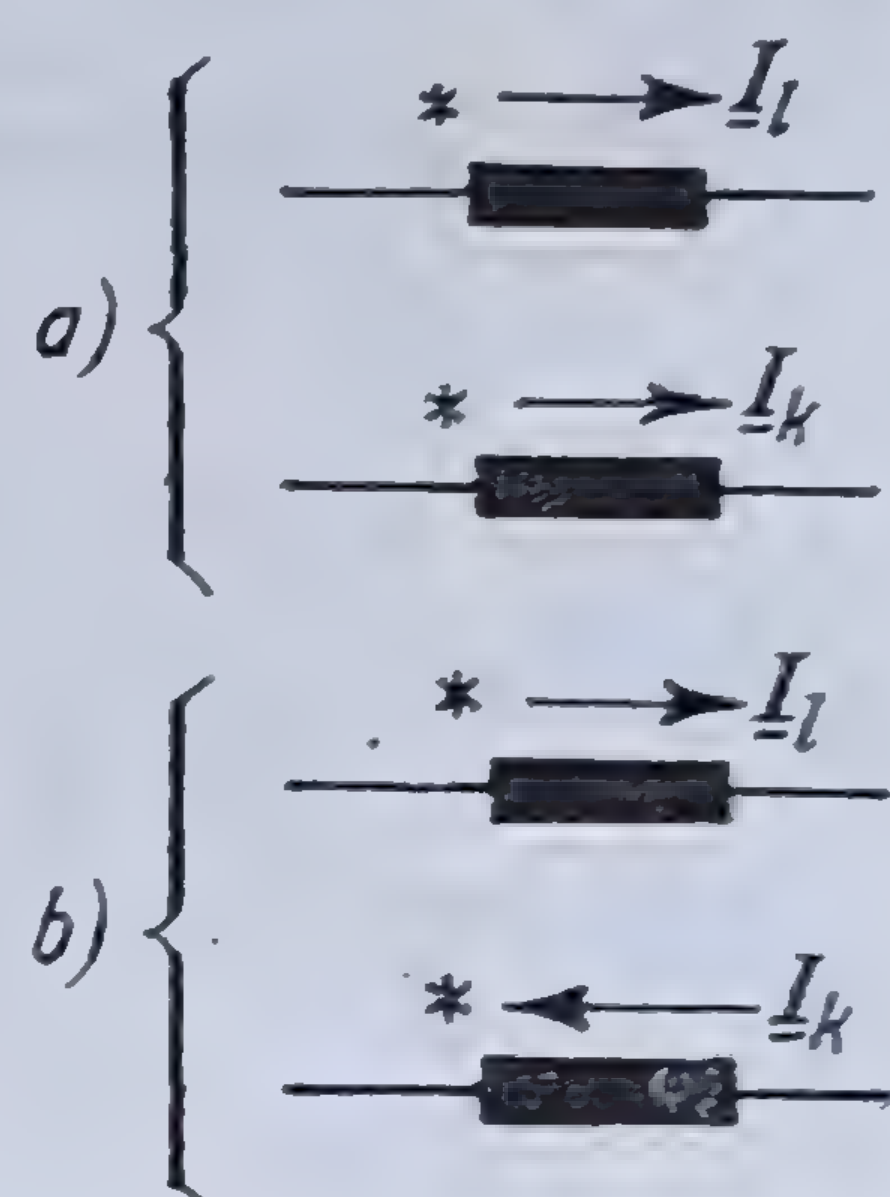


Fig. 6.12. Cuplarea inductanțelor.

a) adițională; b) diferențială



unde  $R$  și  $X$  sînt rezistența și reactanța echivalentă a circuitului ; modulul impedanței rezultante este

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(\sum_i R_i)^2 + (\sum_i X_i)^2}$$

și argumentul său

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_i X_i}{\sum_i R_i},$$

rezultate găsite și pe altă cale\*.

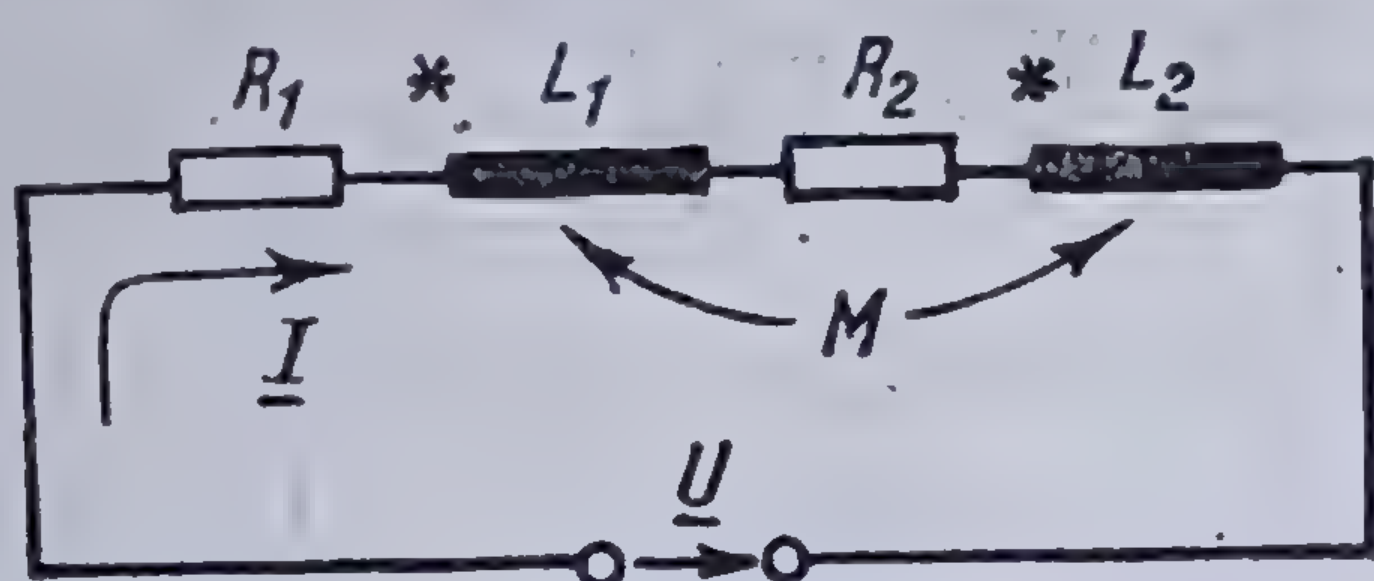


Fig. 6.13. Circuit cu impedanțe serie cuplate inductiv.

b) *Circuit cu impedanțe serie, cuplate inductiv.* Fie un circuit serie format din impedanțele  $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$ , inductanțele  $L_1$  și  $L_2$  fiind cuplate prin inductanța mutuală  $M$  (fig. 6.13) căreia îi corespunde o impedanță mutuală  $\underline{Z}_m = j\omega M$ . Pentru curentul  $\underline{I}$  se ia același sens pozitiv ca și pentru tensiunea aplicată  $\underline{U}$ . Teorema a doua a lui Kirchhoff dă

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$

în care :  $\underline{U}_1 = \underline{I}\underline{Z}_1 + \underline{I}\cdot\underline{Z}_m = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_m)$  este căderea de tensiune în prima impedanță ; căderea de tensiune  $\underline{I}\underline{Z}_1$  este produsă de curentul  $\underline{I}$  în rezistența  $R_1$  și inductanța  $L_1$ , iar căderea de tensiune  $\underline{I}\underline{Z}_m$  este produsă tot de curentul  $\underline{I}$  și tot în inductanța  $L_1$ , dar prin inducție mutuală între  $L_2$  și  $L_1$ , în mod analog

$$\underline{U}_2 = \underline{I}\underline{Z}_2 + \underline{I}\underline{Z}_m = \underline{I}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_m)$$

este căderea de tensiune în a doua impedanță.

Cu acestea ecuația circuitului devine

$$\underline{U} = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_m) + \underline{I}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_m) = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_m),$$

asa încît

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

unde

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_m$$

este impedanța echivalentă a circuitului.

c) *Circuit cu impedanțe derivație necuplate inductiv.* Fie impedanțele  $\underline{Z}_i = R_i + jX_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), legate în paralel și alimentate de la o sursă de tensiune  $\underline{U}$ . Curentul din diversele admitanțe este dat de relația

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_i},$$

\* Vezi 6.1.3.1.



curentul total absorbit de întreg circuitul fiind

$$\underline{I} = \sum_i \underline{I}_i = \underline{U} \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{Y} \underline{U} \quad (6.11)$$

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}$  fiind inversul impedanței echivalente sau a admitanței echivalente a circuitului.

Dacă în relația (6.11) se scrie

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i},$$

se deduce imediat

$$\underline{Y} = \sum_i \underline{Y}_i = \sum_i (G_i - jB_i)$$

și deci conductanța echivalentă  $G$  și susceptanța echivalentă  $B$  a circuitului format din impedanțe legate în paralel sînt

$$G = \sum_i G_i \text{ și } B = \sum_i B_i,$$

astfel că modulul admitanței este

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{\left(\sum_i G_i\right)^2 + \left(\sum_i B_i\right)^2}$$

rezultat găsit și pe altă cale\*.

d) *Rețea cu circuite derivate cuplate inductiv.* Fie rețeaua formată din impedanțele  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$  legate în paralel și cuplate inductiv între ele\*\* (fig. 6.14).

Curenții în cele două circuite sînt  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  iar curentul total este  $\underline{I}$ .

Pentru primul circuit, teorema a doua a lui KIRCHHOFF se scrie sub forma

$$\underline{U} = \underline{U}_{R1} + \underline{U}'_{L1} + \underline{U}_{12}, \quad (6.12)$$

iar pentru al doilea circuit sub forma

$$\underline{U} = \underline{U}_{R2} + \underline{U}'_{L2} + \underline{U}_{21}, \quad (6.13)$$

în care :

Fazorul  $\underline{U}_{R1} = R_1 \underline{I}_1$ , în fază cu  $\underline{I}_1$ , este cădere de tensiune produsă în primul circuit de curentul  $\underline{I}_1$  prin rezistența  $R_1$ .

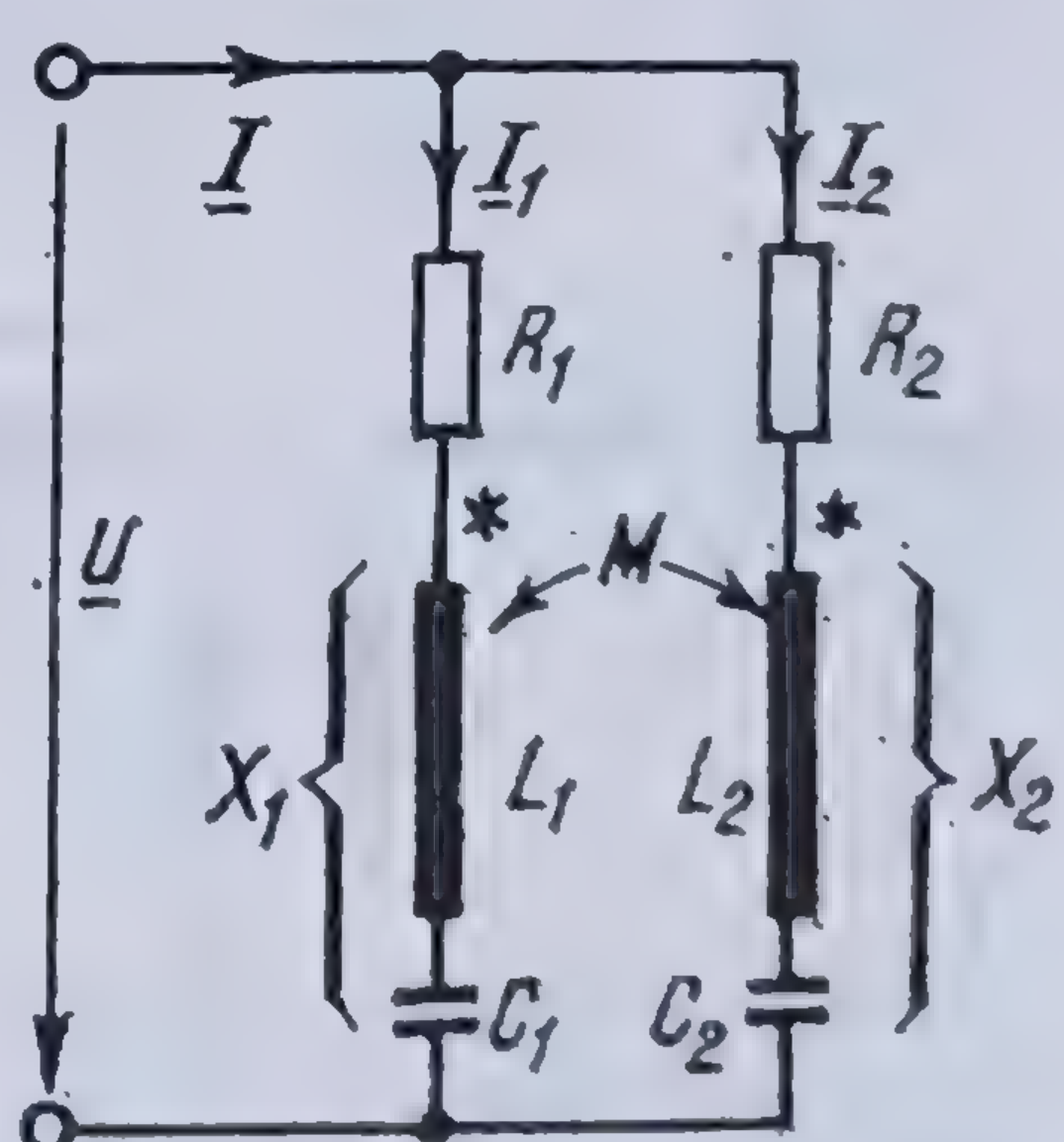


Fig. 6.14. Circuit cu impedanțe derivate cuplate inductiv.

\* Vezi 6.1.3.2.

\*\* Problema se rezolvă analog și în cazul a  $n$  impedanțe legate în paralel și cuplate inductiv între ele.



Fazorul  $\underline{U}'_{L1} = jX_1 \underline{I}_1$ , defazat cu  $\pi/2$  înainte față de  $\underline{I}_1$ , este căderea de tensiune produsă în primul circuit de curentul  $\underline{I}_1$  prin reactanța  $X_1$ .

Fazorul  $\underline{U}_{12} = jX_m \underline{I}_2 = \underline{Z}_m \underline{I}_2$ , defazat cu  $\pi/2$  înainte față de  $\underline{I}_2$ , este cădere de tensiune tot în primul circuit, dar produsă de curentul  $\underline{I}_2$  din al doilea circuit, prin efectul inducției mutuale.

Fazorii  $\underline{U}_{R2} = R_2 \underline{I}_2$ ,  $\underline{U}'_{L2} = jX_2 \underline{I}_2$ ,  $\underline{U}_{21} = jX_m \underline{I}_1 = \underline{Z}_m \underline{I}_1$  au semnificații asemănătoare.

Cu acestea relațiile (6.12) și (6.13) devin

$$\underline{U} = \underline{U}'_1 + \underline{U}_{12} \quad \text{și} \quad \underline{U} = \underline{U}'_2 + \underline{U}_{21}$$

sau

$$\underline{U} = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \underline{Z}_m,$$

$$\underline{U} = \underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_1 \underline{Z}_m,$$

din care se obțin curenții  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  din cele două laturi și curentul total  $\underline{I}$ . Vom avea deci:

$$\underline{I}_1 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}; \quad \underline{I}_2 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2};$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{U} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}. \quad (6.14)$$

Din relația (6.14) se poate deduce impedanța echivalentă a rețelei

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_m}.$$

e) *Circuite cuplate pur inductiv.* Prin circuite cuplate pur inductiv se înțeleg circuite cuplate exclusiv inductiv, deci fără cuplaje galvanice (prin conductoare), un exemplu fiind arătat în figura 6.15. Primul circuit, alimentat cu tensiunea  $\underline{U}_1$ , are rezistența  $R_1$  și reactanțele  $X'_1$  și  $X''_1$ ,  $X_1 = X'_1 + X''_1$ ; al doilea circuit este alimentat cu tensiunea  $\underline{U}_2$ , are rezistența  $R_2$  și reactanțele  $X'_2$  și  $X''_2$ ,  $X_2 = X'_2 + X''_2$ ; cele două circuite sînt cuplate inductiv prin intermediul reactanțelor  $X''_1$  și  $X''_2$ , reactanța mutuală fiind  $X_m$ .

Aplicînd cea de a doua teoremă a lui Kirchhoff, celor două circuite se obține:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 R_1 + jX'_1 \underline{I}_1 + jX''_1 \underline{I}_1 + jX_m \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 R_2 + jX'_2 \underline{I}_2 + jX''_2 \underline{I}_2 + jX_m \underline{I}_1$$

sau

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_m \underline{I}_1 \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Fig. 6.15. Rețea cu circuite pur inductive



în care

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(X'_1 + X''_2) = R_1 + j X_1.$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j(X'_2 + X''_1) = R_2 + j X_2,$$

$$\underline{Z}_m = j X_m.$$

Curenții  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$  se deduc prin rezolvarea sistemului (6.15).

Transformatoarele electrice funcționează după schema din figura 6.15; în acest caz rezistența  $R_1$  reprezintă rezistența primului circuit (bobinajul primar); reactanța  $X'_1$  reprezintă reactanța de dispersiuni a bobinajului primar, iar reactanța  $X''_1$  reprezintă reactanța corespunzătoare fluxului comun (reactanța utilă) a bobinajului primar; rezistența  $R_2$  reprezintă rezistența celui de al doilea circuit (bobinajul secundar), iar reactanțele  $X'_2$  și  $X''_2$  reprezintă reactanța de dispersiuni a bobinajului secundar și reactanța sa utilă. Tensiunea  $\underline{U}_2$  se înlocuiește cu tensiunea produsă la bornele transformatorului. Dacă se cunoaște impedanța receptorului,  $\underline{Z}_r = R_r + j X_r$ , alimentată de secundarul transformatorului, ținând seama că  $\underline{U}_2$  este o cădere de tensiune și nu o tensiune aplicată circuitului din exterior, rezultă că între tensiunea  $\underline{U}_2$ , impedanța  $\underline{Z}_r$  și curentul  $\underline{I}_2$  există relația

$$\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 \underline{Z}_r.$$

Cu aceasta sistemul (6.15) devine

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2$$

$$0 = \underline{Z}_m \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r) \underline{I}_2$$

și rezultă

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r}{\underline{Z}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r) - \underline{Z}_m^2}, \quad \underline{I}_2 = -\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_m}{\underline{Z}_1 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_r) - \underline{Z}_m^2}.$$

În funcție de inductanțele de dispersiuni  $L'_1$  și  $L'_2$ , reactanțele de dispersiuni se calculează cu relațiile

$$X'_1 = \omega L'_1 \text{ și } X'_2 = \omega L'_2.$$

**6.2.2.3. Metoda superpoziției.** În cazul rețelelor electrice de curent alternativ liniare (în care impedanțele sînt liniare), metoda superpoziției se aplică în același mod ca și în curentul continuu\*, diversele mărimi intervenind în calcul fiind reprezentate prin fazorii respectivi, iar impedanțele rețelei prin mărimile complexe corespunzătoare. Tehnica de aplicare a metodei este deci următoarea: dacă rețeaua conține  $m$  surse, curentul într-o latură oarecare se determină adunîndu-se curenții produși în acea latură de fiecare sursă în parte, celelalte  $m-1$  surse fiind pasivizate.

---

\* Vezi 2.3.5.



Metoda superpoziției nu poate fi aplicată decât circuitelor a căror configurație este invariabilă. În caz contrariu, principiul superpoziției nu mai poate fi aplicat direct, ci este necesar a se face anumite artificii. Astfel, în cazul unui dipol activ, dacă se scurtecircuitează cele două borne libere ale sale,  $A$  și  $B$  (fig. 6.16) prin scurtecircuitul respectiv va circula un curent  $I$  care nu poate fi determinat direct prin metoda superpoziției. Curentul respectiv se poate determina cu ajutorul teoremei lui THÉVENIN\* în care se face  $Z = 0$ .

Dealtfel însăși teorema lui THÉVENIN a fost stabilită aplicând principiul superpoziției în rețelele electrice.

De asemenea, în cazul când se caută tensiunea care apare la bornele unui întreruptor care deschide un circuit al unui dipol activ, aceasta se determină

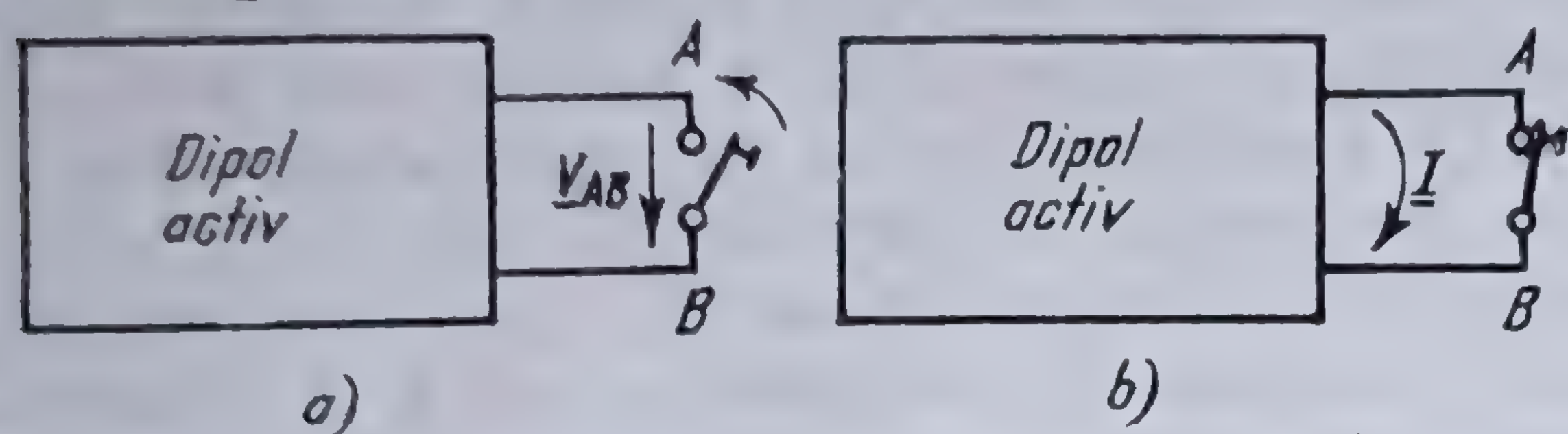


Fig. 6.16. Scurtcircuitarea bornelor unui dipol activ.

utilizând teorema lui NORTON\*\*, în care se face  $Y = 0$ ; teorema lui NORTON a fost dedusă de asemenea utilizând principiul superpoziției.

#### 6.2.2.4. Metoda buclelor.

Prin utilizarea fazorilor și utilizarea impedanțelor complexe,

utilizarea metodei buclelor este aceeași ca și în curent continuu\*\*\*. Tehnica aplicării metodei buclelor este următoarea:

— Se descompune rețeaua dată într-un număr  $B$  de circuite independente, arbitrar alese,  $B$  fiind numărul topologic dat de relația (2.70).

— Se presupune că, în fiecare din aceste circuite, circulă un curent  $\underline{J}$ , avînd un sens de circulație fixat de asemenea arbitrar.

— Pentru fiecare circuit în parte se scrie a doua teoremă a lui KIRCHHOFF, observînd că în circuitul respectiv produc căderi de tensiune și curenții din circuitele vecine care au impedanțe comune. Se va obține astfel un sistem de  $B$  ecuații liniare de forma

$$\underline{Z}_{n1} \underline{J}_1 + \underline{Z}_{n2} \underline{J}_2 + \dots + \underline{Z}_{nn} \underline{J}_n = \underline{E}_n \quad (n = 1, 2, \dots, B). \quad (6.16)$$

În care  $\underline{Z}_{nn}$  reprezintă impedanțele totale ale circuitelor independente,  $\underline{Z}_{pq} = \underline{Z}_{qp}$  reprezintă impedanțele comune circuitelor independente  $p$  și  $q$ , iar  $\underline{J}_n$  curentul ciclic independent din circuitul  $n$ .

— Se rezolvă sistemul de ecuații (6.16) astfel obținut, determinîndu-se curenții  $\underline{J}_1, \underline{J}_2, \dots, \underline{J}_n$ .

Curenții reali din laturile rețelei se obțin făcînd suma algebrică a curenților ciclici din circuitele independente, care conțin latura respectivă

$$\underline{I}_j = \sum C_{jk} \underline{J}_k, \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, L \\ k = 1, 2, \dots, B \end{cases} \quad (6.17)$$

în care coeficienții  $C_{jk}$  putînd avea una din valorile  $0, \pm 1$ , care depinde de sensul arbitrar ales pentru circulația curenților din laturi, respectiv din bucle, valoarea zero apare acolo unde latura respectivă nu este străbătută de curentul unei anumite bucle.

\* Vezi 2.3.7.4; 6.2.3.4 și 6.2.3.5.

\*\* Vezi 2.3.7.5.

\*\*\* Vezi 2.3.6.



6.2.2.5. **Metoda perechilor de noduri.** Analog cu metoda buclelor se utilizează și metoda perechilor de noduri\*. Tehnica de aplicare a metodei perechilor de noduri este următoarea :

— Se alege în rețeaua dată un număr de  $P$  perechi de noduri independente, arbitrare alese,  $P$  fiind numărul topologic dat de relația (2.71).

— Se presupune că, la fiecare din aceste perechi de noduri există o diferență de potențial  $\underline{E}$ , avînd un anumit sens de polaritate, de asemenea arbitrar ales.

Pentru fiecare nod în parte se scrie teorema I a lui KIRCHHOFF. Se va obține astfel un sistem de  $P$  ecuații liniare de forma

$$\underline{Y}_{N1} \underline{V}_1 + \underline{Y}_{N2} \underline{V}_2 + \dots + \underline{Y}_{Nn} \underline{V}_n = \Sigma \underline{J}_n \quad (N = 1, 2, \dots, P) \quad (6.18)$$

în care  $\underline{Y}_{Nn}$  reprezintă admitanța laturilor care converg în nodul  $N$ ,  $\underline{Y}_{Nn}$  reprezintă admitanța laturii care unește perechea de noduri  $N_n$ , iar  $\underline{V}_n$ , tensiunea independentă de la bornele acestei perechi de noduri. În ecuațiile (6.18)

$$\underline{J}_n = \sum_{j=1}^n \underline{Y}_{Nj} \underline{E}_{Nj}$$

este suma curenților injectați în nodul  $n$ ,  $\underline{E}_{Nj}$  fiind forțele electromotoare respective. De asemenea  $\underline{J}_n$  poate reprezenta suma curenților injectați în nod din exterior. Curenții  $\underline{J}_n$  pot fi pozitivi (curenți injectați în noduri de la sursele exterioare) sau negativi (curenți ejectați din noduri alimentînd receptoarele exterioare rețelei).

— Se rezolvă ecuațiile (6.18) astfel obținut determinîndu-se potențialele  $\underline{V}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, P$ ), potențiale raportate toate la același potențial de referință.

— Se determină potențialele celorlalte noduri în raport cu acestea.

— Curenții din laturile rețelei se determină apoi aplicînd legea lui OHM fiecărui element în parte.

Pentru a se putea aplica această metodă, este necesar să se transforme, în prealabil, sursele de tensiune în surse de curent, precum și să se găsească echivalentul inductanțelor și inductanței mutuale în cazul circuitelor cuplate magnetic.

Transformarea surselor de tensiune în surse de curent, în cazul surselor de curent alternativ, se face cu ajutorul teoremei lui NORTON.

Alegerea între metoda circuitelor independente sau a perechilor de noduri pentru studiul circuitelor electrice depinde de numărul necunoscutelor ce sînt de determinat.

Astfel, dacă  $B < P$ , este mai avantajoasă se utilizează metoda buclelor, iar dacă  $B > P$ , este mai avantajos să se utilizeze metoda perechilor de noduri. În aceste condiții, numărul necunoscutelor ce urmează a fi determinat este cel mult  $\frac{1}{2} L$ .

\* Vezi 2.3.8.



### 6.2.3. TEOREME ASUPRA REȚELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV COMPLEXE SERVIND LA STUDIUL ACESTORA

**6.2.3.1. Generalități.** La studiul rețelilor electrice de curent continuu au fost enunțate și demonstrate o serie de teoreme\* cu ajutorul cărora se poate simplifica într-o oarecare măsură studiul rețelilor electrice. Prin utilizarea fazorilor aceste teoreme pot fi transpuse și pentru rețelele electrice de curent alternativ fiind necesare pentru aceasta anumite precizări suplimentare care vor fi arătate în paragrafele următoare. Teoremele respective vor fi numai enunțate, demonstrația lor făcându-se în același mod ca și în cazul rețelilor de curent continuu.

**6.2.3.2. Teorema lui VASCHY.** Într-o rețea buclată, pe toate ramurile pornind dintr-un același nod  $A$  se pot adăuga forțe electromotoare  $\underline{E}_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ),  $n$  fiind numărul de laturi adiacente nodului, egale între ele ca modul și fază, având toate același sens față de nod, fără ca prin aceasta să se schimbe circulația de curenți existentă anterior în rețea.

**6.2.3.3. Teorema reciprocității a lui MAXWELL.** Dacă o forță electromotoare  $\underline{E}$ , montată în latura  $AB$  a unei rețele pasive, produce în latura  $CD$  a aceleiași rețele un curent  $\underline{I}$ , montarea forței electromotoare  $\underline{E}$  în latura  $CD$  va produce același curent  $\underline{I}$  în latura  $AB$ .

Această teoremă are următoarea consecință: dacă între două noduri oarecare  $M$  și  $N$  ale unei rețele buclate se conectează o sursă de forță electromotoare  $\underline{U}$  care va face să circule în rețea un curent suplimentar  $\underline{I}$  a cărui efect este de a produce între alte două noduri oarecare  $P$  și  $Q$  o diferență de potențial suplimentară  $\Delta \underline{V}$ , reciproc, injectarea unui curent suplimentar  $\underline{I}$  între nodurile  $P$  și  $Q$  va produce între nodurile  $M$  și  $N$  o creștere de potențial  $\Delta \underline{V}$ .

Notînd perechea de borne  $A, B$  cu indicele 1 și bornele  $C, D$  cu indicele 2, teorema lui MAXWELL se poate scrie sub forma

$$\frac{\underline{E}_1}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} \text{ sau } \frac{\underline{I}_1}{\underline{E}_2} = \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21},$$

unde  $\underline{Z}_{12}$  este, prin definiție, *impedanța de transfer* între perechile de borne 1 și 2 iar  $\underline{Y}_{12}$  este admitanța de transfer între cele două perechi de borne.

**6.2.3.4. Teorema lui THÉVENIN.** Dacă două borne libere  $A$  și  $B$  ale unei rețele active — sau dipol activ — între care există o diferență de potențial  $\underline{U}_{AB}$  sînt legate printr-un element pasiv de impedanță  $\underline{Z}$ , acest element va fi străbătut de curentul

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}}, \quad (6.19)$$

în care  $\underline{Z}_{AB}$  este impedanța echivalentă a rețelei dată văzută prin bornele  $A$  și  $B$  înainte de introducerea elementului pasiv de impedanță  $\underline{Z}$ , rețeaua dată fiind pasivizată (toate sursele sale scurtcircuitate).

\* Vezi 2.3.7.



Reciproca teoremei lui THÉVENIN se poate enunța după cum urmează : Fiind o dată rețea activă dacă se deschide o latură oarecare  $AB$  de impedanță  $Z$  și străbătută înainte de deschidere de curentul  $I$ , la bornele  $A$  și  $B$  a laturii deschise apare tensiunea

$$\underline{U}_{AB} = (\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}) \underline{I}, \quad (6.20)$$

$\underline{Z}_{AB}$  fiind impedanța echivalentă a rețelei date, pasivizată, văzută prin bornele  $A$  și  $B$ .

Ca o consecință a teoremei lui THÉVENIN se poate enunța următoarea teoremă :

O rețea electrică activă, avînd două borne terminale  $A$  și  $B$  poate fi înlocuită printr-un circuit electric echivalent format dintr-o sursă ideală\* de forță electromotoare  $\underline{E}'$  în serie cu o impedanță  $\underline{Z}'$ . Valoarea forței electromotoare  $\underline{E}'$  este egală cu tensiunea  $\underline{U}_{AB}$  existentă la bornele  $A$  și  $B$  în gol, iar impedanța  $\underline{Z}'$  este impedanța rețelei dată, pasivizată, văzută prin bornele libere  $A$  și  $B$ .

**6.2.3.5. Teorema lui NORTON.** Dacă la două borne  $A$  și  $B$  ale unei rețele electrice active se leagă o admitanță  $\underline{Y}$ , tensiunea la bornele acestei admitanțe este dată de relația

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB \text{ sc}}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}} \quad (6.21)$$

în care  $\underline{I}_{AB \text{ sc}}$  este curentul de scurtcircuit al rețelei între bornele  $A$  și  $B$ , acestea fiind legate în scurtcircuit ( $\underline{Y} = \infty$ ) iar  $\underline{Y}_{AB}$  este admitanța echivalentă a rețelei electrice dată, pasivizată, văzută prin bornele  $A$  și  $B$ , la funcționarea în gol a rețelei ( $\underline{Y} = 0$ ).

Din teorema lui NORTON rezultă următoarea consecință : între două noduri oarecare  $A$  și  $B$  a unei rețele electrice active, o sursă de tensiune, de forță electromotoare  $\underline{E}$  și fără impedanță interioară, dar legată în serie cu o impedanță  $\underline{Z}$ , poate fi înlocuită cu o sursă de curent, de intensitate  $\underline{I}$  fără admitanță interioară, șuntată cu admitanța  $\underline{Y}$  fără ca parametrii electrici la bornele  $A$  și  $B$  — tensiunea la borne  $\underline{U}_b$  și curentul  $\underline{I}_b$  debitat prin aceste borne — să se schimbe, între mărimile caracteristice ale celor două surse existînd relațiile

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{E} \quad \text{și} \quad \underline{Y} \underline{Z} = 1$$

În ceea ce privește echivalentul inductanțelor și inductanței mutuale inversate în cazul circuitelor cuplate magnetic, acestea se determină aplicînd cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitului respectiv, determinîndu-se valorile curenților  $\underline{I}_1$  și  $\underline{I}_2$ .

Fie un asemenea circuit făcînd parte dintr-o rețea electrică oarecare din care este indicat numai nodul de referință (Fig. 6.17). Se presupune că acest circuit nu mai are nici un alt cuplaj magnetic cu vreun alt element al rețelei. Fie  $\underline{V}_1$ ,  $\underline{V}_2$ ,  $\underline{V}_3$  și  $\underline{V}_4$  potențialele la cele patru noduri ale elementelor date și  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  curenții care le străbat. Ecuațiile de funcționare ale acestui circuit sînt

$$j \omega L_1 \underline{I}_1 + j \omega M \underline{I}_2 = \underline{V}_1 - \underline{V}_2,$$

$$j \omega M \underline{I}_1 + j \omega L_2 \underline{I}_2 = \underline{V}_3 - \underline{V}_4.$$

\* Vezi 2.3.7.6.



Eliminând pe  $\underline{I}_2$  se obține

$$j \omega (L_1 L_2 - M^2) \underline{I}_1 = L_2 (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) - M (\underline{V}_3 - \underline{V}_4).$$

Eliminând acum pe  $\underline{I}_1$  se obține

$$j \omega (L_1 L_2 - M^2) \underline{I}_2 = -M (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) - L_1 (\underline{V}_3 - \underline{V}_4).$$

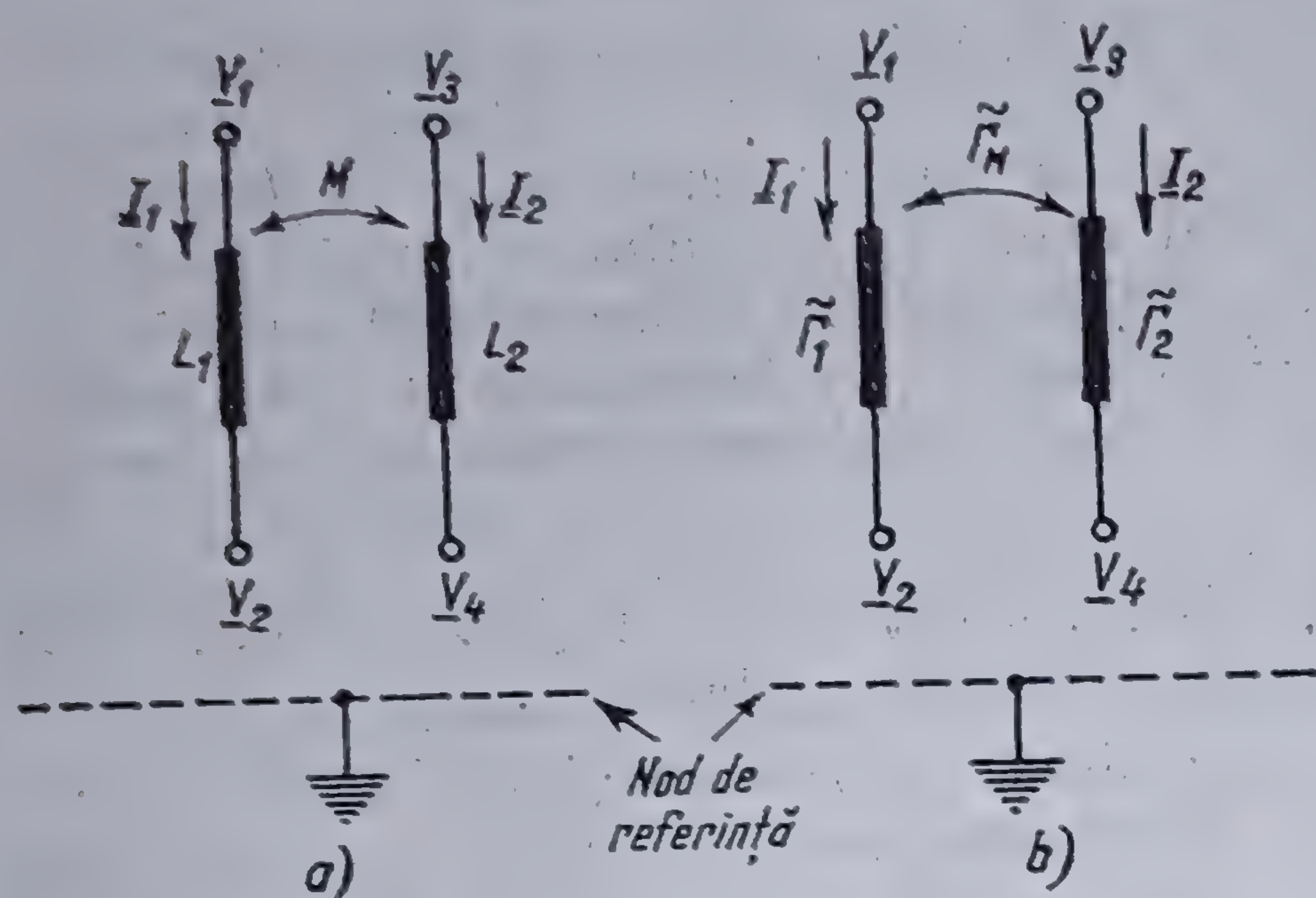


Fig. 6.17. Circuite electrice cuplate magnetic.

a) forma folosită pentru calculul lui  $\underline{Z}$ ; b) forma folosită pentru calculul lui  $\underline{Y} = \underline{Z}^{-1}$

Din aceste relații rezultă imediat

$$\underline{I}_1 = -j \frac{\tilde{\Gamma}_1}{\omega} (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + j \frac{\tilde{\Gamma}_M}{\omega} (\underline{V}_3 - \underline{V}_4)$$

$$\underline{I}_2 = j \frac{\tilde{\Gamma}_M}{\omega} (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) - j \frac{\tilde{\Gamma}_2}{\omega} (\underline{V}_3 - \underline{V}_4),$$

în care s-a notat \*

$$\tilde{\Gamma}_1 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \tilde{\Gamma}_2 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \tilde{\Gamma}_M = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2},$$

care sînt inversele echivalente ale inductanțelor proprii și mutuale ale circuitului dat.

**6.2.3.6. Transfigurarea rețelelor electrice.** Transfigurarea unei rețele electrice consistă în transformarea configurației ei într-una adecuată unor calcule mai ușoare ce se efectuează pentru rezolvarea ei.

Condițiile pe care trebuie să le îndeplinească rețeaua electrică, sau numai elementul de rețea, ce urmează a fi transfigurat și care au fost enunțate în cazul rețelelor electrice de curent continuu rămîn valabile și în cazul rețelelor electrice de curent alternativ\*\*. Pentru utilizare, relațiile stabilite urmează a fi transcrise cu ajutorul fazorilor, demonstrațiile reproducîndu-se întocmai.

\* Semnul  $\sim$  a fost pus pentru a arăta că aceste inverse nu sînt inversele mărimilor simple  $L_1$ ,  $L_2$  sau  $M$ .

\*\* Vezi 2,3,9.



a) *Transfigurarea circuitelor serie și paralel.* Un circuit format dintr-un număr de impedanțe legate în serie poate fi înlocuit printr-o impedanță echivalentă definită de relația

$$\underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i.$$

Un circuit format dintr-un număr de impedanțe legate în paralel poate fi înlocuit printr-o impedanță echivalentă definită de relația

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i},$$

sau exprimată prin admitanțele corespunzătoare,

$$\underline{Y} = \sum_i \underline{Y}_i.$$

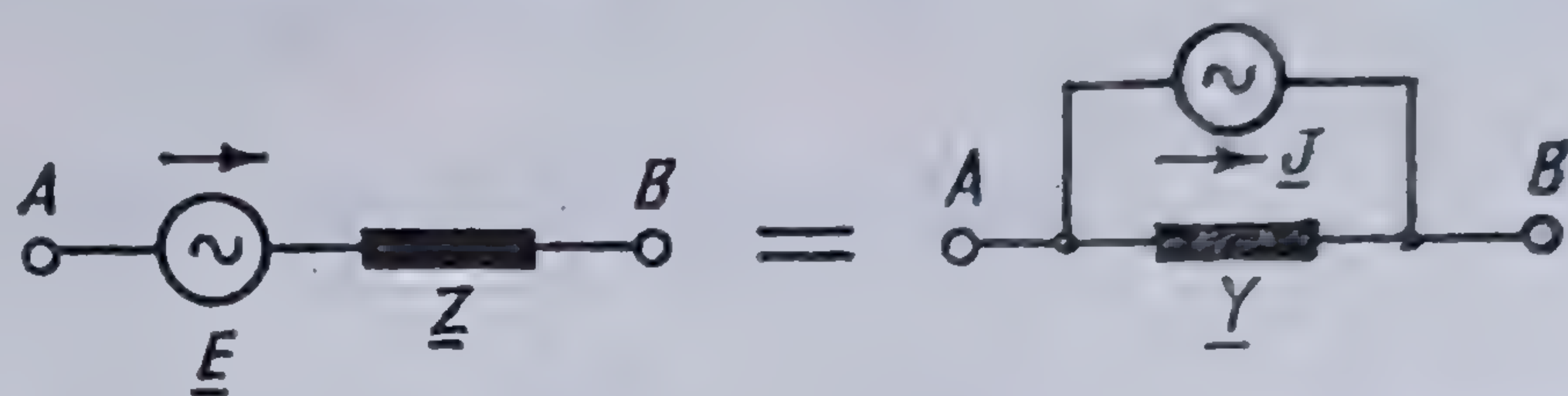


Fig. 6.18. Surse de tensiune și de curent echivalente.

b) *Sursele de tensiune și de curent echivalente.* O sursă de tensiune, de forță electromotoare  $\underline{E}$  și de impedanță interioară  $\underline{Z}$  poate fi înlocuită printr-o sursă de curent, de intensitate  $\underline{J}$  și de admitanță interioară  $\underline{Y}$  (fig. 6.18) dacă sînt îndeplinite condițiile

$$\underline{Y} \underline{Z} = 1 \text{ și } \underline{J} = \underline{Y} \underline{E}.$$

Reciproc, o sursă de curent,  $\underline{J}$ ,  $\underline{Y}$ , poate fi înlocuită cu o sursă de tensiune,  $\underline{E}$ ,  $\underline{Z}$ , dacă

$$\underline{Z} \underline{Y} = 1 \text{ și } \underline{E} = \underline{Z} \underline{J}.$$

c) *Sursa echivalentă a mai multor surse în paralel (Teorema lui MILLMAN).* Un număr de surse reale de tensiune legate în paralel poate fi înlocuit printr-o sursă de tensiune echivalentă avînd impedanța interioară

$$\underline{Z} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\underline{Z}_i}}$$

și tensiunea la borne

$$\underline{U} = \underline{Z} \sum_i \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_i}$$

Sursa echivalentă de tensiune poate fi înlocuită eventual printr-o sursă de curent prin utilizarea transformării b).

d) *Transfigurarea circuitelor stea-triunghi (Teorema lui KENNELLY).* Orice circuit în triunghi poate fi transfigurat într-un circuit în stea și reciproc. Valo-



rele impedanțelor, respectiv admitanțelor corespunzătoare sînt date de relațiile (fig. 6.19):

Transfigurarea din triunghi în stea:

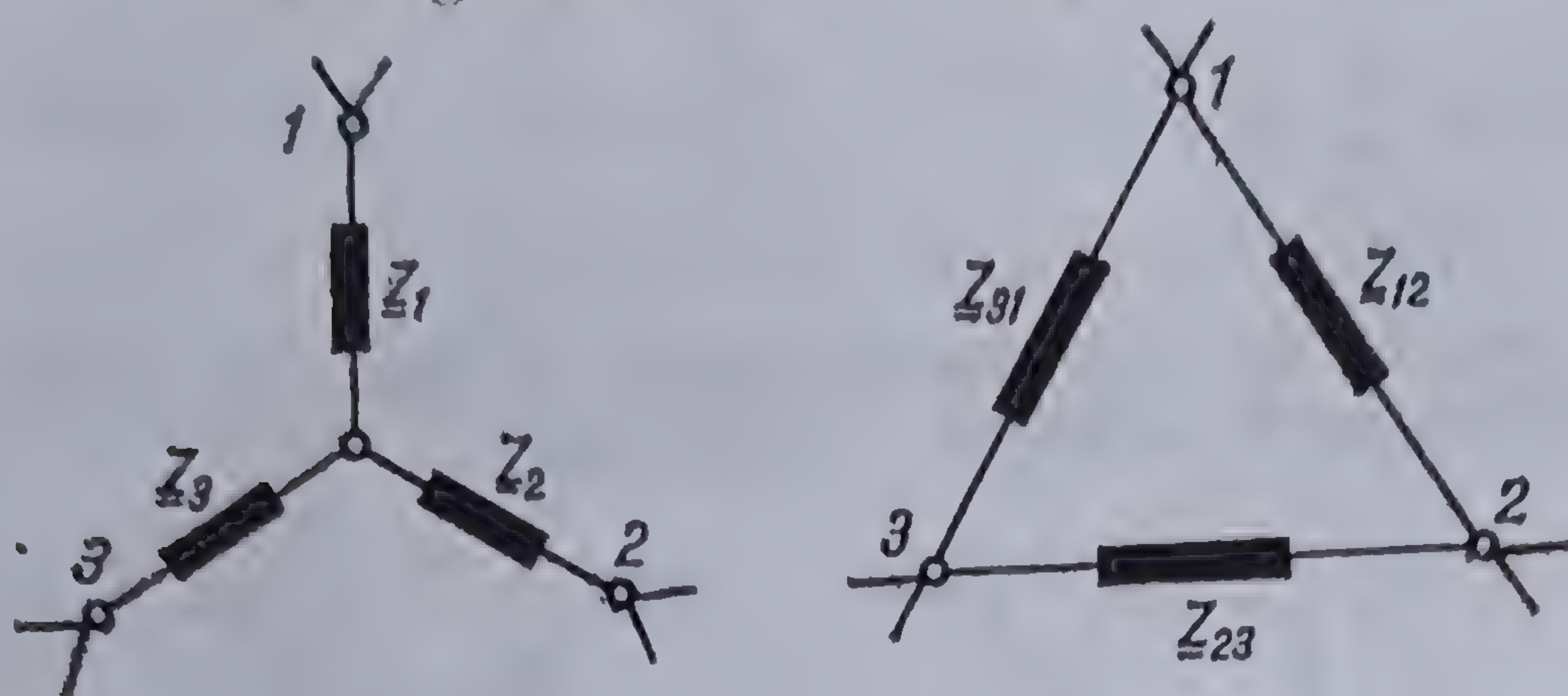


Fig. 6.19. Circuite stea și triunghi.

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Y}_1 = \underline{Y}_{12} + \underline{Y}_{31} + \frac{\underline{Y}_{12} \underline{Y}_{31}}{\underline{Y}_{23}},$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23} \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Y}_2 = \underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{12} + \frac{\underline{Y}_{23} \underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{31}},$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31} \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}, \quad \underline{Y}_3 = \underline{Y}_{31} + \underline{Y}_{23} + \frac{\underline{Y}_{31} \underline{Y}_{23}}{\underline{Y}_{12}},$$

Transfigurarea din stea în triunghi:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}, \quad \underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}, \quad \underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

e. ul general al unei stele cu  $n$  laturi într-un poligon complet cu  $n$  noduri. Impedanța  $\underline{Z}_{ik}$  a unei laturi a poligonului este dată, în funcție de impedanțele  $\underline{Z}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ale stelei prin relația

$$\underline{Z}_{jk} = \frac{\underline{Z}_j \underline{Z}_k}{\underline{Z}_0}$$

unde

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{\underline{Z}_j}}$$

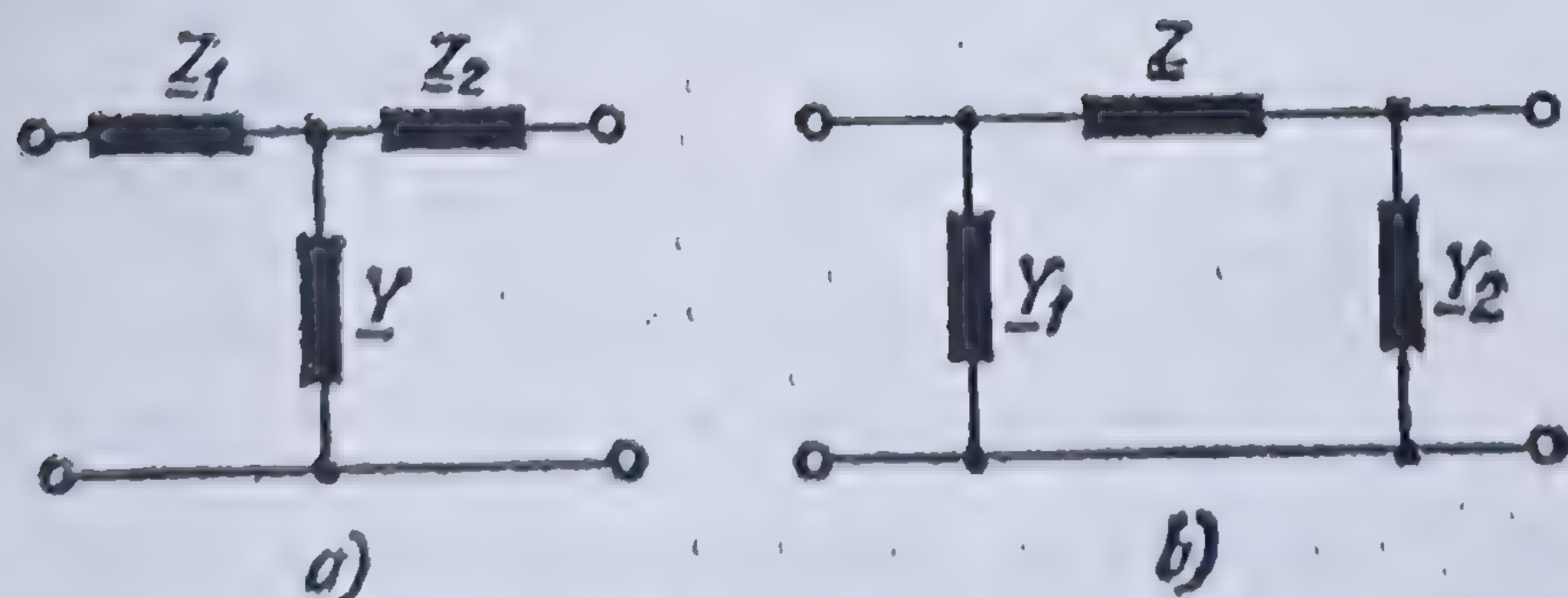


Fig. 6.20. Circuitele T(a) și  $\pi$  (b)

Transformarea nu este reversibilă decât în anumite cazuri particulare\*.

f) Transfigurarea circuitelor în  $T$  și în  $\pi$ . Este ușor de văzut că circuitele  $T$  și  $\pi$  nu sînt decît circuite în stea și în triunghi care pot fi transfigurate unul într-altul prin aplicarea teoremei lui KENNELLY (fig. 6.20).

\* Vezi 2. 3. 9. 2.



În practică se utilizează însă relații care se deduc direct din acelea care determină parametrii respectivi în funcție de parametrii generali ai unui cuadripol oarecare\*. Aceste relații sînt:

— La trecerea de la schema  $T$  la schema  $\pi$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}, \quad \underline{Y}_1 = \underline{Y} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}}, \quad \underline{Y}_2 = \underline{Y} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}};$$

— La trecerea de la schema  $\pi$  la schema  $T$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}, \quad \underline{Z}_1 = \underline{Z} \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}}, \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z} \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}}.$$

#### 6.2.4. METODE MATRICEALE DE REZOLVARE A REȚELOR ELECTRICE

6.2.4.1. Generalități. Avantajele pe care le oferă calculul matriceal la rezolvarea rețelilor electrice sînt cunoscute și metodele corespunzătoare, elaborate de G. KRON, au fost arătate la studiul rețelilor electrice de curent continuu\*\*.

De la primele jaloane puse de KRON și pînă astăzi numeroși cercetători au îmbunătățit metodele matriceale de calcul a rețelilor electrice, adaptîndu-le situației actuale cînd se dispune de mijloace moderne de investigație și calcul, de calculatoare electronice.

Utilizarea fazorilor face tot atît de lesnicios calculul matriceal și pentru studiul rețelilor electrice în curent alternativ. Trebuie observat că, de data aceasta matricea de conexiune poate fi și complexă, cum este în cazul utilizării componentelor simetrice\*\*\*. De asemenea, din cauză că expresia puterii în cantități complexe este

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*,$$

invariantul puterii, în virtutea căruia în lucrarea de față au fost stabilite formulele de transformare\*\*\*\* este

$$P = [E]_t [I]^* = [E']_t [I']^* = \dots$$

sau

$$P = [I]_t [E]^* = [I']_t [E']^* = \dots$$

În aceste condiții, formulele de transformare la schimbarea sistemului de referință sînt:

— la trecerea de la spațiul laturilor la spațiul buclelor (metoda buclelor)

$$[E'] = [C]^* [E]$$

și

$$[Z'] = [C]^* [Z] [C],$$

\* Vezi 6.4.4.9.

\*\* Vezi 2.4.

\*\*\* Vezi 8.3.

\*\*\*\* Se convine ca, în scrierea matricelor, să nu se indice fazorul cu bară dedesubt, pentru a nu se îngreua scrierea.



$[C]$  fiind matricea de conexiune în spațiul buclelor definită prin relația (2.132);  
— la trecerea de la spațiul laturilor la spațiul perechilor de noduri (metoda perechilor de noduri)

$$[J'] = [K]_i^* [J]$$

și

$$[Y'] = [K]_i^* [Y] [K],$$

$[K]$  fiind matricea de conexiune în spațiul perechilor de noduri definită de relația (2.147).

O altă observație este de făcut asupra matricei de impedanță. Un element al acestei matrice este definit de relația

$$[Z_{jk}] = [R_{jk}] + j \omega [L_{jk}] + \frac{1}{j \omega} [S_{jk}],$$

$S_{jk}$  fiind elastanța elementului capacitiv și care, pentru  $j = k$  reprezintă impedanța laturii  $j$ , iar pentru  $j \neq k$  reprezintă impedanța laturii comune dintre buclele  $j$  și  $k$  ale rețelei. Cum diversele laturi ale rețelei pot fi cuplate magnetic între ele, în matricea de impedanță vor putea exista și elemente de forma

$$j \omega [L_{mn}] = j \omega [L_{nm}],$$

în care  $m, n \neq j, k$ , egalitatea putînd să nu existe dacă elementele  $L_{mn}$  și  $L_{nm}$  nu sînt reciproce, semnul polarității inductanței mutuale fiind cuprins în expresia ei și definit ca mai înainte\*.

Aceeași observație se face și pentru elementele matricei de admitanță.

**6.2.4.2. Ecuațiile generale.** Fie o rețea oarecare, buclată, formată din  $L$  laturi, fiecare latură fiind constituită (fig. 6.11) dintr-o impedanță  $\underline{Z}_j = R_j + jX_j$ , [ $j = 1, 2, \dots, L$  și  $R_j \in [0, +\infty)$ ,  $X_j \in (-\infty, +\infty)$ ] dintr-o sursă de tensiune — caracterizată prin forța electromotoare  $\underline{E}_j$  — și dintr-o sursă de curent — caracterizată prin intensitatea  $\underline{J}_j$ .

În elementul considerat, necunoscutele sînt curentul  $\underline{I}_j$ , care circulă între cele două extremități ale sale  $A, B$  — bornele elementului — și diferența de potențial  $\underline{V}_j$  la aceste borne.

Rezolvarea rețelei electrice constă în a determina aceste necunoscute — curenții  $\underline{I}_j$  și tensiunile  $\underline{V}_j$  — și în consecință, circulația puterilor în rețeaua respectivă. Determinarea acestor mărimi se face cu ajutorul celor două teoreme ale lui KIRCHHOFF, scrise sub forma

$$\sum \underline{J}_j = \sum \underline{I}_j, \quad (6.22)$$

$$\sum \underline{E}_j = \sum \underline{U}_j, \quad (6.23)$$

$$\underline{U}_j = \underline{Z}_j \underline{I}_j \quad (6.24)$$

$$\underline{V}_j = \underline{U}_j - \underline{E}_j \quad (6.25)$$

\* Vezi 6.2.2.2.



Într-o rețea electrică cu  $L$  laturi și  $N$  noduri, ecuația (6.22) poate fi scrisă de

$$P = N - S$$

ori,  $S$  fiind numărul de subrețele a rețelei date, ecuația (6.23) poate fi scrisă de

$$B = L - N + S$$

ori, iar ecuația (6.24) de  $L$  ori. Numărul total de ecuații ce se obține este

$$P + B + L = 2L,$$

adică suficient pentru rezolvarea întregii rețele.

Scrise matriceal, ecuațiile de mai sus devin

$$[A] ([I] - [J]) = 0 \quad (6.26)$$

$$[B] ([U] - [E]) = 0 \quad (6.27)$$

$$[U] - [Z][I] = 0 \quad (6.28)$$

$$[U] - [E] = [V] \quad (6.29)$$

unde  $[A]$  și  $[B]$  sînt matrice — în general singulare — formate din  $+1$ ,  $-1$  sau  $0$ ; ele arată modul cum sînt conectate diversele elemente ale rețelei, cifra  $\pm 1$  corespunzînd atunci cînd sensul de circulație al curentului coincide sau este opus sensului atribuit surselor, iar cifra zero, atunci cînd elementul considerat nu aparține circuitului respectiv din rețea.

În rezolvarea rețelelor electrice pot apărea trei cazuri:

cazul I, în care  $[E] \neq 0$  și  $[J] = 0$ , care corespunde metodei buclelor;

cazul II, în care  $[E] = 0$  și  $[J] \neq 0$ , care corespunde metodei perechilor de noduri;

cazul III, în care  $[E] \neq 0$  și  $[J] \neq 0$ , care corespunde cazului general.

**6.2.4.3. Metoda buclelor.** Făcînd în ecuația (6.25)  $[J] = 0$ , sistemul de ecuație devine

$$[A] [I] = 0;$$

$$[B] [U] = [B] [E]; \quad (6.30)$$

$$[U] = [Z] [I].$$

Notînd  $[I']$  matricea curenților ciclici din bucle și  $[E']$  matricea forțelor electromotoare totale din bucle — care pot fi numite forțele electromotoare ciclice — avem relațiile cunoscute \*

$$[I] = [C] [I']$$

\* Vezi 2.4.4.4.



și

$$[E'] = [C]_t [E],$$

unde  $[C]$  este matricea de conexiune a rețelei \*.  
Punând

$$[C]_t = [B] \quad (6.31)$$

rezultă

$$[B] [E] = [E'] \quad (6.32)$$

și

$$[I] = [B]_t [I']. \quad (6.33)$$

Pentru efectuarea calculului se urmează calea cunoscută \*\*. Se scrie succesiv

$$[B] [E] = [E'] = [B] [U] = [B] [Z] [I] = [B] [Z] [B]_t [I'] = [Z'] [I'] \quad (6.34)$$

în care s-a notat

$$[Z'] = [B] [Z] [B]_t = [C]_t [Z] [C], \quad (6.35)$$

matricea de impedanță a rețelei trecută în spațiul buclelor. Matricea  $[Z']$  fiind nesingulară, din relația (6.34) rezultă

$$[I'] = [Z']^{-1} [E'] \quad (6.36)$$

și din relația (6.33), ținând seama de (6.32) și (6.35), rezultă

$$[I] = [B]_t [I'] = [B]_t ([B] [Z] [B]_t)^{-1} [B] [E] \quad (6.37)$$

și din (6.30)

$$[U] = [Z] [B]_t ([B] [Z] [B]_t)^{-1} [B] [E]. \quad (6.38)$$

Relațiile (6.37) și (6.38) rezolvă întreaga problemă în funcție de elementele date.

**6.2.4.4. Metoda perechilor de noduri.** Dacă în sistemul de ecuații ale lui KIRCHHOFF se face în ecuația (6.27)  $[E] = 0$  acesta devine

$$[A] [I] = [A] [J], \quad (6.39)$$

$$[B] [U] = 0, \quad (6.40)$$

$$[I] = [Y] [U]. \quad (6.41)$$

\* Nu s-a mai pus  $[C]$  întrucât, în cazul examinat, matricele de conexiune sînt reale.  
\*\* Vezi 2.4.4.5.



Notând  $[U']$  matricea potențialelor celor  $N-1$  noduri față de nodul de referință — matricea potențialelor independente — și  $[J']$  matricea curenților nodali, avem relațiile cunoscute \*

$$[U] = [K] [U']$$

și

$$[J'] = [K]_l [J]$$

unde  $[K]$  este matricea de conexiune.

Dacă se notează

$$[K]_l = [A]$$

se obține

$$[A] [J] = [J'] \quad (6.42)$$

și

$$[U] = [A]_l [U'] \quad (6.43)$$

Cu aceste elemente, pentru efectuarea calculului se urmează calea cunoscută \*\*, obținându-se succesiv

$$\begin{aligned} [J'] &= [A] [J] = [A] [I] = [A] [Y] [U] = [A] [Y] [A]_l [U'] = \\ &= [Y'] [U'] \end{aligned} \quad (6.44)$$

unde s-a notat

$$[Y'] = [A] [Y] [A]_l = [K]_l [Y] [K],$$

matricea de admitanță a rețelei trecută în spațiul perechilor de noduri.

Matricea  $[Y']$  nu este singulară, din relația (6.44) rezultă

$$[U'] = [Y']^{-1} [J'] \quad (6.45)$$

de unde, din relația (6.43) rezultă  $[U]$  și apoi din relația (6.41) se deduce  $[I]$ .

Vom avea astfel

$$[U] = [A]_l [U'] = [A]_l [Y']^{-1} [J'] = [A]_l ([A] [Y] [A]_l)^{-1} [A] [J] \quad (6.46)$$

și

$$[I] = [Y] [U] = [Y] [A]_l ([A] [Y] [A]_l)^{-1} [A] [J]. \quad (6.47)$$

**6.2.4.5. Cazul general.** Să presupunem că  $[E] \neq 0$  și  $[J] \neq 0$ , adică sistemul are atât surse de tensiune, inserate în laturile rețelei, cât și surse de curent care injectează curenți în nodurile sale.

\* Vezi 2.4.5.2.

\*\* Vezi 2.4.5.5.



Prin analogie cu metoda buclelor \* să notăm

$$[I] - [J] = [B]_t [J'], \quad (6.48)$$

în care  $[J']$  reprezintă curenți ciclici.  
Notînd și în acest caz

$$[E'] = [B] [E] = [B] [U] \quad (6.49)$$

și ținînd seama de relațiile (6.28) și (6.48) se obține succesiv

$$\begin{aligned} [E'] &= [B] [U] = [B] [Z] [I] = [B] [Z] ([B]_t [J'] + [J]) = \\ &= [B] [Z] [B]_t [J'] + [B] [Z] [J]. \end{aligned}$$

Rezultă apoi — ținînd seama de (6.49) —

$$\begin{aligned} [J'] &= ([B] [Z] [B]_t)^{-1} ([E'] - [B] [Z] [J]) = \\ &= ([B] [Z] [B]_t)^{-1} [B] ([E] - [Z] [J]) \end{aligned}$$

și deci — ținînd seama de relația (6.48) — se obține

$$[I] = [J] + [B]_t [Z']^{-1} [B] ([E] - [Z] [J]) \quad (6.50)$$

în care s-a notat

$$[Z'] = [B] [Z] [B]_t.$$

Notînd acum — prin analogie cu metoda perechilor de noduri \*\* —

$$[U] - [E] = [A]_t [U'], \quad (6.51)$$

în care  $[U']$  reprezintă potențiale la noduri în raport cu un potențial de referință arbitrar ales, dacă se scrie

$$[J'] = [A] [J] = [A] [I]$$

și se ține seama de relațiile (6.41) și (6.51), se obține succesiv

$$\begin{aligned} [J'] &= [A] [I] = [A] [Y] [U] = [A] [Y] ([A]_t [U'] + [E]) = \\ &= [A] [Y] [A]_t [U'] + [A] [Y] [E]. \end{aligned}$$

Rezultă

$$[U'] = [Y']^{-1} [A] ([J] - [Y] [E])$$

\* Relația (6.33).

\*\* Relația (6.43).



și deci

$$[U] = [E] + [A]_t [Y']^{-1} [A] ([J] - [Y] [E]),$$

în care am notat

$$[A] [Y] [A]_t = [Y'].$$

Iar

$$[V] = [U] - [E] = [A]_t [Y']^{-1} [A] ([J] - [Y] [E]) \quad (6.52)$$

Relațiile (6.50) și (6.52) dau cele  $2L$  necunoscute ale problemei.

### 6.3. METODE DE CALCUL FOLOSIND SCHEME SPECIALE

#### 6.3.1. SCHEMELE FUNCȚIONALE ALE CIRCUITELOR ELECTRICE

**6.3.1.1. Generalități și definiții.** Studiul circuitelor electrice constă în determinarea comportării unei rețele electrice atunci când la una sau mai multe perechi de borne ale sale se aplică semnale electrice (surse de tensiune sau surse de curent). Aplicând teoremele lui KIRCHHOFF, se va obține un număr de ecuații, suficient pentru găsirea mărimilor necesare (curenți, potențiale, sau energii) care să caracterizeze funcționarea rețelei. Rezolvarea acestui sistem de ecuații — oricare ar fi metoda folosită — conduce întotdeauna la rezolvarea unei ecuații diferențiale, de un ordin oarecare, între un anumit semnal aplicat rețelei date și un anumit răspuns pe care îl dă rețeaua; de exemplu se aplică la o anumită pereche de borne a rețelei electrice o tensiune electrică și se cere să se determine curentul electric care circulă într-o anumită latură a rețelei\*.

În cazul unei rețele electrice liniare invariante, cu parametri localizați, legătura dintre răspuns sau semnalul de ieșire  $y(t)$ , datorit unei excitații exterioare sau semnalul de intrare  $x(t)$  este dată deci de o ecuație diferențială de forma

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = b_0 \frac{d^m y}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + b_m y. \quad (6.53)$$

Analizarea unui asemenea sistem se face mult mai comod dacă se introduce simbolul lui HEAVISIDE \*\*  $p = \frac{d}{dt}$ , care transformă ecuația diferențială (6.53) de ordinul  $n$  în ecuația algebrică

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) y \quad (6.54)$$

sau

$$N(p) \cdot x = M(p) \cdot y, \quad (6.55)$$

în care  $N(p)$  și  $M(p)$  sînt polinoamele în  $p$  din relația (6.54). Relația (6.55) poate fi scrisă simbolic sub forma

$$\frac{y}{x} = \frac{N(p)}{M(p)} = T(p). \quad (6.56)$$

\* Vezi 3.6.1.

\*\* Vezi 10.2.1.



Fracția algebrică  $T(p)$ , care dă legătura dintre răspunsul  $y$  și semnalul  $x$  se numește *transmitanță* sau *funcția de transfer* a rețelei considerată. Este ușor de văzut că de la ecuația (6.56) respectiv (6.54) se poate ușor ajunge la ecuația diferențială (6.53) dacă se înlocuiește  $p$  cu  $\frac{d}{dt}$ .

Cu ajutorul noțiunii de transmitanță se poate reprezenta grafic legătura între un semnal de intrare  $x$  și un semnal de ieșire  $y$  (fig. 6.21). O astfel de schemă se numește o *schemă funcțională* sau *schemă bloc* și arată că  $x$  este o excitație care acționând asupra unui sistem de transmitanță  $T(p)$  produce semnalul de ieșire  $y$ , ca răspuns al acestei excitații.

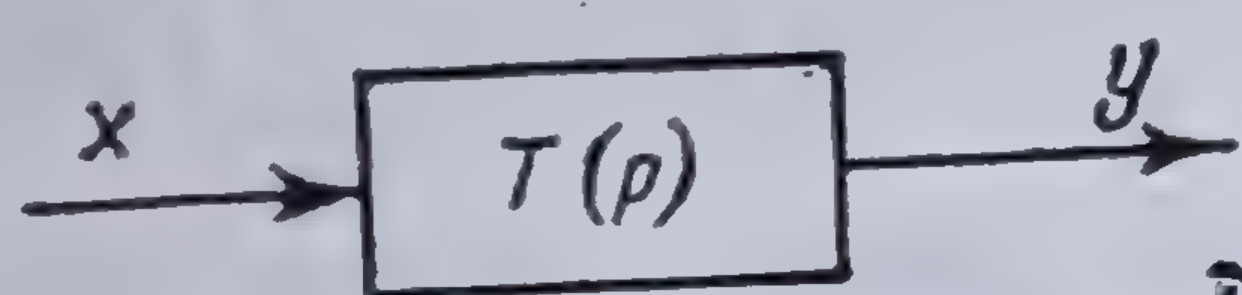


Fig. 6.21. Schemă funcțională.

Construirea schemelor funcționale este utilă prin aceea că transmitanța unui sistem oarecare poate fi determinată prin simpla citire a schemei funcționale, asupra căreia urmează a se face uneori unele transformări simple. Cunoscând transmitanța sistemului respectiv, se poate deduce apoi ecuația de funcționare (6.53) a sistemului prin procedeul indicat, operația apare astfel mult mai simplă decât obținerea ecuației (6.53) prin eliminarea succesivă a necunoscutelor sistemului dat.

Dacă în ecuația (6.55) se face  $x = 0$ , se obține ecuația

$$M(p) \cdot y = 0$$

care reprezintă *regimul liber* de funcționare a rețelei date. În consecință, *ecuația caracteristică* a sistemului dat este

$$M(p) = 0$$

și deci rădăcinile ecuației caracteristice sînt polii transmitanței.

O altă noțiune necesară în studiul circuitelor electrice, sau a sistemelor în general, este aceea de *clasă a sistemului*. Făcînd în expresia transmitanței  $p = 0$  aceasta înseamnă că în ecuația diferențială respectivă au fost anulate toate derivatele, ceea ce înseamnă că în sistemul corespunzător  $x = \text{Const.}$  și  $y = \text{Const.}$  Se obține astfel *starea de repaus* a sistemului, cu condiția ca transmitanța să aibă o valoare constantă pentru  $p = 0$ . Astfel, în cazul ecuației (6.53), starea de repaus e dată de relația

$$a_n x = b_m y$$

și transmitanța corespunzătoare

$$[T(p)]_{p=0} = \frac{a_n}{b_m}$$

se reduce la o valoare constantă.



În general însă

$$\lim_{p \rightarrow 0} T(p) = f\left(\frac{1}{p^n}\right) \quad n \in (-\infty, +\infty).$$

În acest caz se zice că sistemul dat este un *sistem de clasă  $n$*  sau de *ordinul  $n$*  \*.

Astfel sistemul considerat mai înainte este un sistem de *clasă 0*, transmitanța sa comportându-se ca o constantă pentru  $p = 0$ .

Pentru un sistem de *clasă 1*, pentru  $p = 0$  transmitanța se comportă ca o funcție de  $\frac{1}{p}$ , astfel, că pentru o valoare constantă a mărimii de intrare  $x$ , mărimea de ieșire  $y$  variază proporțional cu *integrala temporală* a lui  $x$ , adică liniar în funcție de timp.

În general, pentru  $n > 0$ , un sistem de clasă  $n$  se comportă, în regim permanent, ca un *integrator* de ordinul  $n$ , a cărui mărime de ieșire variază ca  $t^n$  pentru o valoare constantă de intrare.

Dacă  $n < 0$ , sistemul se comportă ca un *diferențiator* de ordinul  $n$ , a cărui mărime de ieșire este nulă pentru orice valoare constantă de intrare.

**6.3.1.2. Elementele cireuitelor electrice.** Elementele pasive fundamentale ale unei rețele electrice sînt rezistorul de rezistență  $R$ , bobina de induc-tanță  $L$  și condensatorul de capacitate  $C$ . Între tensiunea aplicată la bornele oricărui din aceste elemente și curentul rezultat care le străbate și reciproc, între curentul ce străbate aceste elemente și tensiunea ce apare la bornele respective (căderea de tensiune în elementul corespunzător) există relațiile funcționale cunoscute \*\*. Aceste relații funcționale și schemele funcționale corespunzătoare sînt date în figura 6.22. Din aceste scheme se deduc și transmi-tanțele corespunzătoare.

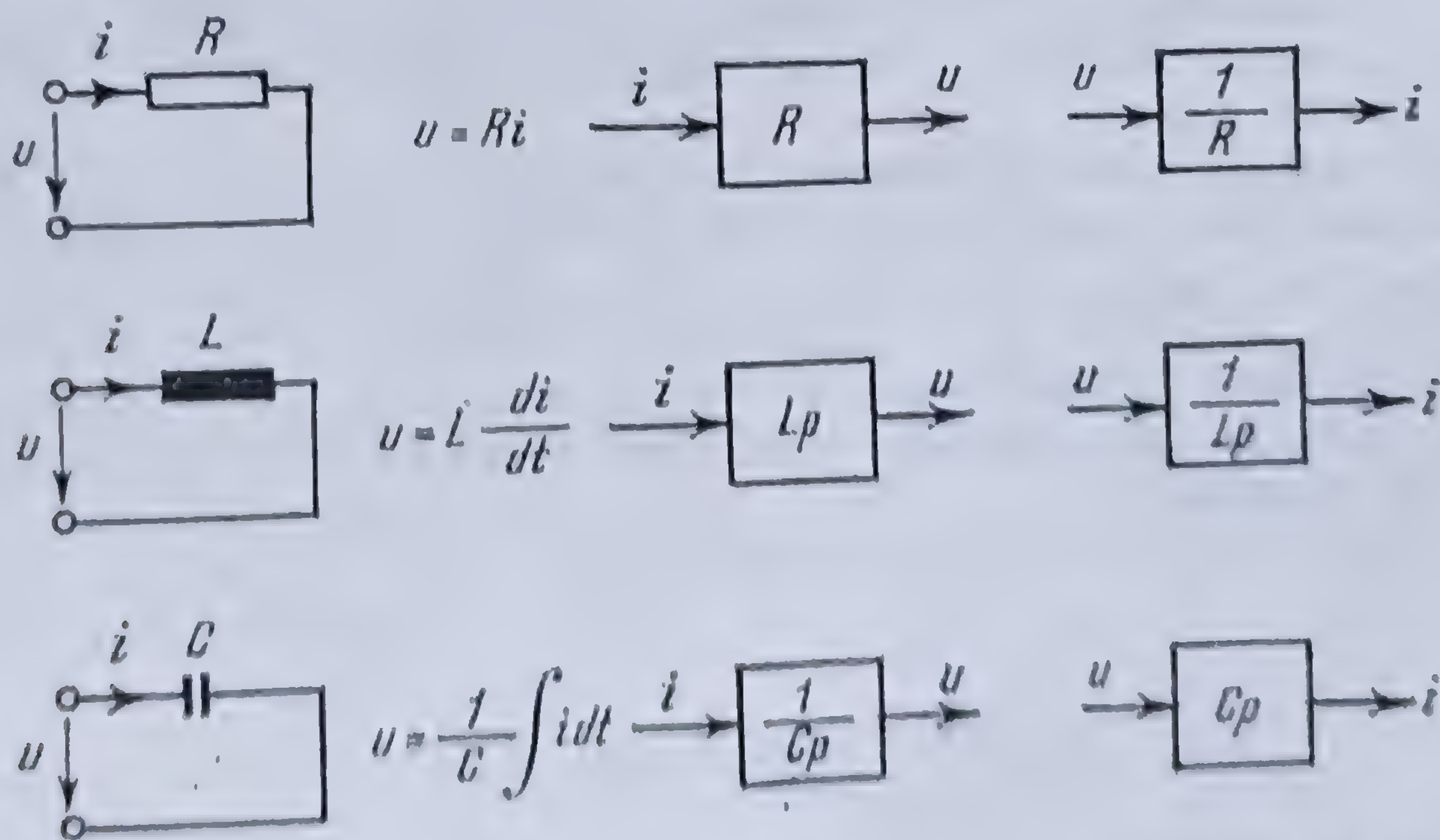


Fig. 6.22. Schemele funcționale ale elementelor pasive fundamentale ale unei rețele electrice

\* care nu trebuie confundat cu ordinul unei ecuații diferențiale.  
 \*\* Vezi 4.3.4.



Trebuie observat, că dacă în expresia transmitanțelor se înlocuiește  $p$  cu  $j\omega$ , acestea se transformă în impedanțele (reactanțele) respectiv admitanțele (susceptanțele) circuitelor corespunzătoare în funcționarea în regim cuasi-staționar în circuitele electrice de curent alternativ. Transmitanțele pot fi considerate ca impedanțe, respectiv admitanțe generalizate ale circuitelor electrice.

**6.3.1.3. Elementele fundamentale ale schemelor bloc.** Pentru construirea schemelor bloc sînt necesare unele elemente caracteristice acestui fel de scheme și anume:

*Sumatorul* este elementul cu ajutorul căruia se face suma sau diferența semnalelor \* (fig. 6.23, a); în acest din urmă caz, acestui element i se mai spune și *detector de abatere*.

*Captatorul* este elementul care culege un semnal dat de-a lungul unei linii de transmitere a unei informații (fig. 6.23, b).

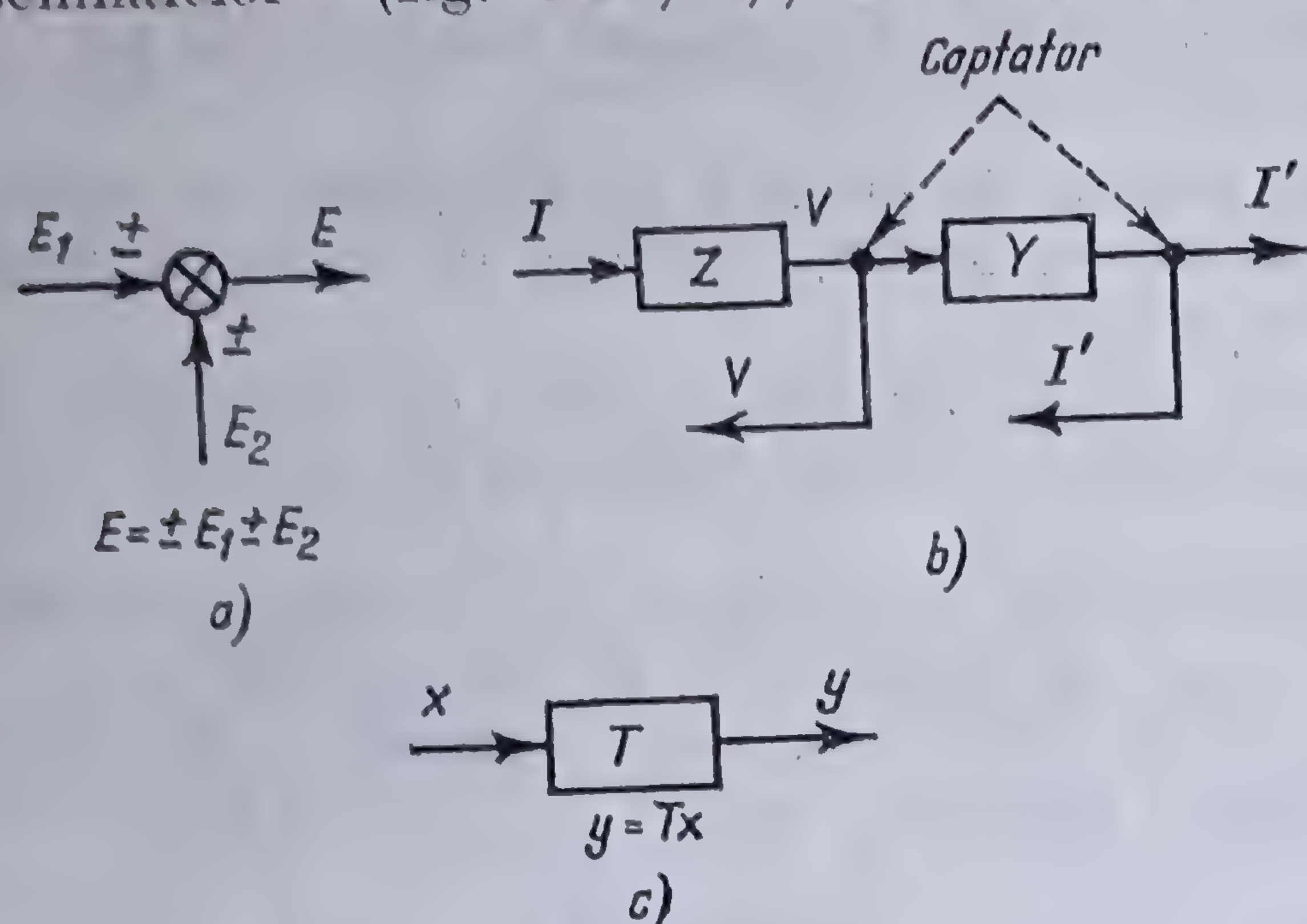


Fig. 6.23. Elementele fundamentale ale unei scheme funcționale  
a) Sumator ; b) Captator ; c) Element funcțional

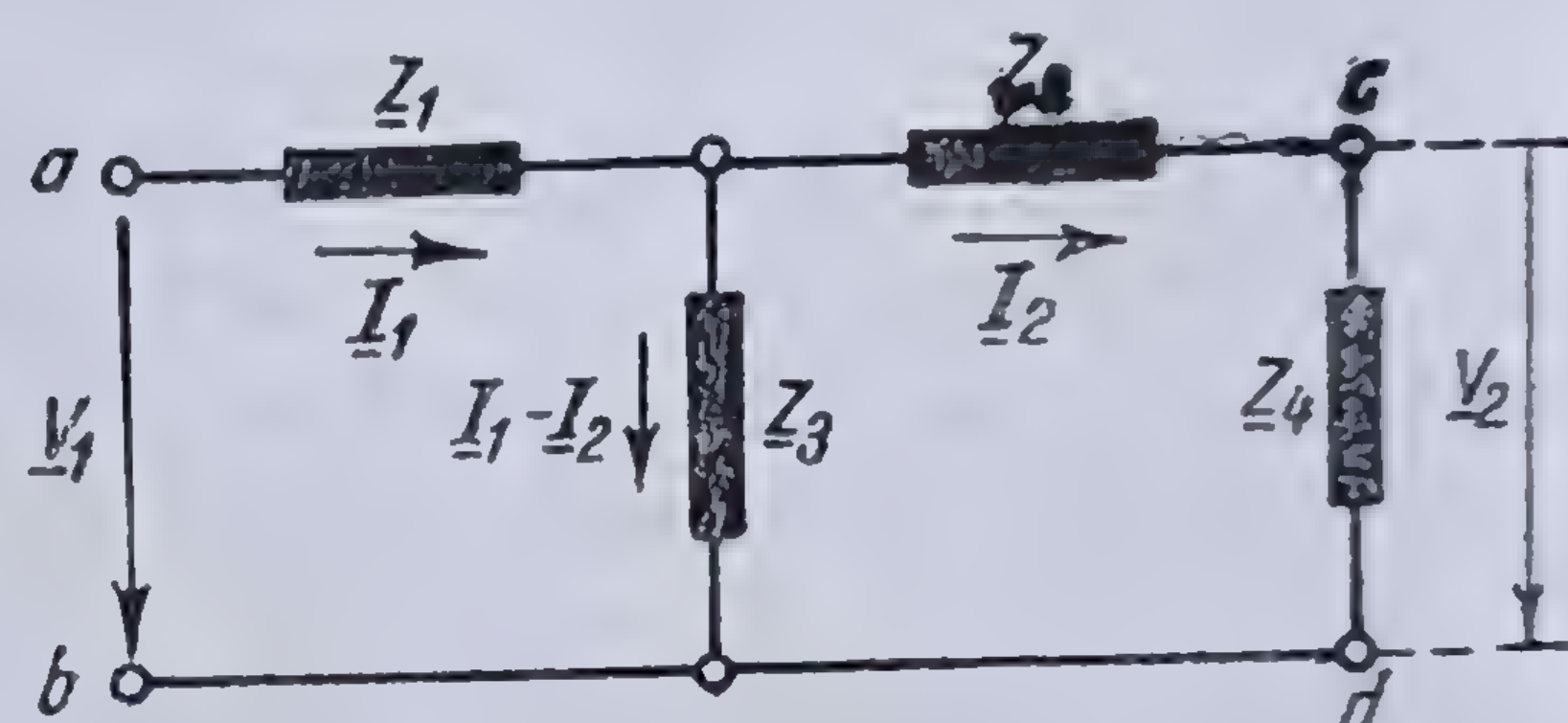


Fig. 6.24. Cuadripol în sarcină.

*Blocul funcțional* care efectuează multiplicarea semnalului de intrare prin transmitanța corespunzătoare dînd semnalul de ieșire\*\*  $y = Tx$  (fig. 6.23, c).

**6.3.1.4. Construirea schemelor funcționale.** Construirea unei scheme bloc se face pornind de la schema electrică a circuitului și urmărind pas cu pas relațiile electrice legînd diversele elemente. Să considerăm pentru aceasta un cuadripol în  $T$  închis pe o impedanță  $Z$  oarecare (fig. 6.24) pentru care se caută schema funcțională care să dea legătura dintre tensiunea de ieșire  $V_2$ , de la bornele impedanței  $Z$  și tensiunea de intrare  $V_1$ . Relațiile dintre mărimile electrice sînt

$$I_1 = \frac{V_1 - V'}{Z_1}; \quad V' = Z_3(I_1 - I_2);$$

$$I_2 = \frac{V' - V_2}{Z_2}; \quad V_2 = Z_4 I_2.$$

\* Se obișnuiește ca sumatorul să-și păstreze numai funcția de sumare a semnalelor. Pentru a obține o diferență se utilizează un bloc funcțional care să schimbe semnul semnalului respectiv, pentru care  $T = -1$ .

\*\* Cele două semnale  $x$  și  $y$  pot fi de natură diferită, de exemplu unul electric și unul mecanic, blocul funcțional operînd în același timp și o transformare de energie.



Construcția schemei funcționale se face imediat urmărind aceste relații (fig. 6.25).

**6.3.1.5. Reguli pentru reducerea schemelor funcționale.** Pentru a se putea calcula transmitanța cu ajutorul unei scheme bloc este necesar a se reduce această schemă la o schemă simplă de tipul celei arătate în figura 6.21. Reducerea schemei constă în modificarea diverselor elemente ale ei în elemente mai simple și astfel, din aproape în aproape, să se obțină transmitanța dintre semnalul de intrare și cel de ieșire. Această reducere se face utilizând unele reguli simple care sînt date în tabloul 6.1 \*.

**6.3.1.6. Exemple de scheme funcționale pentru circuite electrice tip.** În tabloul 6.2 sînt date două circuite electrice simple pentru care s-a dat schema

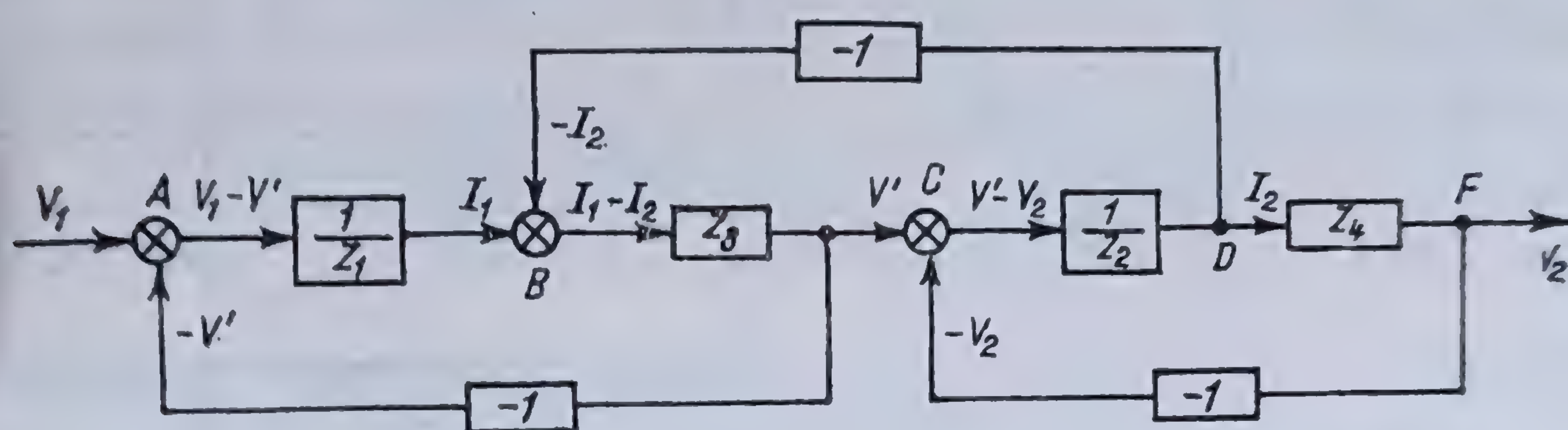


Fig. 6.25. Schema funcțională a cuadripolului din figura 6.24.

electrică, schema funcțională corespunzătoare și transmitanța respectivă. Determinarea acestor elemente se face imediat urmînd regulile indicate în tabloul 6.1.

**6.3.1.7. Exemplu de aplicație.** Fie să aplicăm regulile date în tabloul 6.1 reducerii schemei funcționale din figura 6.25, corespunzătoare circuitului din figura 6.24 pentru a-i găsi transmitanța. Se observă imediat că, această schemă funcțională nu poate fi utilizată ca atare, întrucît cele trei bucle se intersectează între ele și în consecință, trebuie modificată astfel, încît să comporte o buclă principală și două bucle secundare; în acest scop sumatorul  $B$  trebuie deplasat și adus la stînga blocului  $\frac{1}{Z}$  și punctul de preluare  $D$  trebuie mutat la dreapta blocului  $Z_4$ , ceea ce se obține aplicînd regula 4 (Tab. 6.1). Se aplică apoi laturilor  $AC$ ,  $CF$  și  $AF$  regula 1, obținîndu-se schema funcțională echivalentă (fig. 6.26). Se reduc apoi pe rînd buclele I și II, aplicîndu-se regula 8; se aplică din nou regula 1 laturii rezultante  $AF$  și în sfîrșit se aplică regula 8 buclei rămase. Se găsește

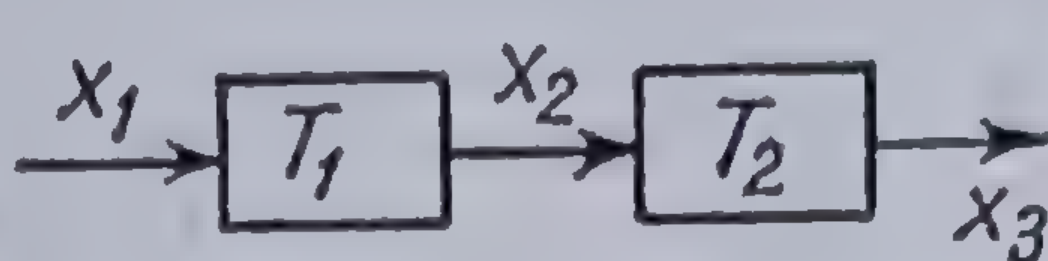
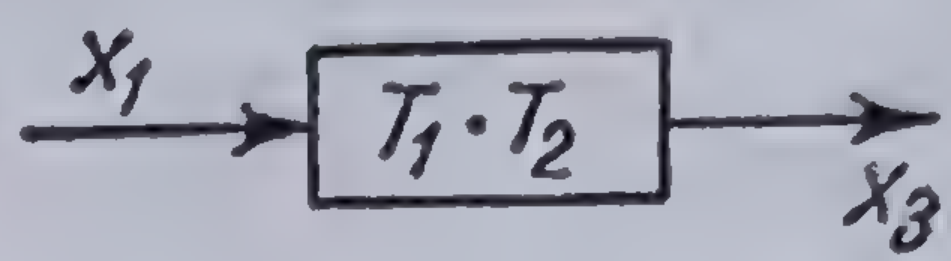
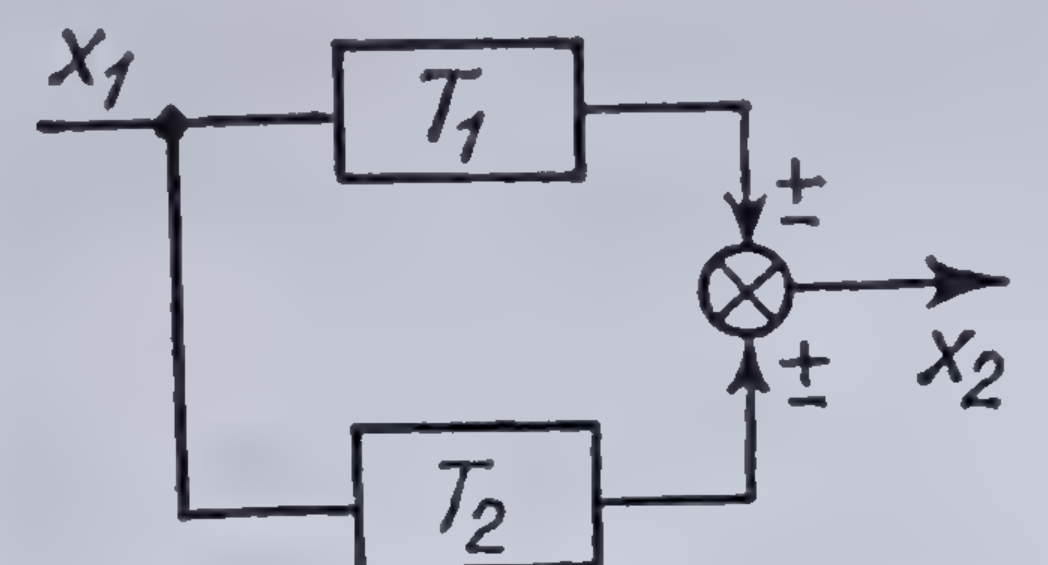
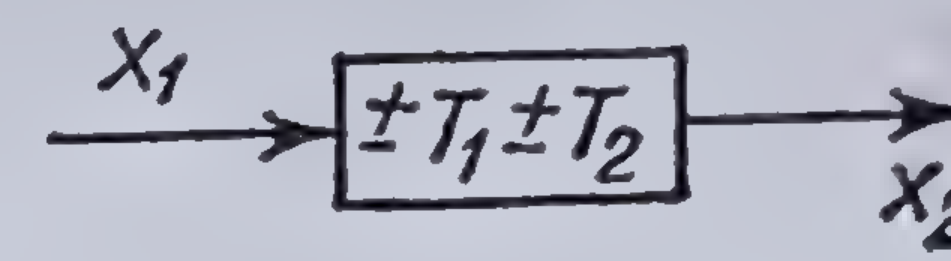
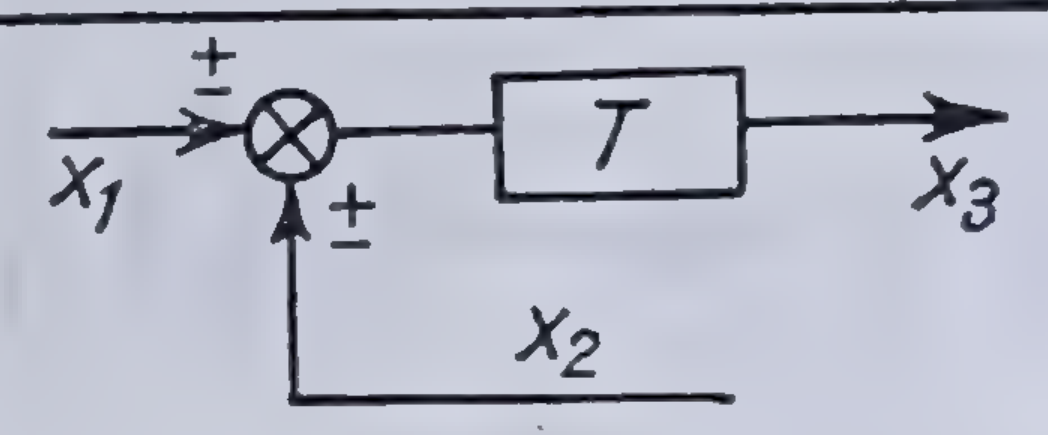
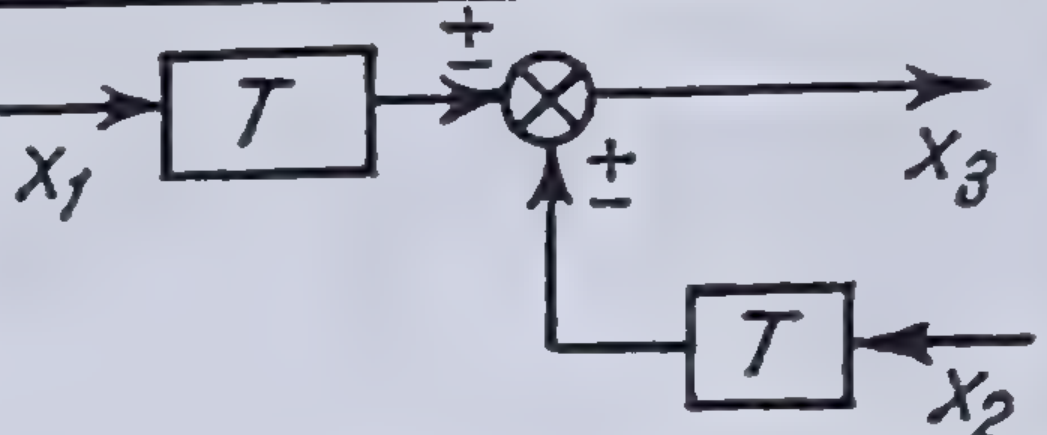
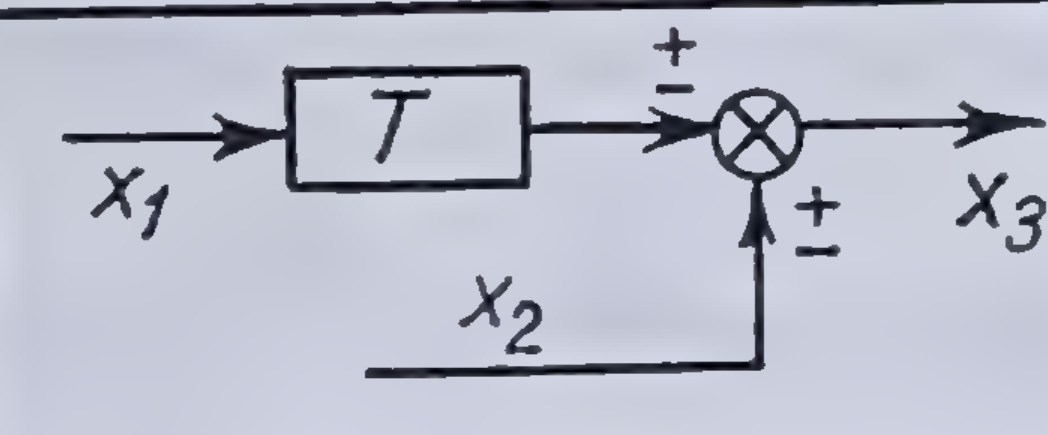
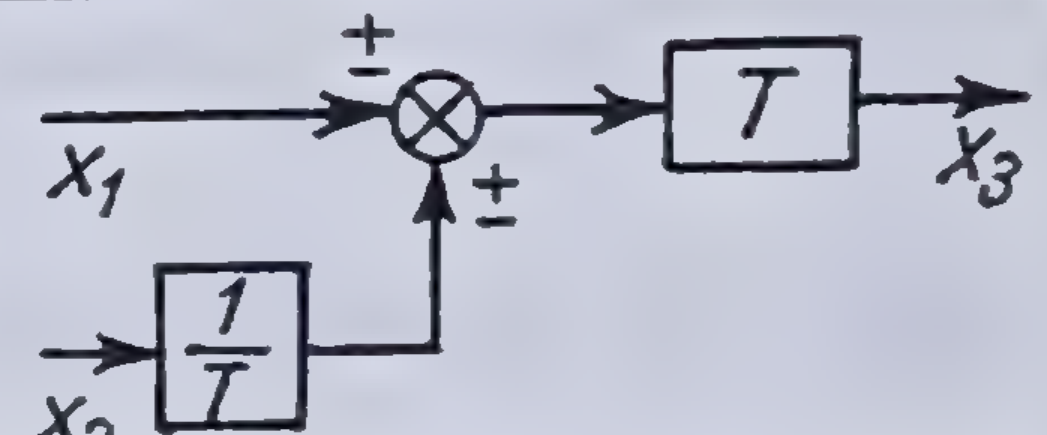
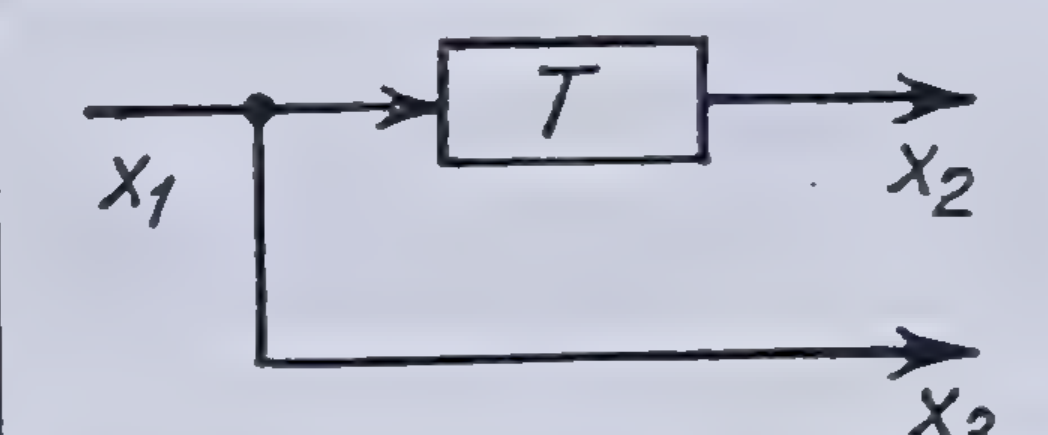
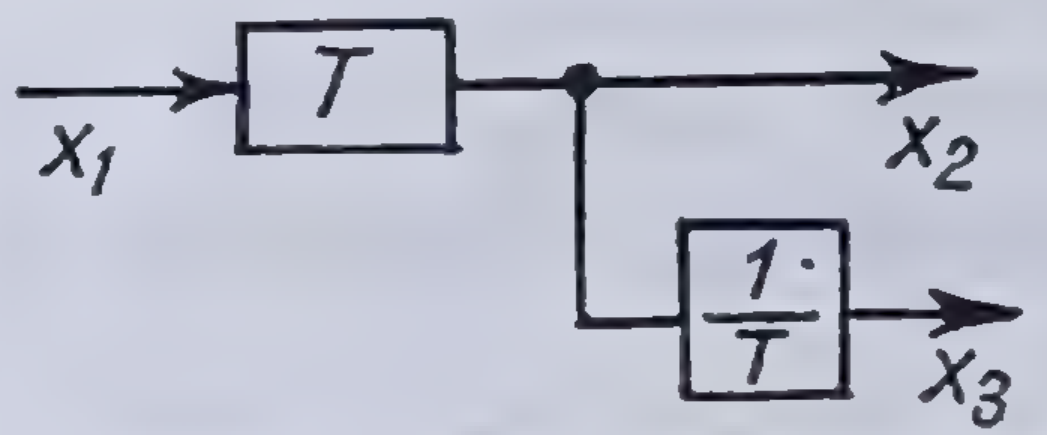
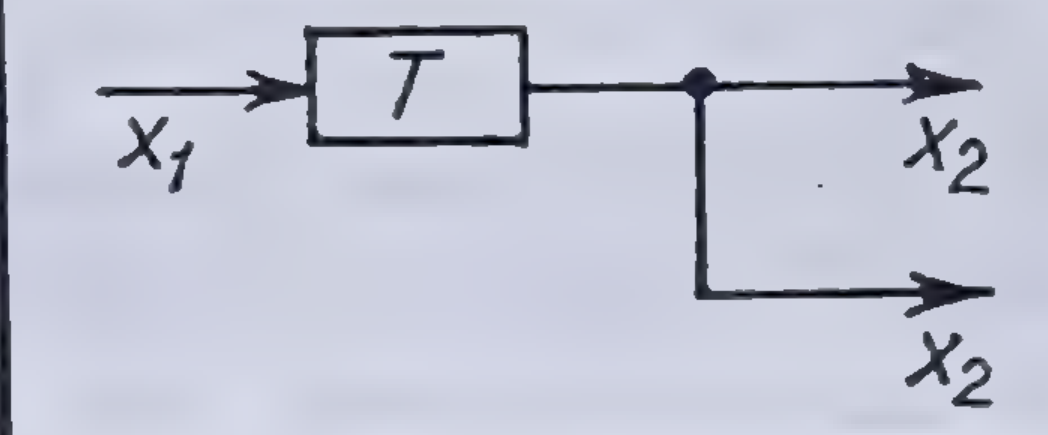
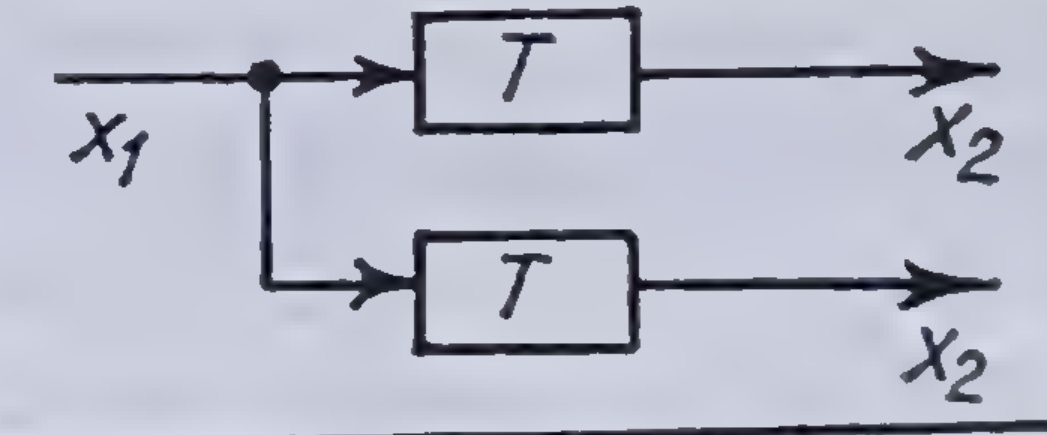
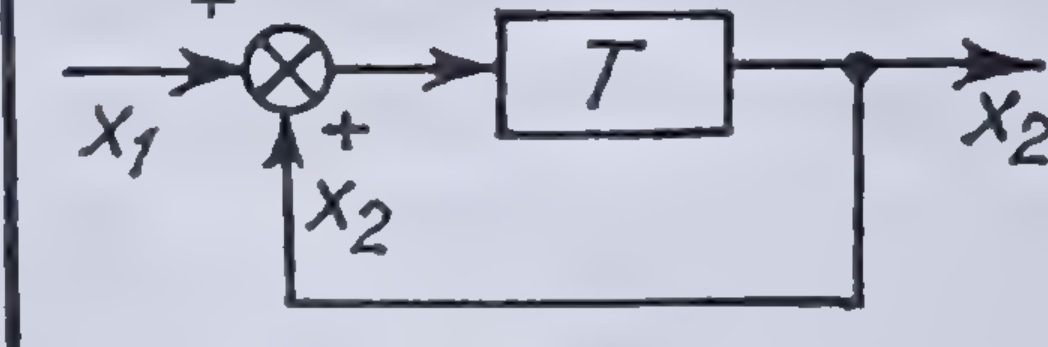
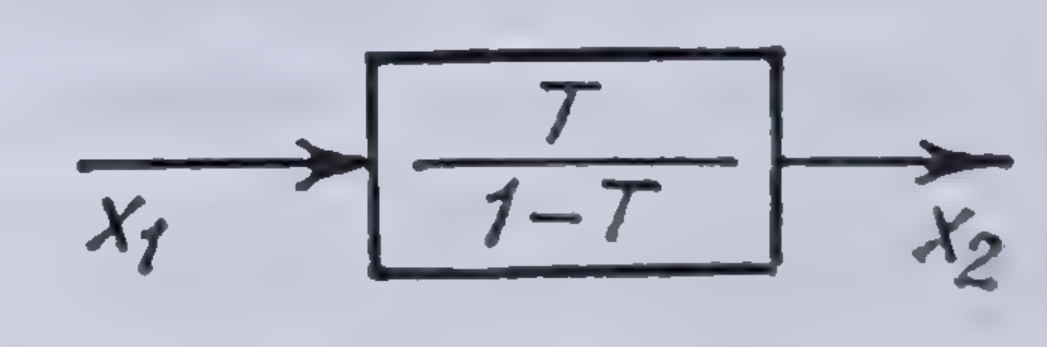
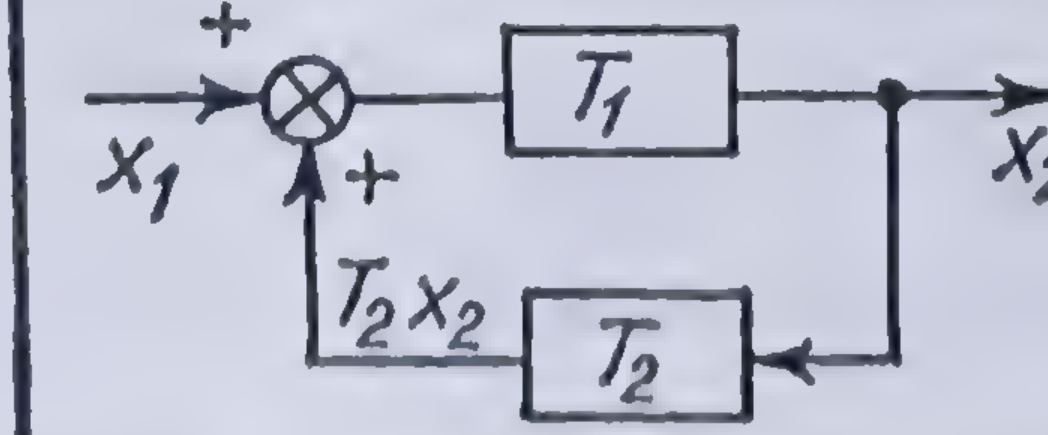
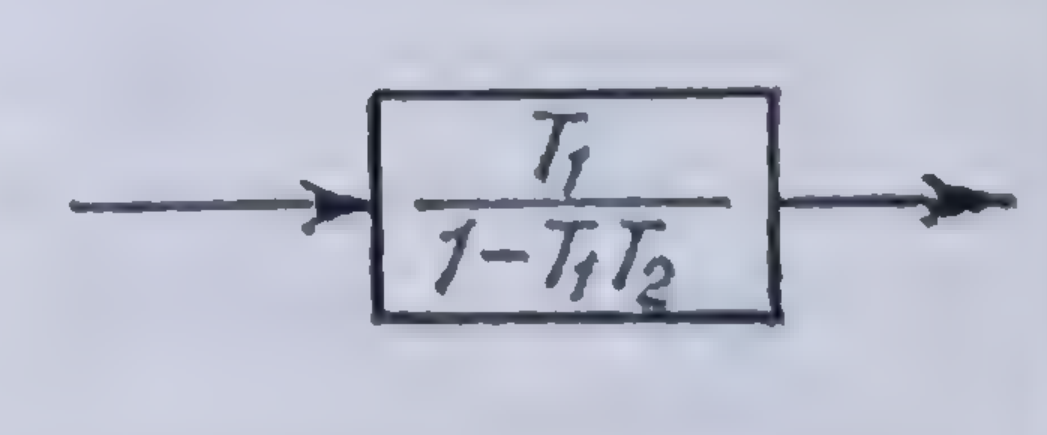
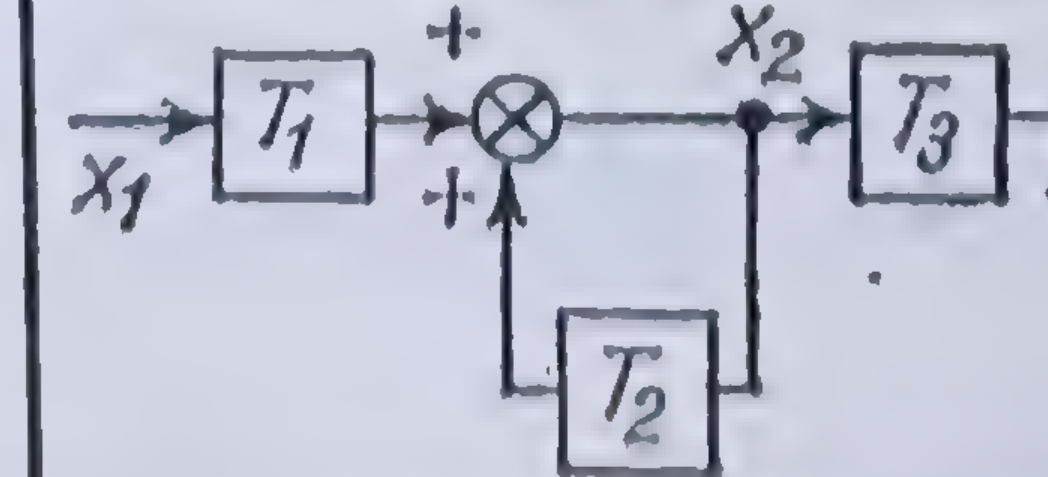
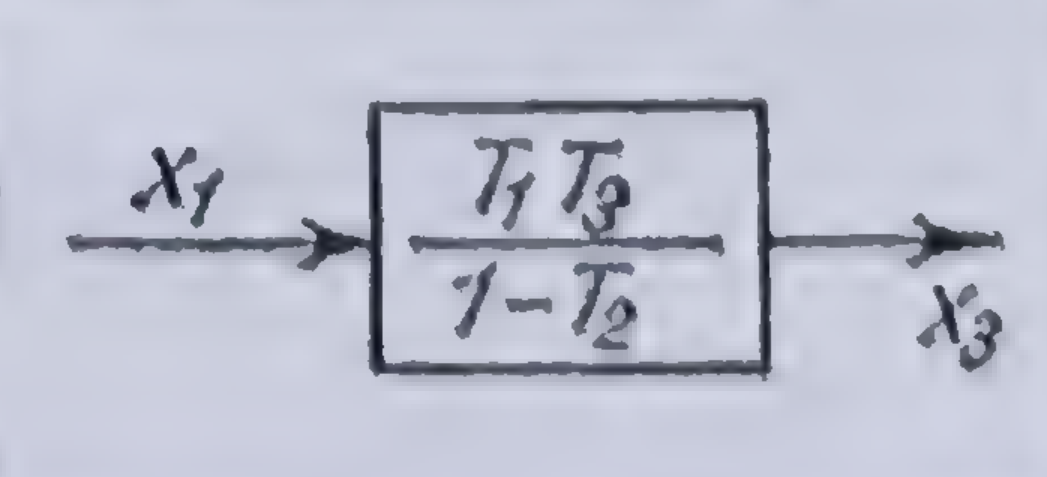
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_3 + (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)} \quad (6.57)$$

care este expresia transmitanței căutate.

\* În exemplul nr. 8 din tabloul 6.1, circuitul care conține transmitanța  $T_2$  poartă numele de buclă de reacție și poate apărea în numeroase scheme funcționale reprezentînd circuite electrice.



REGULI DE TRANSFORMARE A SCHEMELOR FUNCȚIONALE      Tabloul 6.1.

Nr. crt.	Expresia algebrică	Schema funcțională corespunzătoare	Schema funcțională echivalentă	Expresia algebrică rezultantă
1	Regula înmulțirii $x_2 = T_1 x_1$ $x_3 = T_1 x_2$ $x_3 = T_1 \cdot T_2 \cdot x_1$			$x_3 = T_1 T_2 x_1$
2	Regula adunării $x_2 = \pm T_1 x_1 \pm T_2 x_2$			$x_2 = (\pm T_1 \pm T_2) x_1$
3	$x_3 = T(\pm x_1 \pm x_2)$			$x_3 = \pm T x_1 \pm T x_2$
4	$x_3 = \pm T x_1 \pm x_2$			$x_3 = T(\pm x_1 \pm \frac{1}{T} x_2)$
5	$x_2 = T x_1$ $x_3 = x_1$			$x_2 = T x_1$ $x_3 = T \cdot \frac{1}{T} x_1 = x_1$
6	$x_2 = T x_1$			$x_2 = T x_1$
7	$x_2 = (x_1 + x_2) T$			$x_2 = \frac{T}{1 - T} x_1$
8	$x_2 = (x_1 + T_2 x_2) T_1$			$x_2 = \frac{T_1}{1 - T_1 T_2} x_1$
9	Bucă proprie (Autotransformare) $x_2 = T_1 x_1 + T_2 x_2$ $x_3 = T_3 x_2$			$x_3 = \frac{T_1 T_3}{1 - T_2} x_1$



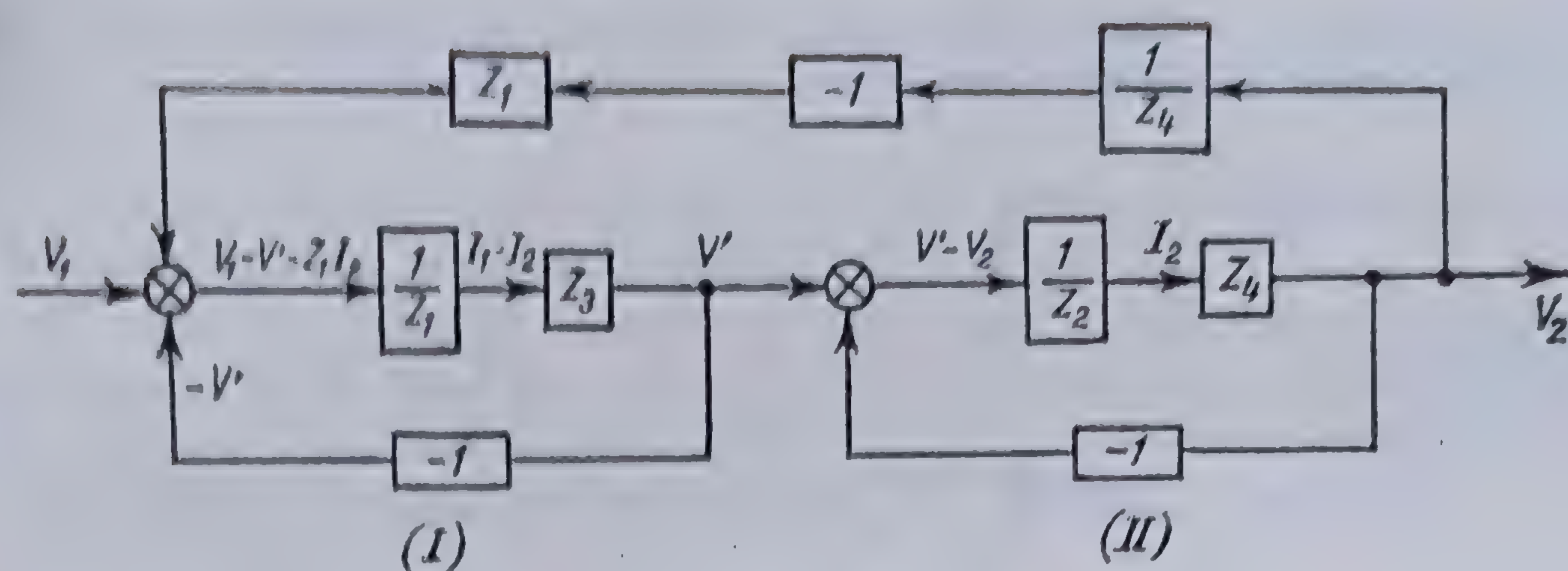


Fig. 6.26. Schema funcțională modificată

**OBSERVAȚIE.** Calculul se poate face imediat dacă se observă că circuitul dat este realizat din două structuri de tip 1 (Tab. 6.2) legate în cascadă \* și podate cu legătura de reacție  $\left(-\frac{Z_1}{Z_4}\right)$  realizându-se figura 6.26. Ținând seama de expresia transmitanței structurilor de tip 1 și reducând această schemă prin aplicarea regulii 1 și a regulii 8, se regăsește relația (6.57).

### SCHEMELE FUNCȚIONALE A UNOR CIRCUITE ELECTRICE TIP

Tabloul 6.2.

Nr. crt.	Schema electrică	Schema funcțională corespunzătoare	Transferanța $\frac{V_2}{V_1}$
1			$\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$
2			$\frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$

### 6.3.2. METODA GRAFURILOR DE TRANSFER

**6.3.2.1. Generalități și definiții.** Metoda grafurilor de transfer \*\* este — în principiu — identică cu metoda schemelor funcționale. Această metodă este totuși mai simplă prin simplificarea schemelor care se obțin și a unei raționalizări mai complete ce se face.

\* Două structuri sînt legate în cascadă sau în lanț cînd bornele de ieșire a uneia din ele sînt legate la bornele de intrare a celeilalte. Vezi 6.4.4.10, a.

\*\* Unii autori numesc aceste grafuri, grafuri de fluxuri. Vezi [83, 162, 245].



Fie un sistem de ecuații lineare simultane, care descriu un sistem fizic liniar oarecare scris sub forma

$$\sum_{j=0}^n a_{ij} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.58)$$

sau sub forma

$$x_i = \sum_{j=0}^n t_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.59)$$

în care

$$t_{ij} = a_{ij} \text{ pentru } i \neq j \quad \text{și} \quad t_{ii} - 1 = a_{ii}.$$

Variabila  $x_0$  este singura variabilă independentă a sistemului, variabilele  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sînt variabile dependente. Pentru un sistem fizic liniar cu constante repartizate, coeficienții  $a_{ij}$ , respectiv  $t_{ij}$ , reprezintă în general operații integro-diferențiale; transformarea LAPLACE\* dă posibilitatea transformării lor în ecuații algebrice, condițiile inițiale modificînd termenii  $a_{i0} x_0$ , respectiv  $t_{i0} x_0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Se numește *graf de transfer* o schemă formată dintr-un număr de laturi avînd un sens de parcurgere definit, numite *laturi* sau *ramuri dirijate*, interconectate în anumite puncte numite *noduri* și care definește în mod univoc sistemul de ecuații algebrice liniare.

*Nodurile* reprezintă *variabilele* sistemului — dependente sau independente; ele sînt stațiile unde apar semnalele și unde se face sumarea acestor semnale.

*Laturile* sau *ramurile* corespund relațiilor între variabile; orientarea acestor ramuri constituie o *cale unică* pentru transmiterea semnalului. Fiecărei ramuri  $i$  se asociază un coeficient numit *transmitanță* astfel că semnalul dintr-un nod de ieșire a ramurii este egal cu produsul dintre semnalul din nodul de intrare a ramurii prin transmitanța acesteia. Relațiile dintre variabile rezultă din legile fizice care intervin în funcționarea sistemului (legea lui OHM, teoremele lui KIRCHHOFF etc.)\*\*.

Laturile sînt *convergente* dacă orientarea lor este convergentă către un nod; ele sînt *divergente* dacă ea este dinspre un nod.

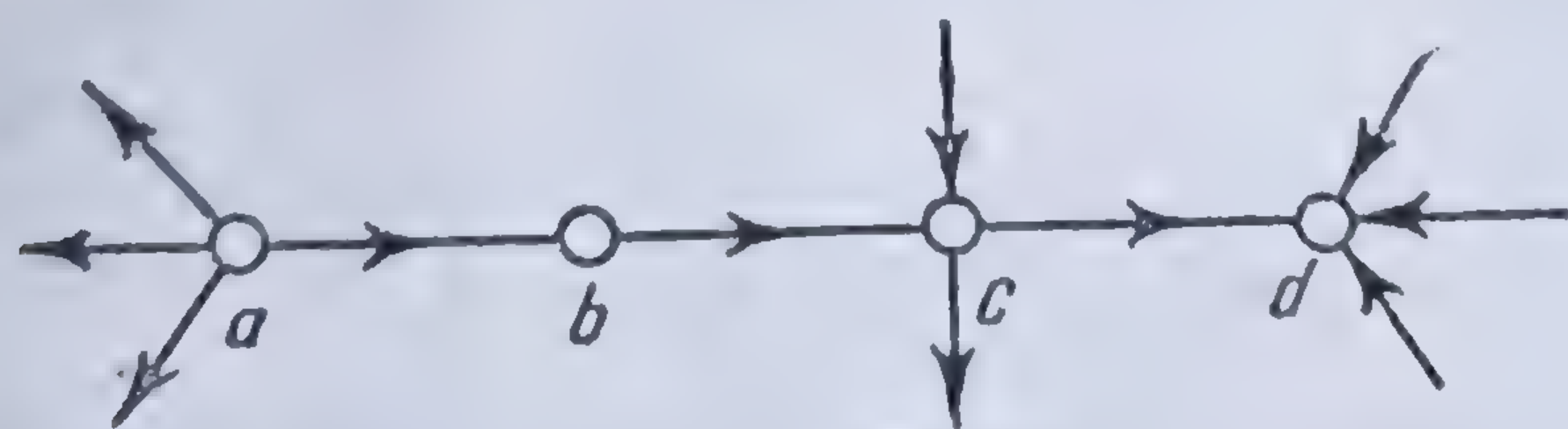


Fig. 6.27. Diverse tipuri de noduri.

Un nod care are o latură, și numai una singură, convergentă și o latură, și numai una singură, divergentă se numește un *nod lanț* (Ex.: nodul  $b$  din figura 6.27).

Se numește *nod sursă* nodul din care ies una sau mai multe laturi (Ex.: nodul  $a$  din figura 6.27) și *nodul puț* sau *nod absorbant*, nodul în care intră una sau mai multe laturi (Ex.: nodul  $d$  din figura 6.27); nodurile sursă sau puț,

\* Vezi 10.4.

\*\* Grafurile care reprezintă sistemul de ecuații (6.58) se numește *graf de confluență* sau *graf Coates* [85]; acela care reprezintă sistemul de ecuații (6.59) se numește *graf de fluență* sau *graf de transfer* sau *graf MASON* [181]. În expunerea de față nu ne ocupăm decât de grafurile de transfer.



care nu au decât câte o singură latură, se numesc noduri sursă sau puț *simple*. Nodurile care nu sînt nici surse și nici puțuri se numesc *noduri secundare* (Ex : nodul  $o$  din figura 6.27).

Se numește *graf complet* (sau numai *graf*) graficul sistemului fizic corespunzător ; o parte dintr-un graf se numește *subgraf*.

O *cale* este un subgraf continuu conținînd, în afară de noduri lanț, un nod sursă simplu și un nod puț simplu. Prin *continuitatea* unui graf se înțelege posibilitatea de a uni un nod al grafului de un oricare alt nod al grafului parcurgînd ramurile acestuia ; în acest parcurs se neglijează direcția ramurilor.

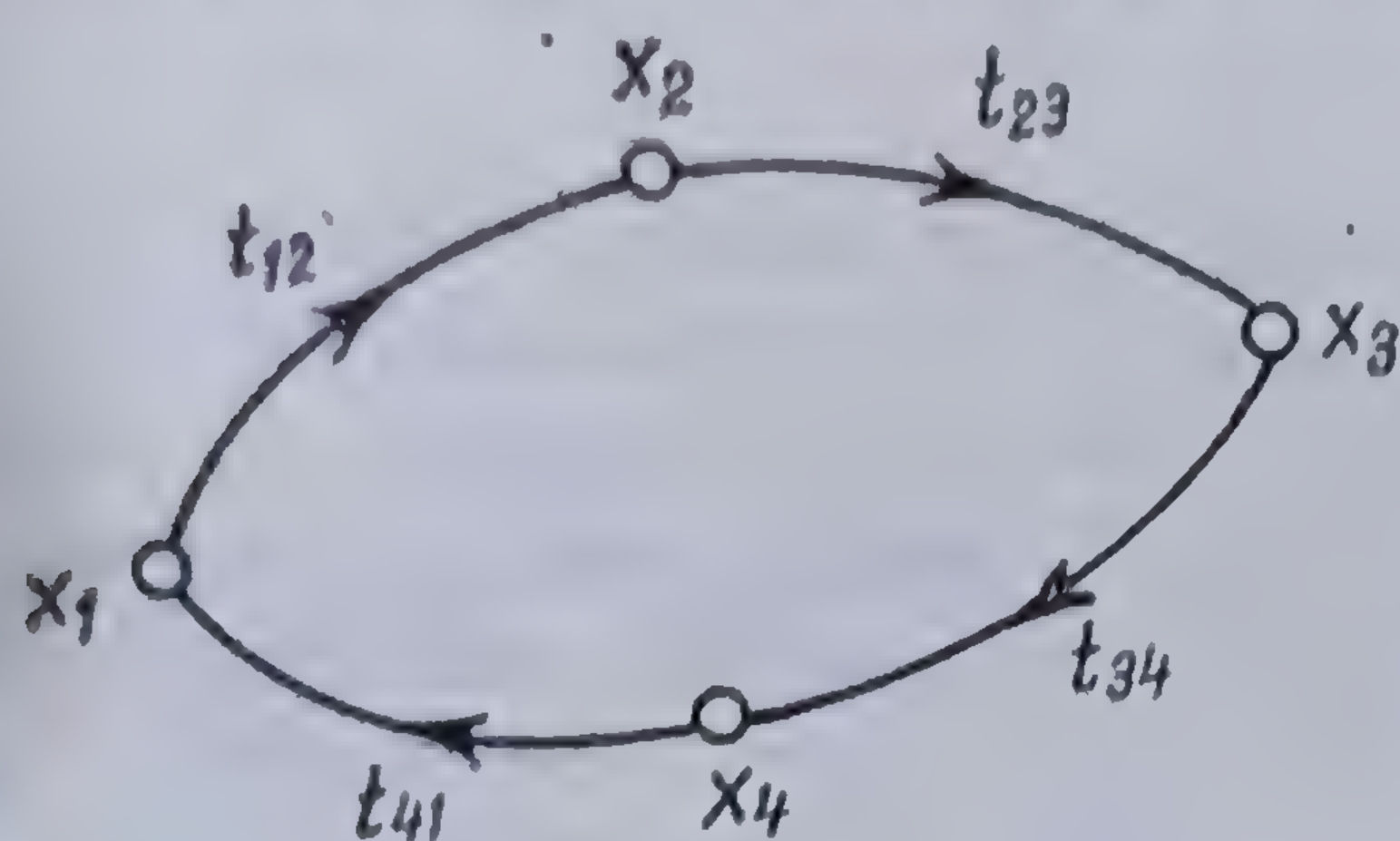


Fig. 6.28. Buclă.

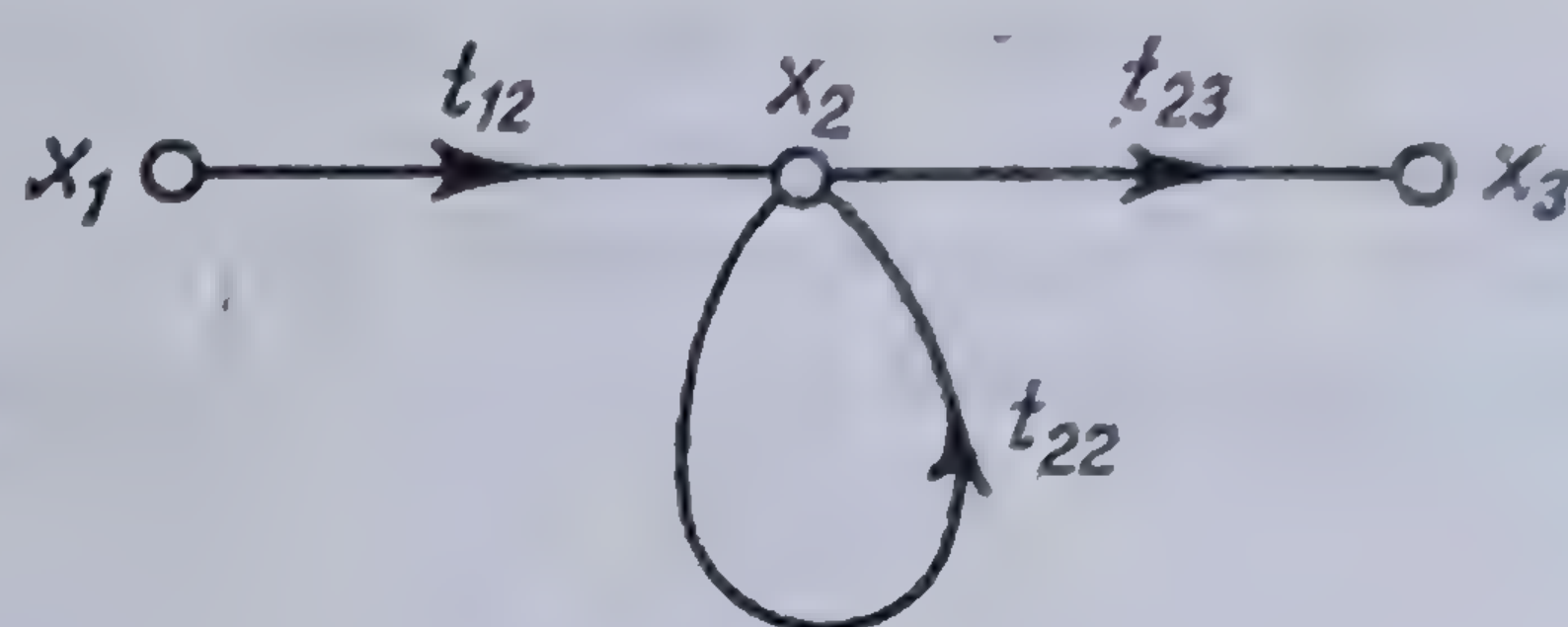


Fig. 6.29. Buclă proprie.

Dacă nodul sursă simplu și nodul puț simplu al unei căi sînt nodurile sursă și puț ale grafului complet ale sistemului, atunci calea se numește o *cale directă*.

Cînd un semnal parcurge o porțiune dintr-un graf de transfer de-a lungul diverselor laturi și în sensul orientării acestora se zice că semnalul parcurge un *lanț*.

Orice lanț care pleacă dintr-un anumit nod (o sursă) pentru a ajunge la un nod de natură diferită (un puț) constituie o *cascadă*. Laturile și nodurile care aparțin acestui lanț sînt laturile și nodurile cascadei.

O *bucă* este un subgraf continuu care nu conține decât noduri lanț (fig. 6.28).

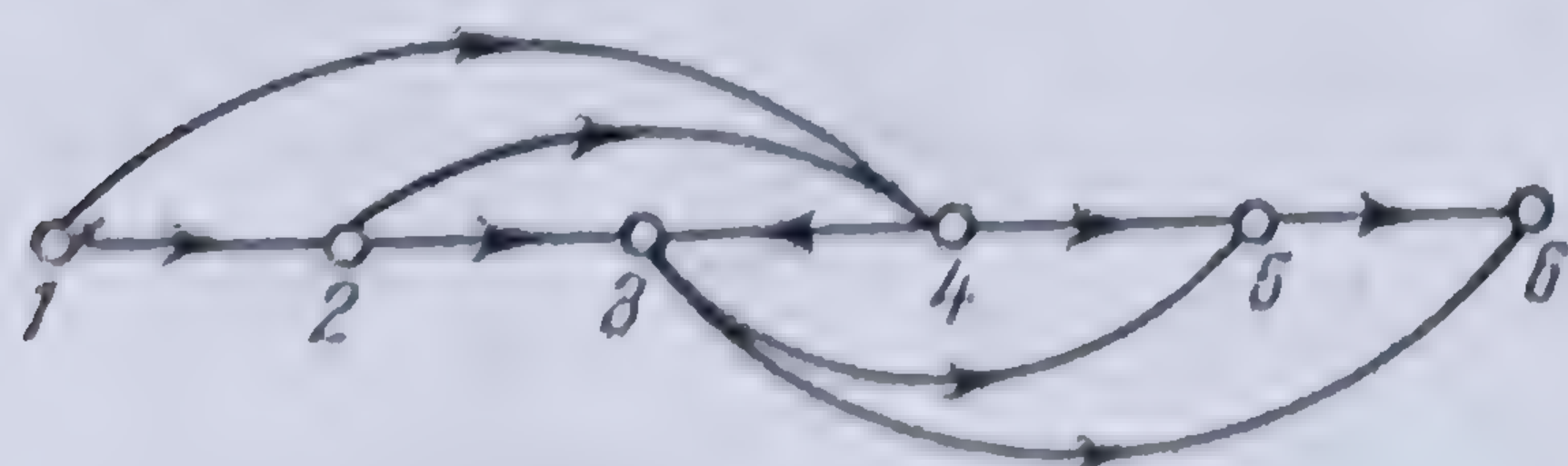
O *bucă proprie* este o buclă avînd un singur nod lanț (fig. 6.29) ; transmitanța unei asemenea bucle se numește uneori *transmitanța proprie*.

Un graf care comportă numai cascade se numește un *graf de cascade* (fig. 6.30, a) ; dacă graful conține numai bucle, se numește un *graf de bucle* (fig. 6.30, b).

Se numește *nod esențial* nodul asociat unei bucle proprii ; un *nod esențial izolat* este deci un nod lanț.

*Nodul neesențial* este nodul care nu este asociat unei bucle simple ; un nod lanț este un exemplu de nod neesențial.

Pentru exemplificare să considerăm graficul din figura 6.31 care este constituit din cinci noduri, șase laturi, o buclă și o buclă proprie, fiecare nod reprezentînd o variabilă a sistemului.



a)



b)

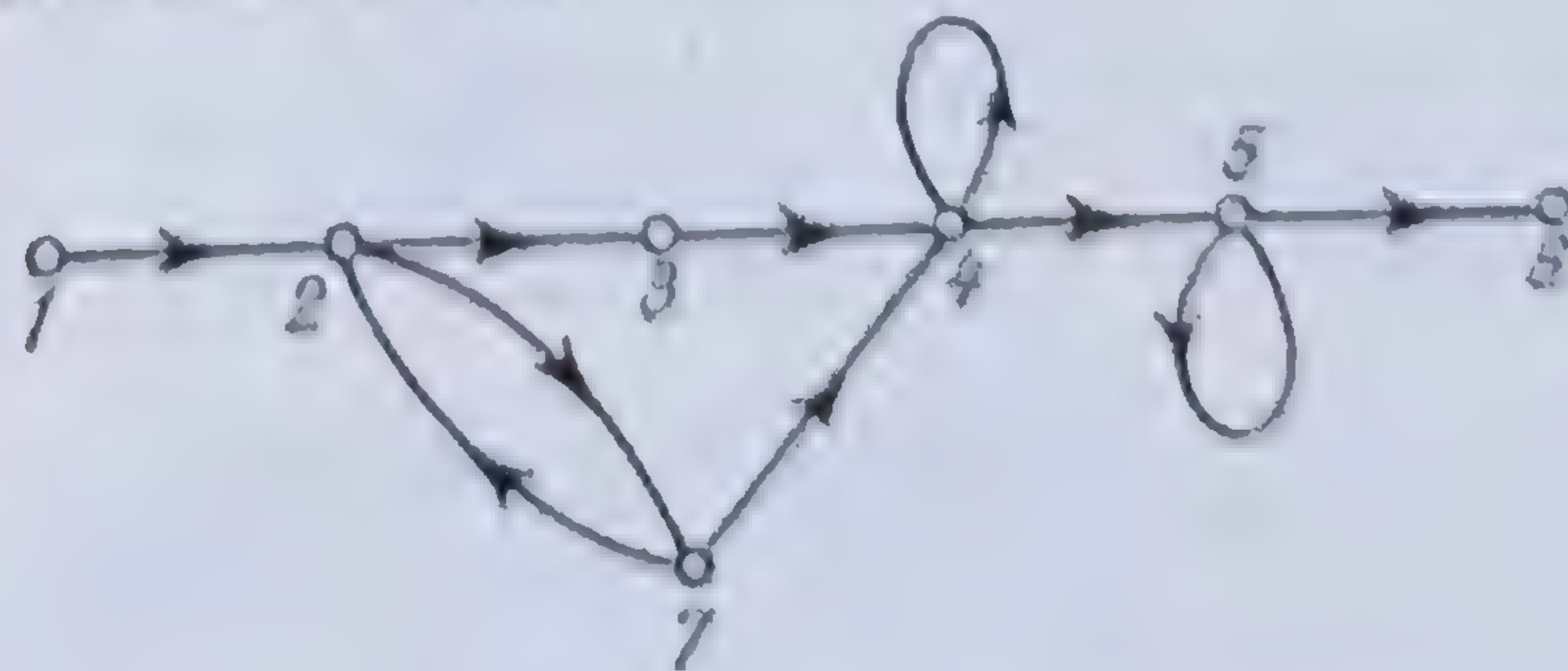


Fig. 6.31. Exemplu de graf de transfer.

Fig. 6.30. Graf de cascade (a) și graf de bucle (b).



Conform definițiilor date, acest graf are

- șapte noduri (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
- opt laturi (1—2, 2—3, 3—4, 4—5, 5—6, 2—7, 7—2, 7—4)
- două căi directe (1—2—3—4—5—6, 1—2—7—4—5—6)
- o buclă (2—7—2)
- două bucle simple (4—4, 5—5)
- două noduri esențiale (4, 5)
- patru noduri neesențiale (1, 2, 3, 6, 7)
- un nod sursă (1)
- un nod puț (6)
- cinci noduri secundare (2, 3, 4, 5, 7).

**6.3.2.2. Arborele unui graf.** Graful asociat unui circuit electric pune în evidență un număr de bucle, sau ochiuri, prin care poate circula curentul electric, proprietate absolut necesară pentru existența curenților electrici în circuitul electric real. Această proprietate a unui graf poate fi desființată prin suprimarea unor anumite laturi, judicios alese, din graf. Se obține astfel *arborele grafului*.

Un arbore este definit ca mulțimea de linii frânte, care unește toate nodurile unei rețele, astfel ca în graful asociat să nu formeze nici o buclă. Dacă numărul de noduri ale rețelei este  $N$ , numărul minim de laturi care unește aceste noduri între ele este egal cu

$$P = N - 1.$$

Se vede că acest număr coincide cu numărul de perechi de noduri independente ale rețelei\*. Aceste  $N - 1$  legături se numesc *laturile* sau *ramurile* arborelui. Dacă  $L$  este numărul total de laturi ale rețelei, atunci, numărul de laturi suprimate pentru a desface buclele este

$$B = L - N + 1,$$

care coincide chiar cu numărul total de bucle independente al rețelei \*\*.

Este ușor de văzut că pentru un anumit graf pot exista mai multe posibilități de a realiza un arbore (fig. 6.32).

**6.3.2.3. Despicarea unui nod. Indicele unui graf.** Despicarea unui nod constă în separarea unui nod secundar în două părți, o jumătate constituind o sursă, cealaltă jumătate constituind un puț (fig. 6.33). Despicarea unui nod are drept consecință deschiderea unei bucle.

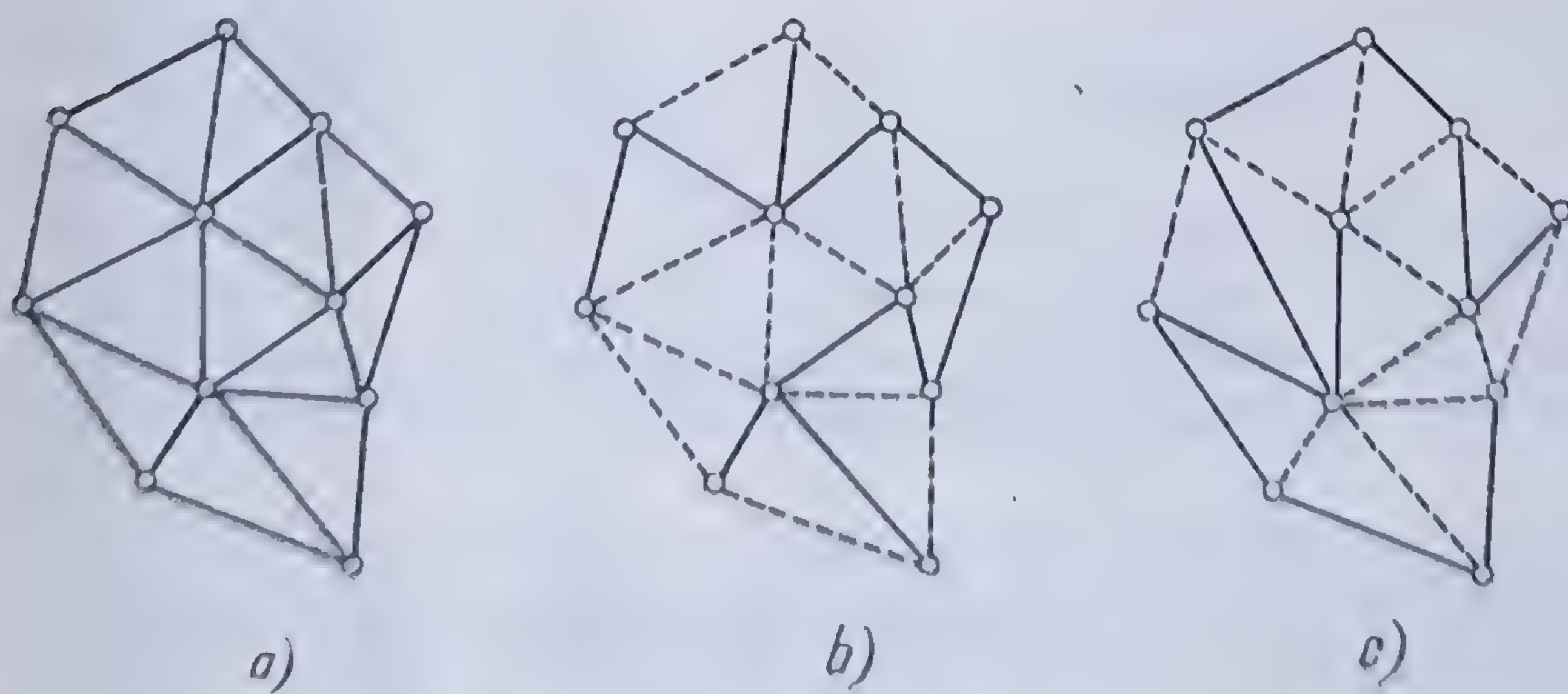


Fig. 6.32. Arborii unui graf.  
a) graful dat; b) și c) doi arbori diferiți

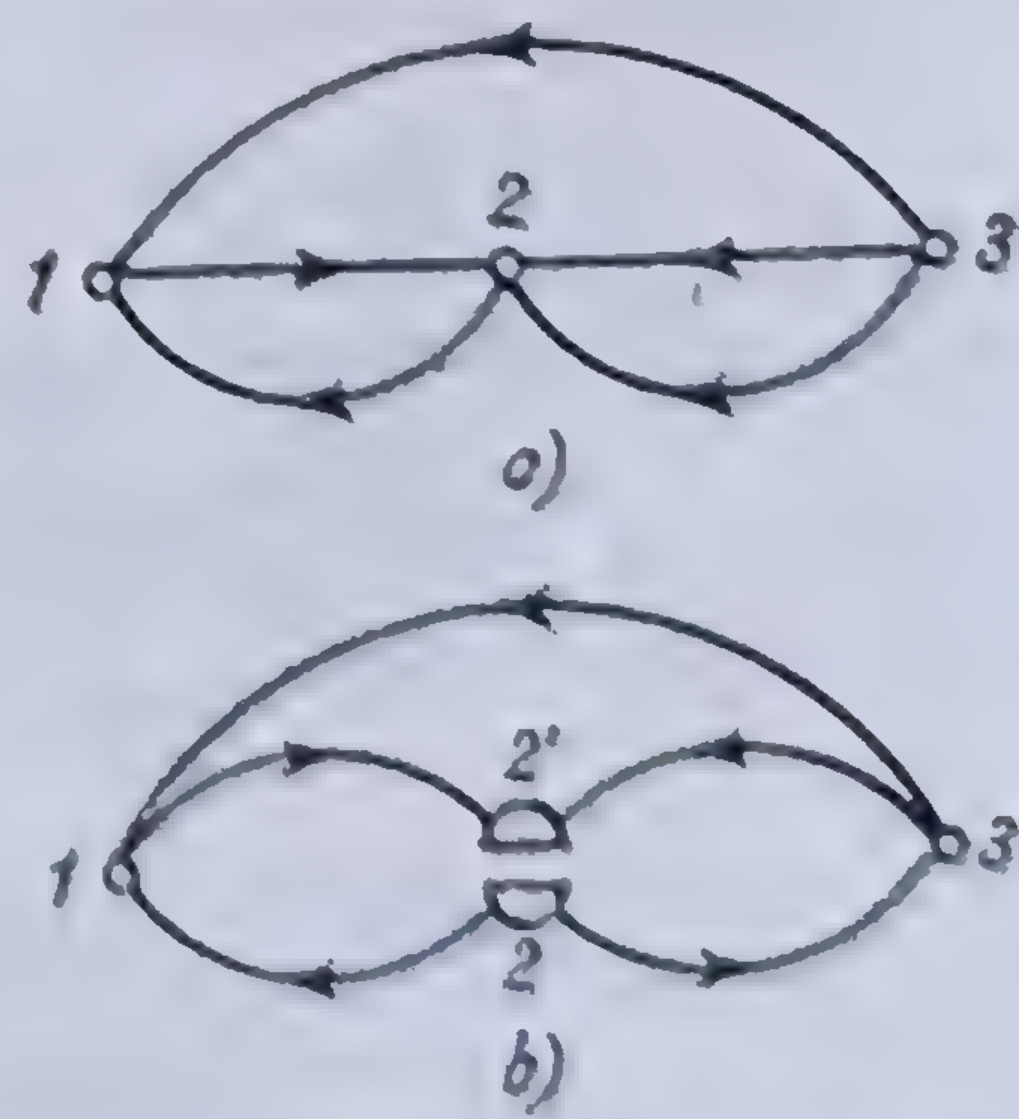


Fig. 6.33. Despicarea unui nod.  
a) Graful dat; b) graful cu nodul 2 despicat

\* Vezi 2.3.1.3.

\*\* Vezi 2.3.1.3.



Se definește *indicele unui graf* ca fiind numărul total de noduri care trebuie despicate pentru a suprima toate buclele unui graf. Astfel indicele grafului din figura 6.33 este egal cu unu; graful din figura 6.31 este de indice trei întrucît, pentru a suprima toate buclele trebuie despicate trei noduri (nodurile 2, 4 și 5); un graf cascadă este de indice zero.

**6.3.2.4. Legătura funcțională dintre grafurile de transfer și sistemul de ecuații algebrice lineare.** Fie sistemul de ecuații

$$x_2 = t_{12}x_1 + t_{32}x_3,$$

$$x_3 = t_{13}x_1 + t_{23}x_2.$$

Acest sistem are o singură variabilă independentă  $x_1$ . Construcția grafului corespunzător este imediată (fig. 6.34): din prima ecuație rezultă că nodul

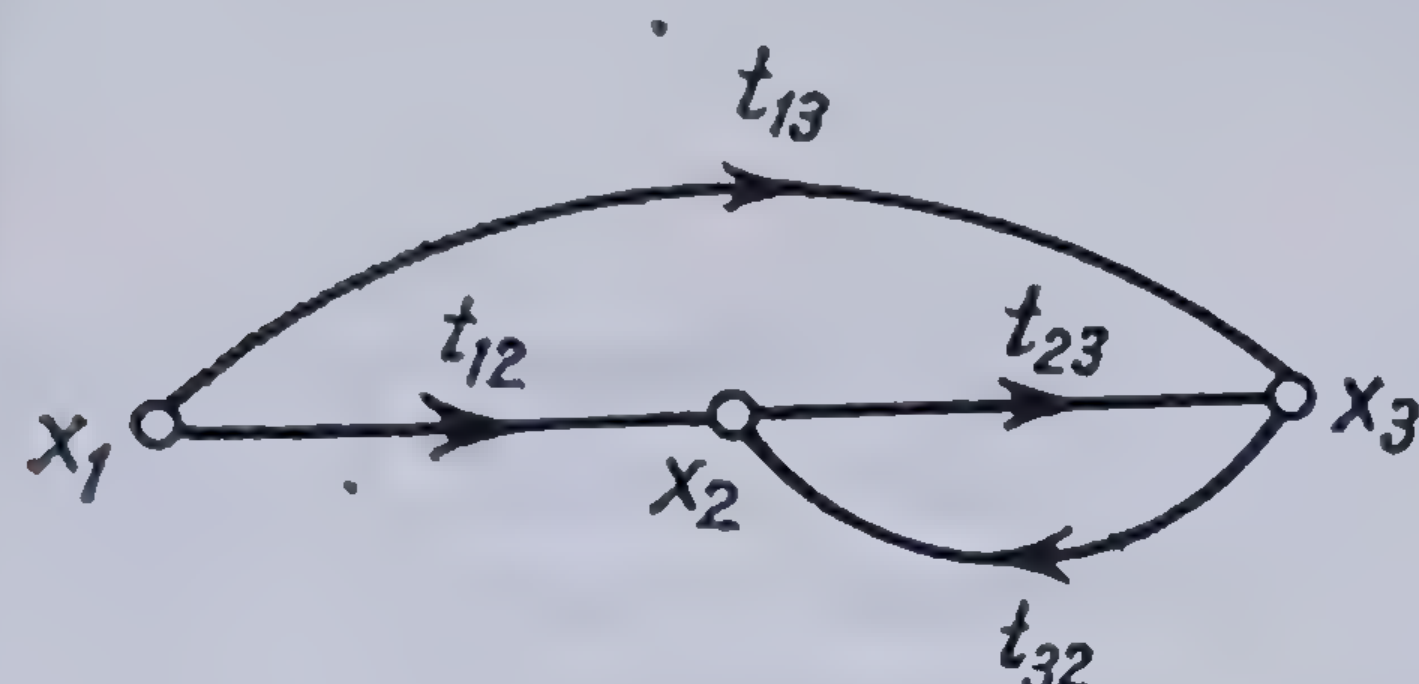


Fig. 6.34. Trasarea unui graf cu o singură variabilă independentă

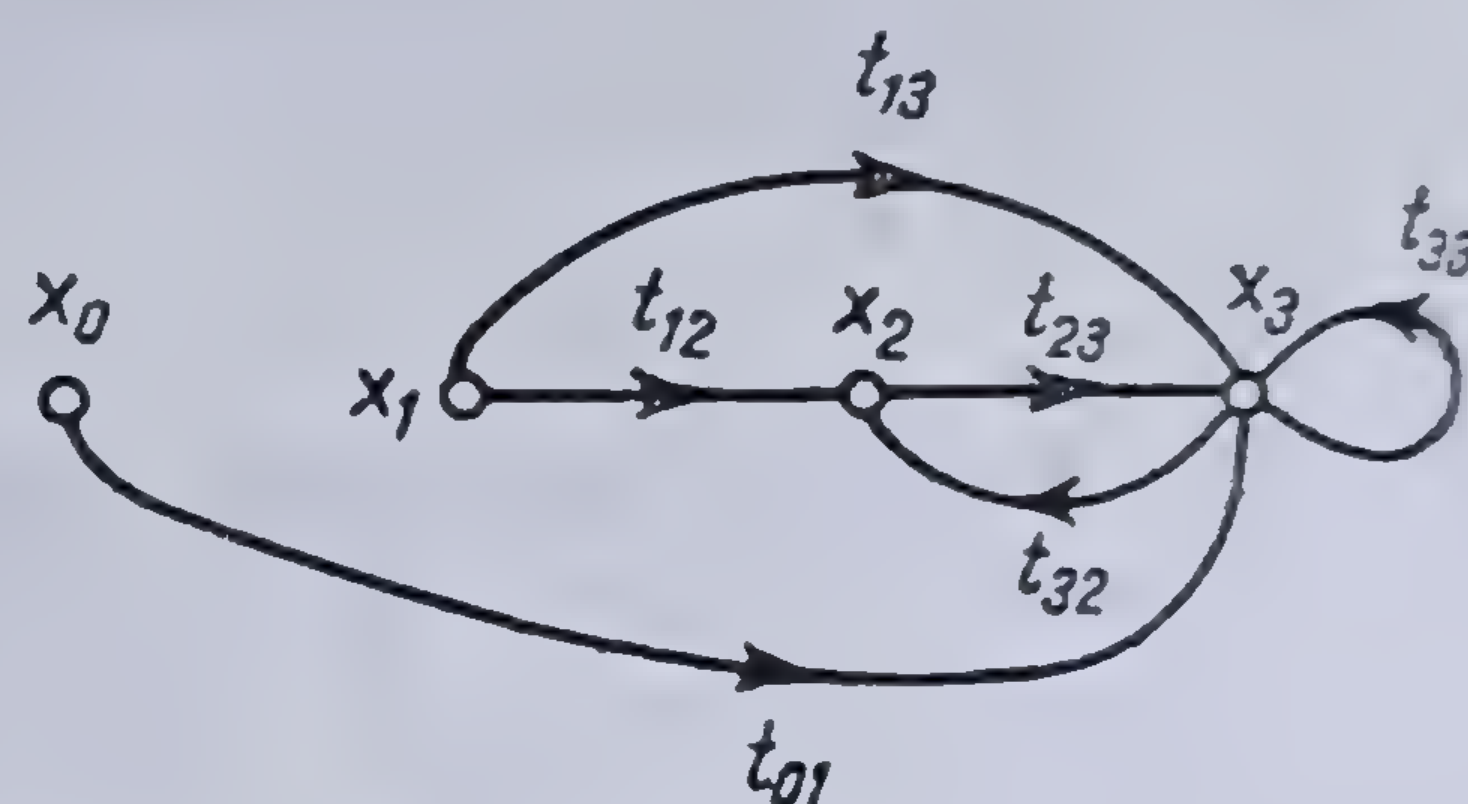


Fig. 6.35. Trasarea unui graf cu două variabile independente

$x_2$  primește semnale atât de la nodul  $x_1$ , cât și de la nodul  $x_3$ , iar nodul  $x_3$  primește semnale de la nodurile  $x_1$  și  $x_2$ .

Reciproc, cunoscînd graful sistemului dat, se poate stabili cu ușurință sistemul de ecuații corespunzător: se observă că nodul  $x_1$  este un nod sursă iar nodurile  $x_2$  și  $x_3$  sînt noduri secundare; de asemenea se vede că nodul  $x_2$  primește semnale de la nodurile  $x_1$  și  $x_3$ , iar nodul  $x_3$  primește semnale de la nodurile  $x_1$  și  $x_2$ . Scriind relațiile respective, se obțin ecuațiile respective.

Fie acum sistemul de ecuații

$$x_2 = t_{12}x_1 + t_{32}x_3$$

$$x_3 = t_{03}x_0 + t_{13}x_1 + t_{23}x_2 + t_{33}x_3.$$

De data aceasta, sînt două variabile independente,  $x_0$  și  $x_1$ . Urmînd aceeași regulă ca în cazul precedent, graful corespunzător se construiește imediat. Trebuie observat că în nodul  $x_3$  este — de data aceasta — și o buclă proprie de transmitanță proprie  $t_{33}$  (fig. 6.35). Operația inversă se face în același mod.

**6.3.2.5. Reducerea grafurilor de transfer. Metoda pas cu pas.** Reducerea unui graf de transfer constă în a exprima semnalul la un anumit nod, considerat ca răspunsul sistemului, în funcție de unul sau mai multe semnale la alte noduri, considerate ca excitații sau mărimi de intrare. Reducerea grafului constă deci



în eliminarea anumitor noduri ale grafului inițial pentru a se obține un *graf rezidual* conținând numai variabilele care interesează.

Pentru a se realiza practic reducerea grafului se separă nodul de intrare și nodul de ieșire, între care urmează să se determine *transmitanța reziduală* căutată. Dacă  $x_e$  este nodul de ieșire și  $x_i$  nodul de intrare, atunci expresia acestei transmitanțe este

$$T = \frac{x_e}{x_i}$$

Transmitanța reziduală se poate calcula și între două noduri de ieșire oarecare; astfel, dacă  $x_i$  e nodul de intrare, iar nodurile de ieșire sînt  $x'_e$  și  $x''_e$ , atunci transmitanța reziduală între aceste noduri e dată de relația

$$T' = \frac{x'_e}{x''_e} = \frac{\left(\frac{x''_e}{x_i}\right)}{\left(\frac{x'_e}{x_i}\right)}$$

Reducerea unui graf de transfer constă în eliminarea succesivă a nodurilor secundare cuprinse între cele două noduri între care se determină transmitanța reziduală. Pentru aceasta se utilizează unele transformări simple a căror justificare este imediată prin rezolvarea ecuațiilor corespunzătoare (Tab. 6.3).

Transformarea unui graf prin eliminarea nodurilor secundare conduce la un reziduu care nu conține decît surse, puțuri și noduri esențiale la care sînt legate bucle proprii. Aceste bucle proprii au o influență particulară asupra transmitanței reziduale pe care voim să o calculăm. Fie un graf format din nodurile  $x_1$ ,  $x_2$  și  $x_3$ , avînd transmitanțele  $a_1$  și  $a_2$  și o buclă proprie, avînd transmitanța  $g$  (fig. 6.36, a). Să despicăm nodul  $x_2$  și fie  $x'_2$  și  $x''_2$  semnalele corespunzătoare celor două jumătăți (fig. 6.36, b). Se pot scrie următoarele ecuații :

$$x'_2 = a_1 x_1 + g x''_2,$$

$$x_3 = a_2 x''_2.$$

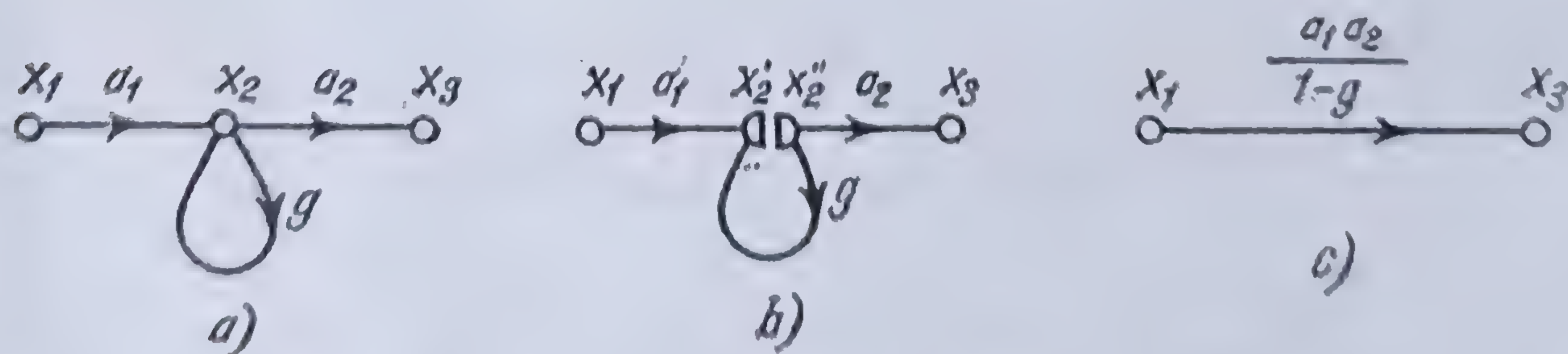


Fig. 6.36. Graf cu buclă proprie și reducerea lui.

Verificînd că cele două semnale  $x'_2$  și  $x''_2$  sînt identice la nodul  $x_3$ , rezultă

$$a_1 x_1 + \frac{g}{a_2} x_3 = \frac{1}{a_2} x_3$$



și deci (fig. 6.36, c),

$$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1 - g} x_1. \quad (6.60)$$

Relația (6.60) arată cum se reduce o buclă proprie. Transmitanța buclei proprii,  $g$ , se numește *cîștigul buclei* și diferența  $d = 1 - g$ , se numește *diferența de buclă* sau *diferența de întoarcere*.

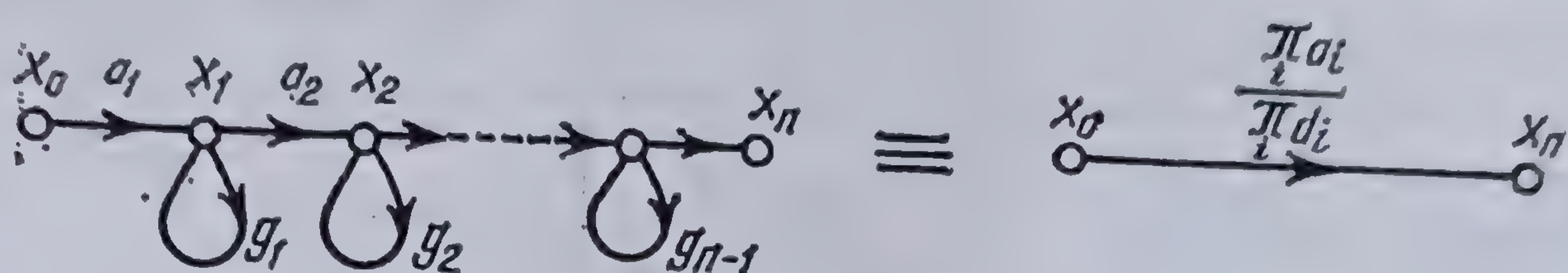


Fig. 6.37. Graf cascadă cu bucle proprii.

În cazul unui graf în cascadă comportînd bucle proprii (fig. 6.37), printr-un calcul analog se determină transmitanța reziduală sub forma

$$T = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdot \dots \cdot (1 - g_n)} = \frac{\prod_i a_i}{\prod_i d_i},$$

care constituie o generalizare a relației (6.60).

Este evident că se poate determina transmitanța echivalentă pentru orice graf conținînd bucle proprii cu condiția ca  $g \neq 1$ .

*Operația de inversare a unui graf de transfer* are ca scop transformarea acestuia într-unul mai simplu. Fie graful din figura 6.38, a reprezentat de ecuația

$$x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3.$$

Inversarea acestui graf constă în a transforma un nod puț în nod sursă și un nod sursă în nod puț. Fie să transformăm nodul  $x_4$  în sursă și nodul  $x_1$  în puț. Ecuația corespunzătoare se obține imediat din precedenta,

$$x_1 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3 + \frac{1}{a}x_4$$

și graful corespunzător e dat în figura 6.38, b.

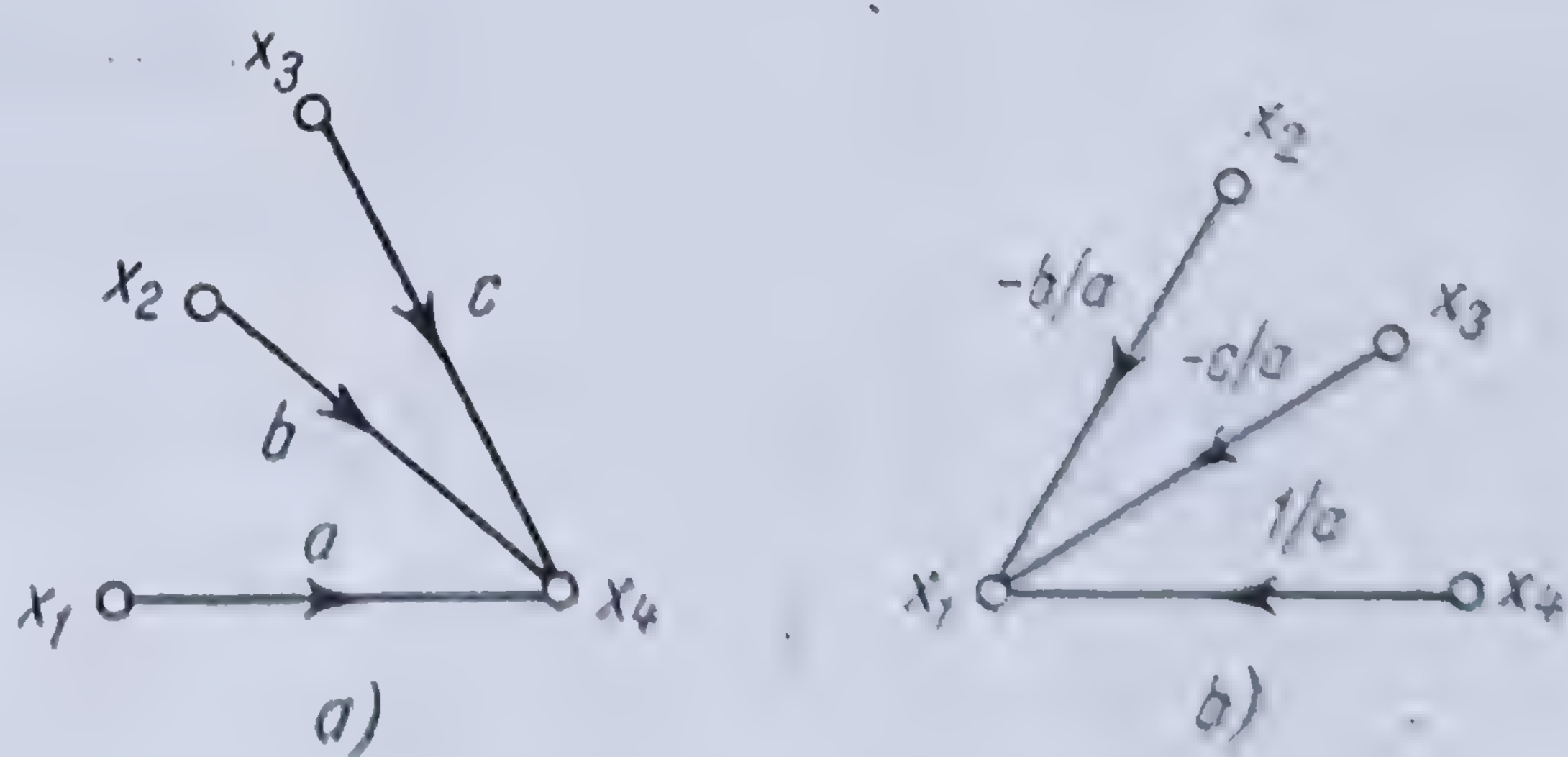


Fig. 6.38. Inversarea unui graf.

Rezultă dar că inversarea laturii  $x_1 - x_4$  s-a tradus prin suprimarea laturilor  $x_2 - x_4$  și  $x_3 - x_4$  și crearea de noi laturi  $x_2 - x_1$  și  $x_3 - x_1$  de transmitanță respectivă  $-\frac{b}{a}$  și  $-\frac{c}{a}$ ; nodurile  $x_2$  și  $x_3$  rămîn noduri surse, nodul  $x_1$  a devenit un



# TRANSFORMĂRI ELEMENTARE DE GRAFURI

Tabloul 6.3

Nr. curent	Operația	Sistemul de ecuații	Graful dat	Sistemul de ecuații redus	Graful corespunzător
1	Sumarea	$x_2 = ax_1 + bx_1$		$x_2 = (a+b)x_1$	
2	Înmulțirea	$x_2 = ax_1$ $x_3 = bx_2$		$x_3 = abx_1$	
3	Reducere de nod secundar Nodul $x_3$	$x_3 = ax_1 + bx_2$ $x_4 = cx_3$		$x_4 = acx_1 + bcx_2$	
4	Reducere de nod secundar Nodul $x_3$	$x_3 = ax_1 + dx_5$ $x_2 = bx_3$ $x_4 = cx_3$		$x_2 = abx_1 + bdx_5$ $x_4 = acx_1 + cdx_5$	
5	Reducere de nod secundar Nodul $x_2$	$x_1 = cx_2$ $x_2 = ax_1$ $x_3 = bx_2$		$x_1 = acx_1$ $x_3 = abx_1$	
6	Reducere de buclă proprie			$x_3 = \frac{a_1 a_2}{1-g} x_1$	
7	Inversiunea unui graf	$x_4 = ax_1 + bx_2 + cx_3$		$x_1 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3 + \frac{1}{a}x_4$	
8	Dedublarea unui nod neesențial	$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & bd \\ ac & cd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}$		$x_2 = b \begin{bmatrix} a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}$ $x_4 = c \begin{bmatrix} a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}$	
9	Dedublarea unui nod esențial	$\begin{bmatrix} a & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$ $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} x_2$		$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \frac{1}{1-g} \begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	



puț și nodul  $x_4$ , o sursă iar transmitanța laturii inversate este egală cu inversa transmitanței inițiale.

*Operația de dedublare a nodurilor* unui graf de transfer are ca scop simplificarea schemei grafului și în acest mod să se poată efectua reducerea lui mult mai simplu și direct fără a fi necesar să se treacă prin calculul algebric. Dedublarea nodurilor poate fi practică atât asupra nodurilor neesențiale cît și asupra nodurilor esențiale, structura funcțională a grafului rămînînd neschimbată. De asemenea, fiecare dublură a nodului poate fi dedublă la rîndul ei și această operație poate fi repetată ori de cîte ori este necesar și aceasta, pînă se obțin structuri simple a căror reducere este evidentă.

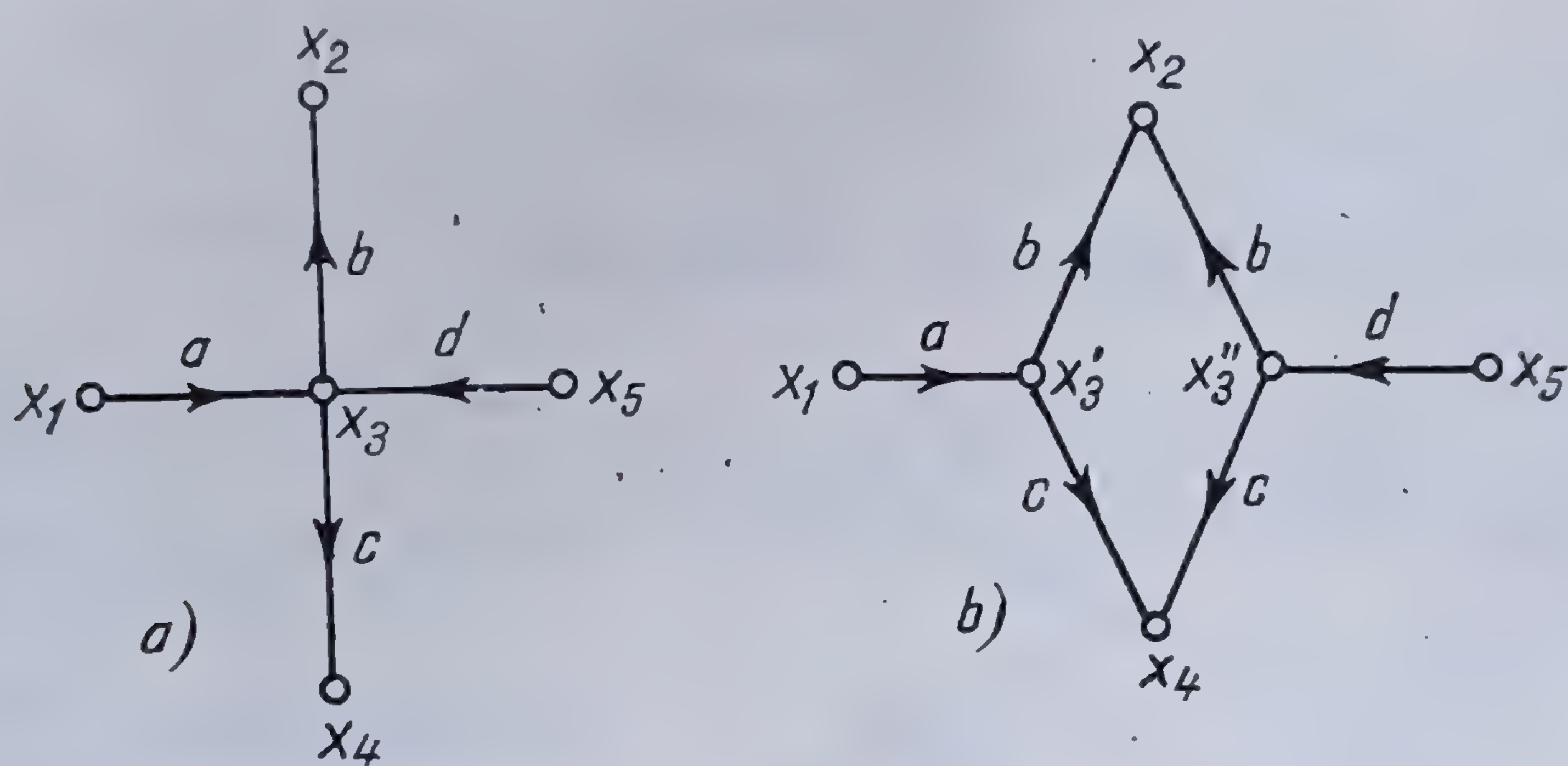


Fig. 6.39. Dedublarea unui nod neesențial.

Pentru justificarea dedublării unui *nod neesențial* să considerăm graful din figura 6.39, a. Sistemul de ecuații care dă semnalele de răspuns la nodurile  $x_2$  și  $x_4$  în funcție de semnalele de excitație de la nodurile  $x_1$  și  $x_5$  și de transmitanțele corespunzătoare este

$$x_2 = abx_1 + bdx_5$$

$$x_4 = acx_1 + cdx_5$$

sistem care poate fi scris matriceal sub forma

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & bd \\ ac & cd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Această ecuație matriceală poate fi scrisă

$$x_2 = b \begin{bmatrix} a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = c \begin{bmatrix} a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix};$$

sub această formă ele corespund figurii 6.39, b.



Scrierea matriceală a funcționării sistemului reprezentat prin graful de transfer din figura 6.39 arată cum poate fi generalizată problema dedublării nodurilor neesențiale.

Trebuie observat că dedublarea efectuată, dublează nodul  $x_2$  în două noduri identice; această operație se mai numește și *dedublarea identică a unui nod*.

Pentru justificarea dedublării unui *nod esențial* să considerăm graful din figura 6.40, a. Ecuațiile care dau funcționarea sistemului respectiv sînt

$$x_2 = ax_1 + gx_2 \quad (6.61)$$

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= bx_2 \\ x_4 &= cx_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

Serise sub formă matriceală, aceste ecuații sînt:

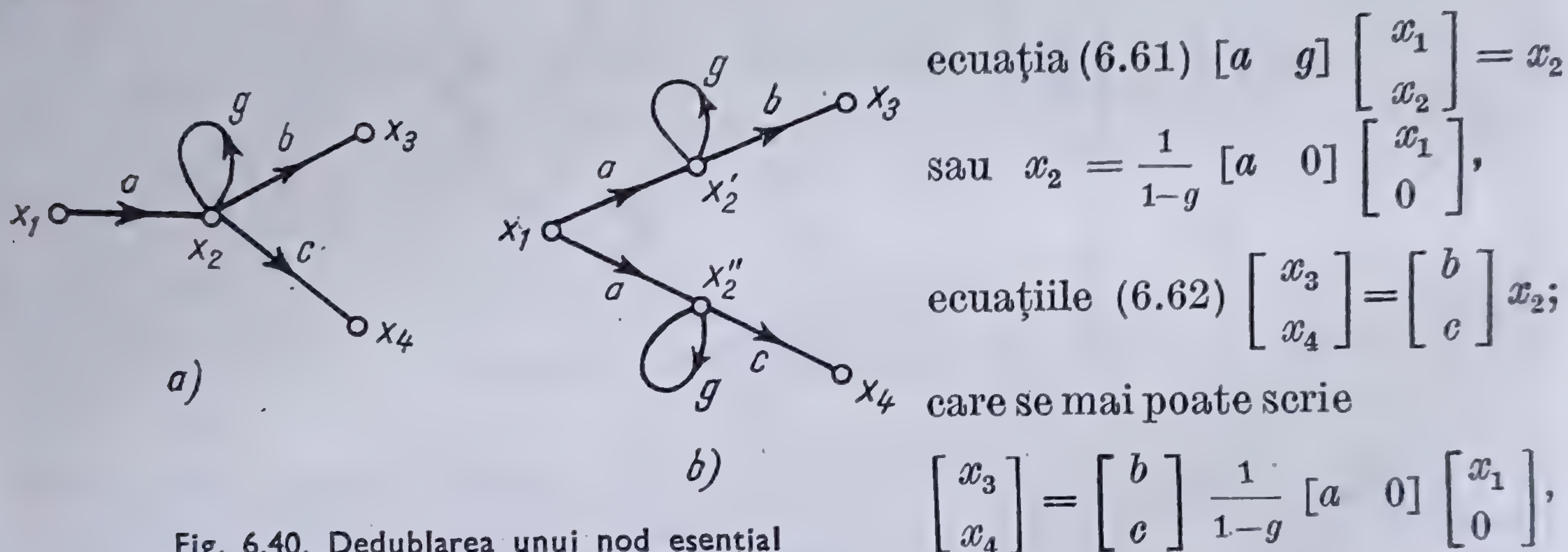


Fig. 6.40. Dedublarea unui nod esențial

ultima ecuație corespunzînd figurii 6.40, b. Generalizarea este imediată.

Operația de creare a unei bucle proprii este de asemenea utilă în reducerea grafurilor de transfer complexe. Fie graful din figura 6.41, a. Dedublînd nodul  $x_3$  se obține graful din figura 6.41, b. Dacă se elimină nodul  $x_3$  prin aplicarea regulii de multiplicare\*, rezultă bucla proprie a nodului esențial  $x_2$  cu transmitanța (sau câștigul buclei) (fig. 6.41, c)

$$g = bc.$$

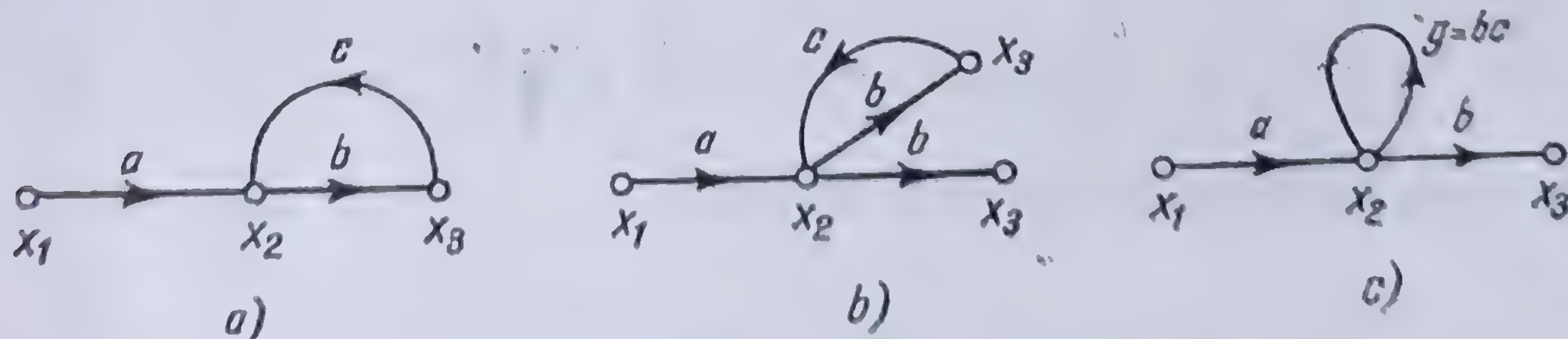


Fig. 6.41. Crearea unei bucle proprii.

Justificarea operației se face imediat scriind ecuațiile de funcționare ale sistemului reprezentat prin graful de transfer dat.

\* Regula 2 din tabloul 6.3.



Ca un exemplu de aplicație, fie de redus graful de transfer din figura 6.42, a. Operațiile succesive pentru obținerea transferanței globale se pot urmări pe figura 6.42 și sint următoarele:

— se elimină nodul  $x_2$  prin dedublarea lui și prin reducerea unui nod secundar (fig. 6.42, b și c);

— se elimină nodul  $x_4$  prin cuadruplarea lui și prin aplicarea regulii produsului și a sumei (fig. 6.42 d și e).

— Se dublează nodul  $x_3$  (fig. 6.42, f).

— Se elimină nodurile  $x'_3$  și  $x''_3$  (fig. 6.42, g).

— Se elimină nodul  $x_5$  găsindu-se transmitanța reziduală

$$T_{61} = \frac{a b c d f}{1 - (bg + ch + dj + bcdk) + bdgj}$$

**6.3.2.6. Reducerea directă a grafurilor de transfer. Formula lui MASON.** Transmitanța dintre două noduri oarecare ale unui graf poate fi calculată direct, utilizând formula lui MASON:\*

$$T = \frac{x_j}{x_0} = \frac{\sum C_i \Delta_i}{\Delta} \quad (6.63)$$

unde  $\Delta$  este determinantul grafului și corespunde determinantului sistemului de ecuații liniare pe care îl reprezintă. Valoarea lui se poate obține prin simpla examinare a grafului de transfer, sub forma

$$\Delta = 1 - \sum T_i + \sum T_i T_j - \sum T_i T_j T_k + \dots + (-1)^n \sum T_i T_j T_k \dots T_n + \dots \quad (6.64)$$

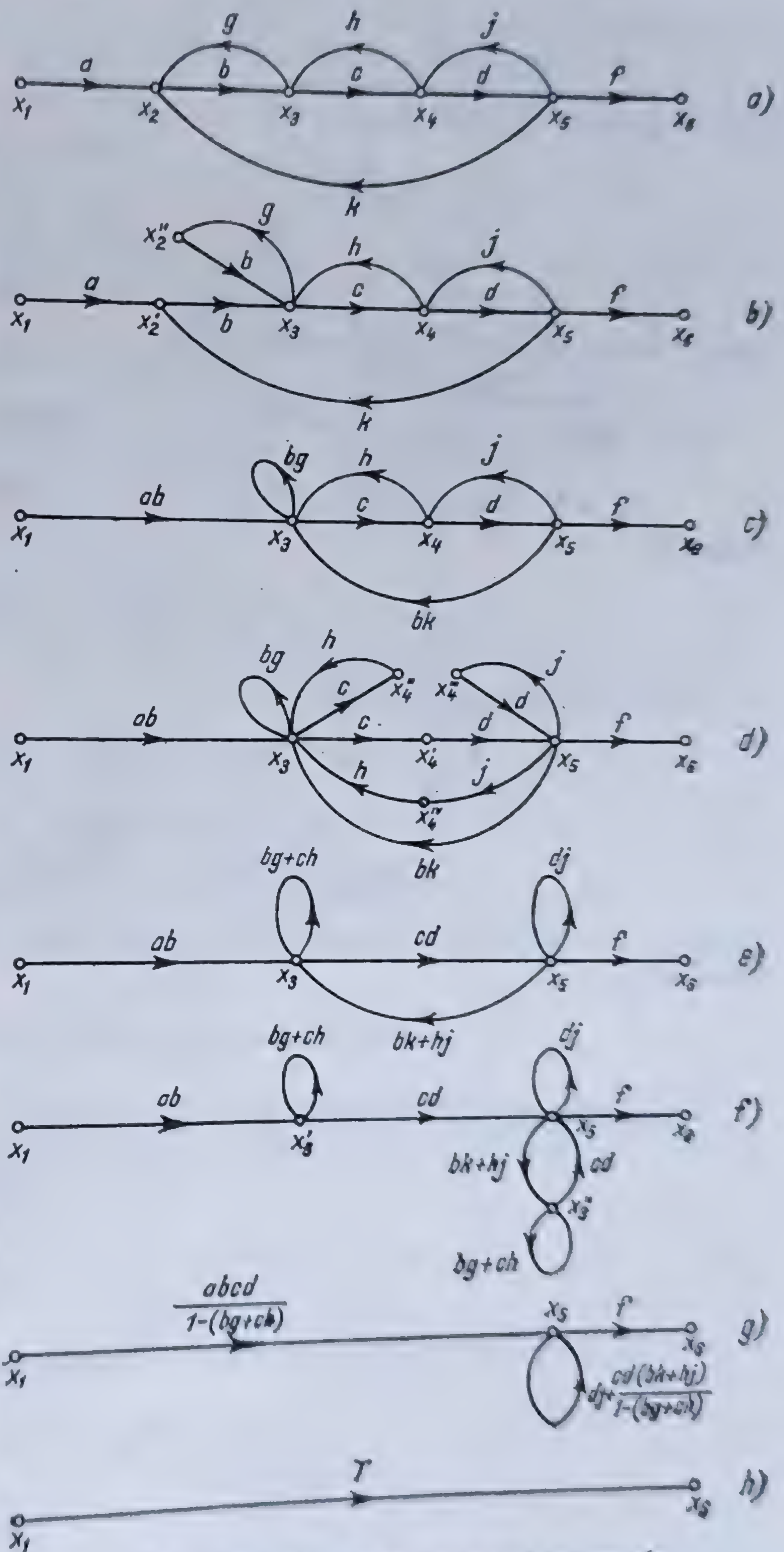


Fig. 6.42. Reducerea unui graf de transfer

\* Vezi [181].



în care :

- $\Sigma T_i$  este suma transmitanțelor tuturor buclelor;
- $\Sigma T_i T_j$  este suma transmitanțelor buclelor disjuncte\* luate câte două;
- $\Sigma T_i T_j \dots T_n$  este suma buclelor disjuncte luate câte  $n$ ;
- $C_i$  este transmitanța cascadei  $i$  între nodul  $x_0$  și  $x_i$ ;
- $\Delta_i$  este determinantul porțiunii din graf care nu atinge cascada  $i$ ;
- se calculează tot cu ajutorul relației (6.64).

Justificarea formulei se face pe diverse căi\*\* ; o cale elementară se poate deduce ținând seama că un graf de transfer nu este altceva decât reprezentarea grafică a unui sistem de ecuații liniare și că deci regula lui MASON corespunde regulii lui CRAMER\*\*\*. Fie pentru aceasta sistemul

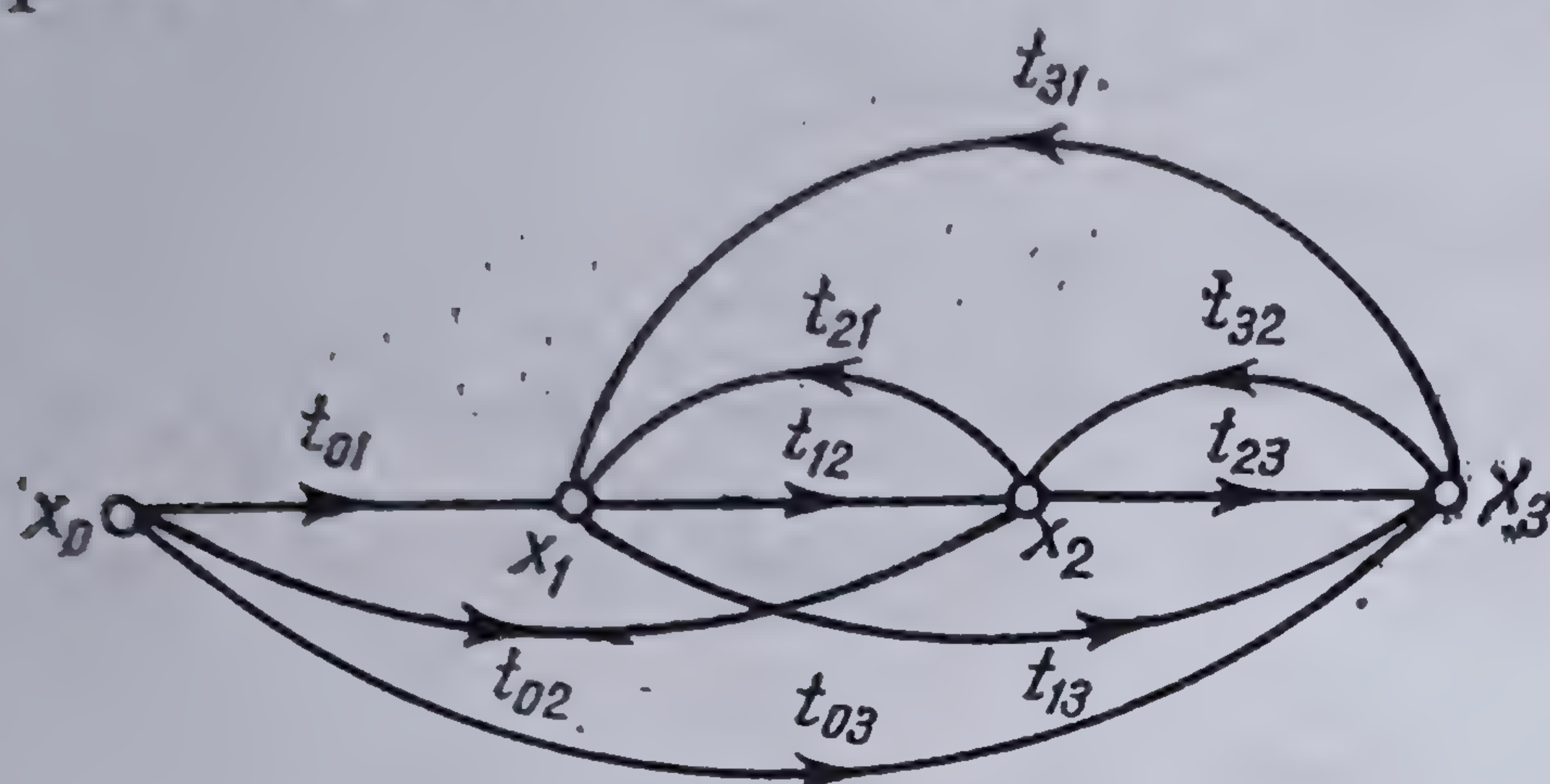


Fig. 6.43. Graful sistemului (6.65).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{10}x_0,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{20}x_0,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{30}x_0.$$

Punînd

$$t_{0i} = \frac{a_{i0}}{a_{ii}} \text{ și } t_{ij} = -\frac{a_{ji}}{a_{jj}} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

sistemul dat se poate scrie

$$\left. \begin{aligned} x_1 - t_{21}x_2 - t_{31}x_3 &= t_{01}x_0, \\ -t_{12}x_1 + x_2 - t_{32}x_3 &= t_{02}x_0, \\ -t_{13}x_1 - t_{23}x_2 + x_3 &= t_{03}x_0, \end{aligned} \right\} \quad (6.65)$$

căruia îi corespunde graful din figura 6.43. Să determinăm, de exemplu, transferanța

$$T_{10} = \frac{x_1}{x_0}.$$

Aplicînd regula lui CRAMER, se găsește

$$T_{10} = \frac{\begin{vmatrix} t_{01} & -t_{21} & -t_{31} \\ t_{02} & 1 & -t_{32} \\ t_{03} & -t_{23} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -t_{21} & -t_{31} \\ -t_{12} & 1 & -t_{32} \\ -t_{13} & -t_{23} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

\* Prin bucle disjuncte se înțeleg acele bucle care nu au nici un nod comun.

\*\* Vezi [83] pag. 68 sau [181] pag. 36

\*\*\* Vezi [162] pag. 151.



Dezvoltind determinantul de la numitor avem

$$\Delta = 1 - (t_{12}t_{21} + t_{23}t_{32} + t_{31}t_{13} + t_{12}t_{23}t_{31} + t_{13}t_{32}t_{21}) = 1 - \Sigma T_i$$

adică determinantul grafului căci  $t_{ij}t_{ji}$  și  $t_{ij}t_{jk}t_{ki}$  constituie transmitanțele buclelor grafului nedisjuncte, graful neavînd bucle disjuncte.

De asemenea, dezvoltînd determinantul de la numărător se obține

$$\Delta_1 = t_{01}(1 - t_{23}t_{32}) + t_{02}t_{21} + t_{02}t_{23}t_{31} + t_{03}t_{31} + t_{03}t_{32}t_{21} = \Sigma C_i \Delta_i,$$

graful obținut prezentînd cinci cascade și numai o singură buclă disjunctă ( $t_{23}t_{32}$ ) în raport cu cascada  $t_{01}$ .

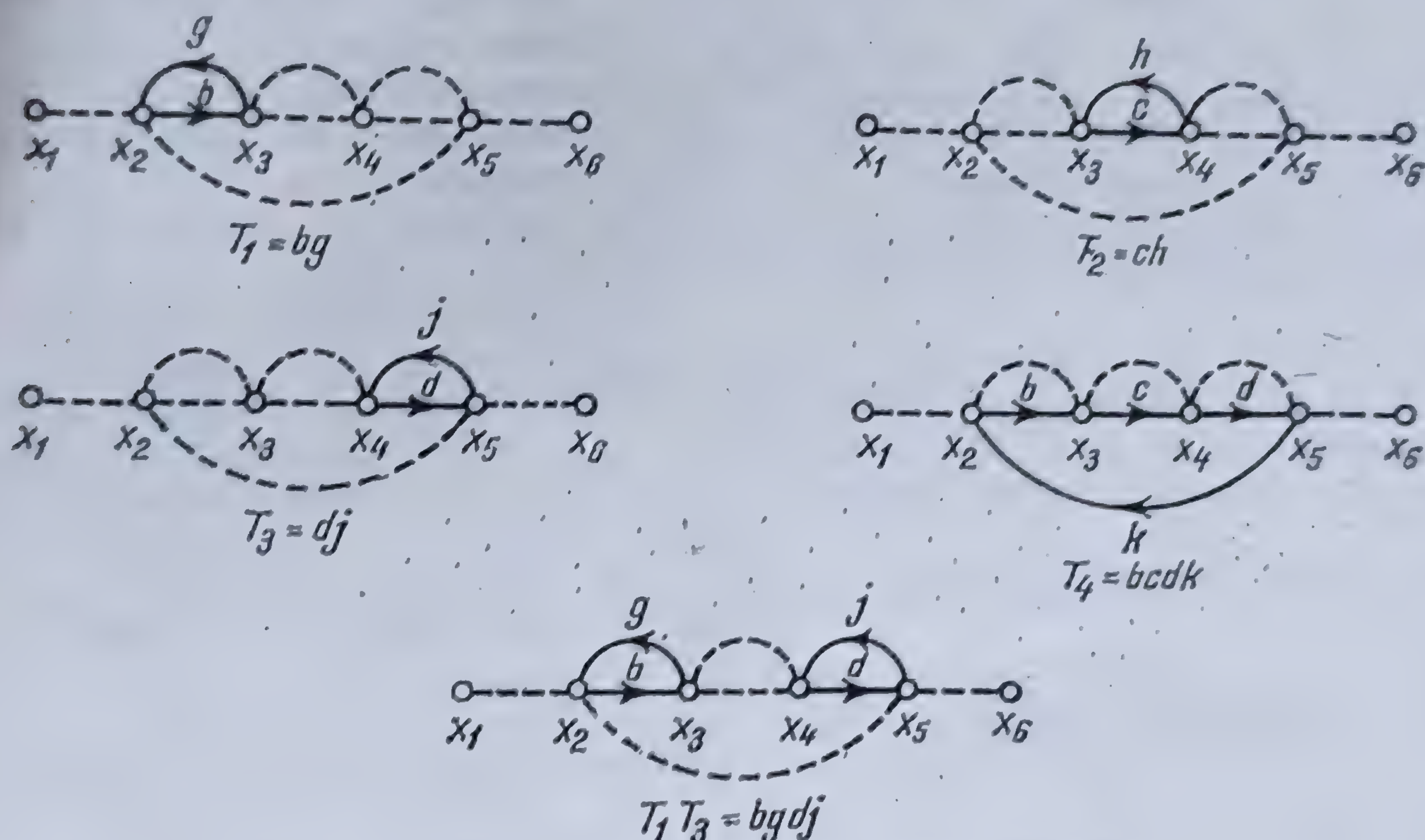


Fig. 6.44. Punerea în evidență a buclelor grafului.

Oa aplicație să aplicăm formula lui MASON grafului din figura 6.42, a.

Graful are patru bucle distincte (fig. 6.44), dintre care numai bucele  $T_1$  și  $T_3$  sînt disjuncte. Rezultă

$$\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + T_1T_3 = 1 - (bg + ch + dj + bcdk) + bdgj.$$

Graful nu are decît o singură cascadă, care nu are o buclă distinctă; rezultă deci

$$C_1 = a b o d f \text{ și } \Delta_1 = 1,$$

de unde

$$\Sigma C_i \Delta_i = a b o d f.$$

Se găsește astfel, aceeași transferanță  $T_{01}$  găsită și pe calea reducerii succesive.

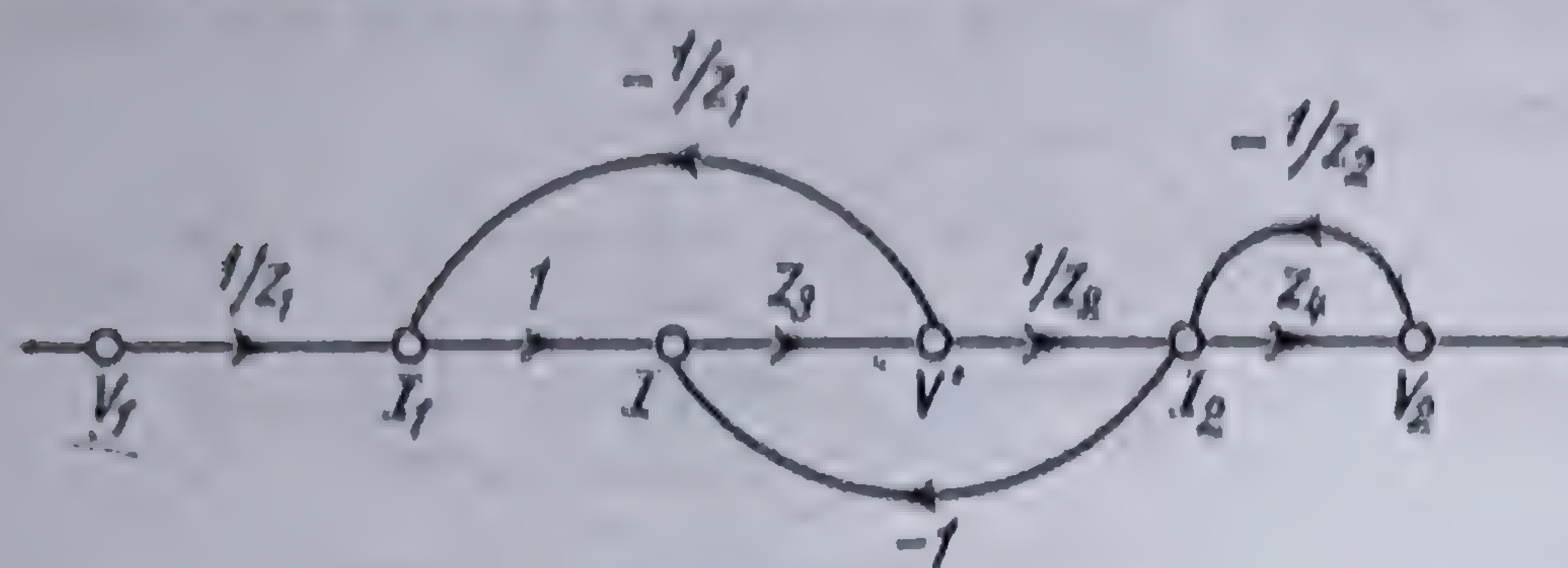


6.3.2.7. Exemplu de aplicație. Să considerăm cuadripolul reprezentat în figura 6.24 pentru care ne propunem să-l construim graful corespunzător și să-l determinăm apoi transmitanța. Relațiile dintre mărimile electrice ale cuadripolului sunt

$$I_1 = \frac{V_1 - V'}{Z_1} ; I = I_1 - I_2 ; V' = Z_3 I ; I_2 = \frac{V' - V_2}{Z_2} ; V_2 = Z_4 I_2 ,$$

cu ajutorul cărora graful de transfer corespunzător se construiește ușor (fig. 6.45).

Pentru calculul transferanței vom aplica formula lui MASON. Este ușor de



văzut că graful de transfer are trei bucle distincte  $[(I_1, V'), (I_1, I_2), (I_2, V_2)]$ , dintre care două sînt disjuncte  $[(I_1, V'), (I_2, V_2)]$ ; de asemenea, se vede că graful de transfer are numai o singură cascadă între  $V_1$  și  $V_2$  care nu are o buclă distinctă.

Fig. 6.45. Graful de transfer al unui cuadripol în sarcină. În consecință,

$$T_1 = -\frac{Z_3}{Z_1} ; T_2 = -\frac{Z_3}{Z_2} ; T_3 = -\frac{Z_4}{Z_2} ; T_1 T_3 = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2} ; C_1 = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2} ; \Delta_1 = 1$$

rezultă

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3 = 1 + \frac{Z_3}{Z_1} + \frac{Z_3}{Z_2} + \frac{Z_4}{Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2} = \\ &= \frac{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)}{Z_1 Z_2} \quad \Sigma C_i \Delta_i = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2} \cdot 1 \end{aligned}$$

și deci

$$T = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 Z_2 + (Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)} ,$$

expresie identică cu aceea găsită și în cazul schemei bloc\*.

### 6.3.3. APLICAREA TEORIEI GRAFURILOR LA CALCULUL REȚELOR ELECTRICE

6.3.3.1. Generalități și definiții. Grafurile de transfer, utilizînd proprietățile topologice ale rețelilor electrice, se pretează foarte bine la studiul rețelilor electrice cu ajutorul calculului matriceal. În acest scop teoria grafurilor poate fi utilizată în două moduri: a) pentru stabilirea ecuațiilor generale, clasice, de rezolvare a rețelilor electrice\*\*;

\* Vezi 6.3.1.7.

\*\* Vezi [38]



unei metode proprii de rezolvare a rețelelor electrice\*. Fiecare din aceste căi conduce la o metodă de calcul care dă posibilitatea utilizării calculatoarelor electronice în rezolvarea problemelor puse de funcționarea rețelelor electrice, oricât de întinse ar fi ele.

Pentru stabilirea metodicii de lucru este necesar să se completeze cu unele definiții, definițiile date anterior\*\*.

— *Element* al unui graf (*latură*, *ramură*) este un segment de linie (dreaptă sau curbă) limitat de două *puncte terminale* (*borne*); un element poate reprezenta o impedanță, un element complet de rețea, o secție dintr-o uzină etc.

Dacă latura are numai un punct terminal care se suprapune peste un punct terminal al unei alte laturi, sau dacă latura are cele două puncte terminale suprapuse peste punctele terminale ale unei alte laturi formînd astfel o buclă, latura se numește *neesențială* și în studiul rețelelor electrice poate fi eliminată.

— *Graf* este mulțimea finită de elemente, legate sau nu între ele; un graf este format din *laturi* și *noduri*.

— *Conexitate*. Un graf format din mai multe părți distincte, fără puncte terminale comune, se numește *multiplu-conex*; graful la care se poate ajunge de la o bornă a sa oarecare la oricare altă bornă a sa parcurgînd numai ramurile schemei se numește *simplu-conex*. În cele ce urmează se vor considera numai grafuri simplu-conexe.

— *Nod* este un punct rezultat din suprapunerea a două sau mai multe puncte terminale aparținînd unor laturi *diferite* ale grafului; un nod care rezultă din suprapunerea a două puncte terminale, este un *nod neesențial*; se numește *nod esențial* acel care apare la suprapunerea a *trei sau mai multe* puncte terminale ale laturilor esențiale.

— *Incidență*. O latură și un nod se zic că sînt *incidente* reciproc dacă nodul este un punct terminal al laturii.

— *Subgraf* este o porțiune dintr-un graf oarecare.

— *Orientarea* unei laturi a unui graf se obține prin stabilirea *arbitrară* a sensului de parcurgere a acestei laturi; graful format din laturi orientate este un *graf orientat*.

— *Buclă* este un subgraf simplu conex format din mai multe laturi și în care fiecare nod are două laturi incidente cu el.

— *Arbore* este un subgraf simplu conex care nu are nici o buclă; dacă arborele cuprinde *toate* nodurile grafului dat se numește *arbore complet*. Dacă  $N$  este numărul nodurilor unui graf, atunci arborele complet al acestui graf are  $P = N - 1$  laturi. Un graf poate avea mai mulți arbori compleți.

*Coardă* este o latură a grafului care nu face parte dintr-un arbore complet al acestuia; mulțimea coardelor formează *subgraful coardelor*, complementar arborelui complet considerat. Dacă  $L$  este numărul de laturi ale unui graf, subgraful coardelor conține  $B = L - N + 1$  laturi. Subgraful coardelor este în general multiplu conex.

*Secționare* sau *tăietură* este o linie care împarte graful în două părți distincte formînd două grafuri independente prin tăierea laturilor grafului. Dacă secționările se fac într-un graf simplu conex, subgraurile obținute sînt simplu conexe.

\* Vezi [181].

\*\* Vezi 6.3.2.1.



6.3.3.2. **Matricele fundamentale ale unui graf simplu—conex.** Fiind dat un graf simplu-conex cu  $L$  laturi și  $N$  noduri, între aceste elemente, buclele din graf și tăieturile care se pot face, se stabilesc anumite corelații care pot fi exprimate sub forma unor matrice, cu ajutorul cărora se poate trece apoi la calculul efectiv al rețelelor cu ajutorul calculului matriceal. Matricele fundamentale sînt în număr de trei și ele se stabilesc pe considerații structurale ale grafului respectiv.

a) **Matricea de incidență.** Fie un graf oarecare (fig. 6.46) care are  $L = 8$  laturi și  $N = 5$  noduri. Dacă se numerotează nodurile grafului în mod cu totul arbitrar cu numere de ordine de la 1 la  $N$  și dacă se notează

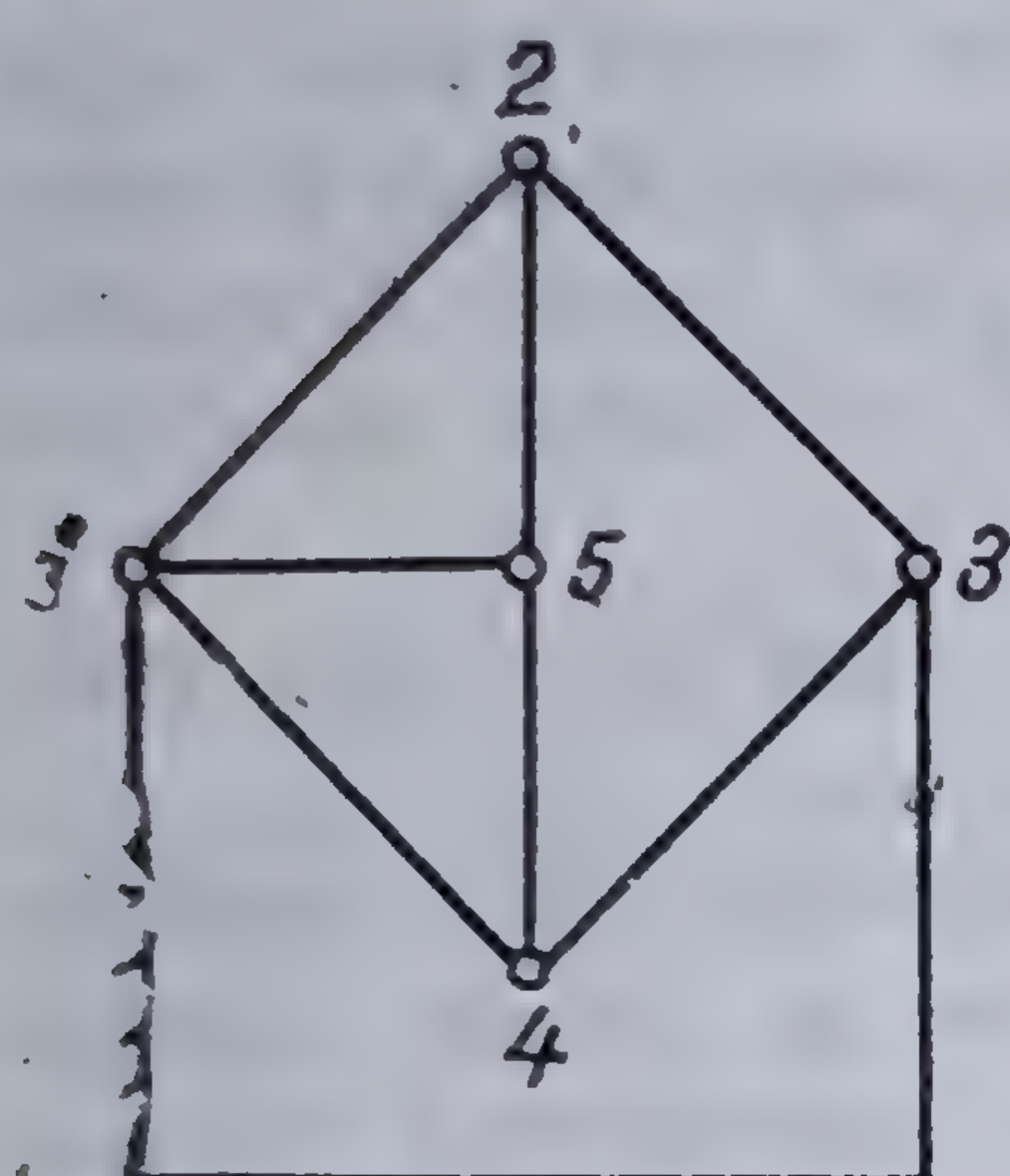


Fig. 6.46. Graful unei rețele oarecare.

fiecare latură cu simbolul  $L_{jk}$ ,  $j$  și  $k$  reprezentînd numerele de ordine ale nodurilor, graful devine orientat, sensul de orientare a fiecărei laturi fiind ales în mod convențional, dacă  $j < k$ , de la nodul  $j$  la nodul  $k$ .

Prin definiție *matricea de incidență* a unui graf este matricea cu  $N$  linii și  $L$  coloane, a cărei elemente sînt numerele  $\pm 1$  și 0. Liniiile reprezentînd nodurile și coloanele, laturile grafului, elementul din linia  $j$  și coloana  $L_{jk}$  ( $j < k$ ) va avea valoarea  $+1$ , elementul din linia  $k$  și aceeași coloană va avea valoarea  $-1$ , iar elementul  $l$  ( $l \neq j \neq k$ ) din coloana considerată va avea valoarea 0. În capul fiecărei linii se înscrie numărul nodului corespunzător, iar în capul fiecărei coloane se înscrie

simbolul laturii respective, ordinea în care se efectuează această înscriere fiind complet arbitrară. Din anumite considerații, care se vor vedea în cele ce urmează, nodurile se înscriu în ordinea lor crescîndă, iar laturile se împart în două categorii, astfel:

Unui nod  $j$  al grafului i se repartizează, în prima categorie de laturi, latura cu indicele  $jk$  ( $j < k$ ) cel mai mic,\* toate celelate laturi adiacente acestui nod se repartizează în a doua categorie de laturi. Este ușor de văzut că din nodul  $n$  ( $n > j$  și  $j = 1, 2, \dots, n-1$ ), conform convenției făcute, nu vor ieși laturi, în acest nod vor exista *numai* laturi care intră și în consecință, el nu poate da o latură care să fie cuprinsă în prima categorie de laturi. Rezultă dar, că în prima categorie se vor repartiza  $N-1 = P$  laturi, iar în cea de a doua categorie restul de laturi  $L - (N-1) = B$ .

Odată stabilită repartizarea laturilor, se convine să se facă următoarea succesiune a matricei de incidență: primele  $N-1$  coloane vor cuprinde laturile din prima categorie aranjate în ordinea crescîndă a indicilor lor; următoarele  $L - N + 1$  coloane vor cuprinde laturile din a doua categorie aranjate de asemenea în ordinea crescîndă a indicilor lor. Matricea de incidență va fi deci

$$[A'] = \left[ [A'_1] \mid [A'_2] \right] \quad (6.66)$$

în care

$[A'_1]$  este matricea avînd  $N$  linii și  $N-1$  coloane, cuprinzînd laturile din prima categorie și

$[A'_2]$  este matricea avînd  $N$  linii și  $L-N+1$  coloane, cuprinzînd laturile din a doua categorie.

\* Dacă într-un nod  $j$  nu există nici o latură care să lege acest nod cu nodul  $k$  ( $k > j$ ), atunci se introduce în prima categorie de laturi o latură repartizată în categoria a doua avînd indicii  $lm$  ( $l < m$  și  $m \neq k$ ).



Îndepărtînd o linie oarecare din matricea de incidență  $[A']$  se obține o nouă matrice

$$[A] = [[A_1] | [A_2]], \quad (6.67)$$

în care de data aceasta  $[A_1]$  este o matrice pătrată, nesingulară, de ordinul  $N - 1$ .

Suprimarea unei linii echivalează cu suprimarea nodului corespunzător. Nodul eliminat poartă numele de *nod de referință*.

Matricea  $[A'_1]$ , respectiv matricea  $[A_1]$ , este matricea de incidență a unui arbore complet, ceea ce rezultă din însăși regula de selecție și repartitie a laturilor grafului în prima categorie.

Matricea  $[A'_2]$ , respectiv matricea  $[A_2]$ , este matricea de incidență a subgrafului de coarde, corespunzător subgrafului arbore stabilit prin matricea  $[A'_1]$ , respectiv matricea  $[A_1]$ .

În consecință, prin simpla numerotare arbitrară a nodurilor grafului și adoptarea regulii dată pentru clasificarea laturilor, se obține în mod mecanic matricea de incidență a unui arbore complet și matricea de incidență a subgrafului de coarde corespunzător. Aceasta prezintă o mare importanță pentru o rețea complexă, cu numeroase noduri și laturi, care urmează a fi studiată cu ajutorul unui calculator electronic digital.

În cazul particular al grafului din figura 6.46 matricea de incidență este

$$[A'] = \left. \begin{array}{c|cccc|cccc} N \backslash L & L_{12} & L_{23} & L_{34} & L_{45} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{25} \\ \hline 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & -1 & 1 & & & & & & 1 \\ \hline 3 & & -1 & 1 & & -1 & & & \\ \hline 4 & & & -1 & 1 & & -1 & & \\ \hline 5 & & & & -1 & & & -1 & -1 \end{array} \right\} N = 5.$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{N - 1 = 4} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{L - N + 1 = 4}$$

$$\hspace{10em} L = 8$$

Luînd ca nod de referință nodul 5\*, matricea de incidență devine

$$[A] = \begin{array}{c|cccc|cccc} N \backslash L & L_{12} & L_{23} & L_{34} & L_{45} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{25} \\ \hline 1 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 2 & -1 & 1 & & & & & & 1 \\ \hline 3 & & -1 & 1 & & -1 & & & \\ \hline 4 & & & -1 & 1 & & -1 & & \end{array}$$

\* Se poate lua oricare alt nod.



În figura 6.47 au fost reprezentate subgrafurile arbore și coarde ale grafului considerat (fig. 6.46).

b) *Matricea de conexiune a buclelor.* Orice graf, reprezentant al unei rețele electrice, conține un număr finit de bucle, dintre care unele sînt *independente* și altele sînt *dependente*, putînd fi obținute prin combinarea buclelor independente\*. Prin definiție, matricea de conexiune a buclelor dă legătura dintre laturile rețelei și un anumit grup de bucle independente din graf\*\*. Ea va fi deci o matrice care va avea atîtea linii cîte bucle se pot obține în graf, numărul de coloane fiind egal cu acel al laturilor grafului\*\*\*. Elementele matricei sînt  $\pm 1$  și 0, după cum o latură intră în componența buclei respective, sau nu,  $+1$  corespunzînd sensului comun de parcurgere a buclei și laturii, iar  $-1$  unui sens contrar.

Fie  $[B]$  matricea de conexiune corespunzătoare unui sistem de bucle independente din graful considerat. Dacă  $N$  este numărul de noduri și  $L$  numărul de laturi ale grafului, atunci matricea  $[B]$  este în general o matrice singulară avînd  $B = L - N + 1$  linii și  $L$  coloane.

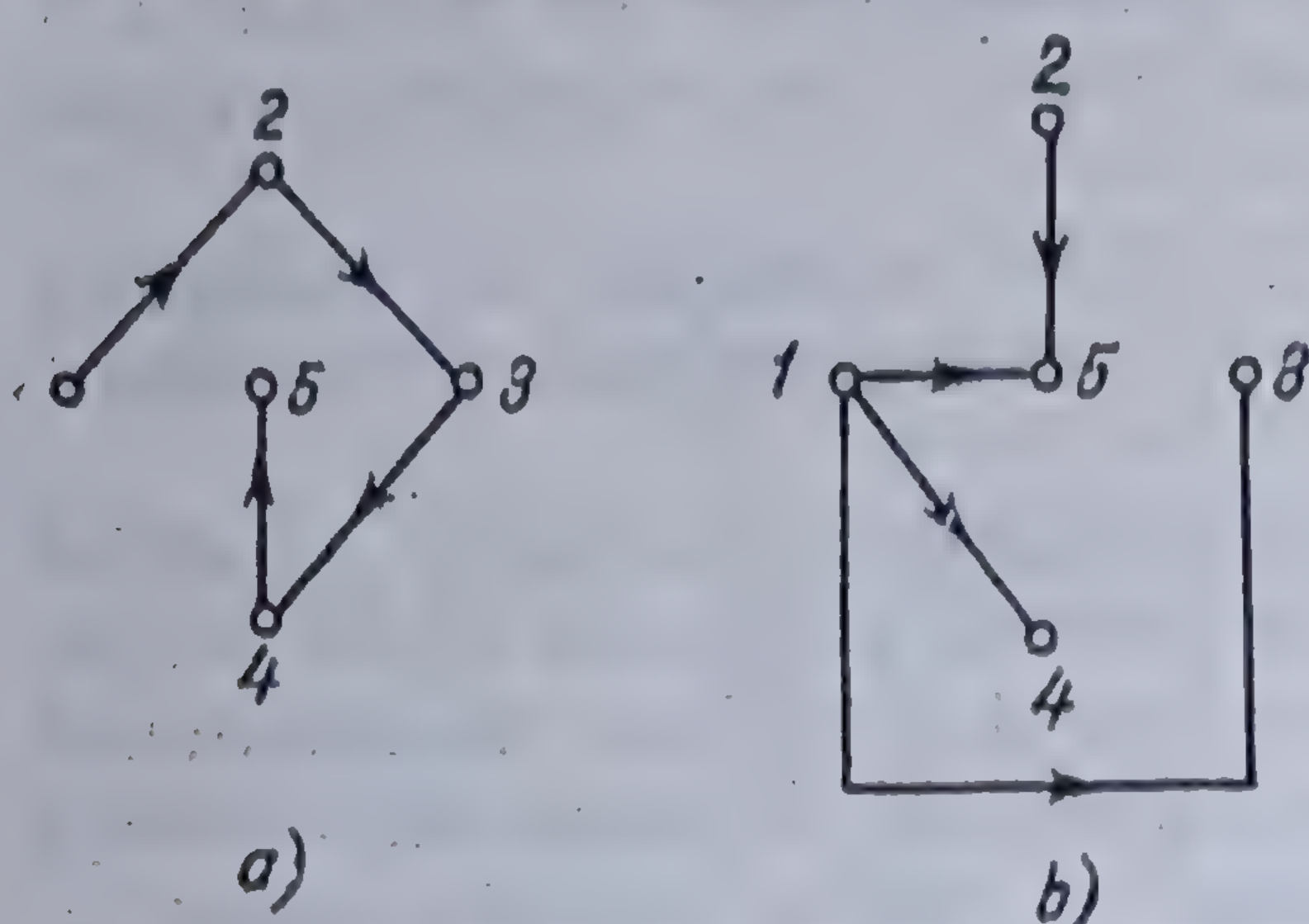


Fig. 6.47. Subgrafurile arbore (a) și coarde (b).

Dacă ordinea coloanelor matricei de conexiune  $[B]$  este aceeași cu a matricei de incidență  $[A]$ , atunci există întotdeauna relația\*\*\*\*

$$[A] \cdot [B]_t \equiv [B] \cdot [A]_t \equiv 0. \quad (6.68)$$

Matricea de conexiune  $[B]$  poate fi dedusă fie pe o cale directă\*\*\*\*\*, fie pe o cale indirectă din relația (6.68) după cum urmează: matricea  $[B]$  poate fi descompusă în două submatrice

$$[B] = \begin{bmatrix} [B'_1] \\ [B'_2] \end{bmatrix},$$

în care matricea  $[B'_1]$  corespunde laturilor arborelui reprezentat prin matricea  $[A_1]$ , iar matricea  $[B'_2]$ , corespunzînd laturilor coarde, care fiecare face parte dintr-o singură buclă independentă, va fi egală cu unitatea. Se poate scrie deci,

$$[B] = \begin{bmatrix} [B'_1] \\ [1] \end{bmatrix}.$$

Seriind relația (6.68) dezvoltat, rezultă

$$\begin{bmatrix} [B'_1] \\ [1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [A_1]_t \\ [A_2]_t \end{bmatrix} = [B'_1] \cdot [A_1]_t + [A_2]_t = 0$$

\* Vezi 2.3.4.1.

\*\* Vezi 2.4.4.3.

\*\*\* Matricea astfel definită corespunde matricei transpuse a matricei de conexiune definită de KRON (Vezi 2.4.4.3).

\*\*\*\* Vezi [39] și [38].

\*\*\*\*\* Vezi 2.4.4.3.



de unde se obține

$$[B'_1] = -[A_2]_t \cdot [A_1]_t^{-1} = -[B_1],$$

unde am notat

$$[B_1] = [A_2]_t \cdot [A_1]_t^{-1}. \quad (6.69)$$

În consecință, matricea de conexiune a buclelor poate fi scrisă

$$[B] = \left[ \begin{array}{c|c} -[B_1] & [1] \end{array} \right]. \quad (6.70)$$

Trebuie să observăm, că există numai o singură grupă de bucle independente ale grafului și numai una singură, care să aibă matricea de conexiune dată de relația (6.70), aceasta întrucât expresia (6.69) e unică.

Obținerea directă a matricei  $[B]$  din simpla examinare a grafului considerat este destul de greu de realizat.

Calculînd în cazul particular al figurii 6.46 matricea de conexiune a buclelor independente cu ajutorul relației (6.70) se găsește

$$[B] = \begin{array}{c|ccccccccc} & L & L_{12} & L_{23} & L_{34} & L_{45} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & L_{25} \\ \hline B & & & & & & & & & \\ \hline \text{I} & & -1 & -1 & & & 1 & & & \\ \hline \text{II} & & -1 & -1 & -1 & & & 1 & & \\ \hline \text{III} & & -1 & -1 & -1 & -1 & & & 1 & \\ \hline \text{IV} & & & -1 & -1 & -1 & & & & 1 \end{array}$$

buclele independente corespunzătoare sînt arătate în figura 6.68.

c) *Matricea de conexiune a secționărilor.* La un graf dat se poate face un număr finit de secționări; unele din acestea sînt *independente*, altele sînt dependente putînd fi deduse prin combinarea secționărilor independente. Unei secționări oarecare  $i$  se atribuie un sens pozitiv, ales arbitrar (fig. 6.49).

Pentru obținerea secționărilor independente se procedează astfel, încît secționarea să taie numai o singură latură a arborelui complet al grafului dat; această latură se numește *suportul tăieturii*. În aceste condiții se convine să se dea semnul plus tăieturii, dacă aceasta coincide cu semnul plus al suportului său. Matricea de conexiune a secționărilor este o matrice care are  $N - 1$  linii (număr egal cu numărul laturilor unui arbore complet) și

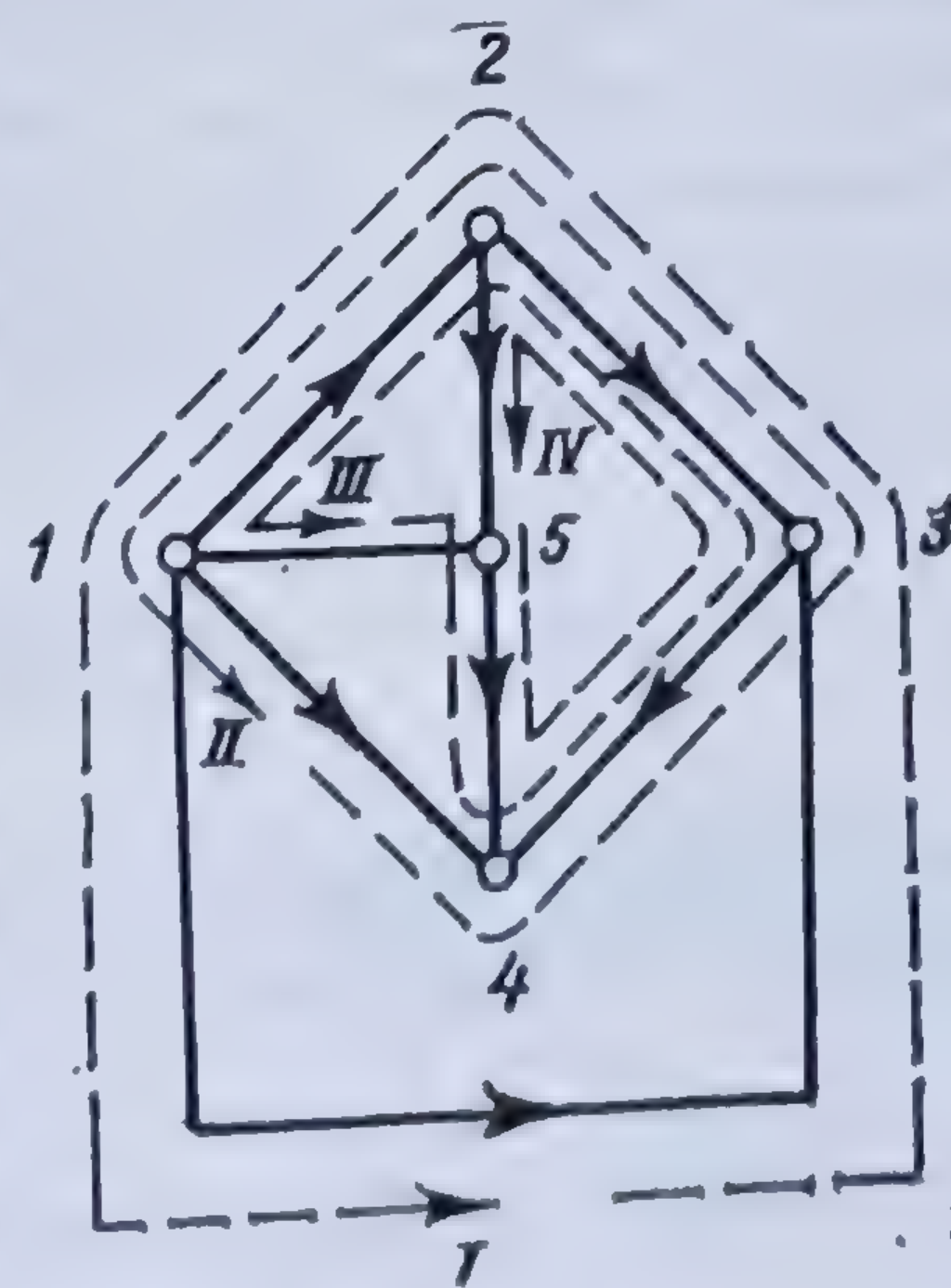


Fig. 6.48. Buclele independente.

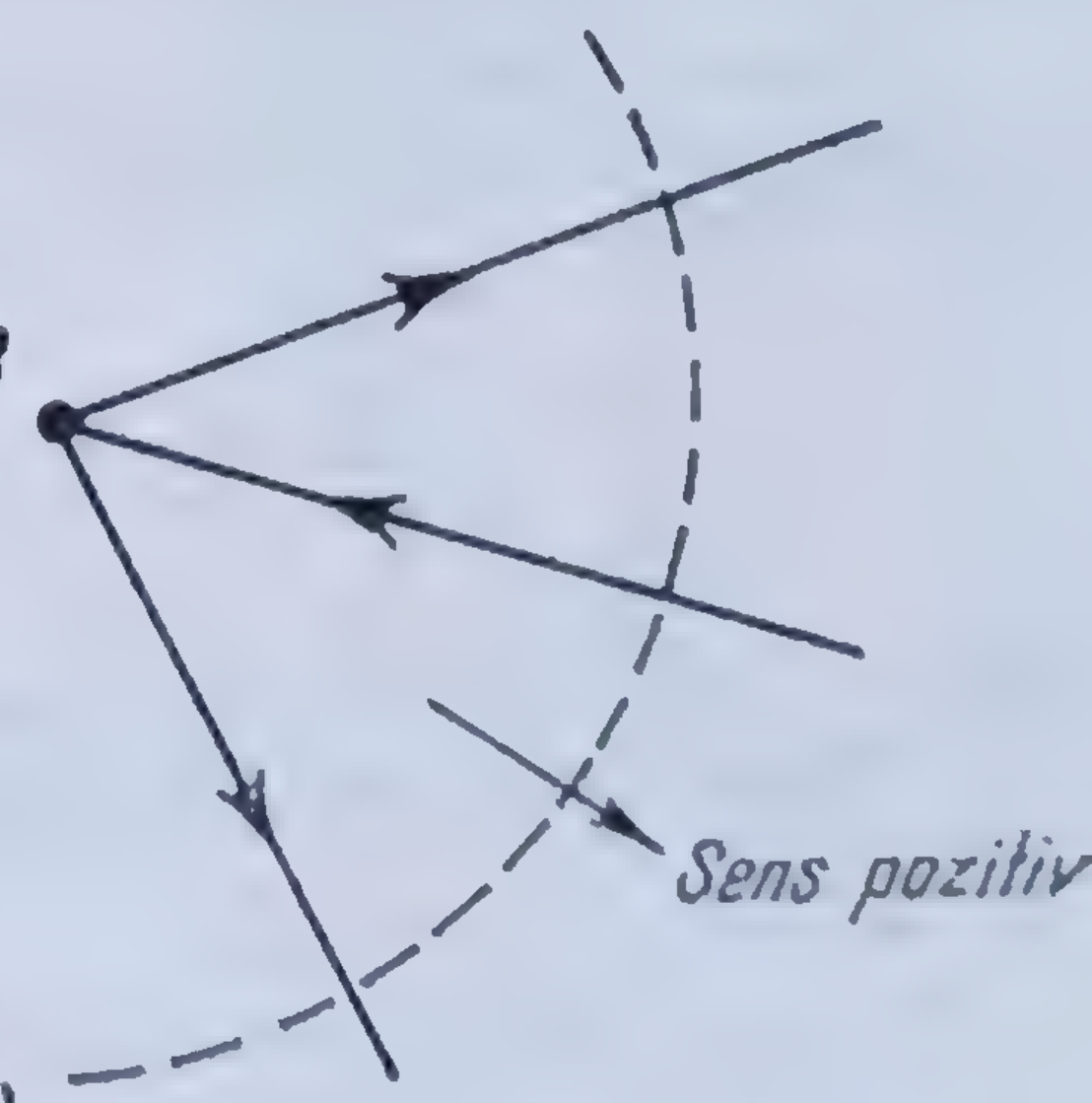


Fig. 6.49. Secționarea unui graf.



$L$  coloane (număr egal cu numărul laturilor grafului). Elementele matricei sînt egale cu  $\pm 1$  sau  $0$  și anume,  $+1$  dacă elementul corespunde unei laturi  $L_{jk}$  secționată și a cărui sens pozitiv corespunde cu sensul secționării,  $-1$  în caz contrar și  $0$  dacă elementul corespunde unei laturi nesectionate.

Fie  $[C]$  matricea de conexiune a secționărilor; conform celor stabilite anterior, această matrice reprezintă un *sistem complet de secționări* sau un *sistem fundamental*. Dacă ordinea coloanelor acestei matrice este aceeași cu aceea a matricei de incidență, atunci avem întotdeauna relația\*

$$[B] [C]_t \equiv [C] [B]_t \equiv 0. \quad (6.71)$$

Matricea  $[C]$  se poate construi însă direct, din simpla inspecție a figurii grafului. Graful avînd laturile sale ordonate în ordinea crescîndă

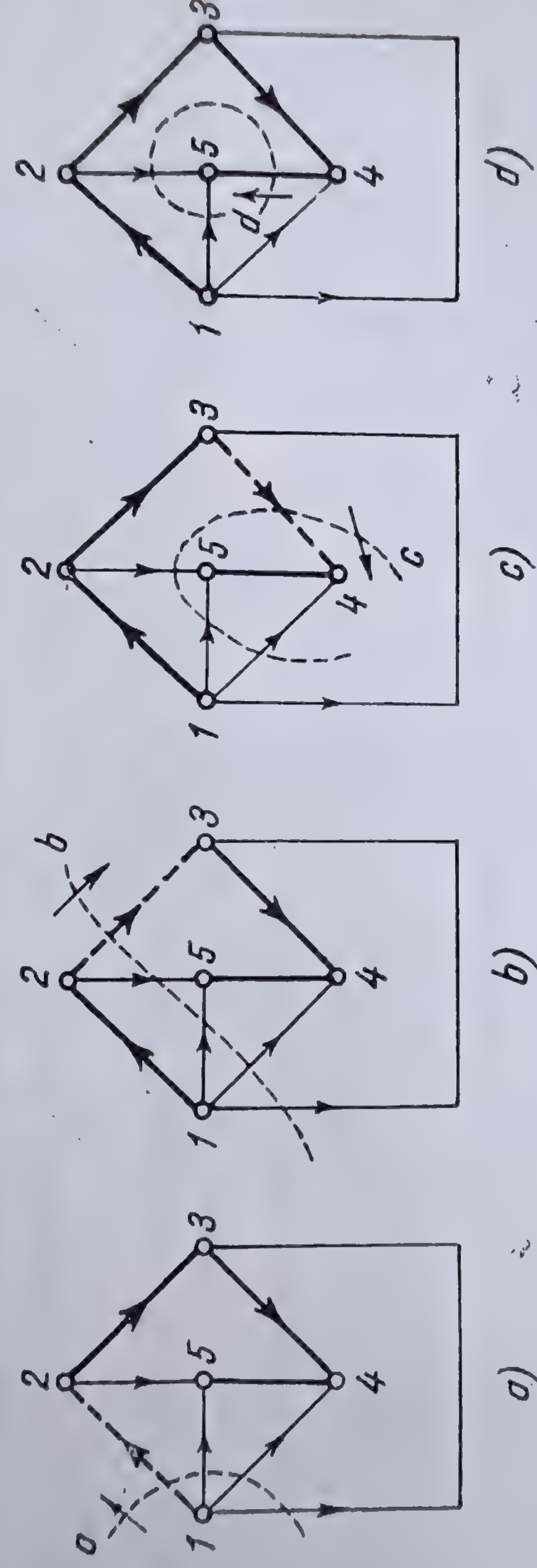


Fig. 6.50. Metoda de stabilire a laturilor secționate.

a indicilor și grupate în cele două categorii, în laturile arborelui și laturile coarde, și cum fiecărei laturi a arborelui îi corespunde o secționare, ordinea liniilor matricei  $[C]$  va fi aceeași ca și a laturilor arborelui din matricea  $[A_1]$ .

După ce se scrie matricea unitate de ordinul  $N-1$ , trebuie scrise liniile matricei  $[B_1]_t$ . Pentru aceasta se îndepărtează pe rînd fiecare latură a arborelui complet separîndu-se graful respectiv în două subgrafuri (fig. 6.50). Ducînd pe desen o linie de separație a celor două subgrafuri, coardele tăiate de această linie de separație, ordonate în ordinea crescîndă a indicilor dau linia corespunzătoare a matricei  $[B_1]_t$ .

Cunoscînd matricea  $[B_1]_t$  se găsește imediat matricea  $[B]$ , cu ajutorul relației (6.70) căci

$$- [B_1] = - [ [B]_t ]_t,$$

fără a mai fi necesar să se facă operațiile cerute de relația (6.69).

Matricea de conexiune a secționărilor poate fi pusă sub forma

$$[C] = [ [C'_1] \mid [C'_2] ].$$

\* Vezi [38] pag. 160.



Este evident, că submatricea  $[C'_1]$  este egală cu matricea unitate corespunzătoare\*; putem scrie deci,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & [C'_2] \end{bmatrix}.$$

Introducând această expresie în relația (6.71) și ținând seama de relația (6.70) se obține

$$[C][B]_l = \begin{bmatrix} 1 & [C'_2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -[B_1]_l \\ 1 \end{bmatrix} = -[B_1]_l + [C'_2] = 0,$$

de unde,

$$[C'_2] = [B_1]_l$$

și deci,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & [B_1]_l \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

Ținând acum seama de relația (6.69) se poate scrie

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & [A_1]^{-1} \cdot [A_2] \end{bmatrix}. \quad (6.73)$$

Rezultă dar, că prin determinarea matricei de incidență se pot determina atât matricea de conexiune a buclelor, dată de relațiile (6.70) și (6.69), cât și matricea de conexiune a secționărilor, dată de relația (6.73).

Pentru cazul particular al grafului din figura 6.46, matricea de conexiune a sistemului fundamental de secționări este

$$[C] =$$

$\begin{array}{c} L \\ S \end{array}$	$L_{12}$	$L_{23}$	$L_{34}$	$L_{45}$	$L_{13}$	$L_{14}$	$L_{15}$	$L_{25}$
$a$	1				1	1	1	
$b$		1			1	1	1	1
$c$			1			1	1	1
$d$				1		1	1	1

În figura 6.51 sînt reprezentate secționările corespunzătoare.

**6.3.3.3. Ecuațiile matriceale ale circuitelor electrice.** Reluînd figura 6.11 și aplicînd unuia din noduri prima teoremă a lui KIRCHHOFF se obține

$$\underline{I}'_j = \underline{I}_j - \underline{J}_j,$$

în care am notat  $\underline{I}'_j$  curentul care iese (sau intră) în nodul considerat; din această relație rezultă

$$\underline{I}_j = \underline{I}'_j + \underline{J}_j. \quad (6.74)$$

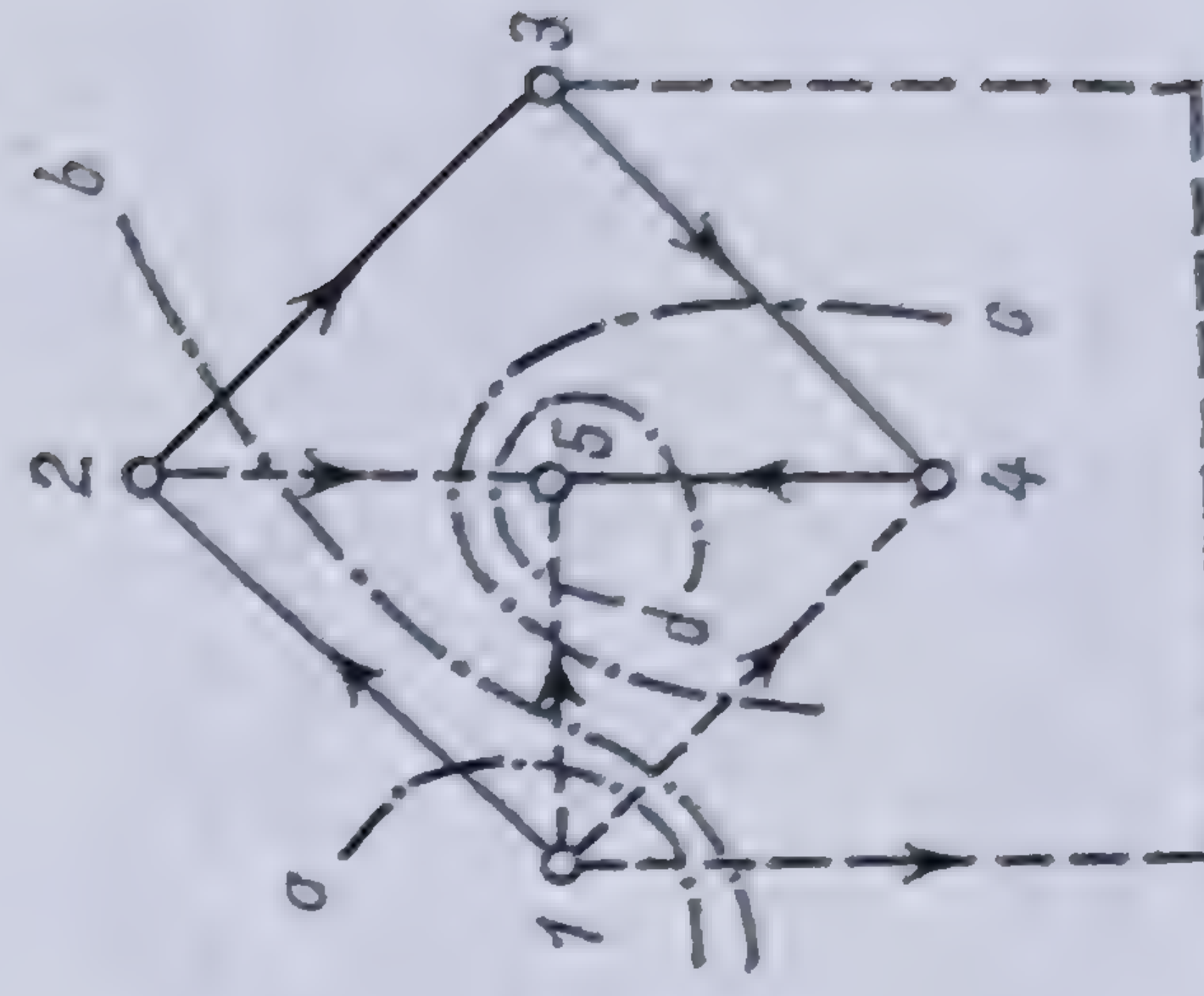


Fig. 6.51. Exemplu de secționare a grafului.

\* Secționările corespund laturilor arborelui complet.



Ținând seama de această relație și de relația (6.24), relația (6.25) poate fi scrisă

$$\underline{V}_j = \underline{Z}_j (\underline{I}'_j + \underline{J}_j) - \underline{E}_j$$

sau

$$\underline{V}_j + \underline{E}_j = \underline{Z}_j (\underline{I}'_j + \underline{J}_j). \quad (6.75)$$

Aplicată tuturor laturilor rețelei, se obține ecuația

$$[V] + [E] = [Z] ([I'] + [J]) \quad (6.76)$$

sau

$$[I'] + [J] = [I] = [Y] ([V] + [E]). \quad (6.77)$$

Necunoscutele fiind curenții  $[I]$ , respectiv  $[I']$ , și tensiunile  $[V]$ , în total  $2L$  necunoscute, cum ecuațiile (6.76), respectiv (6.77), ne dau numai  $L$  ecuații, celelalte  $L$  ecuații vor fi furnizate de cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF, aplicate rețelei electrice după cum urmează:

— prima teoremă a lui KIRCHHOFF, teorema curenților, se aplică la  $P = N - 1$  secționări independente formînd un sistem fundamental de secționări;

— a doua teoremă a lui KIRCHHOFF, teorema tensiunilor, se aplică la  $B = L - N + 1$  circuite închise independente, formînd un sistem fundamental de circuite închise.

Cu ajutorul considerentelor topologice examinate în paragraful precedent se pot deduce ecuațiile necesare rezolvării unei rețele electrice, utilizînd metodele cunoscute a potențialelor la noduri (sau perechilor de noduri) și a buclelor.

**6.3.3.4. Metoda perechilor de noduri.** Este ușor de văzut că tensiunea la bornele unui element de rețea (fig. 6.11) este dată de relația

$$\underline{V}_j = \underline{V}_{Bj} - \underline{V}_{Aj} \quad (6.78)$$

în care  $\underline{V}_{Aj}$  și  $\underline{V}_{Bj}$  sînt potențialele nodurilor  $A_j$  și  $B_j$  determinate în raport cu un potențial de referință, potențialul unui nod oarecare din rețea, care, pentru simplificare a fost presupus egal cu zero, nodul respectiv fiind legat la pămînt. Dacă se notează cu  $[V_n]$  matricea acestor potențiale, construită cu liniile în ordinea crescîndă a numerelor nodurilor, atunci, pe baza definiției matricei de incidență, se poate scrie

$$[V] = [A]_t [V_n]. \quad (6.79)$$

Aplicînd prima teoremă a lui KIRCHHOFF la  $N - 1$  tăieturi, corespunzătoare nodurilor independente, se obține relația matriceală

$$[A] [I'] = 0, \quad (6.80)$$

unde  $[A]$  este matricea de incidență.



Introducând expresia (6.79) în relația (6.77) aceasta se poate scrie

$$[Y] [A]_t [V_n] = [I'] + [J] - [Y] [E];$$

înmulțind această expresie la stînga cu matricea de incidență și ținînd seama de relația (6.80) rezultă

$$[A] [Y] [A]_t [V_n] = [A] [J] - [A] [Y] [E] = [A] [J_1], \quad (6.81)$$

în care am notat

$$[J_1] = [J] - [Y] [E],$$

relație care exprimă influența surselor de tensiune asupra surselor de curent. Notînd mai departe

$$[A] [Y] [A]_t = [Y'] \text{ și } [A] [J_1] = [J']$$

ecuația (6.81) capătă forma clasică dată de KRON\*

$$[Y'] [V_n] = [J'].$$

**6.3.3.5. Metoda bucelor.** Curenții necunoscuți ai problemei, care circulă prin laturile rețelei, sînt legați de curenții din nodurile acesteia prin relația (6.74). Luînd ca variabile independente curenții care circulă în *laturile coarde* ale grafului rețelei date, rezolvarea problemei va comporta determinarea a  $B = L - N + 1$  necunoscute.

Fie  $\begin{bmatrix} I_{jk}^c \end{bmatrix}$  matricea acestor curenți și  $\begin{bmatrix} I_{fa}^a \end{bmatrix}$  matricea curenților din *laturile arbore*, pentru care

$$j, k = 1, 2, \dots, L - N + 1 \ (j \neq k) \text{ și } f, g = 1, 2, \dots, N - 1 \ (f \neq g).$$

Avem evident\*\*

$$[I] = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} I^a \end{bmatrix} \\ c \begin{bmatrix} I^c \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Pe de altă parte, din relația (6.74) scrisă matriceal se deduce

$$[I'] = [I] - [J]$$

sau

$$[I'] = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} I^a \end{bmatrix} \\ c \begin{bmatrix} I^c \end{bmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} J^a \end{bmatrix} \\ c \begin{bmatrix} J^c \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \begin{bmatrix} I^a - J^a \end{bmatrix} \\ c \begin{bmatrix} I^c - J^c \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (6.82)$$

\* Vezi 2.4.5.2.

\*\* Literele  $a$  și  $c$  referindu-se la laturile arbore respectiv la laturile coarde.



în care am separat în același mod și matricea curenților injectați de sursele de curent.

Aplicând prima teoremă a lui KIRCHHOFF la cele  $P=N-1$  noduri independente se obține

$$[A][I'] = 0$$

unde  $[A]$  este matricea de incidență.

Ținând seama de relațiile (6.67) și (6.82), relația (6.80) se poate scrie

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ [A_1] & [A_2] \end{bmatrix} \cdot \frac{a}{c} \begin{bmatrix} [I^a] - [J^a] \\ [I^c] - [J^c] \end{bmatrix} = [A_1]([I^a] - [J^a]) + [A_2]([I^c] - [J^c]) = 0.$$

Rezultă, ținând seama de relația (6.69)

$$[I^a] - [J^a] = -[A_1]^{-1} [A_2]([I^c] - [J^c]) = -[B_1]([I^c] - [J^c]).$$

Cu aceasta, relația (6.82) poate fi scrisă succesiv

$$\begin{aligned} [I'] &= \frac{a}{c} \begin{bmatrix} -[B_1]_t ([I^c] - [J^c]) \\ [I^c] - [J^c] \end{bmatrix} = \frac{a}{c} \begin{bmatrix} -[B_1]_t ([I^c] - [J^c]) \\ [1] ([I^c] - [J^c]) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{a}{c} \begin{bmatrix} -[B_1]_t \\ [1] \end{bmatrix} ([I^c] - [J^c]) = [B]_t ([I^c] - [J^c]), \end{aligned} \quad (6.83)$$

conform relației (6.70).

Se aplică acum cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF unui sistem fundamental de bucle\*, pentru care se cunoaște matricea  $[B]$ , se obține

$$[B][V] = 0. \quad (6.84)$$

Ținând seama de relația (6.83), relația (6.76) se poate scrie

$$[Z][B]_t [I^c] = [V] + [E] - [Z]([J] - [B]_t [J^c]),$$

sau, înmulțind-o la stînga cu matricea buclelor  $[B]$  și ținând seama de relația (6.84), se obține

$$[B][Z][B]_t [I^c] = [B]([E] - [Z]([J] - [B]_t [J^c])). \quad (6.85)$$

În această relație matriceală, matricea

$$[E] - [Z]([J] - [B]_t [J^c])$$

reprezintă influența pe care o au sursele de curent  $[J]$  și  $[J^c]$  asupra surselor de tensiune. Notînd

$$[B][Z][B]_t = [Z']$$

\* Buclele formate în graful arbore cu ajutorul grafului coarde considerat.



și

$$[B] \left[ [E] - [Z] ([J] - [B][J^e]) \right] = [E'],$$

ecuația (6.85) capătă forma clasică dată de KRON\*.

#### 6.3.4. NOȚIUNI ASUPRA MĂRIMILOR SAU UNITĂȚILOR RELATIVE ȘI UTILIZAREA LOR ÎN ELECTROTEHNICĂ

Problemele de electrotehnică (mașini, linii de transmitere a energiei electrice etc.) se rezolvă mai simplu și analizarea rezultatelor devine mai generală și mai ușoară dacă se transformă diversele relații introducându-se în locul mărimilor date, *mărimi* sau *unități relative*.

Se numește *mărime* sau *unitate relativă* raportul dintre două mărimi de aceeași dimensiuni, dintre care una, aceea la care se raportează prima mărime se numește *mărimea* sau *unitatea de bază*.

Astfel, fie  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \dots$  tensiunile diverselor alternatoare din rețea; luându-se ca tensiune de bază o tensiune oarecare  $\underline{U}_0$ , rapoartele

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \underline{u}_1, \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \underline{u}_2, \dots$$

se numesc *mărimile* sau *unitățile relative de tensiune*.

În același mod, fie curenții  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots$ , și  $\underline{I}_0$  curentul de bază. Rapoartele

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_0} = \underline{i}_1, \quad \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_0} = \underline{i}_2, \dots$$

se numesc *mărimile* sau *unitățile relative de curent*.

Se poate lua ca unitate de bază, oricare altă mărime ce intervine într-o rețea, ca puterea activă, puterea reactivă, impedanța. Alegerea mărimilor de bază se face după criterii care variază de la caz la caz și sînt în funcție de ceea ce se urmărește prin utilizarea mărimilor relative. Se obișnuiește a se alege mărimile de bază astfel, încît una din mărimile relative să fie egală cu unitatea; de asemenea, ele se aleg astfel, încît să fie în originea de fază (mărimi reale).

Din mărimile relative de tensiune și de curent se deduc puterile în mărimi relative, puterea de bază fiind dedusă din curentul și tensiunea de bază. Se poate porni însă și de la o putere de bază, deducându-se apoi celelalte mărimi relative necesare studiilor rețelei sau mașinii.

De asemenea, unitatea relativă de impedanță se deduce ușor din unitățile relative de tensiune și curent.

În același mod, pornind de la alte mărimi de bază luate inițial, se poate deduce oricare altă mărime de bază necesară studiului rețelei sau mașinii considerate.

Cu aceste mărimi se fac toate calculele din rețea. Pentru a găsi apoi mărimile reale căutate, se înmulțesc rezultatele obținute cu mărimile de bază corespunzătoare.

\* Vezi 2.4.4.



Impedanțele nominale ale mașinilor se exprimă de obicei în mărimi relative, prin tensiunea de scurtcircuit corespunzătoare. Într-adevăr, luând ca mărimi de bază tensiunea nominală și curentul nominal, se obține

$$Z = \frac{U_{sc}}{I_N} = \frac{\varepsilon U_N}{100 I_N} = \frac{\varepsilon U_0}{100 I_0} = \frac{1}{100} \varepsilon Z_0$$

și rezultă

$$\frac{1}{100} \varepsilon = \frac{Z}{Z_0}$$

Astfel, dacă o mașină are tensiunea de scurtcircuit  $\varepsilon = 25\%$ , impedanța corespunzătoare, în mărimi relative, este 0,25 față de elementele nominale ale mașinii.

Ca exemplu fie de studiat funcționarea unui cuadripol \*

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2$$

Luând ca mărimi de bază tensiunea constantă  $U_0$  și curentul constant  $I_0$ , împărțind prima ecuație cu  $U_0$  se poate scrie succesiv

$$\frac{\underline{U}_1}{U_0} = \underline{A} \frac{\underline{U}_2}{U_0} + \underline{B} \frac{\underline{I}_2}{U_0} = \underline{A} \frac{\underline{U}_2}{U_0} + \underline{B} \frac{\underline{I}_2}{I_0} \cdot \frac{I_0}{U_0} = \underline{A} \frac{\underline{U}_2}{U_0} + \frac{\underline{B}}{Z_0} \cdot \frac{\underline{I}_2}{I_0}$$

de unde, notînd

$$\frac{\underline{U}_1}{U_0} = \underline{u}_1; \quad \frac{\underline{U}_2}{U_0} = \underline{u}_2; \quad \frac{\underline{I}_2}{I_0} = \underline{i}_2; \quad \underline{A} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}} = \frac{\underline{U}_{10}}{U_0} = \frac{\underline{u}_{10}}{\underline{u}_{20}} = \underline{a};$$

$$\frac{\underline{B}}{Z_0} = \frac{\frac{\underline{U}_{1sc}}{U_0}}{\frac{\underline{I}_{2sc}}{I_0}} = \frac{\underline{u}_{1sc}}{\underline{i}_{2sc}} = \underline{b},$$

se obține

$$\underline{u}_1 = \underline{a} \underline{u}_2 + \underline{b} \underline{i}_2. \quad (6.86)$$

În același mod, împărțind ecuația a doua cu  $I_0$  aceasta devine

$$\underline{i}_1 = \underline{c} \underline{u}_2 + \underline{d} \underline{i}_2, \quad (6.87)$$

\* Vezi paragraful 6.4.4.2.



deci,

$$\underline{C} = \frac{I_{10}}{U_{20}} = \frac{I_0}{\frac{U_{20}}{U_0}} = \underline{c} \quad \text{și} \quad \underline{D} = \frac{I_{20}}{I_{10}} = \frac{I_0}{\frac{I_{20} U_0}{I_{10} U_0}} = \underline{d}.$$

Este ușor de văzut că și în acest caz

$$\underline{a} \cdot \underline{d} - \underline{b} \cdot \underline{c} = 1$$

Într-adevăr, înlocuind în relația

$$\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1$$

diverșii parametri în funcție de valorile relative, se obțin

$$\underline{a} \cdot \underline{d} - \underline{b} \cdot Z_0 \cdot \underline{c} \cdot Y_0 = 1$$

căci  $Z_0 Y_0 = 1$ .

Trebuie observat că în ecuațiile (6.86) și (6.87) valorile  $\underline{b}$  și  $\underline{c}$  depind de raportul

$$\frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0^2}{P_0},$$

în afară de constantele caracteristice ale cuadripolului.

În particular, fie de studiat funcționarea unui cuadripol pentru care se dă  $U_2$ ,  $P_2$  și  $\cos \varphi_2$ ; se cere să se determine  $U_1$ ,  $P_1$ ,  $\cos \varphi_1$  și randamentul cuadripolului.

Luând  $\underline{U}_2$  ca origine de fază și

$$U_0 = \underline{U}_2 = U_2; \quad I_0 = I_{2a},$$

$I_{2r}$  fiind partea reală a curentului  $\underline{I}_2$ , rezultă

$$u_2 = 1; \quad i_{2a} = \frac{I_{2a}}{I_0} = 1; \quad i_{2r} = \frac{I_{2r}}{I_0} = \frac{I_{2r}}{I_{2a}} = \operatorname{tg} \varphi_2$$

și deci

$$\underline{i}_2 = i_{2a} \pm j i_{2r} = 1 \pm j \operatorname{tg} \varphi_2,$$

după cum sistemul este capacitiv sau inductiv.

Înlocuind aceste valori în ecuația (6.86) și punând parametrii  $\underline{a}$  și  $\underline{b}$  sub forma complexă, se obține

$$\begin{aligned} \underline{u}_1 &= (a_1 + j a_2) u_2 + (b_1 + j b_2) (1 \pm j \operatorname{tg} \varphi_2) i_{2a} = \\ &= a_1 + b_1 \mp b_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + j (a_2 + b_2 \pm b_1 \operatorname{tg} \varphi_2) = u_1' + j u_1'' \end{aligned}$$



De aici, rezultă

$$u_1 = \sqrt{u_1'^2 + u_1''^2}$$

$$U_1 = u_1 U_0.$$

În același mod, din ecuația (6.87), se obține

$$\begin{aligned} \underline{i}_1 &= (c_1 + j c_2) u_2 + (d_1 + j d_2) (1 \pm j \operatorname{tg} \varphi_2) i_{2a} = \\ &= c_1 + d_1 \mp d_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + j (c_2 + d_2 \pm d_1 \operatorname{tg} \varphi_2) = i_1' + j i_1''. \end{aligned}$$

Rezultă

$$i_1 = \sqrt{i_1'^2 + i_1''^2}; \quad I_1 = i_1 I_0.$$

Puterea aparentă la intrarea în cuadripol se obține prin relația

$$S_1 = \underline{u}_1 \underline{i}_1^* = (u_1' + j u_1'') (i_1' - j i_1'') = (u_1' i_1' + u_1'' i_1'') + j (u_1'' i_1' - u_1' i_1'') = p_1 + j q_1$$

Rezultă

$$s_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}; \quad \underline{S}_1 = p_1 P_0 + j q_1 P_0 = P_1 + j Q_1,$$

în care

$$P_0 = U_0 I_0.$$

Mai departe, se găsește

$$\cos \varphi_1 = \frac{P_1}{s_1} \text{ și } \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{P_1},$$

deoarece

$$p_2 = u_2 i_{2a} = 1.$$

## 6.4. STUDIUL UNOR CIRCUITE TIP

### 6.4.1. GENERALITĂȚI

În studiul funcționării unei rețele electrice complexe, este de multe ori util să se separe o porțiune din rețea și să se studieze separat proprietățile sale și modul său de comportare în situații bine definite. De exemplu, într-un sistem energetic oarecare, se caută a se vedea cum se comportă o linie electrică care leagă două puncte oarecare ale sistemului. De asemenea, o mașină electrică poate fi considerată ca fiind un element de legătură între două părți ale unei rețele complexe și deci, poate fi studiată separat, fie din punct de vedere electromecanic sau numai din punct de vedere electric.

Această rețea parțială este constituită, în general, dintr-o grupare complexă oarecare de rezistențe, inductanțe, inductanțe mutuale, capacități, surse de energie, — sub forma de surse de tensiune și de surse de curent — electro-



motoare cu aceeași pulsație, tuburi electronice sau tranzistori în diferite montaje, prezentînd un număr oarecare de borne de intrare și un număr oarecare de borne de ieșire; la bornele de ieșire se leagă impedanțe oarecare  $Z$ , constante sau variabile, constituind utilizarea circuitului.

Proprietățile de care se bucură aceste rețele parțiale depind de numărul de borne prin care ele pot fi legate de restul rețelei. Se pot defini astfel patru circuite-tip diferite. În raport cu elementele constitutive ale rețelei sau a circuitului tip, acestea pot fi active sau pasive, liniare sau neliniare. Definirea diferitelor circuite-tip are un caracter general, ea fiind aceeași oricare ar fi natura rețelei; în cele ce urmează ne vom ocupa numai de cazul rețelilor liniare.

Circuitele-tip, astfel definite, pot fi grupate în următoarele patru categorii:

1. *Multipolul liniar*. Un multipol liniar este un circuit format dintr-o grupare oarecare de elemente liniare — rezistențe, inductanțe proprii și mutuale, capacități, surse liniare de tensiune sau de curent. Unele din nodurile acestei rețele sînt accesibile și pot fi conectate la alte rețele exterioare: prin definiție aceste noduri se numesc *bornele* sau *polii* rețelei. Nici unul din celelalte noduri nu trebuie să mai fie legat la o altă rețea exterioară; de asemenea, nici una din laturile rețelei nu trebuie să fie cuplată magnetic cu vreo latură oarecare a unei alte rețele (fig. 6.52). Un multipol este *activ* sau *pasiv* după cum el conține sau nu surse de energie electrică.

2. *Dipolul*. Un multipol liniar avînd numai două borne accesibile este un *dipol liniar*.

3. *Cuadripolul*. Un multipol liniar avînd patru borne accesibile se numește *tetrapol liniar*.

Dacă tetrapolul este legat la rețele exterioare, astfel încît curenții care intră prin cele patru borne ale sale sînt doi cîte doi egali și de sens contrar (fig. 6.53) tetrapolul considerat constituie un *cuadripol liniar*.

Condiția egalității curenților este întotdeauna realizată dacă rețelele exterioare,  $R_1$  și  $R_2$ , nu sînt cuplate între ele, magnetic sau electric; în anu-

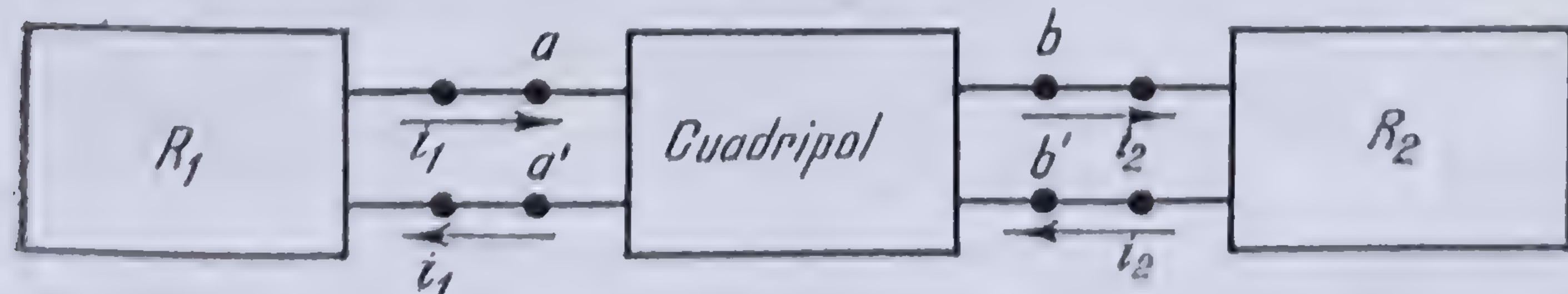


Fig. 6.53. Cuadripol.

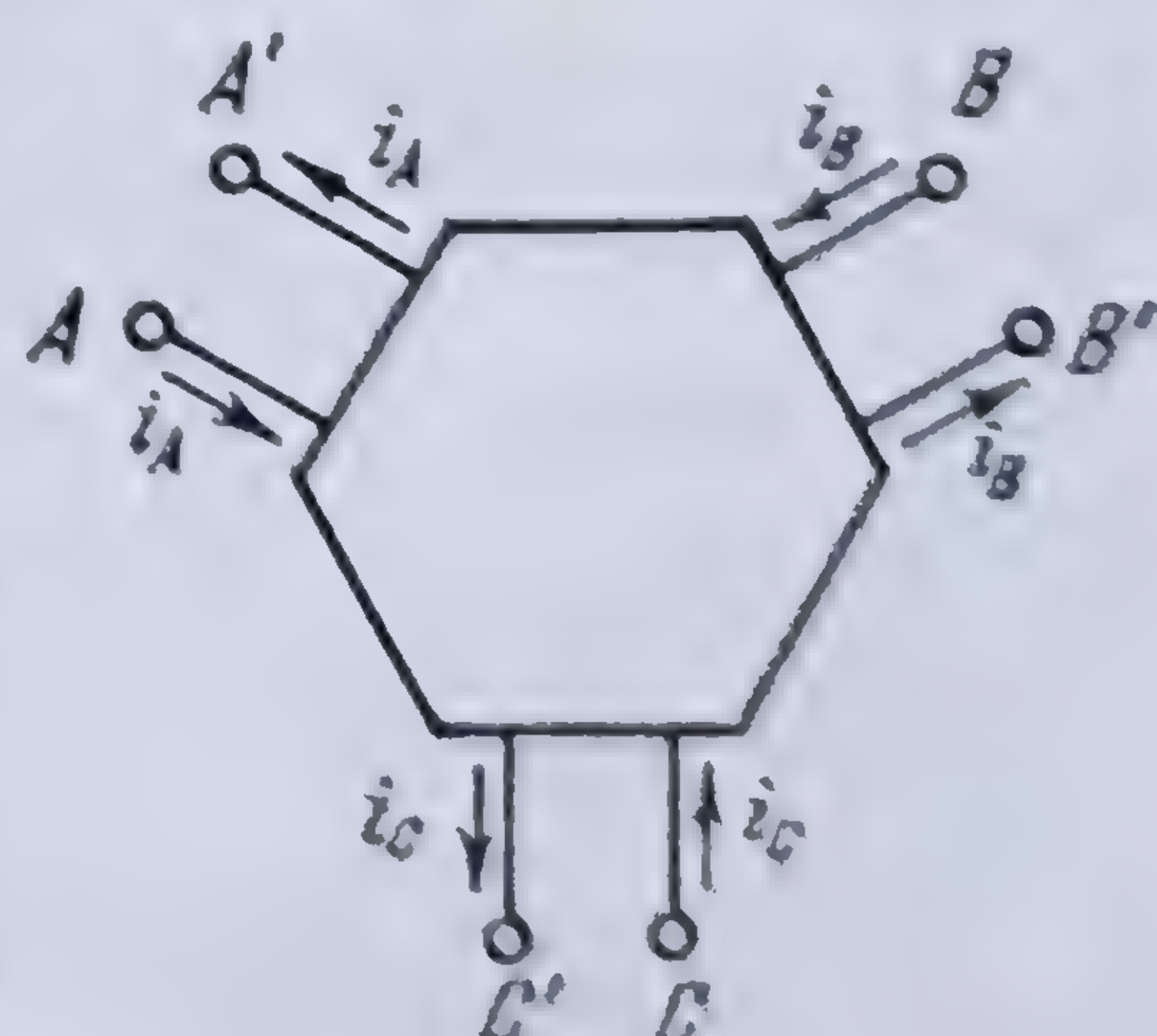


Fig. 6.54. Multidipol.

mite cazuri, această condiție este îndeplinită și atunci cînd există asemenea legături.

4. *Multidipolul*. Un multipol care are mai multe perechi de borne, legat cu rețelele exterioare, astfel încît curenții care intră prin fiecare pereche de borne să fie în permanență egali și de sens contrar se numește un multidipol (fig. 6.54).



## 6.4.2. STUDIUL MULTIPOLULUI

**6.4.2.1. Considerații generale.** Așa cum s-a arătat \*, un multipol pasiv-liniar este o rețea formată dintr-o grupare oarecare de elemente liniare de circuite electrice, care nu au în constituția lor surse de energie electrică cuprinse între  $n$  borne accesibile și astfel ca între elementele acestei rețele și exterior să nu mai existe nici un alt fel de legătură electrică sau magnetică, în afară de

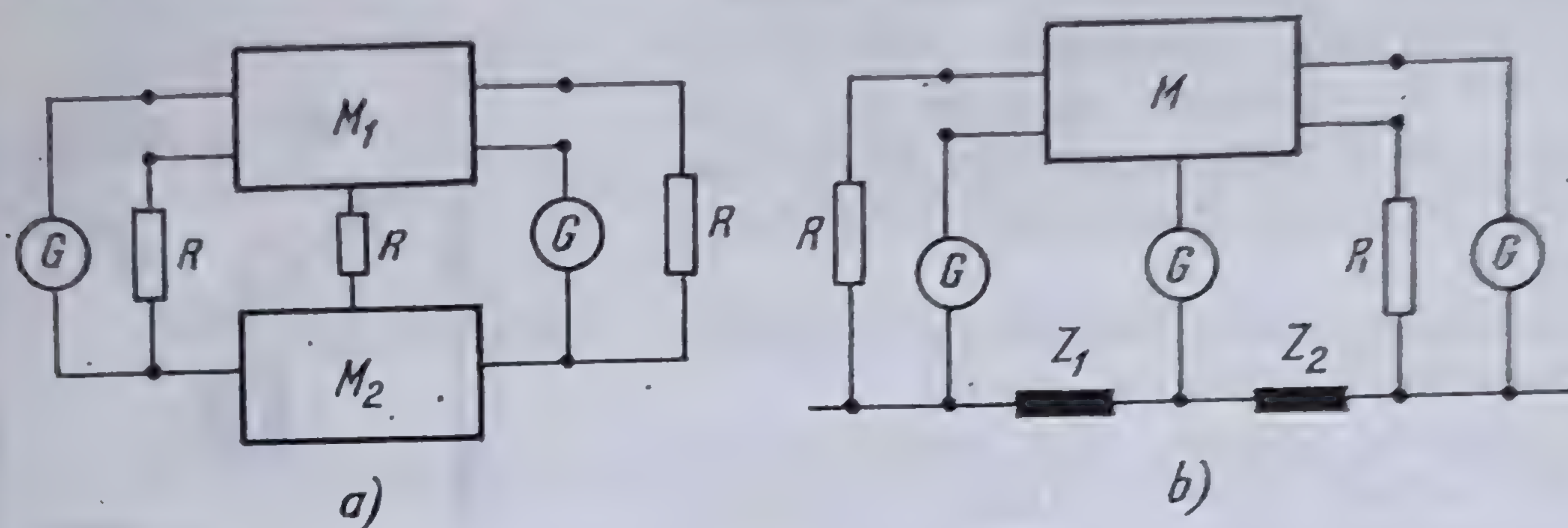


Fig. 6.55. Circuitul de întoarcere a unui multipol:  
a) printr-un alt multipol; b) printr-un conductor.

acelea ce se fac prin borne. Bornele unui multipol pot fi legate la surse de energie electrică — de tensiune sau de curent —, la receptoare — consumatoare de energie electrică — sau la alte rețele — active sau pasive.

Întoarcerea curentului care străbate un multipol poate să se facă în exteriorul său, fie printr-un alt multipol pasiv (fig. 6.55, a), fie printr-un conductor cu sau fără impedanță proprie (fig. 6.55, b).

Acest din urmă caz corespunde circuitului echivalent al unui sistem polifazat simetric și echilibrat (reprezentarea unei singure faze cu întoarcerea prin conductorul neutru).

Cel mai simplu multipol este dipolul.

**6.4.2.2. Metoda generală de studiu.** Pentru rezolvarea problemelor relative la multipoli se aplică metodele generale de studiu ale circuitelor electrice, în special metoda buclor, metoda perechilor de noduri și metoda transfigurării.

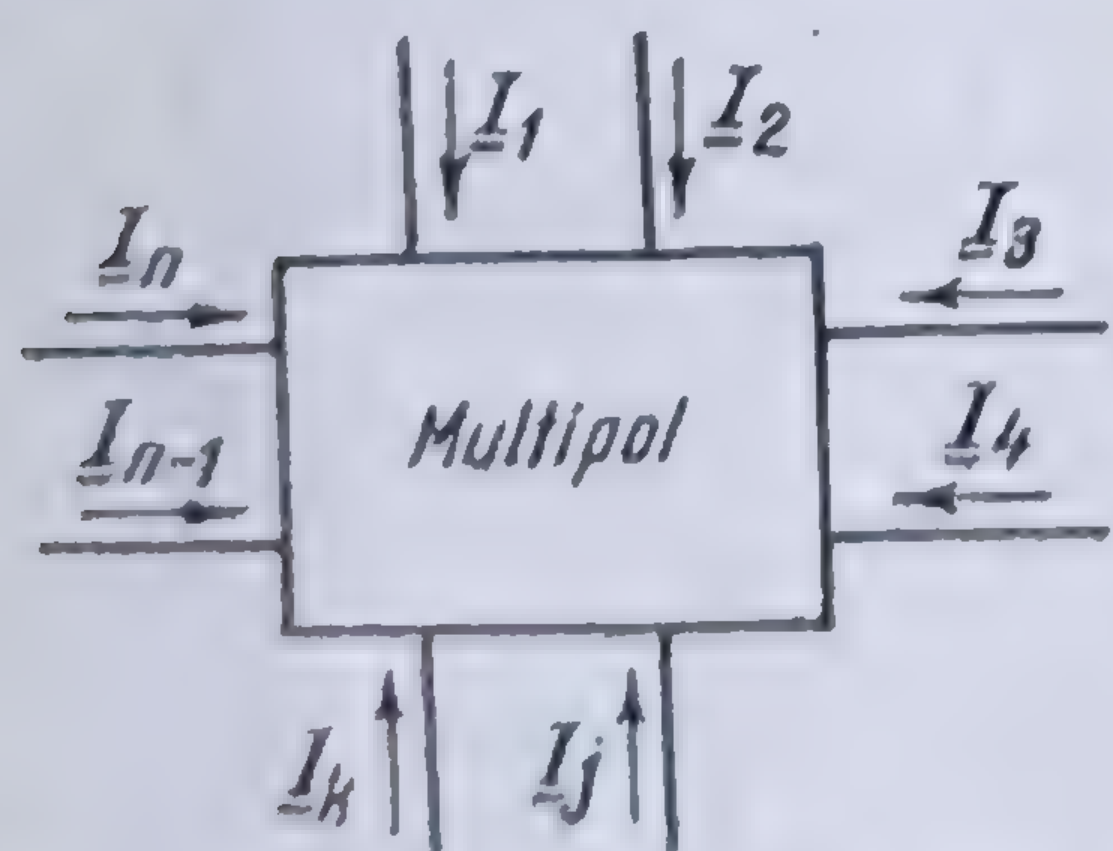


Fig. 6.56. Multipol fără cale de întoarcere a curentului.

În cazul unor multipoli complecși se utilizează modelarea electrică, care permite înlocuirea prin măsurători electrice a calculelor numerice.

În problemele de studiu a multipolilor se pot prezenta două cazuri mai importante:

1. Determinarea repartiției de curenți în laturile rețelei și a diferenței de potențial între nodurile sale, neglijând drumul de întoarcere a curentului.

2. Se ține seama de drumul de întoarcere a curentului — care este un conductor cu impedanță nulă — și se introduce astfel tensiunile nodurilor circuitului față de acest conductor al cărui potențial se ia ca origine.

În primul caz, fie  $n$  numărul de borne ale multipolului; pentru a defini complet regimul de funcționare al acestuia, este necesar să fie date  $n-1$  mărimi electrice complexe. Astfel, dacă considerăm cei  $n$  curenți care intră prin bor-

\* Vezi 6.4.1, 1.



nele multipolului (fig. 6.56), prin aplicarea primei teoreme a lui KIRCHHOFF se poate scrie

$$\sum_{j=1}^n \underline{I}_j = 0;$$

în consecință  $n-1$  din acești curenți sînt independenți.

Pentru a fixa cei  $n-1$  curenți independenți trebuie dați

$$2(n-1) - 1 = 2n - 3$$

parametri reali,  $n-1$  module și  $n-2$  argumente luate în raport cu argumentul unuia din curenți luat ca origine de fază.

În al doilea caz, existînd un conductor în plus — conductorul de întoarcere — apare un parametru în plus, necesar pentru determinarea funcționării multipolului. Într-adevăr, în acest caz, numărul de parametri ai multipolului este  $n+1$ , dintre care  $n$  sînt independenți; vor fi necesari deci  $2n-1$  parametri reali —  $n$  valori efective și  $n-1$  argumente. Ținînd seama că prima teoremă a lui KIRCHHOFF nu poate fixa decît  $n-1$  parametri, al  $n$ -lea parametru trebuie să fie neapărat o tensiune de borne, măsurată între o bornă oarecare din bornele multipolului și conductorul de întoarcere (fig. 6.57).

Este evident, că se pot înlocui unii curenți cu tensiunile de borne respective precum și că se poate înlocui unul din curenți — modulul și argumentul respectiv — prin puterile activă și reactivă circulînd prin borna respectivă și conductorul de întoarcere.

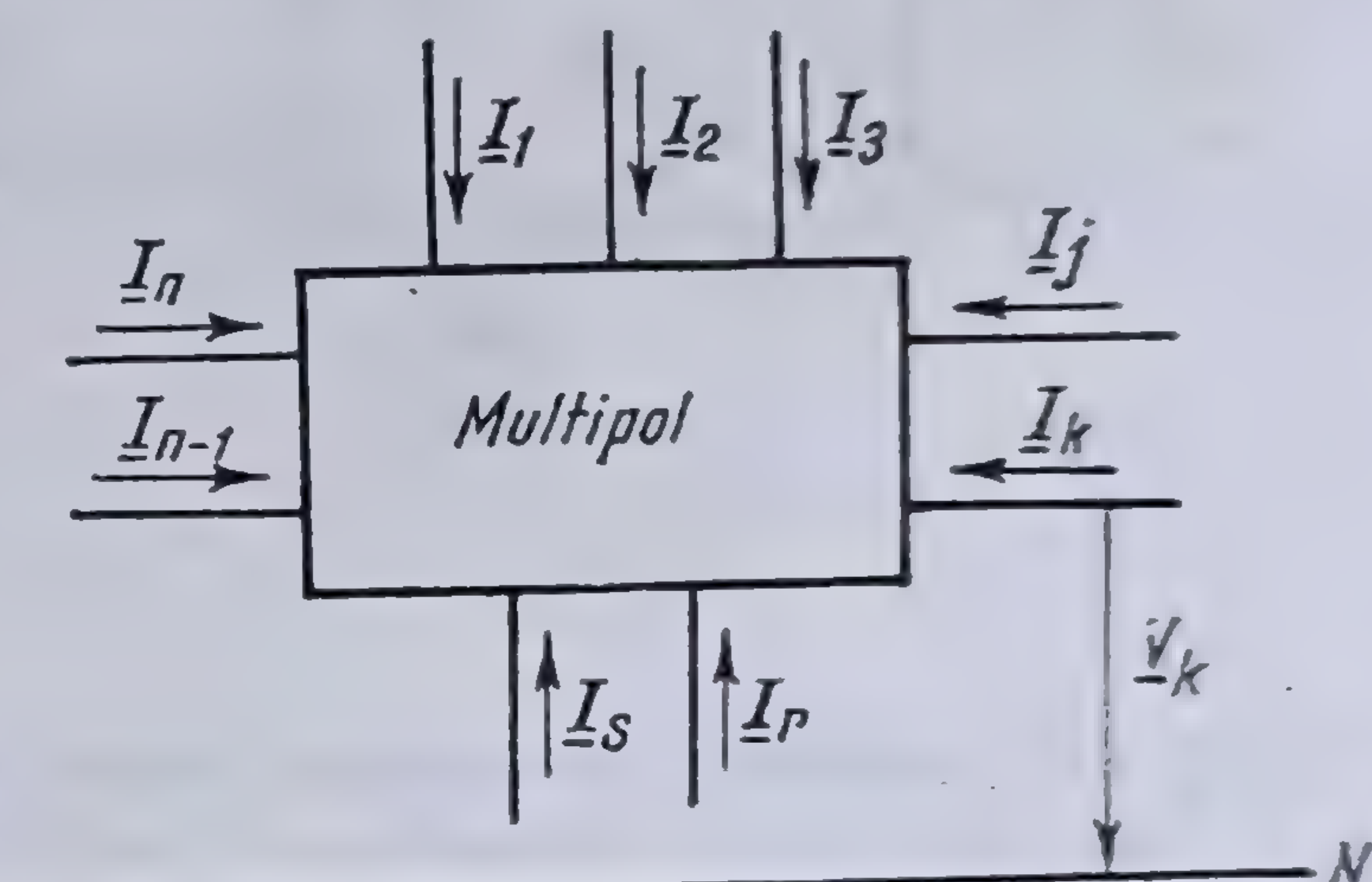


Fig. 6.57. Multipol cu cale de întoarcere a curențului.

### 6.4.3. STUDIUL MULTIDIPOLULUI

**6.4.3.1. Considerații generale.** Un multipol pasiv al cărui număr de borne este par,  $n=2k$ , iar curenții care ajung la o pereche de borne sînt egali și de sens contrar, se numește un multidipol (fig. 6.54).

Cel mai simplu dintre multidipoli este cuadripolul.

Pentru definirea regimului de funcționare a multidipolului este necesar să se dea  $k$  mărimi electrice. Luînd una din faze ca origine\*, numărul parametrilor reali de determinat va fi deci  $2k-1$ . Evident că, aceste  $k$  mărimi complexe pot fi tensiuni la diversele perechi de borne, curenții de borne, puterile aparente corespunzătoare la borne sau o combinație oarecare de aceste mărimi.

**6.4.3.2. Ecuațiile generale ale multidipolului.** a) *Impedanțele și admitanțele exterioare ale multipolului la funcționarea în scurtcircuit.* Fie un multipol la care se alege, pentru fiecare pereche de borne, un sens de referință pentru tensiuni și curenți (fig. 6.58).

\* Este evident că se poate lua una, oricare din mărimile reale în mod arbitrar; este mai comod a se lua o fază ca origine.



Se alimentează multidipolul prin una din perechile de borne, toate celelalte fiind legate în scurtcircuit (fig. 6.59); în aceste condiții se măsoară tensiunea și curentul la bornele de alimentare și curenții circulând prin bornele scurtcircuitate.

Prin definiție, impedanțele exterioare în scurtcircuit ale dipolului sînt:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}, \text{ impedanța aparentă în scurtcircuit la bornele } 11' \\ (\text{bornele de intrare});$$

$$\underline{Z}_{1p} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_p}, \text{ impedanța de transfer în scurtcircuit, între} \\ \text{bornele } 11' \text{ și } pp' \text{ (} pp' = 2, 3, \dots, n \text{)}.$$

Aceste impedanțe pot fi definite în raport cu oricare pereche de borne a multi-

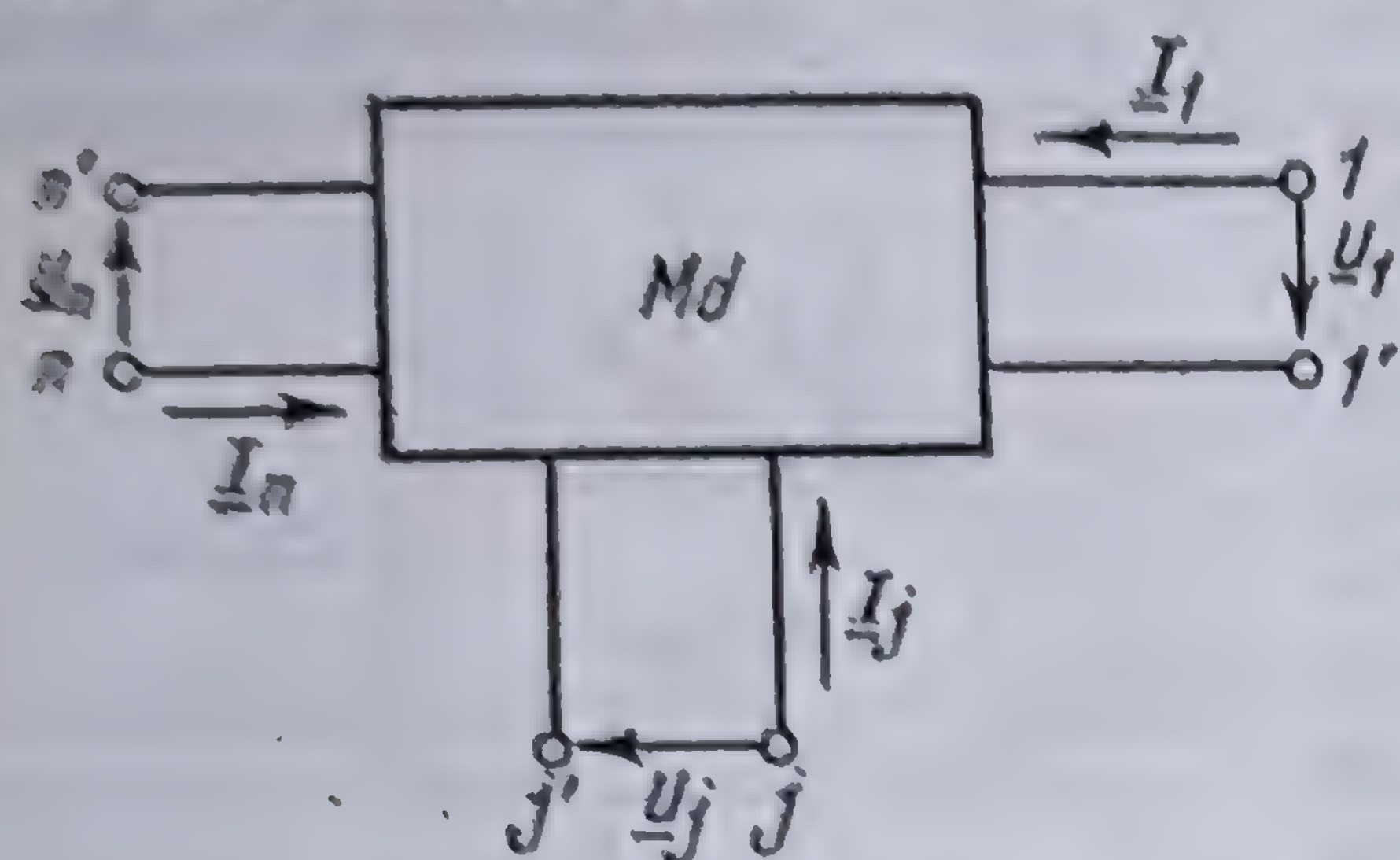


Fig. 6.58. Sensurile de referință pentru tensiuni și curenți la bornele unui multidipol.

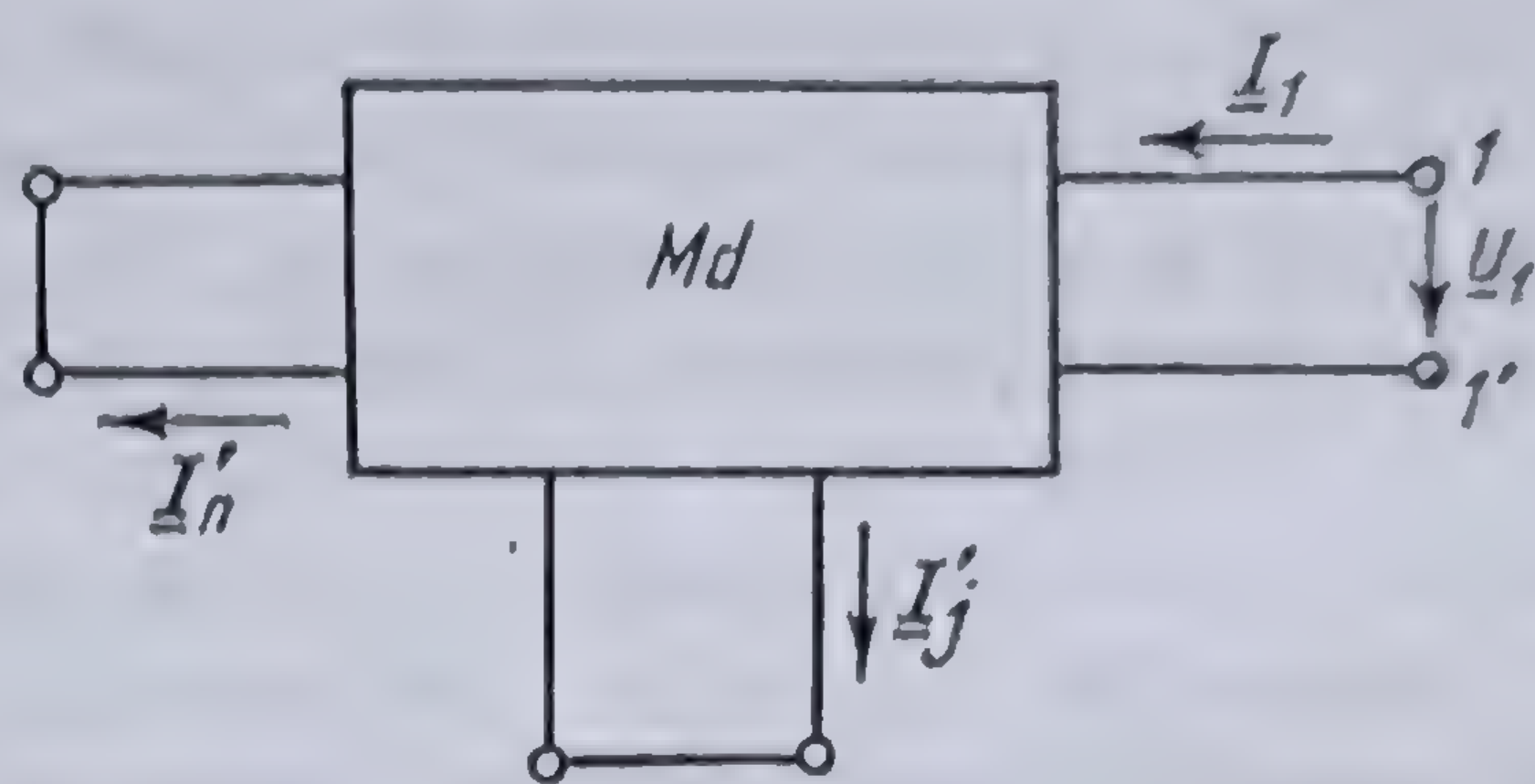


Fig. 6.59. Multidipol cu  $n - 1$  perechi de borne scurtcircuitate.

dipolului. Trebuie observat că în virtutea teoremei reciprocității a lui MAXWELL pentru orice rețea liniară

$$\underline{Z}_{pq} = \underline{Z}_{qp}.$$

Este ușor de văzut, că vom putea defini astfel, pentru un multidipol cu  $n$  perechi de borne,  $n$  impedanțe aparente la bornele de intrare și  $\frac{n(n-1)}{2}$  impedanțe de transfer.

În același mod se definește

$$\underline{Y}_{pp'} = \frac{1}{\underline{Z}_{pp'}} \text{ admitanța aparentă la scurtcircuit, la bornele } pp' \\ (\text{de intrare}); \text{ aceste admitanțe sînt în număr de } n;$$

$$\underline{Y}_{pq} = \frac{1}{\underline{Z}_{pq}} \text{ admitanțele de transfer la scurtcircuit dintre bornele } pp' \text{ și } qq'; \text{ numărul} \\ \text{lor este } \frac{n(n-1)}{2}.$$

b) Ecuațiile multidipolului în funcție de admitanțele exterioare în scurtcircuit. Să aplicăm pe rînd fiecărei perechi de borne o tensiune  $\underline{U}_i$ , celelalte perechi de borne fiind în scurtcircuit ( $\underline{U}_k = 0$ ). Curenții care circulă prin bornele respective vor fi

$$\underline{Y}_{pp'} \underline{U}_p \text{ pentru perechea de borne } pp' \text{ și}$$

$$\underline{Y}_{pq} \underline{U}_p \text{ pentru perechea de borne } qq'.$$



Suprapunerea tuturor acestor situații conduce la sistemul de ecuații

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 - \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 - \dots - \underline{Y}_{1n} \underline{U}_n \\ \underline{I}_2 &= -\underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 - \dots - \underline{Y}_{2n} \underline{U}_n \\ &\vdots \\ \underline{I}_n &= -\underline{Y}_{n1} \underline{U}_1 - \underline{Y}_{n2} \underline{U}_2 \dots + \underline{Y}_{nn} \underline{U}_n, \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

care poate fi scris matriceal sub forma

$$[I] = [Y] [U]. \quad (6.89)$$

# Matrices

$$[Y] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} & \dots & -\underline{Y}_{1n} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \dots & -\underline{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\underline{Y}_{n1} & -\underline{Y}_{n2} & \dots & \underline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

se numește *matricea admitanțelor exterioare în scurtcircuit* a multidipolului; este o matrice simetrică.

Inversînd ecuația (6.89) se obține ecuația

$$[U] = [Z] [I], \quad (6.91)$$

în care

$$[Z] = [Y]^{-1}$$

și care se numește *matricea impedanțelor exterioare*; trebuie observat că elementele matricei  $[Z]$  nu sînt inversele elementelor matricei  $[Y]$  și deci nu sînt identice cu impedanțele aparente și de transfer la scurtcircuit. Ele sînt *impedanțele aparente și de transfer* ale multidipolului la mersul în gol și anume (fig.6.60):

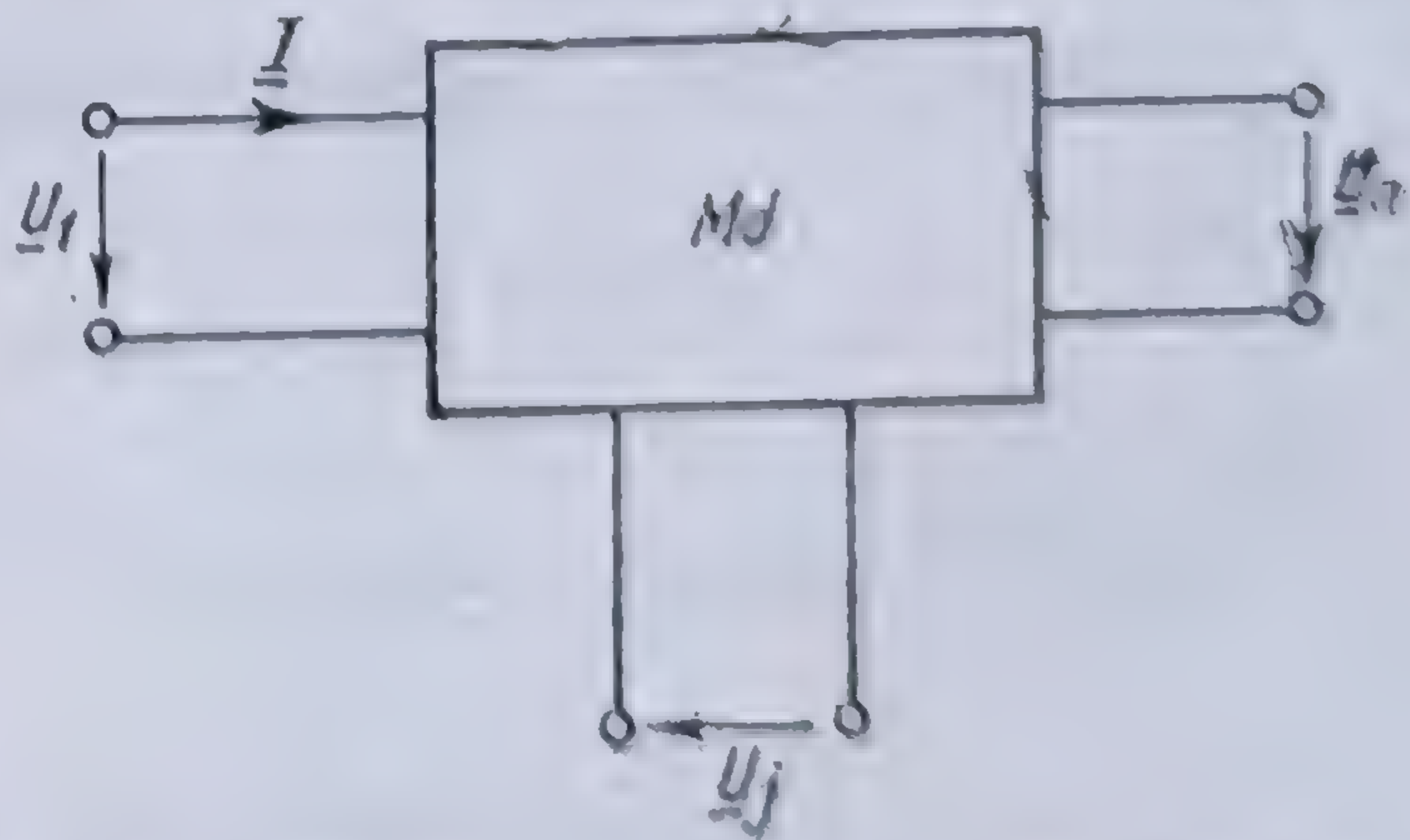


Fig. 6.60. Multidipol cu  $n - 1$  perechi de borne în gol.

$\underline{Z}'_{pp'} = \frac{U_p}{I_p}$  impedanța aparentă la mersul în gol, la bornele  $pp'$  (de intrare), numărul lor fiind  $n$ ;

$\underline{Z}_{xq} = \frac{U'_q}{I_x}$  impedanța de transfer la mersul în gol, dintre bornele  $pp'$  și  $qq'$ , în număr de  $\frac{n(n-1)}{2}$ .



Aplicînd metoda superpoziției, se poate stabili și în acest caz un sistem de ecuații, de forma

[illegible]

care conduce la ecuația matricială (6.91).

c) *Expresiile puterilor active și reactive exterioare.* Ecuațiile (6.88), respectiv (6.92), pot fi utilizate pentru calculul puterilor active și reactive la bornele multi-dipolului. Astfel, pentru bornele  $nn'$  puterea aparentă corespunzătoare este

$$\underline{S}_n = P_n + j Q_n = \underline{U}_n \underline{I}_n^*$$

sau, ținând seama de expresia corespunzătoare a lui  $\underline{I}_n$  din ecuațiile (6.88) rezultă

$$\underline{S}_n = -\underline{Y}_{n1}^* \underline{U}_1^* \underline{U}_n - \underline{Y}_{n2}^* \underline{U}_2^* \underline{U}_n - \dots + \underline{Y}_{nn}^* \underline{U}_n^* \underline{U}_n \quad (n = 1, 2, \dots, n). \quad (6.93)$$

Fie  $\theta_p$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) defazajul celor  $n$  tensiuni de borne în raport cu o origine de fază arbitrară;

$$\theta_{pq} = \theta_p - \theta_q \quad (p, q = 1, 2, \dots, n) \text{ defazajul \u00eentre tensiuni luate dou\u0107a}$$

cîte două ;

cite două;  
 $\psi_{pp}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ), argumentele admitanțelor aparente în scurt-circuit;  
 $\psi_{pq}$  ( $p, q = 1, 2, \dots, n$ ), argumentele admitanțelor de transfer în scurt-circuit;

circuit;  
 $\psi_{pq}(p, q = 1, 2, \dots, n)$  argumentele admitanțelor de transfer în scurt-  
 $p \neq q$   
circuit.

Relația (6.92) a puterii aparente se poate scrie

$$\underline{S}_n = -Y_{n1} U_n U_1 | \underline{\theta_{n1} + \psi_{n1}} - Y_{n2} U_n U_2 | \underline{\theta_{n2} + \psi_{n2}} - \dots + Y_{nn} U_n^2 | \underline{\psi_{nn}}$$

sau, separînd părțile reale și cele complexe rezultă,

$$\left. \begin{aligned} P_n &= -Y_{n1} U_n U_1 \cos(\theta_{n1} + \psi_{n1}) - Y_{n2} U_n U_2 \cos(\theta_{n2} + \psi_{n2}) - \dots \\ &\quad \dots + Y_n U_n^2 \cos \psi_{nn} \\ Q_n &= -Y_{n1} U_n U_1 \sin(\theta_{n1} + \psi_{n1}) - Y_{n2} U_n U_2 \sin(\theta_{n2} + \psi_{n2}) - \dots \\ &\quad \dots + Y_n U_n^2 \sin \psi_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (6.94)$$



În același mod se poate stabili expresia puterilor utilizând ecuațiile (6.92). Se găsește, procedînd în același mod,

$$\left. \begin{aligned} P_n &= -Z_{n1} I_n I_1 \cos(\varphi_{n1} + \zeta_{n1}) - Z_{n2} I_n I_2 \cos(\varphi_{n2} + \zeta_{n2}) - \dots \\ &\quad \dots + Z_{nn} I_n^2 \cos \zeta_{nn} \\ Q_n &= -Z_{n1} I_n I_1 \sin(\varphi_{n1} + \zeta_{n1}) - Z_{n2} I_n I_2 \sin(\varphi_{n2} + \zeta_{n2}) - \dots \\ &\quad \dots + Z_{nn} I_n^2 \sin \zeta_{nn} \end{aligned} \right\} \quad (6.95)$$

în care

$\varphi_p$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) este defazajul celor  $n$  curenți de borne în raport cu o origine de fază arbitrar aleasă;

$\varphi_{pq} = \varphi_p - \varphi_q$  ( $p, q = 1, 2, \dots, n$ ) este defazajul între doi curenți luați  $p \neq q$

doi cîte doi;

$\zeta_{pp}$  ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) sînt argumentele impedanțelor aparente la mersul în gol;

$\zeta_{pq}$  ( $p, q = 1, 2, \dots, n$ ) sînt argumentele impedanțelor de transfer la  $p \neq q$

mersul în gol.

În consecință, în cazul unei rețele care poate fi asimilată cu un multipol, dacă se cunosc, sau se pot măsura, admitanțele (respectiv impedanțele) aparente sau de transfer în scurtcircuit (respectiv în gol) se pot calcula cu ușurință puterile active și reactive la borne. Aceste puteri sînt date de relațiile (6.94), respectiv (6.95) și sînt toate considerate *pozitive* dacă fluxul de energie corespunzător este din exterior către interiorul multidipolului. Pentru determinarea acestor puteri nu este necesar să se cunoască configurația interioară a rețelei.

**OBSERVAȚIE.** Utilizarea modelelor electrice ale rețelelor dau posibilitatea măsurării directe a acestor mărimi.

#### 6.4.4. STUDIUL CUADRIPOULUI

**6.4.4.1. Considerații generale.** Multidipolii cei mai des întîlniți sînt cuadripolii, care au două borne de intrare și două borne de ieșire. Dintre aceștia, cuadripolii pasivi liniari formează o clasă importantă de circuite care permit un studiu comod cu ajutorul unor ecuații tip, care pot fi deduse analitic pe cale elementară.



Un asemenea circuit (fig. 6.61) poate fi redus, prin transformări succesive, fie la un circuit format din două impedanțe în serie între care se găsește o impedanță în derivație, fie din două impedanțe în derivație, între care se găsește o impedanță în serie.

După aspect, primul tip se numește un cuadripol în  $T$  (fig. 6.62,  $a$ ) și al doilea, cuadripol în  $\pi$  (fig. 6.62,  $b$ ).

Aceste circuite sînt alimentate la bornele de intrare  $a_1, b_1$  de o sursă de curent alternativ sinusoidal, avînd tensiunea efectivă  $\underline{U}_1$ . În circuite vor circula

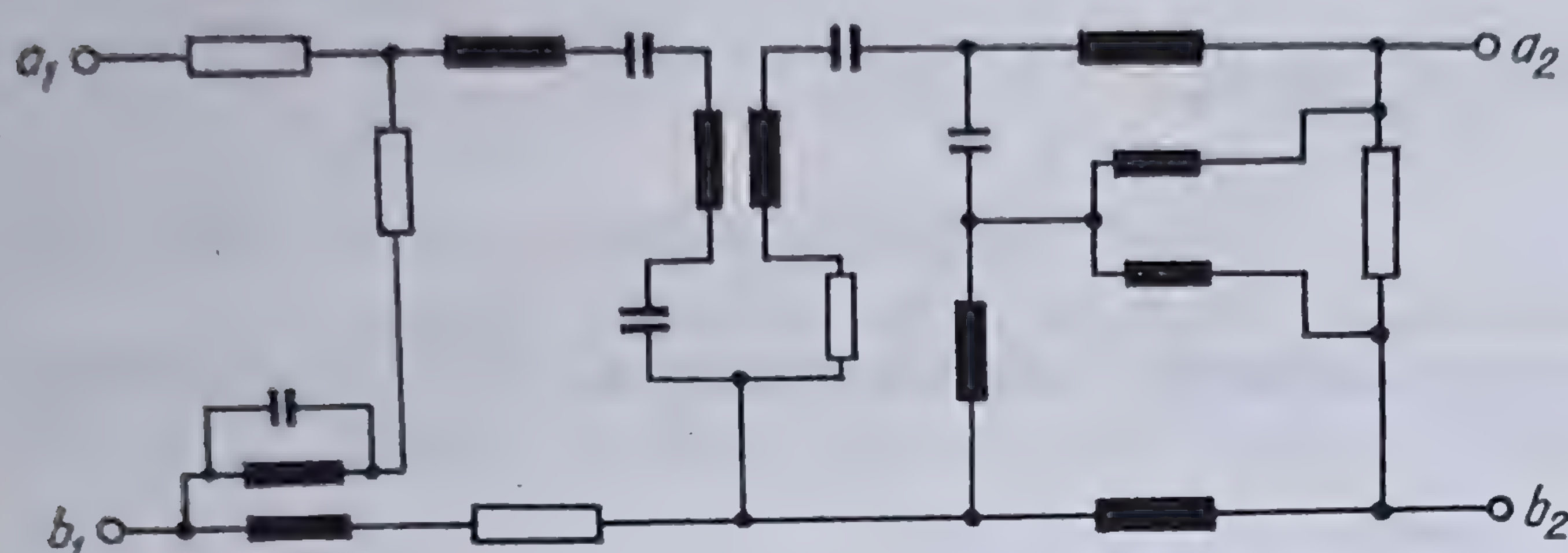


Fig. 6.61. Circuit cuadripol.

diverși curenți  $\underline{I}$  iar la bornele de ieșire  $a_2, b_2$  ale utilizării va rezulta o tensiune alternativă a cărei valoare efectivă este  $\underline{U}_2$ .

Problemele de rezolvat în cazul acestor circuite sînt de mai multe feluri :

$a$ ) Astfel, va trebui să se determine curentul  $\underline{I}_1$ , debitat de sursă, pentru fiecare valoare a impedanței de sarcină  $\underline{Z}$ , puterea utilă consumată în  $\underline{Z}$  și randamentul, adică raportul dintre puterea utilă  $P_u$  și puterea totală dată la bornele  $a_1, b_1$ .

$b$ ) În alte cazuri, variabila principală este curentul  $\underline{I}_2$ , în impedanța  $\underline{Z}$ ; se va putea studia în același timp și tensiunea  $\underline{U}_2$  la bornele  $a_2, b_2$  a impedanței  $\underline{Z}$ , sau tensiunea la bornele  $cd$  ale unei derivații.

$c$ ) Din alt punct de vedere, problema poate avea două aspecte diferite, după cum se dă constantă fie tensiunea  $\underline{U}_2$  la bornele  $a_2, b_2$  ale utilizării, caz ce corespunde unei furnizări de energie electrică sub tensiune constantă, fie tensiunea  $\underline{U}_1$  la bornele  $a_1, b_1$ , caz ce corespunde unei furnizări de energie de la o sursă de tensiune constantă, de exemplu, cazul alimentării motoarelor.

$d$ ) În general, impedanțele serie din circuit sînt foarte mici în raport cu impedanța utilizării sau cu impedanțele de derivație. În aceste condiții, în unele cazuri, se pot face oarecare aproximații, introducîndu-se apoi corecții. Astfel, se poate presupune, într-o primă aproximație, că impedanțele serie sînt nule și cele de derivație infinite.

Sistemele de circuite electrice, oricît de complicate ar fi se pot reduce la două tipuri bine definite și anume :

1. Sisteme la care funcționarea este cuprinsă între patru borne libere, cuprinzînd legături transversale; aceste sisteme se numesc *cuadripoli*; ele

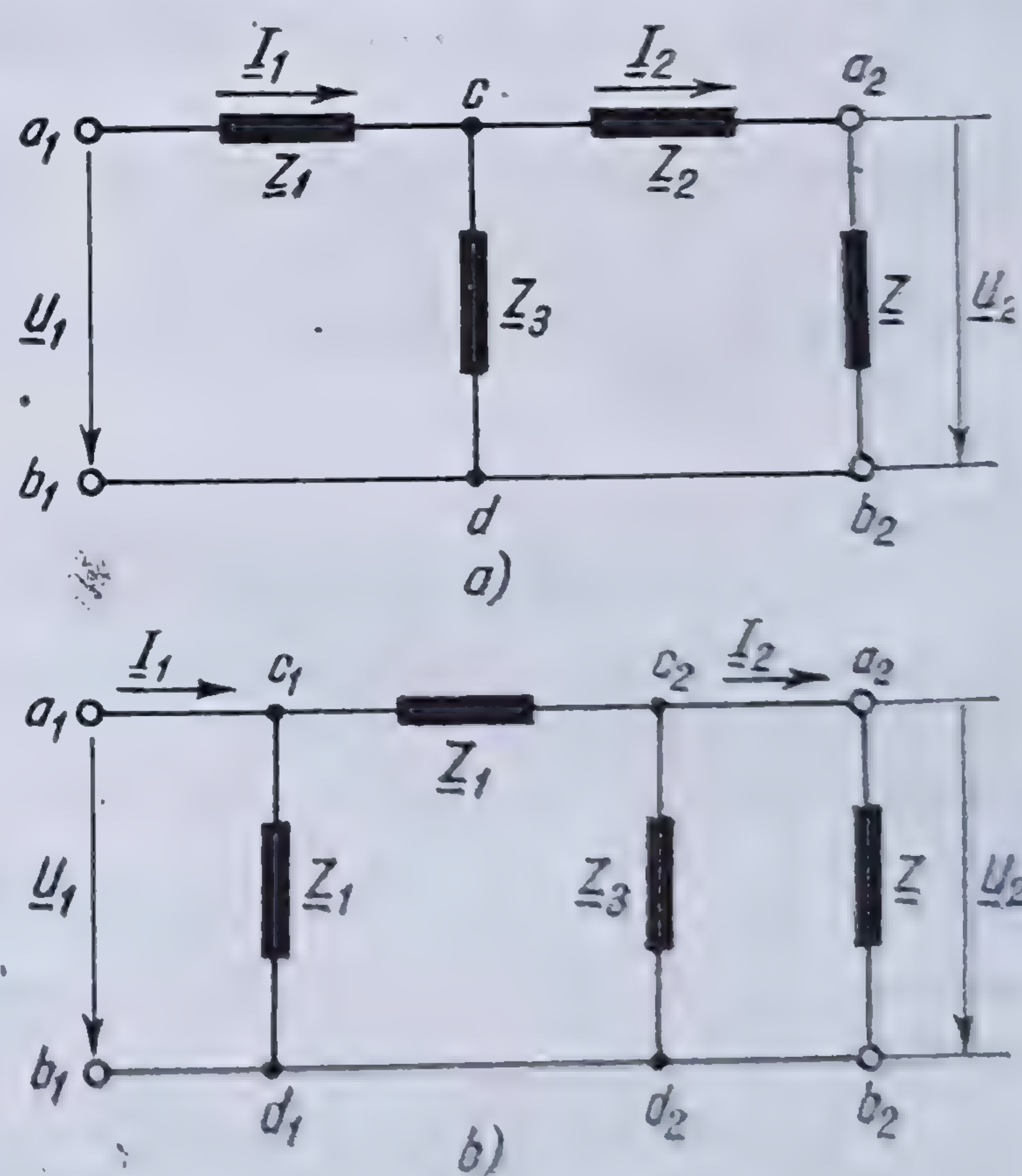


Fig. 6.62. Cuadripoli tip.

$a$ ) cuadripol în  $T$ ;  $b$ ) cuadripol în  $\pi$



corespund instalațiilor sau mașinilor la care pierderile transversale sau cele de mers în gol nu pot fi neglijate.

2. Sisteme la care funcționarea este cuprinsă între două borne libere și la care nu există nici un fel de legătură transversală; aceste sisteme se numesc *dipoli*. Aceste circuite corespund instalațiilor sau mașinilor la care se pot neglijă pierderile în gol și cele transversale (spre exemplu o linie electrică scurtă, un transformator electric etc.).

Dipolii constituie deci o clasă particulară de cuadripoli; ei vor fi examinați în paragraful următor\*.

**6.4.4.2. Ecuațiile cuadripolului.** Să considerăm un circuit oarecare, căruia i se pot determina două borne de intrare,  $a_1$  și  $b_1$ , și două borne de ieșire,  $a_2$  și  $b_2$  (fig. 6.63); între aceste patru borne atât prin interior cât și prin exterior, circuitul este pasiv. Se definește astfel un cuadripol pasiv.

Un cuadripol pasiv poate fi socotit ca un circuit intermediar și care servește de legătură între o sursă de energie electrică și o impedanță de utilizare.

La bornele de intrare  $a_1$  și  $b_1$  ale cuadripolului se aplică o tensiune de alimentare  $\underline{U}_1$ , iar la bornele de ieșire  $a_2$  și  $b_2$  se leagă o impedanță  $\underline{Z}$  care reprezintă sarcina de utilizare a cuadripolului. Cuadripolul va absorbi prin bornele  $a_1$  și  $b_1$  un curent  $\underline{I}_1$ , numit *curent de intrare*, și va debita prin bornele de ieșire  $a_2$  și  $b_2$  cu un curent  $\underline{I}_2$ , numit *curent de ieșire* sau de *utilizare*.

Căderea de tensiune la bornele sarcinii  $\underline{Z}$  fiind

$$\underline{U}_2 = \underline{Z} \underline{I}_2,$$

se poate înlocui, în schema de reprezentare, sarcina de utilizare prin tensiunea  $\underline{U}_2$ , care se numește *tensiunea de ieșire* a cuadripolului.

În ceea ce privește sensul\* atribuit acestor tensiuni și curenți acesta este pur convențional și nu este încă normalizat. În general tensiunile și curenții de la bornele unui cuadripol oarecare pot fi reprezentate\*\* prin unul din cele trei moduri indicate în figura 6.64. Astfel, în mod curent, în cazul liniilor

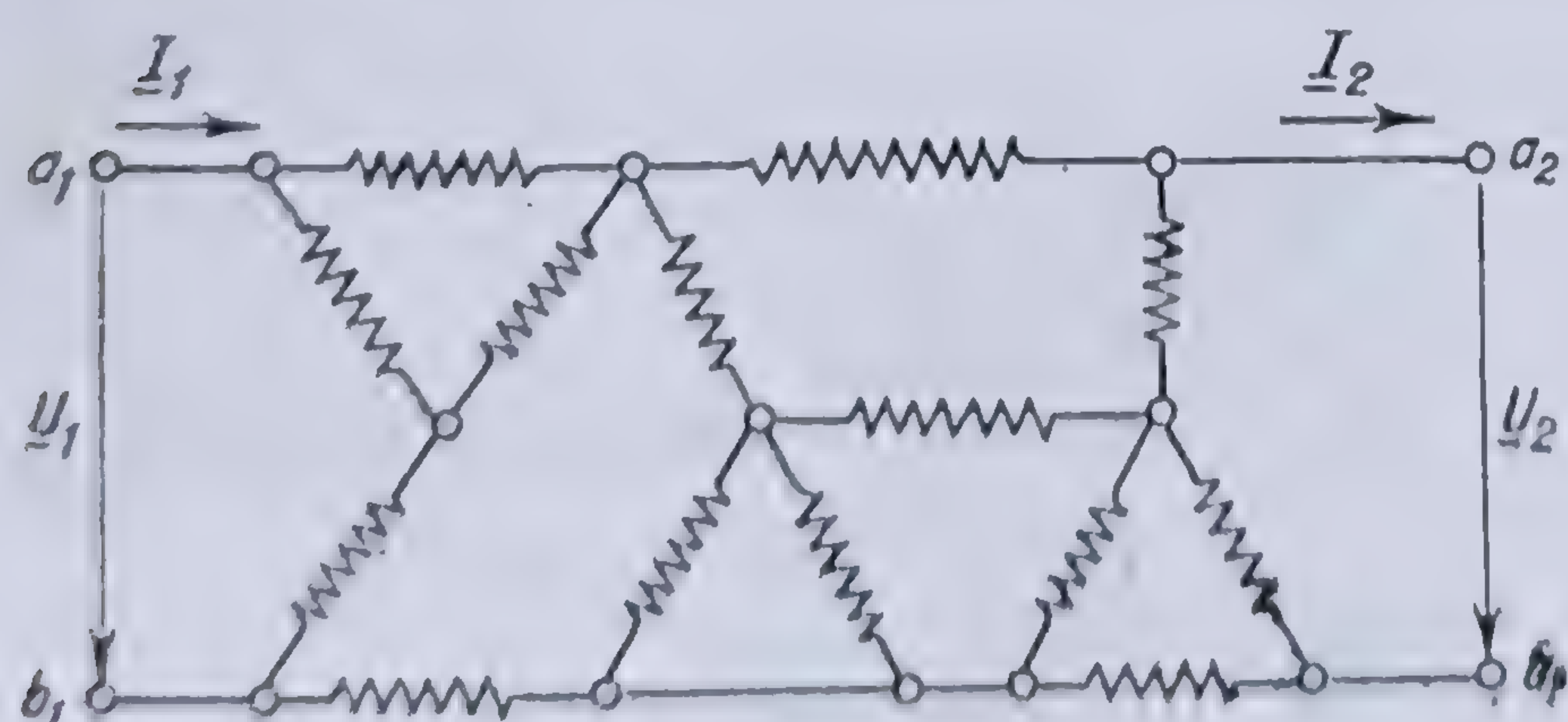


Fig. 6.63. Cuadripol pasiv.

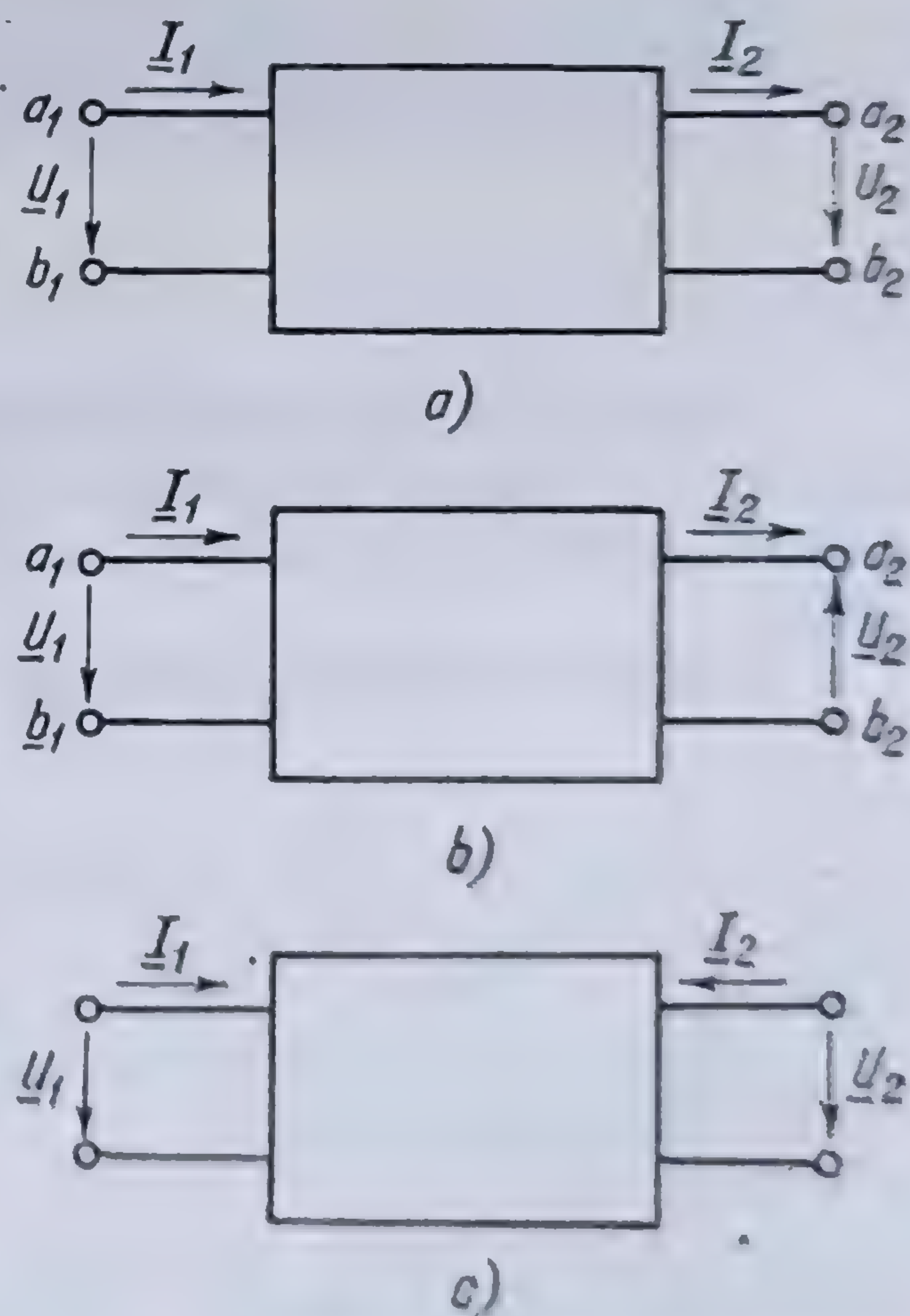


Fig. 6.64. Convenția semnelor la un cuadripol.

electrice se utilizează convenția indicată în figura 6.64, a; în cazul montajelor folosind tuburi electronice sau tranzistori se utilizează convenția din figura 6.64, c.

\* Vezi 6.4.5.

\*\* Alte trei moduri se mai pot obține dacă se ia și pentru  $\underline{U}_1$  sensul în sus.



Este evident că forma ecuațiilor se va schimba în raport cu convenția de reprezentare adoptată. Se adoptă convenția semnelor din figura 6.64, a.

În cele ce urmează s-a adoptat convenția semnelor din figura 6.64, a.

Funcționarea unui cuadripol se studiază cu ajutorul unor ecuații care dau legătura dintre mărimile de intrare (tensiune și curent) ale unui cuadripol în funcție de impedanțele constitutive ale cuadripolului.

Pentru stabilirea acestor ecuații se descompune circuitul în bucle independente astfel încât prima buclă să treacă prin bornele de intrare  $a_1$  și  $b_1$  și să fie străbătută de curentul  $\underline{I}_1$ , iar a doua buclă să treacă prin bornele de ieșire  $a_2$  și  $b_2$  și să fie străbătută de curentul  $\underline{I}_2$ .

Aplicând a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitelor astfel obținute, rezultă sistemul de ecuații liniare.

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{1n} \underline{I}_n &= \underline{U}_1 \\ \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{2n} \underline{I}_n &= -\underline{U}_2 \\ \underline{Z}_{31} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{32} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{3n} \underline{I}_n &= 0 \\ \dots & \\ \underline{Z}_{n1} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{n2} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{nn} \underline{I}_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.96)$$

În acest sistem  $\underline{Z}_{pq}$  reprezintă :

Pentru  $p = q$ , impedanța proprie a buclei ;

Pentru  $p = q$ , impedanța proprie a buclei,  
pentru  $p \neq q$ , impedanța mutuală sau comună buclelor  $p$  și  $q$ .

În general, într-un cuadripol pasiv

$$\underline{Z}_{pq} = \underline{Z}_{qp}.$$

Conform convenției făcute, tensiunea  $\underline{U}_2$ , de ieșire are semnul minus, întrucât i se aplică convenția tensiunii la bornele receptorului spre deosebire de tensiunea  $\underline{U}_1$ , de intrare, căreia i se aplică convenția tensiunii la bornele sursei.

1. Scriind sistemul (6.96) sub formă matriceală se obține

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & & n \\ \hline 1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{1n} \\ 2 & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{2n} \\ 3 & Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{3n} \\ \vdots & & & & \\ n & Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & Z_{nn} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & I_1 \\ \hline 2 & I_2 \\ \hline 3 & I_3 \\ \hline \vdots & \\ \hline n & I_n \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & U_1 \\ \hline 2 & -U_2 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline \vdots & \\ \hline n & 0 \end{array} \quad \text{say } [Z][I] = [U].$$

Descompunem această ecuație matriceală în submatrice cu ajutorul liniilor groase indicate; se obține ecuația matriceală

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$



în care

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{11} &= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{11} & Z_{12} \\ \hline Z_{21} & Z_{22} \\ \hline \end{array} \\ 2 \end{array}, \quad \mathcal{Z}_{12} = \begin{array}{c} 3 \quad . \quad . \quad . \quad n \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{13} & & Z_{1n} \\ \hline Z_{23} & & Z_{2n} \\ \hline \end{array} \\ 2 \end{array} \\
 \mathcal{Z}_{21} &= \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline Z_{31} & Z_{32} \\ \hline & \\ \hline Z_{n1} & Z_{n2} \\ \hline \end{array} \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array}, \quad \mathcal{Z}_{22} = \begin{array}{c} 3 \quad . \quad . \quad . \quad n \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_{33} & & Z_{3n} \\ \hline & & \\ \hline Z_{n3} & & Z_{nn} \\ \hline \end{array} \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array}, \\
 J_1 &= \begin{array}{c} 1 \\ \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ 2 \end{array}, \quad J_2 = \begin{array}{c} 3 \\ \hline I_3 \\ \hline \\ \hline I_n \\ n \end{array}, \\
 U &= \begin{array}{c} 1 \\ \hline U_1 \\ \hline -U_2 \\ 2 \end{array}, \quad O = \begin{array}{c} 3 \\ \hline 0 \\ \hline \\ \hline 0 \\ n \end{array}.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.98)$$

Dezvoltînd ecuația matriceală (6.97) se obține sistemul de ecuații matriceale

$$[\mathcal{Z}_{11}][J_1] + [\mathcal{Z}_{12}][J_2] = [U],$$

$$[\mathcal{Z}_{21}][J_2] + [\mathcal{Z}_{22}][J_2] = [0],$$

între care eliminînd matricea  $[J_2]$  rezultă

$$([\mathcal{Z}_{11}] - [\mathcal{Z}_{12}][\mathcal{Z}_{22}]^{-1} [\mathcal{Z}_{21}]][J_1] = [U]$$

sau

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \hline \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \\ \hline \end{array} \\ 2 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ \hline I_1 \\ \hline I_2 \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} \hline U_1 \\ \hline -U_2 \\ \hline \end{array}, \quad (6.99)$$

unde

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \hline \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \\ \hline \end{array} \\ 2 \end{array} = [\mathcal{Z}_{11}] - [\mathcal{Z}_{12}][\mathcal{Z}_{22}]^{-1} [\mathcal{Z}_{21}] = [\mathcal{S}]. \quad (6.100)$$

Transformînd ecuația matriceală (6.99) într-o ecuație matriceală de forma

$$\begin{array}{c} 1 \\ \hline U_1 \\ \hline I_1 \\ 2 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \hline U_2 \\ \hline I_2 \\ 2 \end{array}, \quad (6.101)$$



adică în care mărimile de intrare sînt definite în funcție de mărimile de ieșire, se găsește ușor \* :

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= -\frac{\mathcal{Z}_{11}}{\mathcal{Z}_{21}}, & A_{12} &= -\frac{\mathcal{Z}_{11}\mathcal{Z}_{22} - \mathcal{Z}_{12}\mathcal{Z}_{21}}{\mathcal{Z}_{21}} \\ A_{21} &= -\frac{1}{\mathcal{Z}_{21}}, & A_{22} &= -\frac{\mathcal{Z}_{22}}{\mathcal{Z}_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (6.102)$$

Dezvoltînd ecuația matriceală (6.101), se obțin ecuațiile cuadripolului sub forma \*\*

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

Întrucît matricea  $[\mathcal{Z}]$  este simetrică și matricea  $[\mathcal{Z}]$  este simetrică\*\*\*. În aceste condiții între cei patru parametri ai sistemului de ecuații (6.103) ale cuadripolului există întotdeauna relația

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \quad (6.104)$$

\* Transformarea se poate face fie direct, prin calcul matriceal, fie dezvoltînd ecuația matriceală (6.99).

\*\* Parametrii unui cuadripol se mai notează și sub forma

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}, \underline{A}_{12} = \underline{B}, \underline{A}_{21} = \underline{C}, \underline{A}_{22} = \underline{D}.$$

\*\*\* Pentru a arăta că matricea  $[\mathcal{Z}]$ , definită de relația (6.100) este simetrică, este suficient să arătăm că matricea

$$[\mathcal{Z}_2][\mathcal{Z}_{22}]^{-1}[\mathcal{Z}_{21}]$$

este simetrică, în care matricea  $[\mathcal{Z}_{22}]$  este simetrică, matricea  $[\mathcal{Z}_{11}]$  fiind de asemenea simetrică. Să considerăm matricea simetrică

$$[Z] = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{11} \dots & \mathcal{Z}_{1,p} & \mathcal{Z}_{1,p+1} \dots & \mathcal{Z}_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{Z}_{p1} \dots & \mathcal{Z}_{p,p} & \mathcal{Z}_{p,p+1} \dots & \mathcal{Z}_{pn} \\ \mathcal{Z}_{p+1,1} \dots & \mathcal{Z}_{p+1,p} & \mathcal{Z}_{p+1,p+1} \dots & \mathcal{Z}_{p+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{Z}_{n1} \dots & \mathcal{Z}_{n,p} & \mathcal{Z}_{n,p+1} \dots & \mathcal{Z}_{n,n} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{cu } \mathcal{Z}_{ij} = \mathcal{Z}_{ji} \\ &i, j = 1, 2, \dots, n. \\ &i \neq j \end{aligned}$$

Notăm

$$[A] = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{1,p+1} \dots & \mathcal{Z}_{1,n} \\ \dots & \dots \\ \mathcal{Z}_{p,p+1} \dots & \mathcal{Z}_{p,n} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}_{p+1,1} \dots & \mathcal{Z}_{p+1,p} \\ \dots & \dots \\ \mathcal{Z}_{n,1} \dots & \mathcal{Z}_{np} \end{bmatrix}$$

și considerăm matricea simetrică arbitrară

$$[X] = \begin{bmatrix} x_{11} \dots x_{1q} \\ \dots & \dots \\ x_{q1} \dots x_{qq} \end{bmatrix}, \quad \text{în care } q = n - p \text{ și } x_{ij} = x_{ji}$$



6.4.4.3. Semnificația fizică a parametrilor unui cuadripol și determinarea lor. Examinând ecuațiile (6.103) din punct de vedere dimensional este ușor de văzut că parametrii  $\underline{A}_{11}$  și  $\underline{A}_{22}$  reprezintă numere complexe fără dimensiuni,  $\underline{A}_{12}$  are dimensiunea unei impedanțe, iar  $\underline{A}_{21}$  pe aceea a unei admitanțe.

Pentru a determina semnificația fizică se fac asupra cuadripolului două încercări de funcționare: una de mers în gol ( $\underline{I}_2 = 0$ ) și una de mers în scurt-circuit ( $\underline{U}_2 = 0$ ).

Făcând în ecuațiile (6.103),  $\underline{I}_2 = 0$  se obține

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{10} &= \underline{A}_{11} \underline{U}_{20} \\ \underline{I}_{10} &= \underline{A}_{21} \underline{U}_{20} \end{aligned} \right\} \quad (6.105)$$

Din prima relație, se deduce

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{U}_{20}},$$

de unde, rezultă că  $\underline{A}_{11}$  este *raportul de transformare al tensiunilor la funcționarea în gol*.

Din a doua relație se deduce

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{10}}{\underline{U}_{20}};$$

$\underline{A}_{21}$  se numește *admitanța internă sau de transfer* a cuadripolului la mersul în gol. Făcând  $\underline{U}_2 = 0$  se obține

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1sc} &= \underline{A}_{12} \underline{I}_{2sc} \\ \underline{I}_{1sc} &= \underline{A}_{22} \underline{I}_{2sc} \end{aligned} \right\} \quad (6.106)$$

Produsul  $[A] [X] [B]$  are sens deoarece tipurile acestora sînt respectiv

$$\{p, n-p\}, \{n-p, n-p\}, \{n-p, p\}.$$

Să notăm acest produs

$$[Y] = [A] [X] [B];$$

avem

$$y_{lk} = \sum_{i,j} a_{li} x_{ij} b_{jk} = \sum_{i,j} z_{l,p+i} x_{ij} z_{p+j,k} \quad (a)$$

$$y_{kl} = \sum_{i,j} a_{ki} x_{ij} b_{li}$$

sau, schimbînd indicii de însumare între ei și ordinea de însumare,

$$y_{kl} = \sum_{i,j} a_{kj} x_{ji} b_{li} = \sum_{i,j} z_{k,p+j} x_{ji} z_{p+i,l} \quad (b)$$

Comparînd (a) cu (b) și ținînd seama că

$$z_{k,p+j} = z_{p+j,k}, x_{ij} = x_{ji}, z_{p+i,l} = z_{l,p+i},$$

rezultă  $y_{lk} = y_{kl}$  și deci matricea  $[Y]$  este simetrică.

Această demonstrație se datorează Prof. Dr. doc. ION ȘABAG.



De aici rezultă

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1\ sc}}{\underline{I}_{2\ sc}};$$

$\underline{A}_{12}$  se numește *impedanța internă sau de transfer* a cuadripolului la mersul în scurtcircuit. Din a doua relație se deduce

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_{1\ sc}}{\underline{I}_{2\ sc}}$$

care este *raportul de transformare a curenților* la funcționarea în scurtcircuit. Pentru determinarea acestor parametri se procedează în felul următor: Împărțind relațiile (6.105) între ele, se obține

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}_{10}} = \underline{Z}_{10} \quad (6.107)$$

ceea ce înseamnă că bornele de ieșire au fost lăsate în gol, fără sarcină și s-a determinat impedanța aparentă de mers în gol la bornele de intrare.

Împărțind relațiile (6.106) între ele se obține

$$\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{\underline{U}_{1\ sc}}{\underline{I}_{1\ sc}} = \underline{Z}_{1\ sc}, \quad (6.108)$$

care reprezintă impedanța aparentă de scurtcircuit la bornele de intrare, bornele de ieșire fiind legate în scurtcircuit.

Alimentând cuadripolul pe la ieșire\* și făcându-l să funcționeze în gol, din a doua ecuație (6.103) se deduce

$$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{U}_{20}}{\underline{I}_{20}} = \underline{Z}_{20}, \quad (6.109)$$

care reprezintă impedanța aparentă de mers în gol la bornele de ieșire.

Din relațiile (6.107), (6.108) și (6.109), utilizând relația (6.104), de legătură a acestor parametri, se deduce expresia lor

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \frac{\underline{Z}_{10}}{\sqrt{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1\ sc})}}, & \underline{A}_{12} &= \underline{Z}_{1\ sc} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1\ sc}}}, \\ \underline{A}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{20}(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1\ sc})}}, & \underline{A}_{22} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1\ sc}}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

Rezultă dar, că pentru determinarea parametrilor unui cuadripol, oricât de complicat ar fi el, este suficient a se face trei măsurători, cu ajutorul cărora se determină impedanțele de mers în gol și de mers în scurtcircuit la intrarea în

\* Vezi 6.4.4.4



cuadripol și impedanța de mers în gol la ieșirea din cuadripol, alimentarea acestuia făcându-se prin bornele de ieșire.

În locul impedanței de mers în gol la bornele de ieșire a cuadripolului se poate determina impedanța de scurtcircuit a acestora, alimentând cuadripolul prin bornele de ieșire și legind în scurtcircuit bornele de intrare. Din prima ecuație (6.103) se deduce în aceleași condiții

$$\frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{U_{2\text{ sc}}}{I_{2\text{ sc}}} = Z_{2\text{ sc}} \quad (6.111)$$

Din relațiile (6.107), (6.108), (6.109) și (6.111) se deduce

$$Z_{1\text{ sc}} Z_{20} = Z_{2\text{ sc}} Z_{10} \text{ sau } \frac{Z_{10}}{Z_{20}} = \frac{Z_{1\text{ sc}}}{Z_{2\text{ sc}}}$$

adică raportul impedanțelor aparente măsurate la funcționarea în gol este egal cu raportul impedanțelor aparente măsurate la funcționarea în scurtcircuit, astfel încât, dacă au fost determinate prin experiență trei din aceste impedanțe, a patra se poate determina prin calcul.

**6.4.4.4. Diferite forme de prezentare ale ecuațiilor cuadripolului.** a) Pornind de la ecuațiile (6.103) și (6.104) ale cuadripolului, se poate admite că fiecare pereche de valori  $\underline{U}_1, \underline{I}_1$  și  $\underline{U}_2, \underline{I}_2$  sînt componentele unor vectori într-un spațiu complex cu două dimensiuni și pe care îl presupunem raportat la un sistem de axe dreptunghiulare. Fie  $\underline{E}_1$  vectorul tensiune-curent la intrarea în cuadripol de componente  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$  și  $\underline{E}_2$  vectorul tensiune-curent la ieșirea din cuadripol, de componente  $\underline{U}_2$  și  $\underline{I}_2$ . Relațiile (6.103) se pot scrie matriceal sub forma\*

$$[\underline{E}_1] = [\gamma] [\underline{E}_2], \quad (6.112)$$

unde

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (6.113)$$

se numește *matricea caracteristică a cuadripolului*.

b) Rezolvînd sistemul (6.112) în raport cu  $[\underline{E}_2]$  se găsește

$$[\underline{E}_2] = [\tau] [\underline{E}_1], \quad (6.114)$$

care dă elementele de ieșire ale cuadripolului în funcție de elementele de intrare ale acestuia, alimentarea cuadripolului făcându-se tot pe la bornele de intrare  $a_1, b_1$ . În ecuația (6.114) s-a notat

$$[\tau] = [\gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (6.115)$$

Matricea  $[\tau]$  se numește *matricea de transferanță a cuadripolului*.

\* În scrierea matriceală, suprimăm bara din scrierea cantităților complexe.



Cuadripolii definiți de ecuațiile (6.103) și (6.114) se numesc *inverși* unul altuia.

Ținând seama de relațiile (6.115) dintre elementele celor două matrice, rezultă că realizarea unui cuadripol invers unui cuadripol dat nu poate fi făcută decât în condiții cu totul particulare\*; într-adevăr este necesară utilizarea de impedanțe negative, ceea ce implică utilizarea de rezistențe negative, lucru ce nu se poate realiza decât cu mare dificultate.

c) Se definește *cuadripolul răsturnat* al unui cuadripol dat, cuadripolul ce se obține din acesta prin schimbarea sensului curenților și permutarea borne-  
lor de intrare și de ieșire.

Pornind de la ecuațiile (6.114), pe care le scriem dezvoltat

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix},$$

și la care schimbând sensul curenților, se obține

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \quad (6.116)$$

Notăm cu  $[\rho]$  matricea parametrilor acestui cuadripol. Se zice că un cuadripol este răsturnabil dacă este identic cu cuadripolul răsturnat. Pentru asta este necesar ca

$$[\gamma] \equiv [\rho]$$

ceea ce nu este posibil decât dacă

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}.$$

În acest caz cuadripolul se numește simetric\*\*.

Întrucît determinantul matricei  $[\gamma]$  este egal cu unitatea, rezultă

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \sqrt{1 + \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}}$$

și deci matricea caracteristică a unui cuadripol răsturnabil este

$$[\gamma] = [\rho] = \begin{bmatrix} \sqrt{1 + \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \sqrt{1 + \underline{A}_{12} \underline{A}_{21}} \end{bmatrix}$$

și nu depinde decât de doi parametri.

\* Vezi [53] pag. 242.

\*\* Vezi 6.4.4.6, c.



d) Dacă se rezolvă sistemul (6.103) în raport cu curenții  $\underline{I}$ , se obțin relațiile

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.117)$$

sau sub forma matriceală

$$[\underline{I}] = [\underline{\eta}] [\underline{U}] \quad (6.118)$$

în care

$$[\underline{\eta}] = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

este matricea de admitanță a cuadripolului. Elementele acestei matrice în funcție de elementele matricei caracteristice sînt

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_{12} = -\frac{|\gamma|}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_{22} = -\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$$

Este ușor de văzut că în acest caz, determinantul matricei de admitanță e diferit de 1,

$$|\underline{\eta}| \neq 1.$$

e) Rezolvînd sistemul (6.103) în raport cu tensiunile  $\underline{U}$  se obțin relațiile

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2, \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.120)$$

în care

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{12} = -\frac{|\gamma|}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}.$$

Sub formă matriceală sistemul (6.120) poate fi scris

$$[\underline{U}] = [\underline{\zeta}] [\underline{I}] \quad (6.121)$$

în care matricea

$$[\underline{\zeta}] = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \quad (6.122)$$



se numește *matricea de impedanță a cuadripolului*; și pentru această matrice

$$|\zeta| \neq 1.$$

Comparând relațiile (6.118) și (6.121) rezultă

$$[\eta] [\zeta] = 1.$$

f) Dacă se rezolvă sistemul (6.103) în raport cu  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_2$ , se obțin relațiile

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{D}_{11} \underline{I}_1 + \underline{D}_{12} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{D}_{21} \underline{I}_1 + \underline{D}_{22} \underline{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.123)$$

în care

$$\underline{D}_{11} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{D}_{12} = \frac{|\gamma|}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{D}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{D}_{22} = -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}.$$

Scriind sistemul (6.123) sub formă matriceală se obțin

$$[\mathcal{E}_1] = [\delta] [\mathcal{E}_2] \quad (6.124)$$

$\mathcal{E}$  fiind vectorul tensiune-curent care are componentele  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_2$ ,  $\mathcal{E}_2$ , vectorul curent-tensiune având componentele  $\underline{I}_1$  și  $\underline{U}_2$ ; matricea

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \underline{D}_{11} & \underline{D}_{12} \\ \underline{D}_{21} & \underline{D}_{22} \end{bmatrix} \quad (6.125)$$

se numește *matricea serie paralel a cuadripolului*.

g) Rezolvând acum sistemul (6.103) în raport cu  $\underline{I}_1$  și  $\underline{U}_2$  se obțin relațiile

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{F}_{11} \underline{U}_1 + \underline{F}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{F}_{21} \underline{U}_1 + \underline{F}_{22} \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.126)$$

sau matriceal

$$[\Phi_1] = [\varphi] \cdot [\Phi_2] \quad (6.127)$$

în care  $\Phi_1$  este vectorul curent-tensiune care are componentele  $\underline{I}_1$  și  $\underline{U}_2$  iar  $\Phi_2$  este vectorul tensiune-curent, cu componentele  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_2$ . Matricea

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} & \underline{F}_{12} \\ \underline{F}_{21} & \underline{F}_{22} \end{bmatrix} \quad (6.128)$$



se numește *matricea paralel-serie a cuadripolului* și elementele sale în funcție de elementele matricei caracteristice sînt date de relațiile

$$\underline{F}_{11} = \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{F}_{12} = \frac{|\gamma|}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{F}_{21} = \frac{1}{\underline{A}_{11}}, \quad \underline{F}_{22} = -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}.$$

**OBSERVAȚII.** 1 Este ușor de văzut că

$$[\delta] [\varphi] = 1,$$

sistemele (6.124) și (6.127) fiind inverse.

2. Cele șase matrice ale unui cuadripol, definite mai înainte, se pot deduce una din cealaltă utilizînd fie calculul matriceal, fie direct, obținîndu-se astfel elementele uneia din matrice în funcție de elementele celorlalte matrice (Tab. 6.4).

**6.4.4.5. Semnificația fizică a diverselor elemente ale matricelor unui cuadripol.** Ținînd seama de relațiile care definesc diversele forme de ecuații de funcționare ale cuadripolilor, cele 24 elemente ale matricelor unui cuadripol sînt definite prin relațiile :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0}, & \underline{A}_{12} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0}, & \underline{A}_{21} &= \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0}, & \underline{A}_{22} &= \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0}; \\ \underline{T}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_1=0}, & \underline{T}_{12} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_1=0}, & \underline{T}_{21} &= \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_1=0}, & \underline{T}_{22} &= \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_1=0}; \\ \underline{Y}_{11} &= \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}, & \underline{Y}_{12} &= \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0}, & \underline{Y}_{21} &= \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}, & \underline{Y}_{22} &= \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0}; \\ \underline{Z}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0}, & \underline{Z}_{12} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0}, & \underline{Z}_{21} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0}, & \underline{Z}_{22} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0}; \\ \underline{D}_{11} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}, & \underline{D}_{12} &= \left( \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_1=0}, & \underline{D}_{21} &= \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{U}_2=0}, & \underline{D}_{22} &= \left( \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_1=0}; \\ \underline{F}_{11} &= \left( \frac{\underline{F}_1}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_2=0}, & \underline{F}_{12} &= \left( \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0}, & \underline{F}_{21} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{I}_2=0}, & \underline{F}_{22} &= \left( \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_1=0}. \end{aligned} \quad (6.129)$$

**6.4.4.6. Diferite tipuri de cuadripoli.** În raport cu structura internă a unui cuadripol și cu modul său de funcționare există diverse tipuri de cuadripoli. Dintre acestea, cele mai importante sînt :

a) *Cuadripoli pasivi și cuadripoli activi.* Un cuadripol poate fi pasiv sau activ.

Întru-un cuadripol pasiv nu există surse de tensiune sau de curent în interiorul său, adică între cele patru borne ale sale; el nu trebuie să conțină decît rezistențe, inductanțe și capacități. Pentru un asemenea cuadripol există relația (6.104).



Tabloul 6.4

CORESPONDENȚA DINTRE DIVERSELE MATRICE ALE UNUI CUADRIPOLE

$[\tau] =$	$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{ \tau }$	$\begin{bmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Y_{21}}$	$\begin{bmatrix} Y_{22} & 1 \\ - \eta  & Y_{11} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Z_{21}}$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & - \zeta  \\ 1 & -Z_{22} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{D_{21}}$	$\begin{bmatrix} -\delta & D_{11} \\ -D_{22} & 1 \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{F_{21}}$	$\begin{bmatrix} 1 & -F_{22} \\ F_{11} & - \varphi  \end{bmatrix}$
$[\gamma] = \frac{1}{\gamma}$	$\begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Y_{12}}$	$\begin{bmatrix} -Y_{11} & 1 \\ - \eta  & Y_{22} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Z_{12}}$	$\begin{bmatrix} Z_{22} & - \zeta  \\ 1 & -Z_{11} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{D_{12}}$	$\begin{bmatrix} 1 & -D_{11} \\ D_{22} & -\delta \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{F_{12}}$	$\begin{bmatrix} - \varphi  & F_{22} \\ -F_{11} & 1 \end{bmatrix}$
$[\eta] = \frac{1}{A_{12}}$	$\begin{bmatrix} A_{22} & - \gamma  \\ 1 & -A_{11} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -T_{11} & 1 \\ - \tau  & T_{22} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{ \zeta }$	$\begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{D_{11}}$	$\begin{bmatrix} 1 & -D_{12} \\ D_{21} &  \delta  \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{F_{22}}$	$\begin{bmatrix}  \varphi  & -F_{12} \\ -F_{21} & 1 \end{bmatrix}$
$[\zeta] = \frac{1}{A_{21}}$	$\begin{bmatrix} A_{11} & - \gamma  \\ 1 & -A_{22} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -T_{22} & 1 \\ - \tau  & T_{11} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{ \eta }$	$\begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{D_{22}}$	$\begin{bmatrix}  \delta  & D_{12} \\ -D_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{F_{11}}$	$\begin{bmatrix} 1 & -F_{12} \\ F_{21} &  \varphi  \end{bmatrix}$
$[\delta] = \frac{1}{A_{22}}$	$\begin{bmatrix} A_{12} &  \gamma  \\ 1 & -A_{21} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -T_{12} & 1 \\  \tau  & T_{21} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Y_{11}}$	$\begin{bmatrix} 1 & -Y_{12} \\ Y_{21} &  \eta  \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Z_{22}}$	$\begin{bmatrix}  \zeta  & Z_{12} \\ -Z_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{ \varphi }$	$\begin{bmatrix} F_{22} & -F_{12} \\ -F_{21} & F_{11} \end{bmatrix}$
$[\varphi] = \frac{1}{A_{11}}$	$\begin{bmatrix} A_{21} &  \gamma  \\ 1 & -A_{12} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -T_{21} & 1 \\  \tau  & T_{12} \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Y_{22}}$	$\begin{bmatrix}  \eta  & Y_{12} \\ -Y_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{Z_{11}}$	$\begin{bmatrix} 1 & -Z_{12} \\ Z_{21} &  \zeta  \end{bmatrix}$	$= \frac{1}{ \delta }$	$\begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ D_{21} & D_{11} \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$



Ca exemple de cuadripoli pasivi pot fi considerate liniile de transmisie de energie electrică, filtrele electrice, transformatoarele etc.

Un cuadripol activ conține între bornele sale cel puțin o sursă de tensiune sau de curent, spre exemplu, tuburile electronice, tranzistoarele etc.

b) *Cuadripoli bilaterali și unilaterali.* Un cuadripol se zice că este *bilateral* sau *reversibil* atunci când regimul de intrare a acestuia este o funcție liniară de regimul de ieșire al său și reciproc. În acest caz, transmiterea energiei prin cuadripol se poate face indiferent într-un sens sau în celălalt; spre exemplu, liniile electrice, filtrele electrice, mașinile electrice etc.

Un cuadripol se zice că este *unilateral* sau *ireversibil* atunci când regimul de intrare — respectiv de ieșire — este absolut independent de regimul de ieșire — respectiv de intrare. În acest caz, transmiterea energiei electromagnetice nu se poate face decât într-un singur sens. Ca exemplu de asemenea cuadripoli se pot da circuitele conținând tuburi electronice sau tranzistori.

c) *Cuadripol simetric.* În cazul când impedanțele de mers în gol și de mers în scurtcircuit sînt respectiv aceleași, indiferent dacă alimentarea cuadripolului se face normal pe la intrare sau invers pe la ieșire, cuadripolul se zice că este simetric. În acest caz,

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_{20} \text{ și } \underline{Z}_{1sc} = \underline{Z}_{2sc},$$

sau, ținînd seama de valorile acestor impedanțe în funcție de coeficienții cuadripolului,

$$\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}} \text{ și } \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}$$

de unde rezultă că

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}.$$

Ecuatiile (6.103) și (6.104) ale cuadripolului devin

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{11} \underline{I}_2,$$

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = 1.$$

Se vede că, în acest caz, numărul coeficienților diferiți este redus la doi, ceea ce înseamnă că ei pot fi determinați numai prin două încercări, și anume, o încercare de mers în gol și una de mers în scurtcircuit.

Fie  $\underline{Z}_0$  și  $\underline{Z}_{sc}$  cele două impedanțe astfel determinate. În acest caz, valorile parametrilor sînt

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{sc}}}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_{sc} \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{sc}}}, \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_0(\underline{Z}_0 - \underline{Z}_{sc})}}.$$

6.4.4.7. **Cuplajul impedanțelor interioare ale unui cuadripol.** Acest cuplaj poate fi diferit în raport cu elementele diagonalei principale ale matricei  $[Z]$ . Astfel:\*

\* Pentru convenția de semne adoptată; pentru celelalte convenții de semne, relațiile ce urmează se înmulțesc cu  $-1$  într-unul din membri (vezi 6.4.4.2).



a) dacă  $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$ , cuplajul se numește *reciproc*; acest caz se întâlnește la toți cuadripolii pasivi din electrotehnică. Impedanțele  $\underline{Z}_{12}$  și  $-\underline{Z}_{21}$ , care sînt egale între ele, se numesc *impedanțe de cuplaj*. Pentru acest caz relația (6.104) este satisfăcută;

b) dacă  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ , cuplajul se numește *giroscopic\**; într-un astfel de cuplaj relația (6.104) nu mai e valabilă și avem

$$\underline{A}_{11} \underline{A}_{22} - \underline{A}_{12} \underline{A}_{21} = -1;$$

c) dacă  $\underline{Z}_{12} \neq \mp \underline{Z}_{21}$ , cuplajul nu este nici reciproc și nici giroscopic, el poate fi real sau complex.

6.4.4.8. Impedanța caracteristică sau iterativă a unui cuadripol. Se numește *impedanță caracteristică* sau *impedanță iterativă* impedanța  $\underline{Z}_c$  care, legată la bornele de ieșire ale cuadripolului, produce la bornele de intrare a cuadripolului o impedanță aparentă egală în valoare cu  $\underline{Z}_c$ .

Rezultă deci,

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_c. \quad (6.130)$$

Această definiție a lui  $\underline{Z}_c$  se aplică și cuadripolilor răsturnați. În general, valoarea lui  $\underline{Z}_c$  este diferită în cele două cazuri de funcționare ale cuadripolului: ea are o valoare dacă funcționarea este *intrare-ieșire* și altă valoare dacă funcționarea cuadripolului este *ieșire-intrare*; aceste două valori sînt egale numai dacă cuadripolul este simetric.

Scriind relația (6.130) matriceal se obține

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{Z}_c \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_c & \\ & \underline{Z}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix};$$

însă\*\*

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

și deci  $\underline{Z}_c$  este o valoare proprie a matricei de impedanță  $[\underline{\zeta}]$ . Valorile proprii ale unei matrice sînt date de ecuația\*\*\*

$$\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_c & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} - \underline{Z}_c \end{vmatrix} = 0,$$

din care rezultă

$$\underline{Z}_c^2 - (\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22}) \underline{Z}_c + |\underline{\zeta}| = 0,$$

\* Prin analogie cu ecuațiile de funcționare ale giroscopului, vezi [98] pag. 177.

\*\* Vezi relația (6.121).

\*\*\* Vezi [17] pag. 335.



ecuație cu ajutorul căreia se calculează cele două valori ale impedanței caracteristice. Se obține

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{2} [\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22})^2 - 4|\zeta|}]. \quad (6.131)$$

Dintre aceste două valori ale lui  $\underline{Z}_0$  numai una convine sensului *intrare-ieșire*, cea de a doua corespunzând sensului contrar. Pentru a le preciza, să considerăm din nou relațiile (6.130) pe care să le scriem sub forma

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \lambda,$$

sau matriceal

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix}.$$

Ținând seama că funcționarea cuadripolului este *intrare-ieșire* \*, atunci \*\*

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix}$$

și rezultă că  $\lambda$  este o valoare proprie a matricei de transmitanță  $[\tau]$ . Se găsește

$$\begin{vmatrix} \underline{T}_{11} - \lambda & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\underline{T}_{11} + \underline{T}_{22})\lambda + 1 = 0. \quad (6.132)$$

Produsul rădăcinilor fiind egal cu unitatea, se poate lua

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-\underline{k}} \text{ și } \underline{\lambda}_2 = \varepsilon^{+\underline{k}}$$

unde

$$\underline{k} = \alpha + j\beta \quad (6.133)$$

și se numește *constanta de propagare* a cuadripolului. În expresia (6.133),  $\alpha$  se numește *factor de atenuare* și  $\beta$  *factor de distorsiune*\*\*\*.

Dacă  $|\underline{\lambda}_1| < 1$  este o rădăcină a ecuației (6.132), atunci  $\underline{\lambda}_2$  nu poate conveni deoarece cuadripolul este pasiv și deci poate restitui mai multă energie electromagnetică decât a primit. Rezultă, deci, că în acest caz avem o propagare în sensul *intrare-ieșire* și deci

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-\underline{k}} = \varepsilon^{-(\alpha + j\beta)} = \varepsilon^{-\alpha} e^{-j\beta}$$

și  $\alpha > 0$ .

\* De la bornele 1 către bornele 2.

\*\* Relația (6.114).

\*\*\* Vezi 12.1.4.2.



Să vedem acum, în cazul aceluiași cuadripol și pentru același mod de funcționare (intrare-ieșire), care este semnificația lui  $\underline{\lambda}_2$ . Scriind relațiile (6.130) sub forma

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{\lambda}',$$

sau matriceal

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\lambda}' & \\ & \underline{\lambda}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

rezultă că  $\underline{\lambda}'$  este o valoare proprie a matricei caracteristică  $[\gamma]$  a cuadripolului și va fi dată de ecuația

$$\underline{\lambda}'^2 - (\underline{A}_{11} + \underline{A}_{22}) \underline{\lambda}' + 1 = 0. \quad (6.134)$$

Dat fiind, că

$$\underline{A}_{11} = \underline{T}_{22} \text{ și } \underline{A}_{22} = \underline{T}_{11},$$

ecuațiile (6.132) și (6.134) sînt identice. În consecință, dacă  $|\underline{\lambda}_1| < 1$  corespunde sensului *intrare-ieșire*, atunci  $\underline{\lambda}_2 = \underline{\lambda}_1'$  va corespunde sensului *ieșire-intrare*.

Prin analogie cu liniile electrice\* se zice că  $\underline{\lambda}_1$  corespunde unei *unde directe* și  $\underline{\lambda}_2$ , unei *unde reflectate* de propagare a energiei electromagnetice.

Pentru a găsi corespondența între  $\underline{\lambda}$  și  $\underline{Z}_c$  se scrie

$$\begin{bmatrix} \underline{T}_{11} & \underline{T}_{12} \\ \underline{T}_{21} & \underline{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\lambda} & \\ & \underline{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix}$$

sau dezvoltat

$$\underline{T}_{11} \underline{U}_1 + \underline{T}_{12} \underline{I}_1 = \underline{\lambda} \underline{U}_1,$$

$$\underline{T}_{21} \underline{U}_1 + \underline{T}_{22} \underline{I}_1 = \underline{\lambda} \underline{I}_1.$$

Din prima din aceste relații se deduce

$$\underline{T}_{11} \underline{Z}_c + \underline{T}_{12} = \underline{\lambda} \underline{Z}_c \text{ și deci } \underline{Z}_c = \frac{\underline{T}_{12}}{\underline{\lambda} - \underline{T}_{11}},$$

iar din a doua

$$\underline{T}_{21} \underline{Z}_c + \underline{T}_{22} = \underline{\lambda} \text{ și deci } \underline{Z}_c = \frac{\underline{\lambda} - \underline{T}_{22}}{\underline{T}_{21}}.$$

Ținînd seama că

$$\underline{A}_{11} = \underline{T}_{22}, \quad -\underline{A}_{12} = \underline{T}_{12}, \quad -\underline{A}_{21} = \underline{T}_{21} \text{ și } \underline{A}_{22} = \underline{T}_{11},$$

\* Vezi 12.1.5.1.



rezultă

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - \underline{\lambda}} = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{\lambda}}{\underline{A}_{21}}.$$

**OBSERVAȚIE.** Expresia impedanței caracteristice (6.131) poate fi scrisă în funcție de oricare din elementele în raport cu care se pot scrie ecuațiile cuadripolului\*. Astfel, în funcție de elementele matricei caracteristice (6.113) expresia impedanței caracteristice este

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22} \pm \sqrt{(\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22})^2 + 4\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}}{2\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{A}_{11} - \underline{A}_{22} + \sqrt{(\underline{A}_{11} + \underline{A}_{22})^2 - 4}}{2\underline{A}_{21}}. \quad (6.135)$$

Ținând seama de valorile parametrilor  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{21}$  și  $\underline{A}_{22}$  determinate mai sus, se obține

$$\underline{Z}_c = \frac{1}{2} [\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20} \pm \sqrt{(\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{20})^2 + 4\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{sc}}]. \quad (6.136)$$

În cazul unui cuadripol simetric, expresia impedanței caracteristice devine

$$\underline{Z}'_c = \frac{\pm \sqrt{\underline{A}_{11}^2 - 1}}{\underline{A}_{21}} = \pm \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \pm \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Z}_{sc}}, \quad (6.137)$$

$\underline{Z}'_c$  se mai numește și *impedanța undelor*.

Și pentru impedanța undelor, cele două valori corespund una unei directe și cealaltă unei reflectate, corespondența determinându-se în raport cu  $\underline{\lambda}$  ca și în cazul precedent.

**6.4.4.9. Circuitele T și  $\pi$  echivalente ale unui cuadripol.** Orice cuadripol, oricât de complex ar fi el din punctul de vedere al constituției sale se poate transforma într-un cuadripol simplu de tipul *T* sau  $\pi$ . Pentru aceasta, este necesar a se găsi legătura ce există între ecuațiile generale (6.103) ale cuadripolului și ecuațiile circuitului echivalent tip.

Fie un circuit de tip *T*, care este format din două impedanțe  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$  în serie între care este legată o admitanță  $\underline{Y}$  (fig. 6.65).

Pentru determinarea impedanțelor și admitanței echivalente, care formează circuitul *T*, se aplică metoda circuitelor independente. Scriind ecuațiile (6.16) circuitelor  $a_1 d_1 d_2 b_1 d_1$  și  $a_2 b_2 d_2 d_1 a_2$ , se obține

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 \left( \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}} \right) - \frac{1}{\underline{Y}} \underline{I}_2 &= \underline{U}_1, \\ -\frac{1}{\underline{Y}} \underline{I}_1 + \left( \underline{Z}_2 + \frac{1}{\underline{Y}} \right) \underline{I}_2 &= -\underline{U}_2, \end{aligned}$$

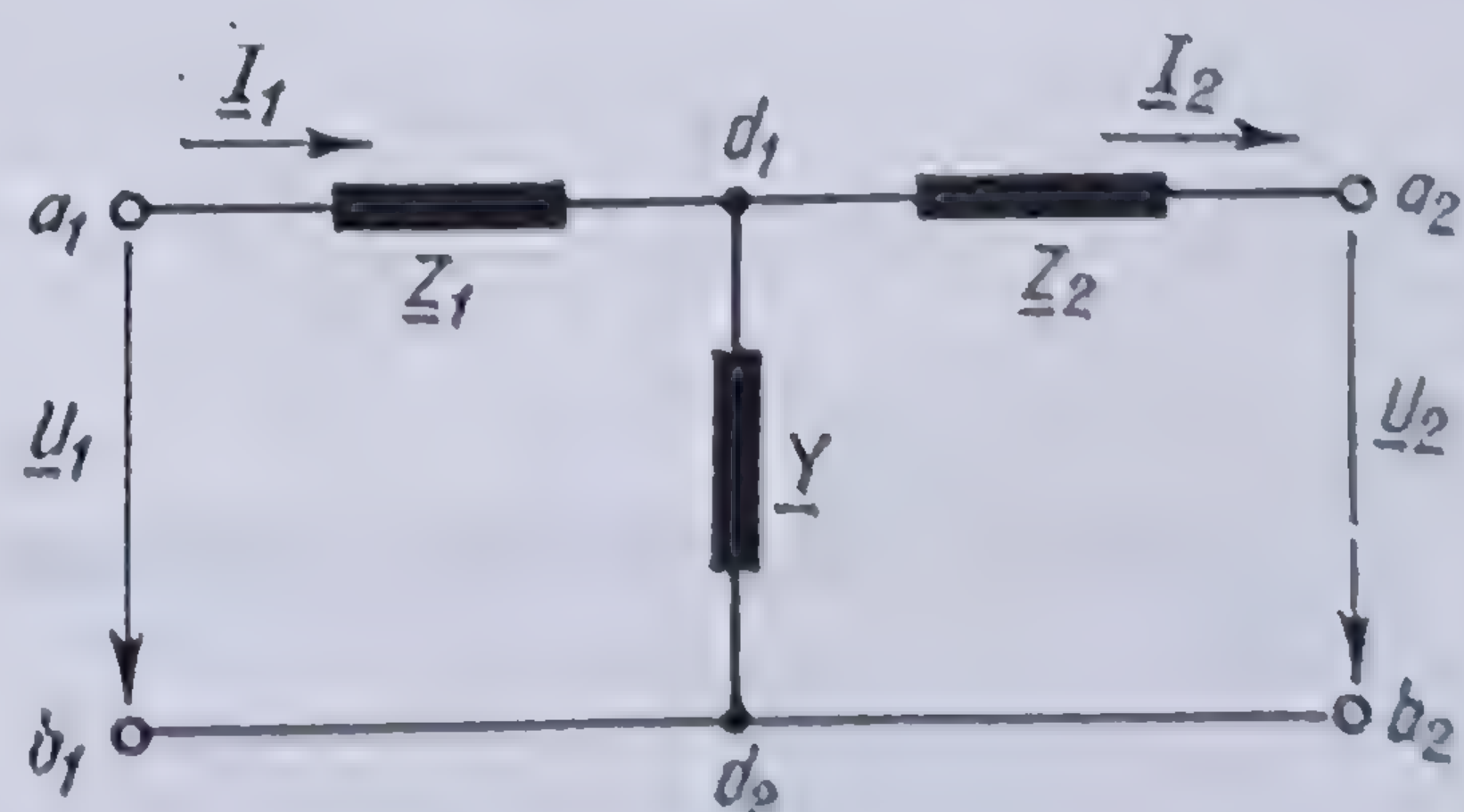


Fig. 6.65. Cuadripol în T.

\* Vezi tabloul 6.4.



care, rezolvat în raport cu  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$ , dau

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}) \underline{U}_2 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}) \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{Y} \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}) \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.138)$$

Comparînd aceste rezultate cu ecuația generală (6.103) a cuadripolului, se obține

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}, \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y}, \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}$$

de unde se deduc valorile ce trebuie să se dea impedanțelor cuadripolului  $T$  echivalent :

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Y} = \underline{A}_{21}. \end{aligned} \right\} \quad (6.139)$$

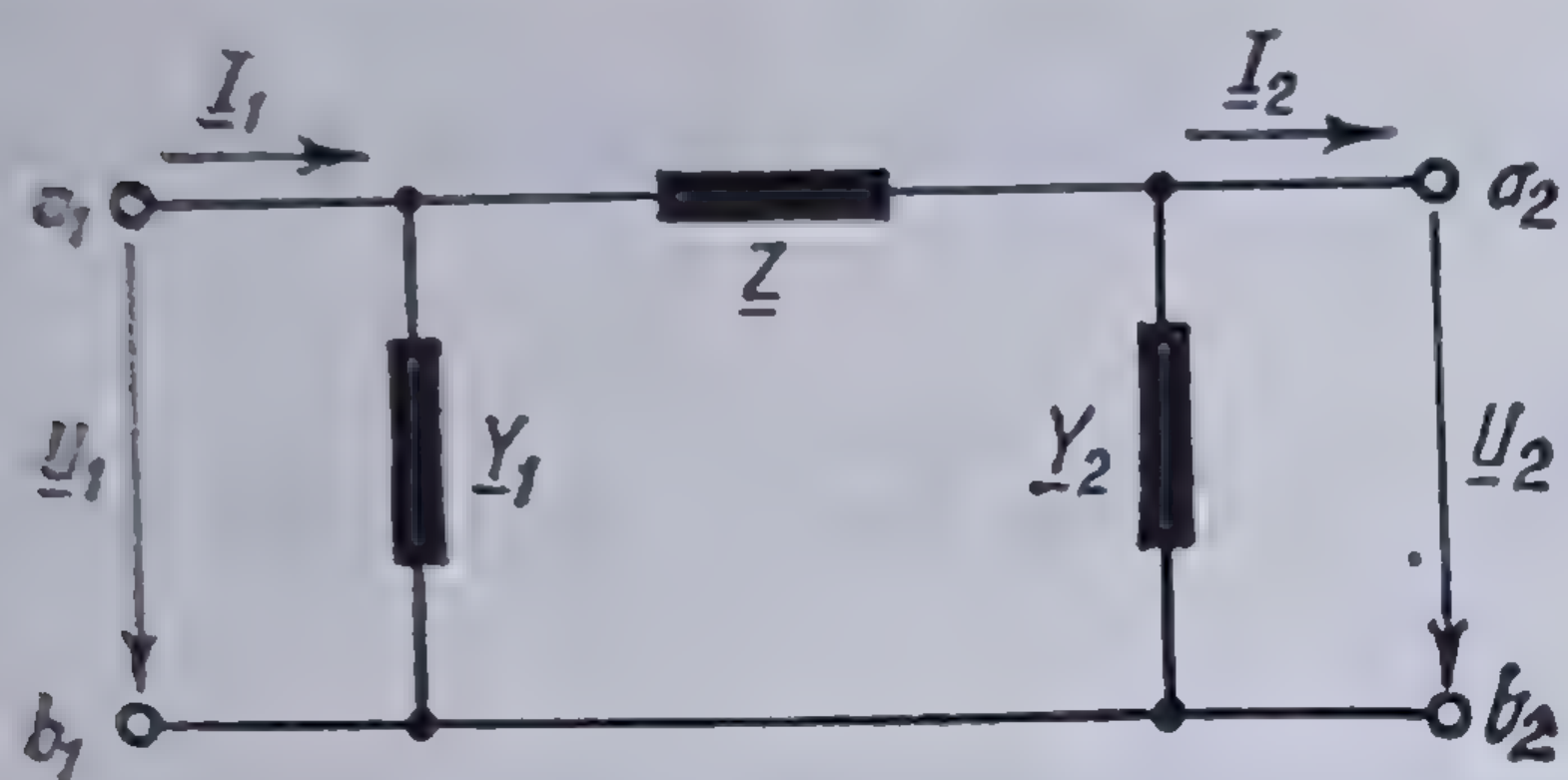


Fig. 6.66. Cuadripol în  $\pi$ .

Fie acum un circuit de tip  $\pi$ , care este format din două admitanțe  $\underline{Y}_1$  și  $\underline{Y}_2$ , între care se găsește o impedanță  $\underline{Z}$  (fig. 6.66).

Pentru determinarea admitanțelor și impedanței echivalente, care formează cuadripolul în  $\pi$ , se aplică metoda perechilor de noduri. Luînd ca potențial de referință potențialul comun al nodurilor  $b_1$  și  $b_2$  și scriînd ecuațiile (6.18) nodurilor  $a_1$  și  $a_2$ , se obține

$$\begin{aligned} \underline{Y}_1 \underline{U}_1 - \frac{1}{\underline{Z}} (\underline{U}_2 - \underline{U}_1) &= \underline{I}_1, \\ -\frac{1}{\underline{Z}} (\underline{U}_1 - \underline{U}_2) + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 &= -\underline{I}_2, \end{aligned}$$

care, rezolvate în raport cu  $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$ , dau

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= (1 + \underline{Z} \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z} \underline{Y}_1 \underline{Y}_2) \underline{U}_2 + (1 + \underline{Z} \underline{Y}_1) \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.140)$$

Comparînd aceste rezultate cu ecuațiile generale (6.103) ale cuadripolului, rezultă

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{Z} \underline{Y}_2, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}, \quad \underline{A}_{21} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Z} \underline{Y}_1 \underline{Y}_2, \quad \underline{A}_{22} = 1 + \underline{Z} \underline{Y}_1.$$

Calculînd valorile impedanțelor cuadripolului echivalent în  $\pi$  se obține

$$\underline{Z} = \underline{A}_{12}, \quad \underline{Y}_1 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{12}}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{12}}. \quad (6.141)$$



Este ușor de văzut că, dacă cuadripolul dat este simetric ( $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ ), și cuadripolii echivalenți în  $T$  sau în  $\pi$  sînt simetrici.

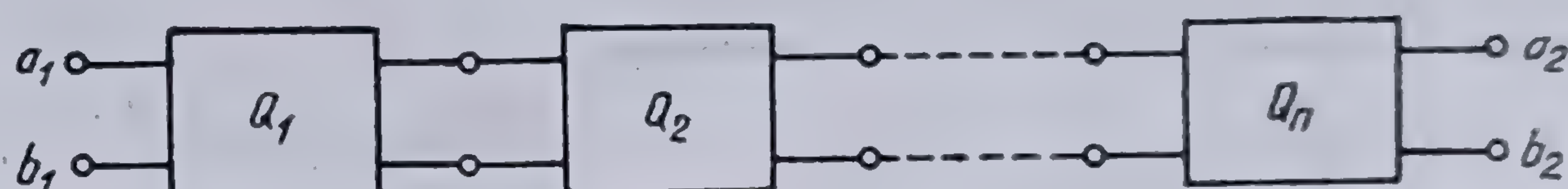
**6.4.4.10. Legarea cuadripolilor.** *a) Legarea în lanț.* Fie  $n$  cuadripoli  $Q_i (i = 1, 2, \dots, n)$  care se leagă astfel, încît bornele de ieșire ale cuadripolului  $i$  să fie legate direct cu bornele de intrare ale cuadripolului  $i + 1$  (fig. 6.67). Pentru fiecare cuadripol se poate scrie relația (6.103)

$$[E_1^{(i)}] = [\gamma^{(i)}] \cdot [E_2^{(i)}] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

și cum prin montaj

$$[E_2^{(i)}] = [E_1^{(i+1)}],$$

Fig. 6.67. Cuadripoli legați în lanț.



rezultă, că între elementele de intrare ale primului cuadripol și elementele de ieșire ale ultimului cuadripol se poate stabili relația

$$[E_1^{(1)}] = [\gamma^{(1)}] [\gamma^{(2)}] \dots [\gamma^{(i)}] \dots [\gamma^{(n)}] [E_2^{(n)}]$$

și în consecință, matricea caracteristică a cuadripolului format prin legarea în lanț a mai multor cuadripoli este egal cu produsul matricelor acestor cuadripoli, ordinea factorilor fiind identică cu ordinea de legare a cuadripolilor în lanț

$$[\gamma] = [\gamma^{(1)}] \cdot [\gamma^{(2)}] \dots [\gamma^{(n)}].$$

În cazul cînd cuadripolii sînt identici, rezultă

$$[\gamma] = [\gamma']^n.$$

Pentru lanțul de cuadripoli inversat se obține

$$[E_2^{(n)}] = [\gamma^{(n)}]^{-1} \dots [\gamma^{(i)}]^{-1} \dots [\gamma^{(2)}]^{-1} [\gamma^{(1)}]^{-1} [E_1^{(1)}]$$

sau

$$[E_2^{(n)}] = [\tau^{(n)}] \dots [\tau^{(i)}] \dots [\tau^{(1)}] [E_1^{(1)}].$$

Legarea în lanț a cuadripolilor se mai numește și legarea în *cascadă*.

*b) Legarea în paralel.* Acest montaj este redat în figura 6.68 în care, pentru simplificare, au fost legați numai doi cuadripoli. În acest caz, toate tensiunile la bornele cuadripolului sînt egale iar curenții rezultanți la borne sînt egali cu suma

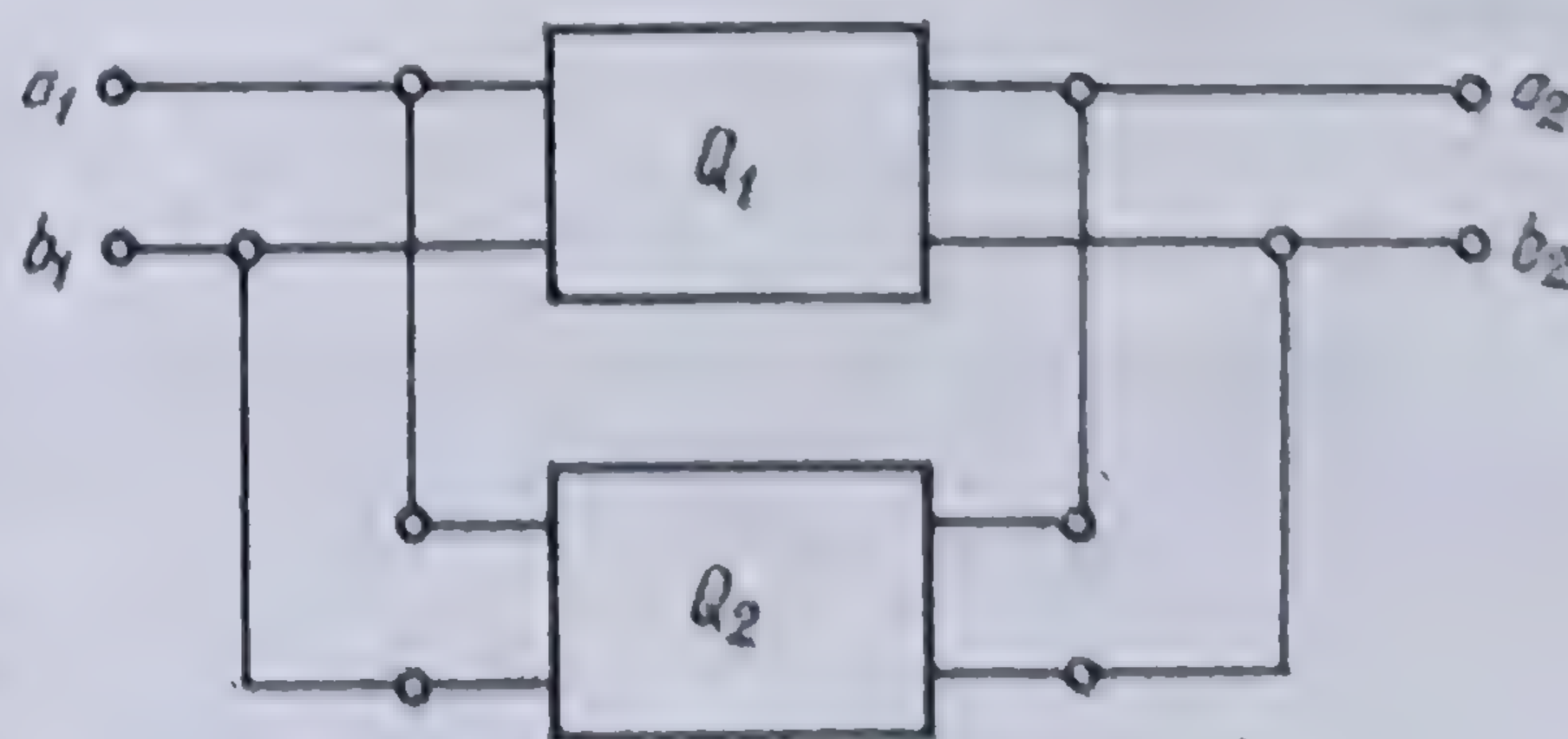


Fig. 6.68. Cuadripoli legați în paralel.



curenților la bornele fiecărui cuadripol. Folosind expresia matriceală a ecuațiilor cuadripolului sub forma (6.118),

$$[I] = [\eta] [U],$$

vom avea

$$[U^{(1)}] = [U^{(2)}] = \dots = [U^{(n)}] = [U]$$

și

$$[I^{(1)}] + [I^{(2)}] + \dots + [I^{(n)}] = [I],$$

de unde rezultă

$$[I] = ([\eta^{(1)}] + [\eta^{(2)}] + \dots + [\eta^{(n)}]) [U] = [\eta] [U].$$

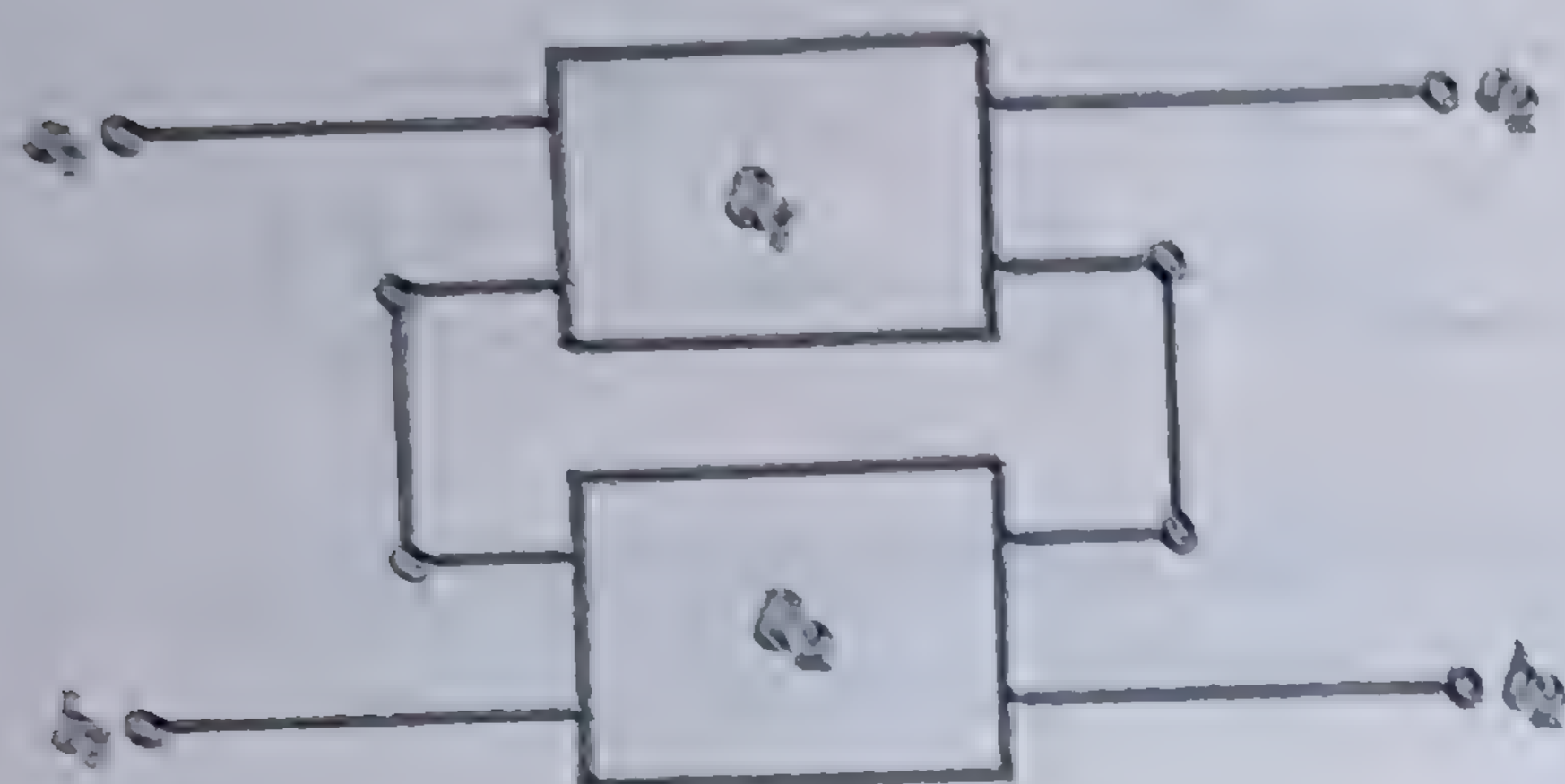


Fig. 6.69. Cuadripoli legați în serie.

În consecință, matricea admitanță a unui cuadripol format prin legarea în paralel a mai multor cuadripoli este egală cu suma matricelor admitanță a cuadripolilor componenți

$$[\eta] = \sum_{i=1}^n [\eta^{(i)}].$$

În cazul a  $n$  cuadripoli identici, relația devine

$$[\eta] = n [\eta']$$

c) *Legarea în serie.* În acest montaj (fig. 6.69) curenții la bornele de intrare, respectiv de ieșire, sînt egali pentru toți cuadripolii componenți, iar tensiunile respective sînt egale cu suma tensiunilor la bornele corespunzătoare ale cuadripolilor componenți.

Folosind expresia matriceală a cuadripolilor sub forma (6.121)

$$[U] = [\zeta] [I],$$

vom avea

$$[I^{(1)}] = \dots = [I^{(n)}] = \dots = [I^{(n)}] = [I]$$

și

$$\sum_{i=1}^n [U^{(i)}] = [U],$$

obținindu-se

$$[U] = ([\zeta^{(1)}] + \dots + [\zeta^{(n)}] + \dots + [\zeta^{(n)}]) [I].$$

Rezultă că, matricea impedanță a cuadripolului format din legarea în serie a mai multor cuadripoli este egală cu suma matricelor impedanță a cuadripolilor componenți

$$[\zeta] = \sum_{i=1}^n [\zeta^{(i)}]$$



În cazul a  $n$  cuadripoli identici, această relație devine

$$[\zeta] = n [\zeta'].$$

**OBSERVAȚIE.** În cazul realizării fizice a conectării în serie a doi cuadripoli este necesar să se verifice că, condițiile legării în serie (egalitatea curenților și sumarea tensiunilor) este satisfăcută. De exemplu, legarea în serie a doi cuadripoli în  $T$  nu poate fi făcută decât în modul arătat în figura 6.70,  $a$ , cea din figura 6.70,  $b$  corespunzând scurtcircuitării ramurii  $a_1''b_1''$  și deci a legării celor două impedanțe în paralel și apoi în serie cu impedanțele transversale ale cuadripolului.

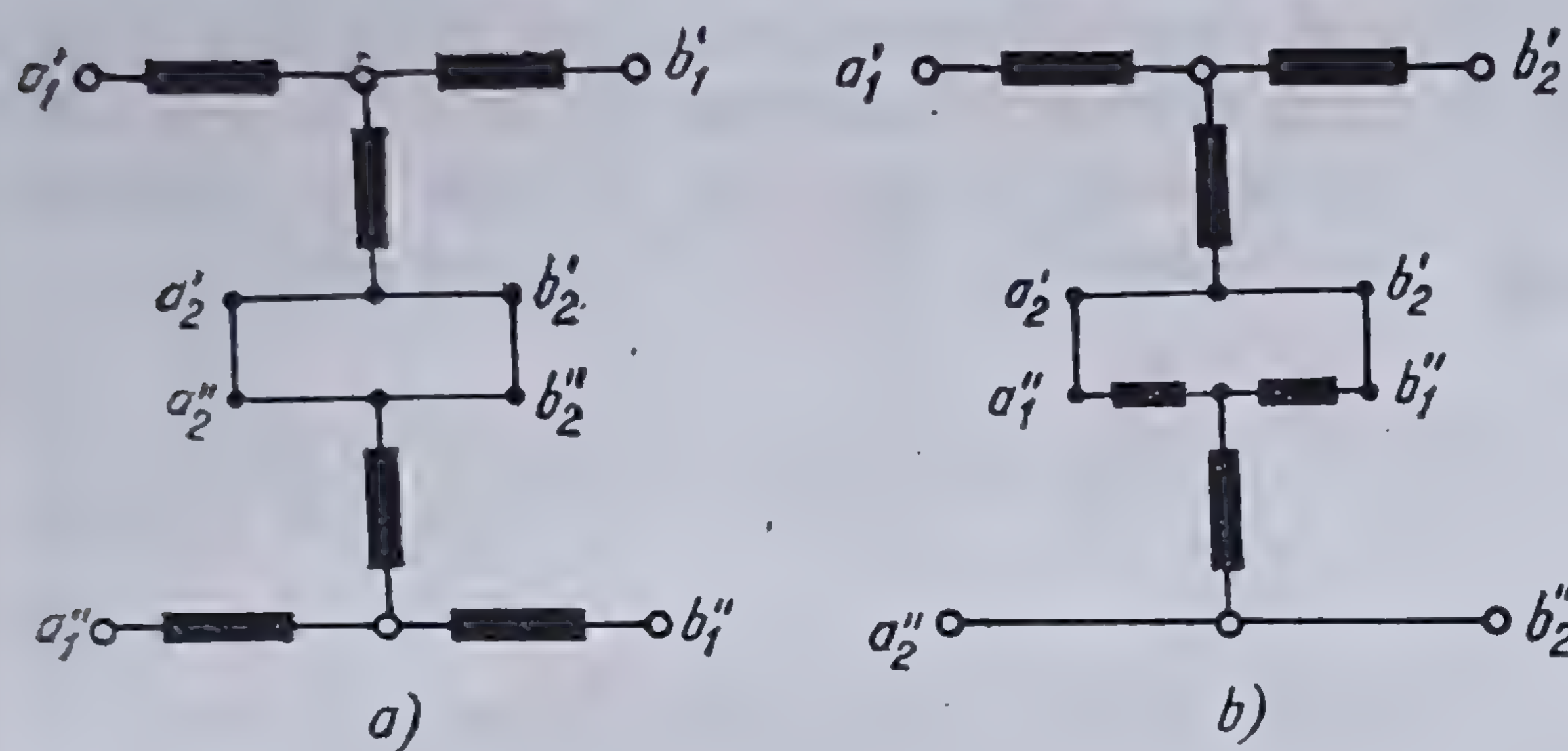


Fig. 6.70. Cuadripoli în  $T$  legați în serie :  
a) legarea corectă ; b) legarea incorectă

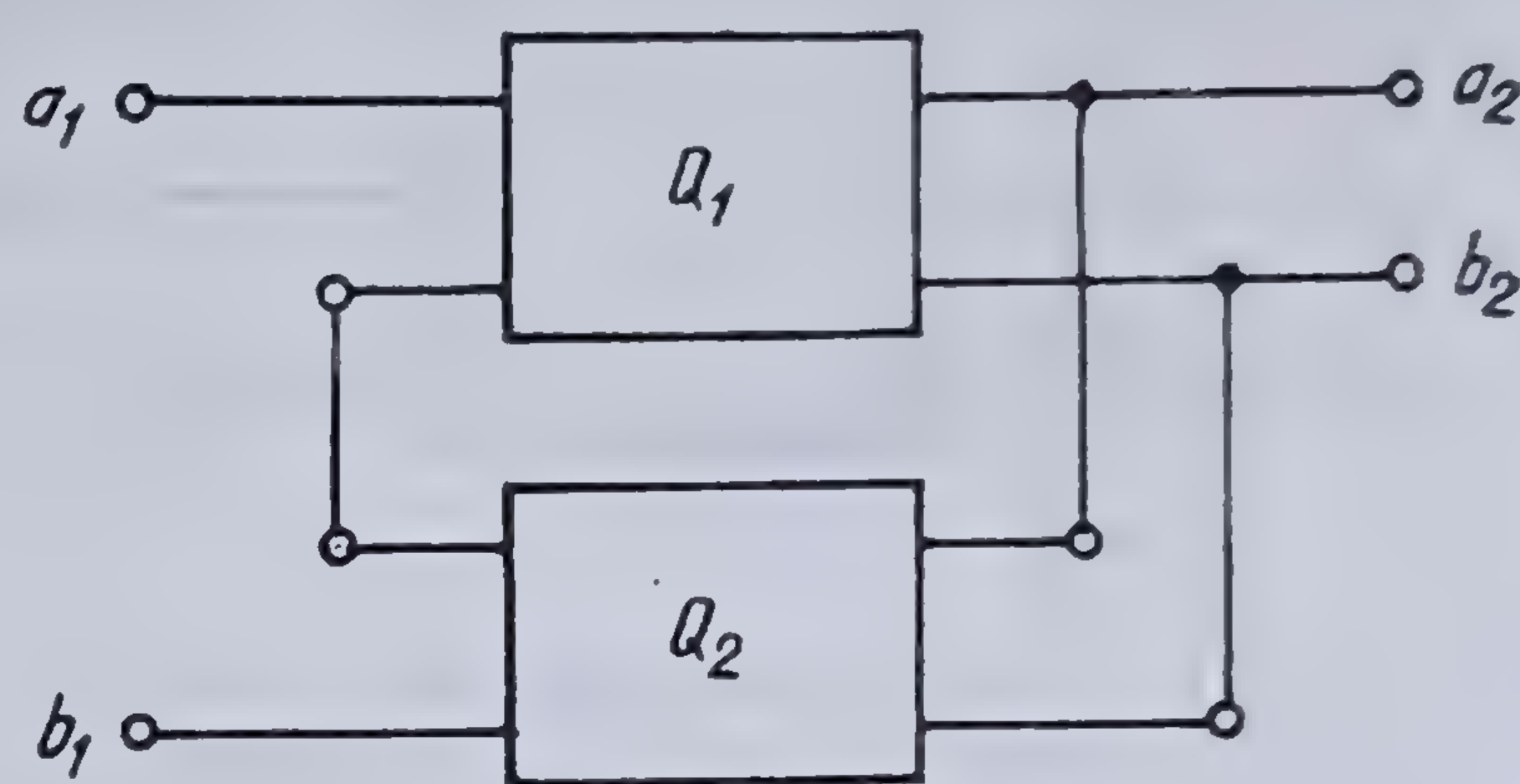


Fig. 6.71. Cuadripoli legați în serie-paralel

*d) Legarea în serie-paralel.* În cazul când doi sau mai mulți cuadripoli sînt legați astfel încît să aibă același curent la bornele de intrare și aceeași tensiune la bornele de ieșire, se zice că sînt legați în *serie-paralel* (fig. 6.71). Pentru găsirea matricelor corespunzătoare, se consideră expresia matriceală a cuadripolului sub forma (6.124)

$$[\mathcal{E}_1] = [\delta] [\mathcal{E}_2].$$

Dar

$$\underline{U}_1 = \sum_{i=1}^n \underline{U}_1^{(i)}, \quad \underline{I}_2 = \sum_{i=1}^n \underline{I}_2^{(i)},$$

$$\underline{U}_2^{(1)} = \dots = \underline{U}_2^{(i)} = \dots = \underline{U}_2^{(n)},$$

$$\underline{I}_1^{(1)} = \dots = \underline{I}_1^{(i)} = \dots = \underline{I}_1^{(n)}$$

și rezultă

$$[\mathcal{E}_1] = \sum_{i=1}^n [\mathcal{E}_1^{(i)}]$$

și

$$[\mathcal{E}_2] = [\mathcal{E}_2^{(i)}] \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ținînd seama de relația (6.124), se obține

$$[\mathcal{E}_1] = ([\delta^{(1)}] + \dots + [\delta^{(i)}] + \dots + [\delta^{(n)}]) [\mathcal{E}_2] = [\delta] [\mathcal{E}_2].$$



În consecință, matricea serio-paralel a cuadripolului rezultat din legarea în serie-paralel a mai multor cuadripoli este egală cu suma matricelor serio-paralel a cuadripolilor componenți

$$[\delta] = \sum_{i=1}^n [\delta^{(i)}]$$

în cazul cînd cuadripolii sînt identici

$$[\delta] = n [\delta^{(1)}].$$

e) *Legarea în paralel-serie.* Acest mod de cuplare este invers precedentului, cuadripolii respectivi fiind astfel legați, încît ei să aibă aceeași tensiune la bornele de intrare și același curent la bornele de ieșire (fig. 6.72). În acest caz

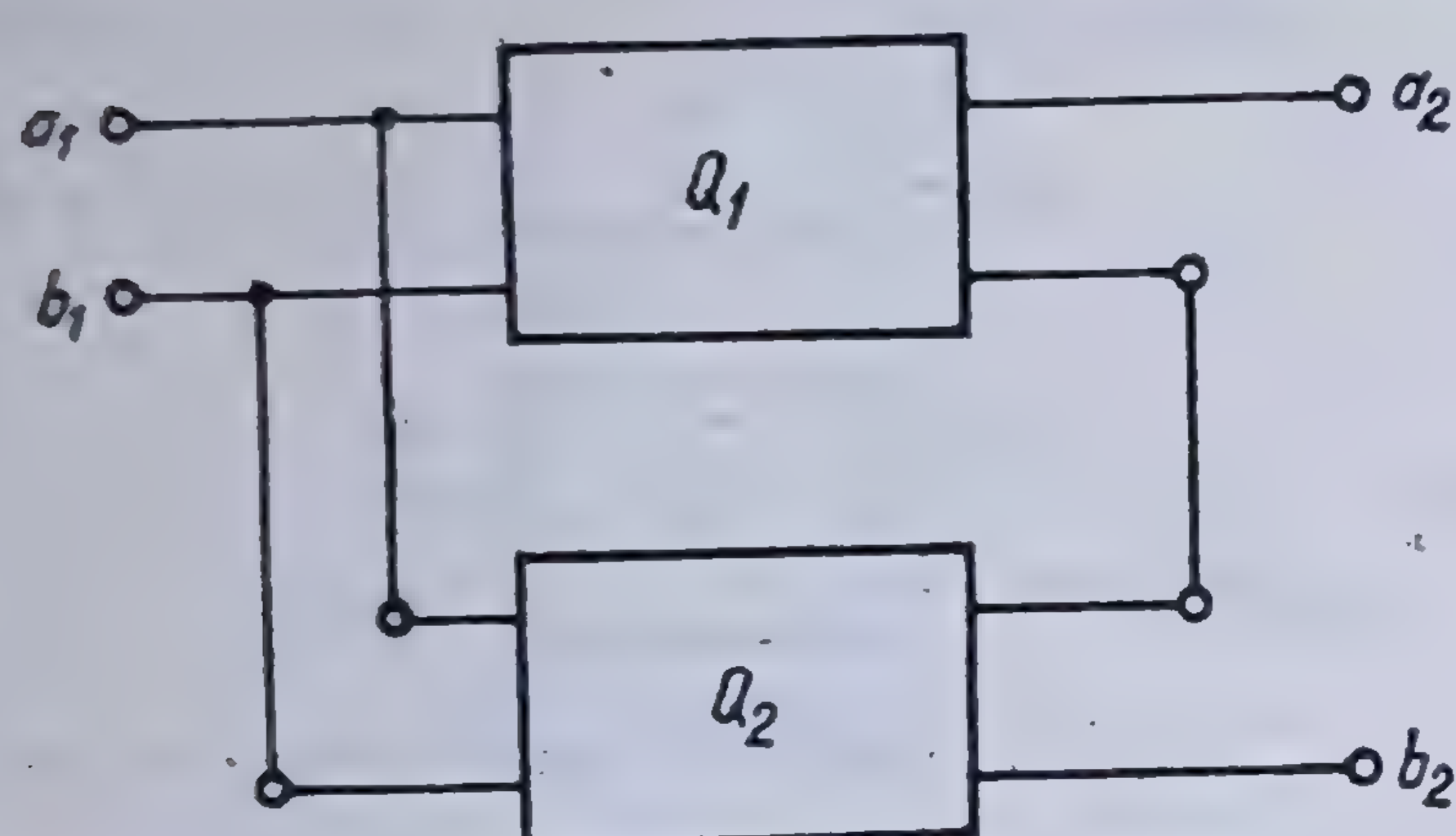


Fig. 6.72. Cuadripoli legați în paralel-serie.

$$\underline{I}_1 = \sum_{i=1}^n \underline{I}_1^{(i)}, \underline{U}_2 = \sum_{i=1}^n \underline{U}_2^{(i)},$$

$$\underline{U}_1^{(1)} = \underline{U}_1^{(2)} = \dots = \underline{U}_1^{(i)} = \dots = \underline{U}_1^{(n)}$$

și

$$\underline{I}_2^{(1)} = \underline{I}_2^{(2)} = \dots = \underline{I}_2^{(i)} = \dots = \underline{I}_2^{(n)}.$$

Pentru găsirea matricei rezultante se pornește de la expresia (6.127) a ecuației matriceale a cuadripolului

$$[\Phi_1] = [\varphi] \cdot [\Phi_2].$$

Rezultă

$$[\Phi_1] = \sum_{i=1}^n [\Phi_1^{(i)}]$$

și

$$[\Phi_2^{(1)}] = [\Phi_2^{(2)}] = \dots = [\Phi_2^{(i)}] = \dots = [\Phi_2^{(n)}].$$

În consecință, matricea paralel-serie rezultantă este egală cu suma matricelor paralel-serie a cuadripolilor componenți

$$[\varphi] = \sum_{i=1}^n [\varphi^{(i)}].$$

Dacă cei  $n$  cuadripoli sînt identici, atunci

$$[\varphi] = n [\varphi'].$$

6.4.4.11. *Cuadripoli simpli.* Orice cuadripol, oricît de complicat ar fi, poate fi realizat prin legarea în mod convenabil a mai multor cuadripoli avînd structuri simple și a căror diverse matrice se pot scrie ușor. Această operație poartă numele de *sinteză* cuadripolilor. În opoziție cu această operație, orice cuadripol poate fi descompus într-un număr oarecare de cuadripoli simpli. În modul acesta, prin reconstituirea cuadripolului se poate deduce prin calcul matricele cuadripolului dat prin combinarea diverselor matrice ale cuadripoli-



lor simpli. Operația se numește în acest caz *analiza* cuadripolilor. Și într-un caz și în celălalt, cunoașterea structurilor simple este utilă.

a) *Cuadripol format dintr-o impedanță serie.* Ecuațiile unui astfel de cuadripol (fig. 6.73) sînt

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2.$$

Matricea caracteristică a acestui cuadripol fiind

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cu ajutorul tabloului 6.4 se deduc imediat și celelalte matrice

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 1 & -\underline{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\eta] = \frac{1}{\underline{Z}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\zeta] = \infty^*,$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \underline{Z} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\underline{Z} \end{bmatrix}$$

**OBSERVAȚIE.** Această structură de cuadripol constituie un dipol\*\*.

b) *Cuadripol format dintr-o impedanță în derivație.* În acest caz, ecuațiile cuadripolului se reduc la (fig. 6.74)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2$$

$$\underline{I}_1 = \underline{Y} \underline{U}_2 + \underline{I}_2$$

și deci, cele șase matrice ale acestui cuadripol sînt

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{bmatrix}, \quad [\tau] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\underline{Y} & 1 \end{bmatrix}; \quad [\eta] = \infty;$$

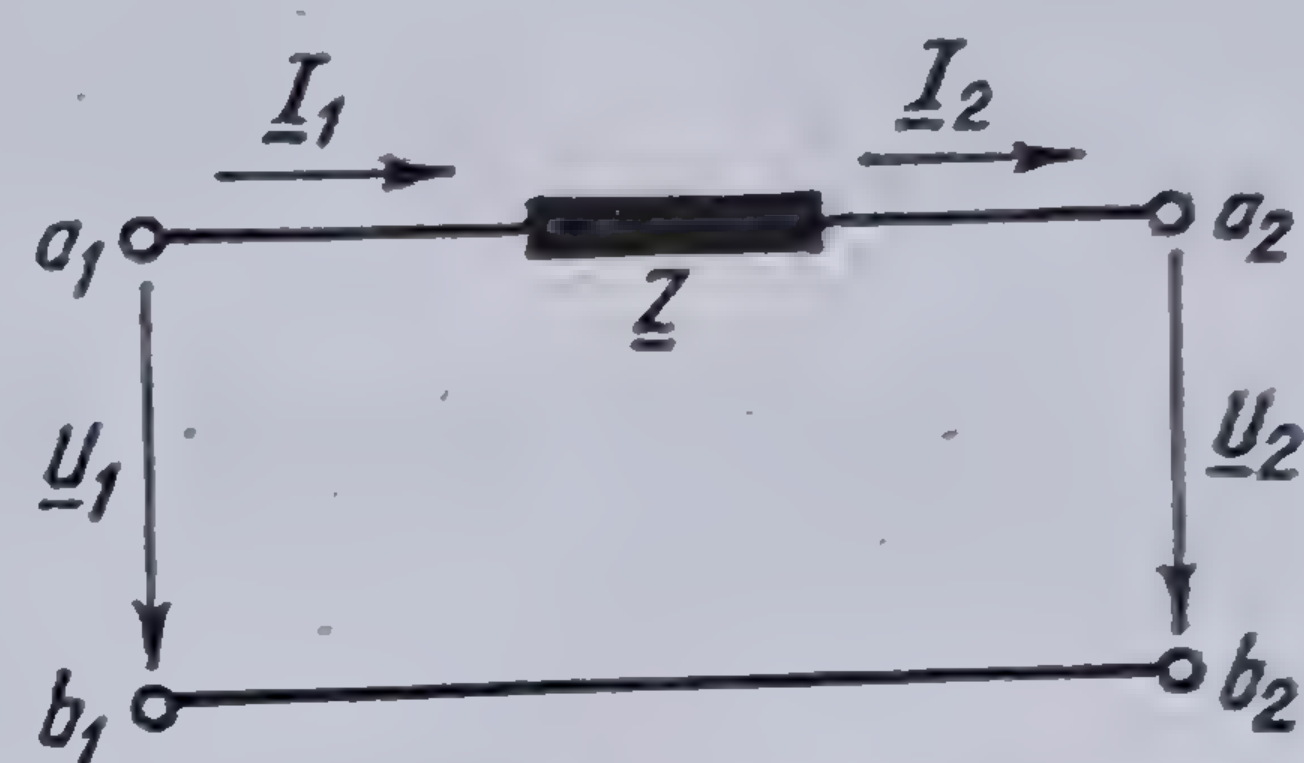


Fig. 6.73. Cuadripol format dintr-o impedanță serie.

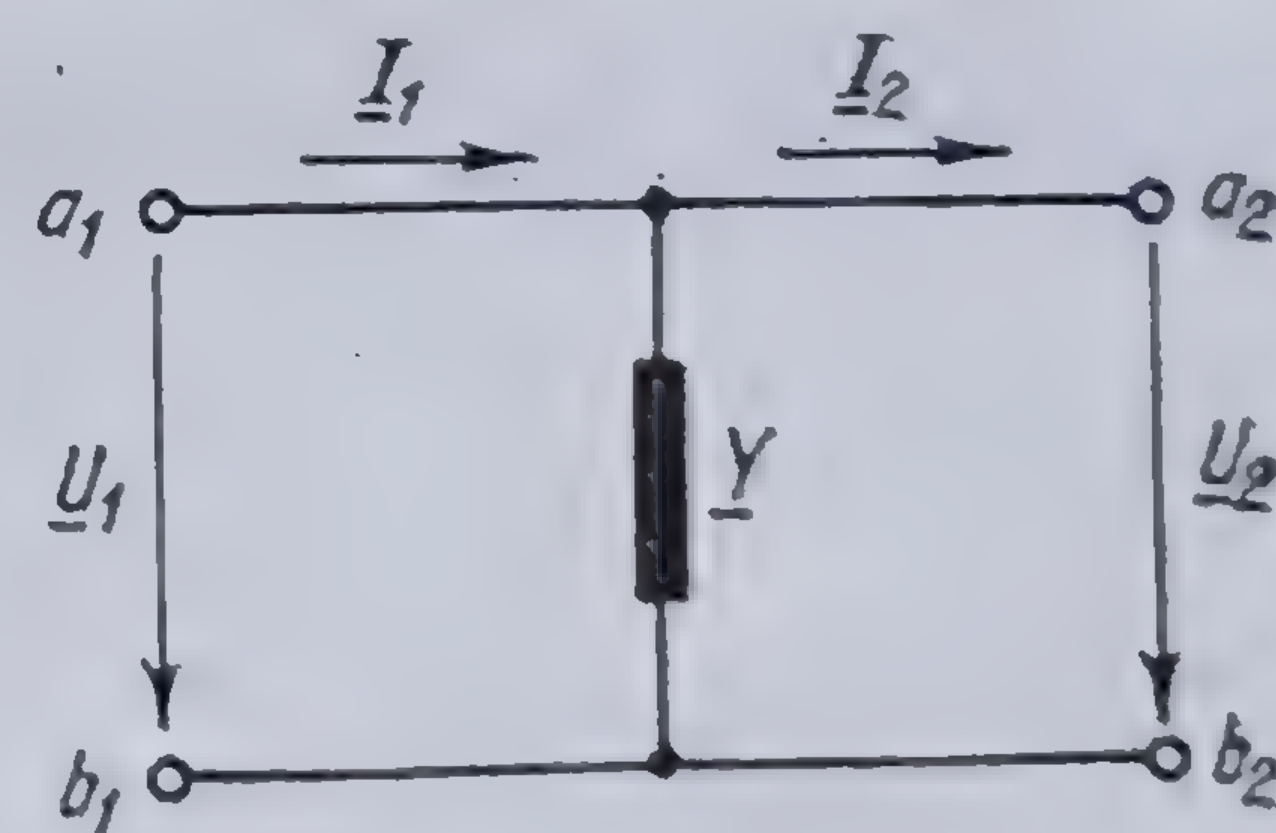


Fig. 6.74. Cuadripol format dintr-o impedanță în paralel.

\* Semnul  $\infty$  trebuie interpretat în sensul că matricea respectivă nu există.

\*\* Vezi 6.4.5.1.



$$[\zeta] = \frac{1}{Y} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\delta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Y \end{bmatrix}; \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} Y & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) *Cuadripolii în  $T$  și  $\pi$ .* Un cuadripol în  $T$  se obține legând în lanț trei structuri de tipul precedent sub forma  $a-b-a$  (fig. 6.65). Se obține\*:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+Z_1Y & Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y \\ Y & 1+Z_2Y \end{bmatrix}$$

Cu ajutorul relațiilor din tabloul 6.4 se obțin apoi celelalte matrice ale cuadripolului în  $T$

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 1+Z_2Y & -(Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y) \\ -Y & 1+Z_1Y \end{bmatrix};$$

$$[\eta] = \frac{1}{Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y} \begin{bmatrix} 1+Z_2Y & -1 \\ 1 & -1-Z_1Y \end{bmatrix};$$

$$[\zeta] = \frac{1}{Y} \begin{bmatrix} 1+Z_1Y & -1 \\ 1 & -1-Z_2Y \end{bmatrix}; \quad [\delta] = \frac{1}{1+Z_2Y} \begin{bmatrix} Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y & 1 \\ 1 & -Y \end{bmatrix}$$

$$[\varphi] = \frac{1}{1+Z_1Y} \begin{bmatrix} Y & 1 \\ 1 & -(Z_1+Z_2+Z_1Z_2Y) \end{bmatrix}.$$

Pentru obținerea unui cuadripol în  $\pi$  se leagă în lanț de asemenea trei structuri de tipul precedent sub forma  $b-a-b$  (fig. 6.66). Se obține

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} 1+Y_2Z & Z \\ Y_1+Y_2+Y_1Y_2Z & 1+Y_1Z \end{bmatrix};$$

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 1+Y_2Z & -Z \\ -(Y_1+Y_2+Y_1Y_2Z) & 1+Y_1Z \end{bmatrix};$$

$$[\eta] = \frac{1}{Z} \begin{bmatrix} 1+Y_1Z & -1 \\ 1 & -1-Y_2Z \end{bmatrix};$$

\* Compară cu relațiile (6.138).



$$[\zeta] = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z} \begin{bmatrix} 1 + Y_2 Z & -1 \\ 1 & -1 - Y_1 Z \end{bmatrix}$$

$$[\delta] = \frac{1}{1 + Y_1 Z} \begin{bmatrix} Z & 1 \\ 1 & -(Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z) \end{bmatrix};$$

$$[\varphi] = \frac{1}{1 + Y_2 Z} \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z & 1 \\ 1 & -Z \end{bmatrix}.$$

d) *Cuadripol în X simplu.* Pentru a putea răsturna bornele de intrare sau cele de ieșire la un cuadripol, se utilizează structura în X, formată din două impedanțe\* în serie fără nici o legătură între ele (fig. 6.75). Aplicând cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF se obțin ecuațiile acestui cuadripol

$$\underline{U}_1 = -\underline{U}_2 - (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2,$$

de unde rezultă matricele corespunzătoare

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} -1 & -(Z_1 + Z_2) \\ & -1 \end{bmatrix}; \quad [\tau] = \begin{bmatrix} -1 & Z_1 + Z_2 \\ & -1 \end{bmatrix};$$

$$[\eta] = \frac{1}{Z_1 + Z_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$[\zeta] = \infty; \quad [\delta] = \begin{bmatrix} & -1 \\ -1 & -(Z_1 + Z_2) \end{bmatrix}; \quad [\varphi] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & -1 \\ -1 & \end{bmatrix}$$

Această structură are o mare utilitate în studiul schemelor de cuadripoli.

e) *Cuadripol în X.* Un astfel de cuadripol (fig. 6.76), care stă la baza a numeroase scheme de filtre electrice\*\* se realizează legind în paralel un cua-

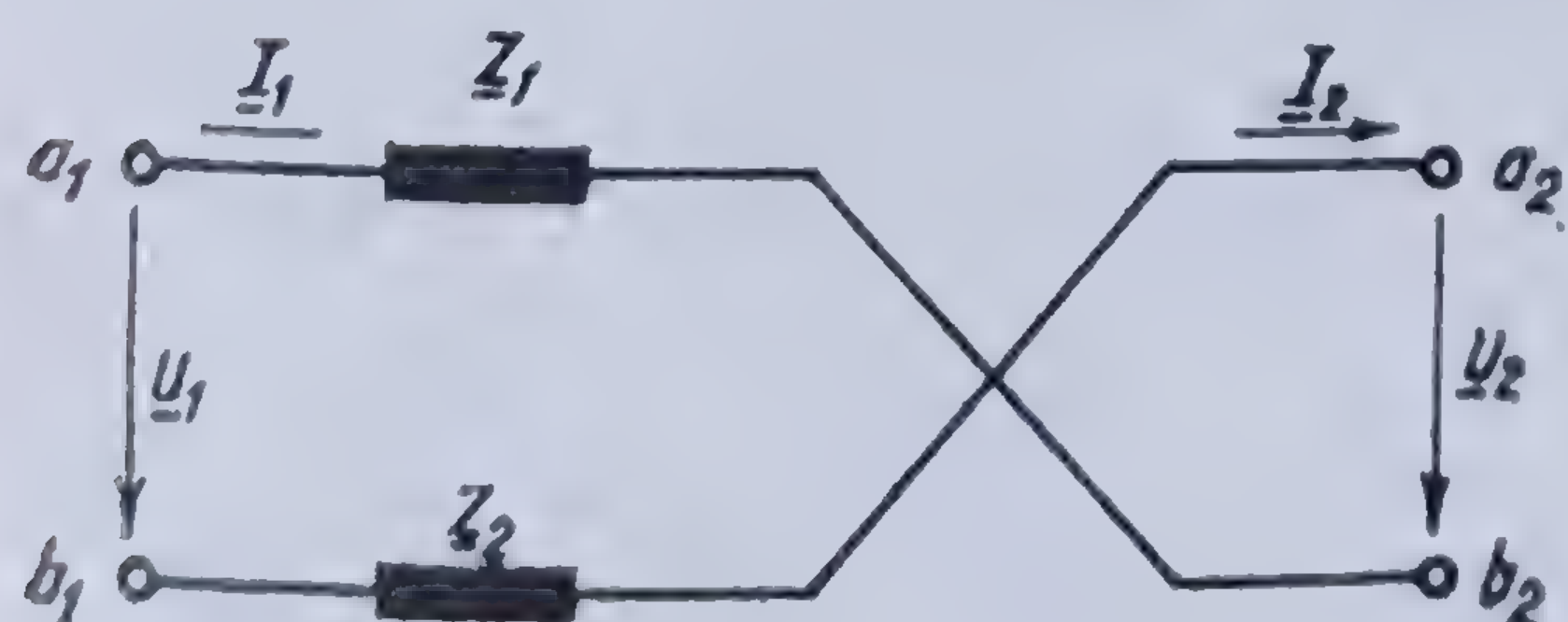


Fig. 6.75. Cuadripol în X simplu.

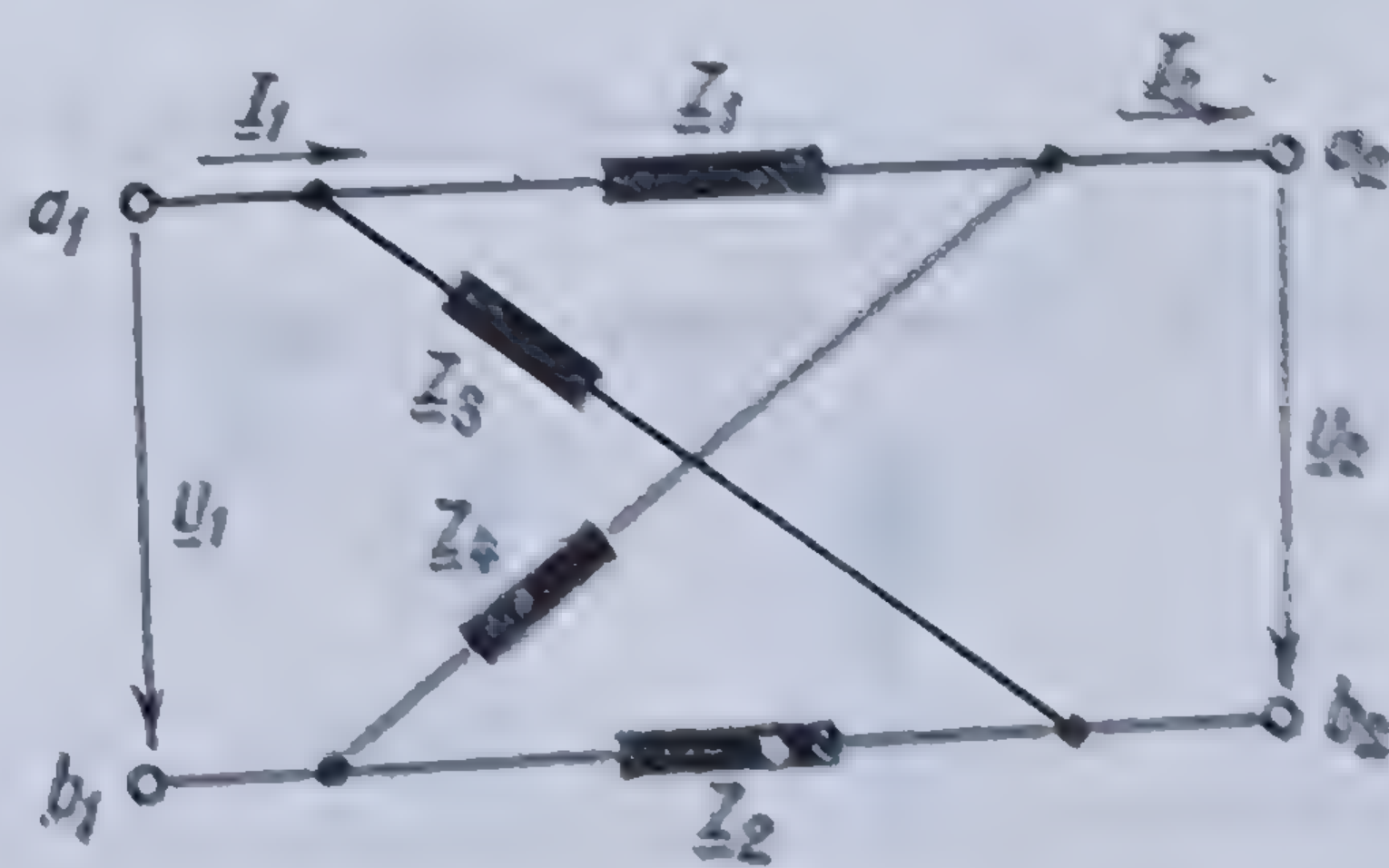


Fig. 6.76. Cuadripol în X.

\* Putând fi chiar nule; în acest caz și  $[\eta] = \infty$ .

\*\* Vezi 13,3 și [265].



dripol dublu serie (structura a) cu un cuadripol în X simplu (structura d). Aplicând regula de legare în paralel a cuadripolilor\*

$$[\gamma] = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{Z}'} + \frac{1}{\underline{Z}''} & \frac{1}{\underline{Z}'} - \frac{1}{\underline{Z}''} \\ \frac{1}{\underline{Z}'} - \frac{1}{\underline{Z}''} & \frac{1}{\underline{Z}'} + \frac{1}{\underline{Z}''} \end{bmatrix}$$

unde am notat

$$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \underline{Z}' \text{ și } \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 = \underline{Z}''.$$

Celelalte matrice se deduc din aceasta cu ajutorul relațiilor din tablou 6.1. Se găsește:

$$[\gamma] = \frac{1}{\underline{Z}' - \underline{Z}''} \begin{bmatrix} -(Z' + Z'') & -Z' Z'' \\ -4 & -(Z' + Z'') \end{bmatrix};$$

$$[\tau] = \frac{1}{\underline{Z}' - \underline{Z}''} \begin{bmatrix} -(Z' + Z'') & Z' Z'' \\ 4 & -(Z' + Z'') \end{bmatrix};$$

$$[\zeta] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} Z' + Z'' & Z' - Z'' \\ -(Z' - Z'') & -(Z' + Z'') \end{bmatrix};$$

$$[\delta] = \frac{1}{\underline{Z}' + \underline{Z}''} \begin{bmatrix} Z' Z'' & -(Z' - Z'') \\ -(Z' - Z'') & -4 \end{bmatrix};$$

$$[\varphi] = \frac{1}{\underline{Z}' + \underline{Z}''} \begin{bmatrix} 4 & -(Z' - Z'') \\ -(Z' - Z'') & -Z' Z'' \end{bmatrix}.$$

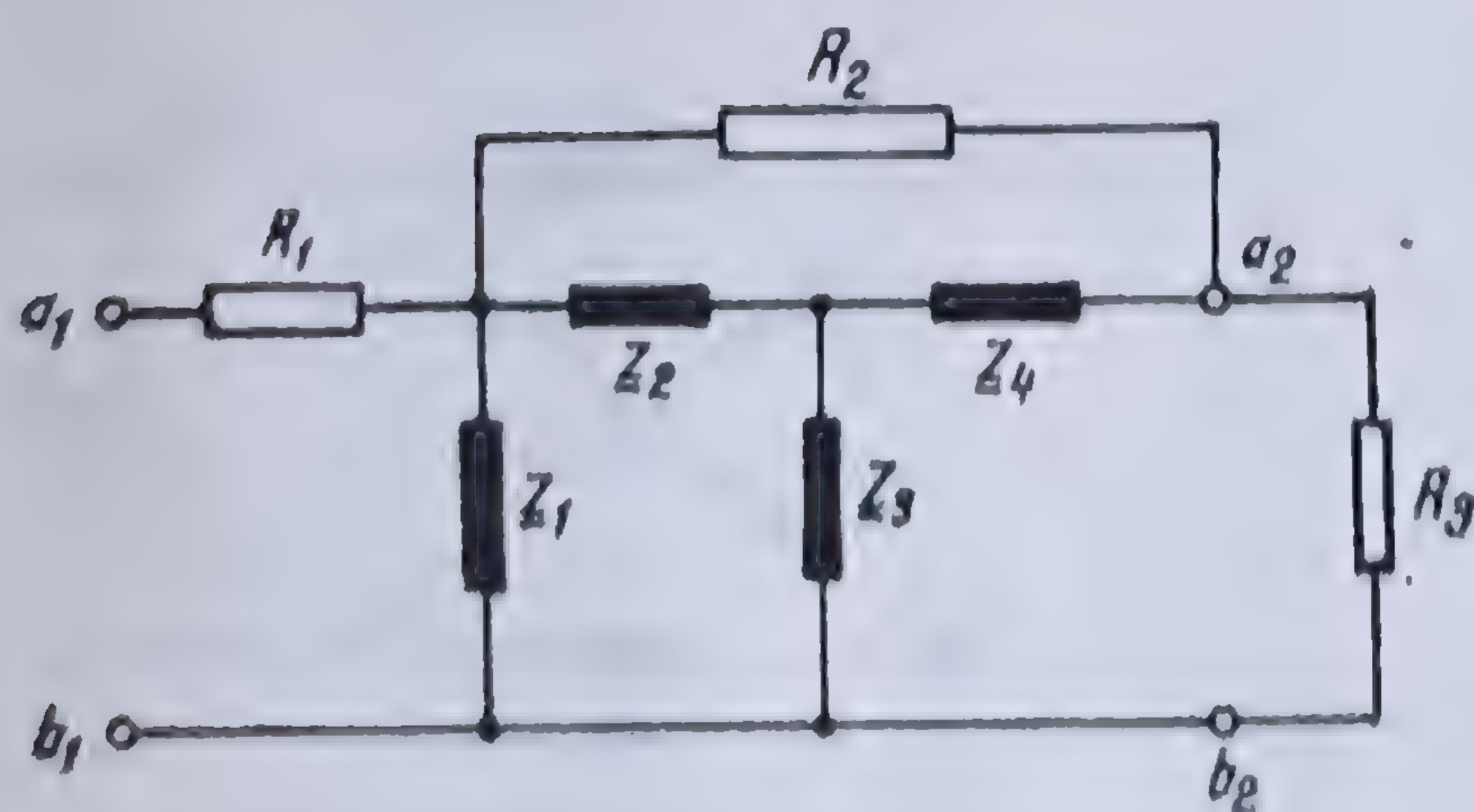


Fig. 6.77. Circuit de analizat.

6.4.4.12. Exemplu de aplicație. Fie circuitul reprezentat în figura 6.77, în care

$$R_1 = 2\Omega, \quad R_2 = 10\Omega,$$

$$R_3 = 20\Omega,$$

$$\underline{Z}_1 = 6 + j8\Omega, \quad \underline{Z}_2 = -j25\Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = 40 - j30\Omega, \quad \underline{Z}_4 = j50\Omega.$$

\* Vezi 6.4.4.10, b.



Acest cuadripol poate fi descompus în doi cuadripoli centrali legați în lanț (structurile  $B$  și  $C$ ), avînd legat în paralel un al treilea cuadripol serie  $E$ , întreg sistemul fiind legat în lanț, la fiecare extremitate, cu câte un cuadripol (structurile  $A$  și  $D$ ) (fig. 6.78).

Matricea  $[\gamma]$  a cuadripolului central se obține înmulțind cele două matrice caracteristice ale cuadripolilor  $B$  și  $C$  constitutivi. Se găsește

$$[\gamma_1] = \begin{bmatrix} 1,3 - j 0,4 & 20 + j 40 \\ 0,09 - j 0,110 & 8,8 + j 3 \end{bmatrix}.$$

Cu ajutorul relațiilor din tabloul 6.4 se găsește matricea  $[\eta]$  corespunzătoare.

$$[\eta_1] = \begin{bmatrix} 0,148 - j 0,146 & 0,064 - j 0,123 \\ 0,01 - j 0,02 & -0,005 + j 0,03 \end{bmatrix}.$$

Matricea de admitanță a cuadripolului  $E$  fiind

$$[\eta_2] = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,1 \\ 0,1 & -0,1 \end{bmatrix},$$

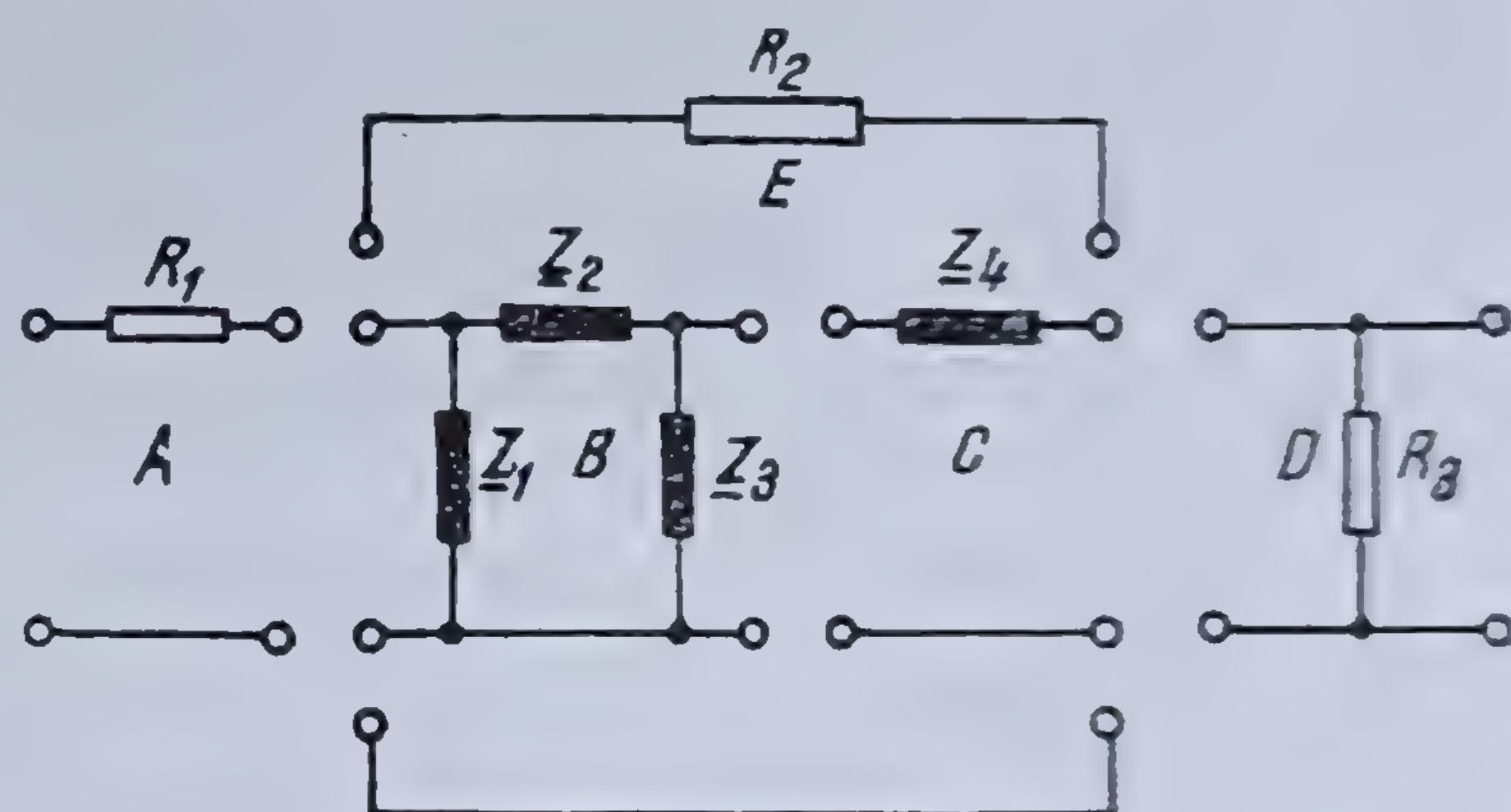


Fig. 6.78. Descompunerea circuitului în cuadripoli simpli.

matricea de admitanță rezultantă a grupului de cuadripoli  $B, C, E$  va fi

$$[\eta] = [\eta_1] + [\eta_2] = \begin{bmatrix} 0,248 - j 0,146 & -0,036 - j 0,123 \\ 0,11 - j 0,02 & -0,105 + j 0,03 \end{bmatrix}.$$

Utilizînd din nou relațiile din tabloul 6.4 se găsește matricea caracteristică corespunzătoare

$$[\gamma_2] = \begin{bmatrix} -0,972 + j 0,096 & 20 - j 40 \\ -0,191 + j 0,259 & 2,416 + j 0,888 \end{bmatrix}.$$

Matricele caracteristice ale cuadripolilor  $A$  și  $D$  fiind respectiv

$$[\gamma_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad [\gamma_4] = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0,05 & 1 \end{bmatrix},$$



matricea caracteristică rezultantă a cuadripolului dat va fi

$$[\gamma] = [\gamma_3] [\gamma_2] [\gamma_4] = \begin{vmatrix} 0,765 - j 3,43 & 42,416 - j 80,888 \\ -0,07 + j 0,215 & 2,416 - j 0,888 \end{vmatrix}.$$

Din această matrice, se pot deduce toate celelalte matrice prin aplicarea relațiilor din tabloul 6.4.

**6.4.4.13. Aplicarea teoriei grafurilor la studiul cuadripolilor.** *a) Generalități.* Metoda matriceală pentru studiul cuadripolilor poate fi dezvoltată și utilizată folosind grafurile de transfer. Desenînd grafurile de transfer în formă de cuadripoli, se poate stabili graful de transfer al unei rețele complete — și în consecință ecuațiile sale — prin interconectarea grafurilor elementare, întocmai cum se procedează și cu cuadripolii simpli. Utilizarea grafurilor de fluentă prezintă avantajul față de metoda matriceală că, formularea matematică a problemei rămîne mult mai apropiată de structura fizică a sistemului. Grafurile de transfer măresc de asemenea și suplețea studiului unei rețele prin descompunerea și interconectarea de structuri mai simple; într-adevăr, în cazul metodei matriceale, pentru a se face o anumită interconectare, este necesar să se scrie ecuațiile matriceale sub o anumită formă adecuată, restricție care nu mai există în cazul utilizării grafurilor de transfer. De asemenea, calculele sînt mult simplificate prin faptul că rezolvarea unui graf de transfer se poate face prin simplă inspecție a grafului utilizînd regula lui MASON\*.

*b) Grafurile unui cuadripol.* Cele șase ecuații matriceale stabilite mai înainte\*\*, care dau legătura între mărimile de intrare ( $\underline{U}_1$  și  $\underline{I}_1$ ) și mărimile de ieșire a unui cuadripol ( $\underline{U}_2$  și  $\underline{I}_2$ ), dau posibilitatea desenării imediate a grafurilor corespunzătoare. Aceste grafuri pot fi desenate în două moduri diferite, utilizîndu-se forma cea mai convenabilă pentru calcule (Tab. 6.5). În forma de prezentare *a)* s-a căutat să se păstreze forma cuadripolului, cu elementele de intrare la stînga și cele de ieșire la dreapta, astfel încît să se păstreze o corespondență între nodurile grafurilor și variabilele cuadripolului. Pentru a ușura efectuarea de interconexiune a mai multor grafuri, au fost indicate explicit nodurile sursă și nodurile puț și anume, nodurile sursă au fost desenate cu semicercuri pline, iar cele puț cu semicercuri simple. Prin convenție un graf de tip  $\zeta$  corespunde ecuației matriceale de tip  $[\zeta]$ \*\*\*.

În tabloul 6.6 au fost prezentate grafurile cuadripolilor simpli serie, iar în tabloul 6.7 pe acelea ale cuadripolilor simpli în paralel.

*c) Transformarea grafurilor cuadripolilor.* Trecerea de la o formă a ecuației matriceale a unui cuadripol la altă formă se face transformînd matricea coeficienților în funcție de coeficienții altei matrice. Relațiile între coeficienții diverselor matrice sînt date în tabloul 6.1. Aceste relații se obțin ușor prin transformarea grafurilor cuadripolilor. Într-adevăr, trecerea de la un tip de matrice a cuadripolului la altul constă de fapt în alegerea altor variabile dependente și independente. Această operație se face, în cazul grafurilor, prin inversarea a unei sau două laturi pentru determinarea noilor noduri sursă corespunzătoare variabilelor alese ca independente.

\* Vezi [245] pag. 99 și 6.3.2.6.

\*\* Vezi 6.4.4.4.

\*\*\* Ecuația (6.121)



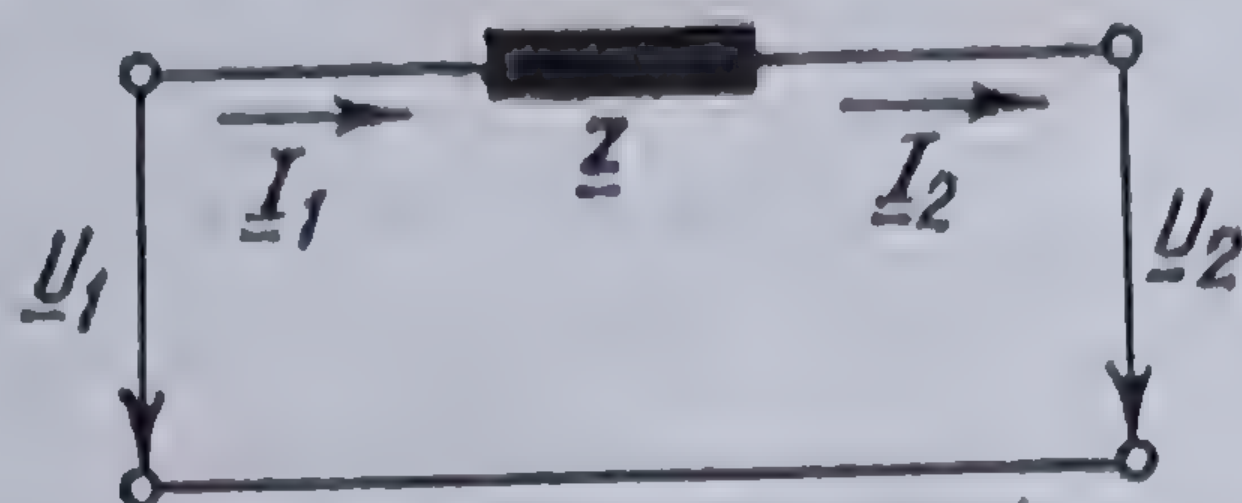
# MATRICELE ȘI GRAFURILE CUADRIPOLILOR

Tabloul 6.5.

Nr. crt.	Tipul cuadripolului	Ecuația matriceală	Graful de transfer	
			Primul mod de reprezentare (a)	Al doilea mod de reprezentare (b)
1	$\alpha$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$		
2	$\gamma$	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$		
3	$\eta$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$		
4	$\zeta$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$		
5	$\delta$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$		
6	$\varphi$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$		



# MATRICELE ȘI GRAFURILE CUADRIPOLOILOR SIMPLI, TIP SERIE

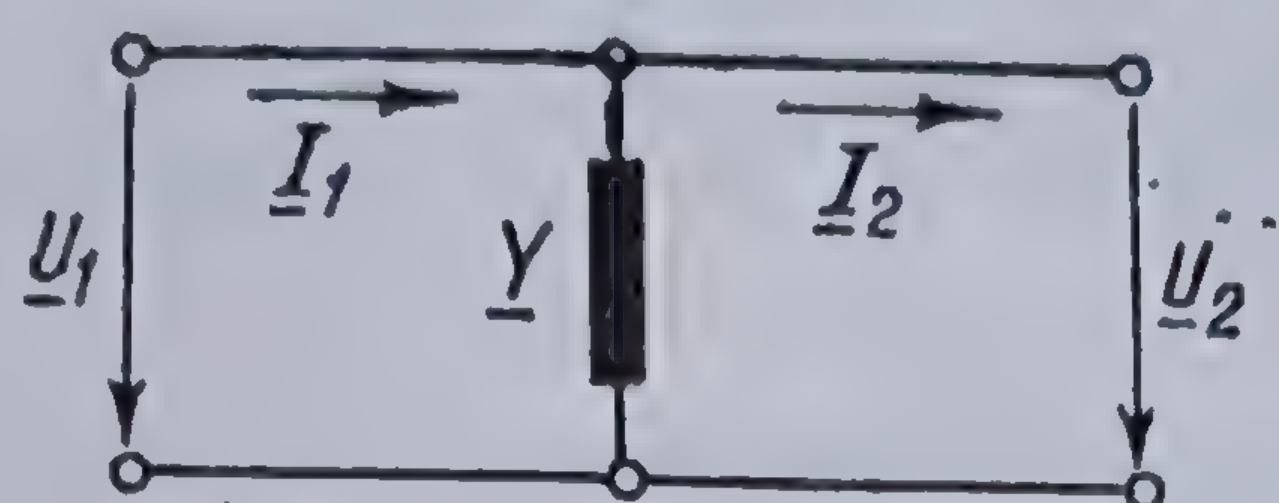


Tabloul 6.8.

Nr. crt.	Tipul cuadripolului	Ecuația matriceală	Graful de transfer	
			Primul mod de reprezentare (a)	Al doilea mod de reprezentare (b)
1	$\delta$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$		
2	$\gamma$	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$		
3	$\eta$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Z & -1/Z \\ 1/Z & -1/Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$		
4	$\delta$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$		
5	$\varphi$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$		



# MATRICELE ȘI GRAFURILE CUADRIPOLOILOR SIMPLI, TIP DERIVAȚIE

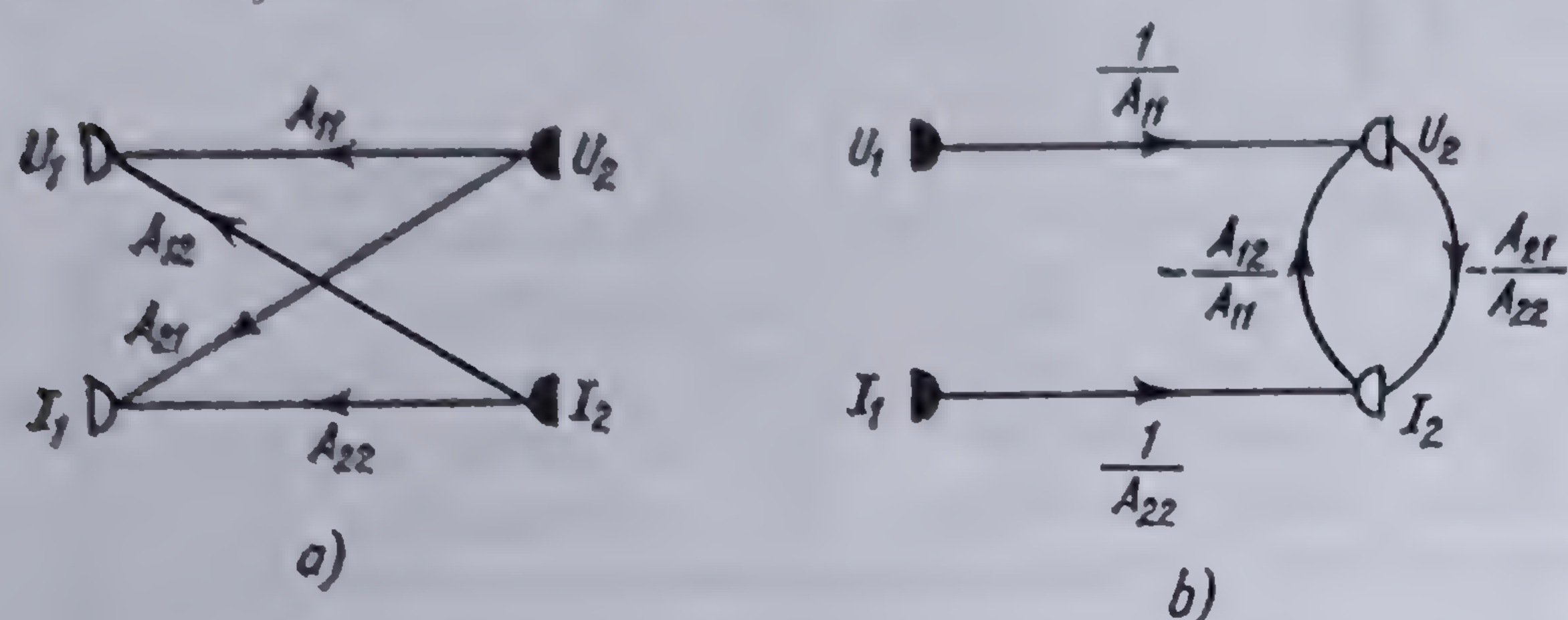


Tabloul 6.7.

Nr. crt.	Tipul cuadripolului	Ecuația matriceală	Graful de transfer	
			Primul mod de reprezentare (a)	Al doilea mod de reprezentare (b)
1	$\gamma$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$		
2	$\gamma$	$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ -Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$		
3	$\gamma$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y} & -\frac{1}{Y} \\ \frac{1}{Y} & -\frac{1}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$		
4	$\delta$	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$		
5	$\varphi$	$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$		

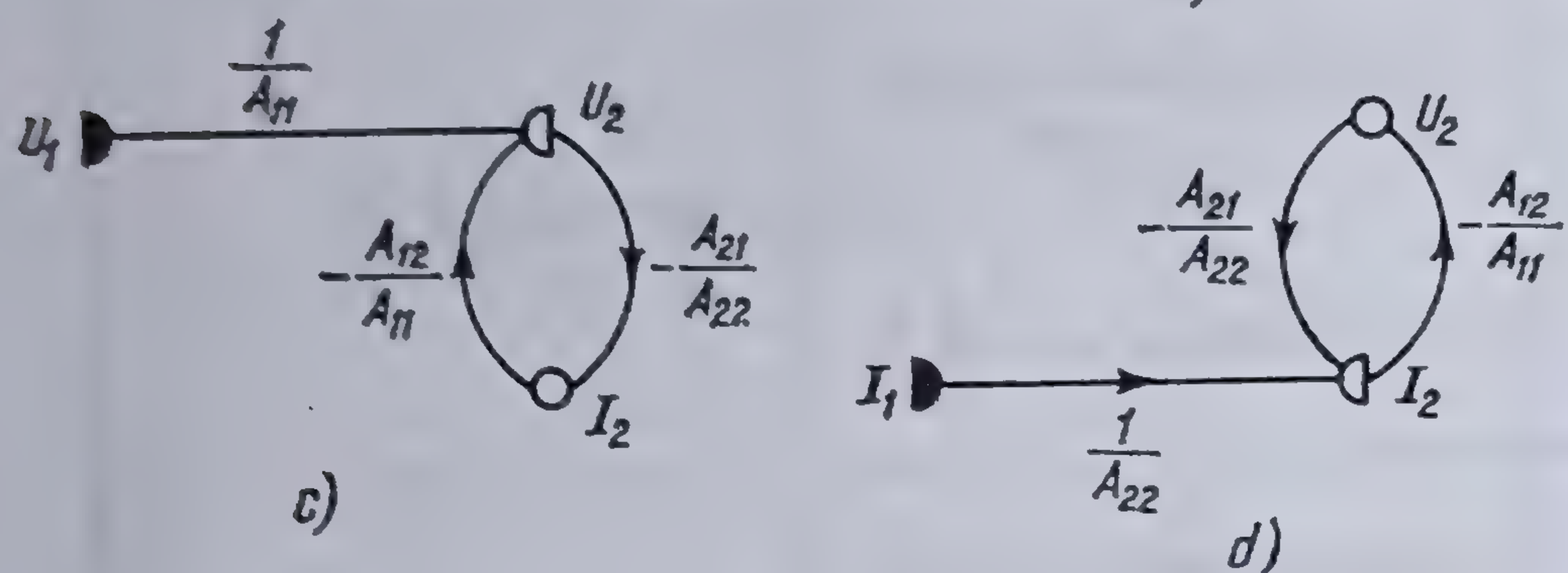


Fie să determinăm matricea  $[\tau]$  din matricea  $[\gamma]$  a grafului unui cuadripol (fig. 6.79, a). Inversăm\* laturile  $U_1U_2$  și  $I_1I_2$  obținind graful din figura 6.79, b. Izolind nodul sursă  $I_1$ , graful capătă configurația din figura 6.79, c, pe care îl reducem obținind transmitanța între  $U_1$  și  $U_2$ . Se găsește



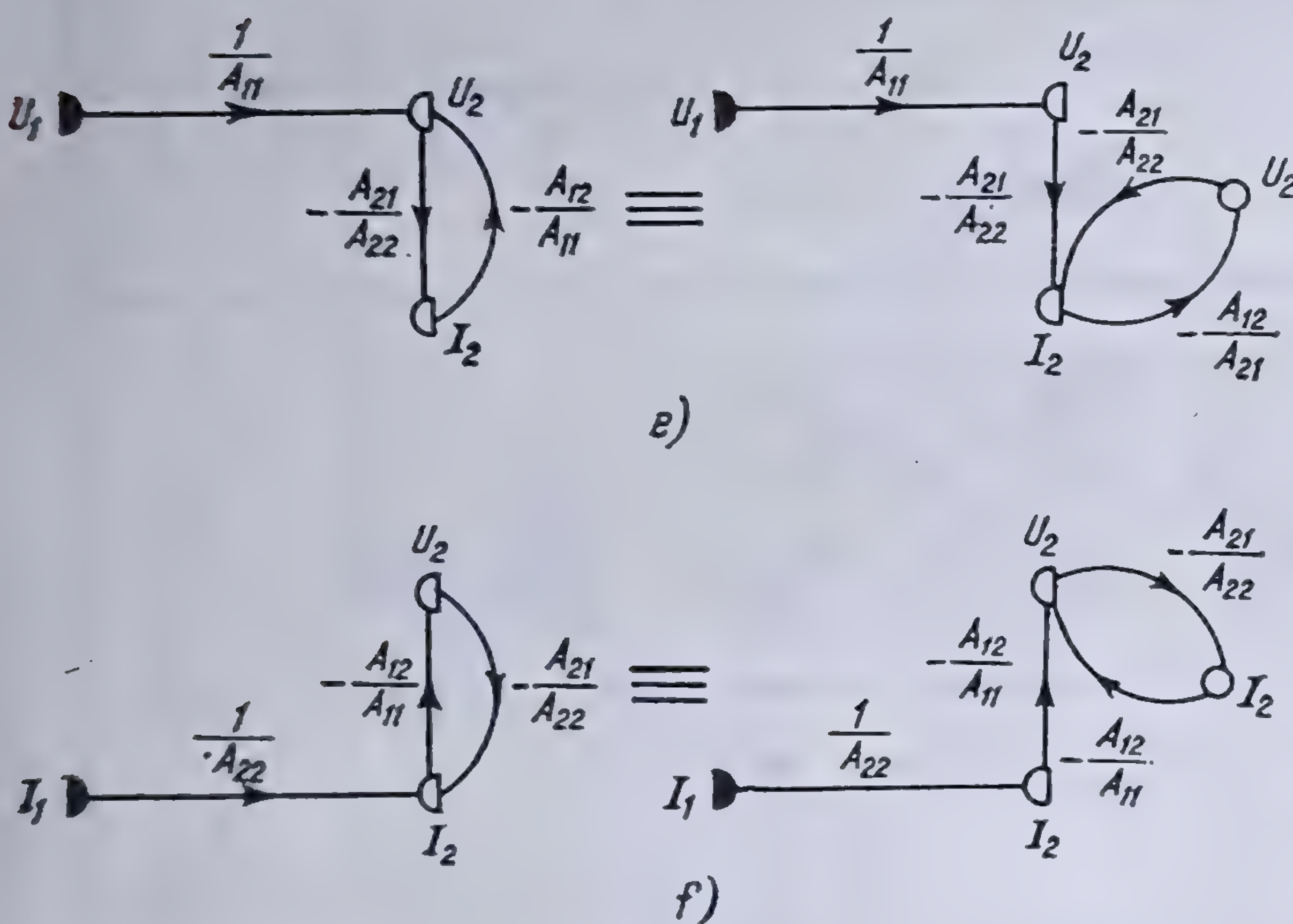
$$T_{U_1U_2} = \frac{\frac{1}{\underline{A}_{11}}}{1 - \left( -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} \right) \left( -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} \right)} = \underline{A}_{22}.$$

În același mod se determină transmitanța între  $I_1$  și  $I_2$ , izolind nodul sursă  $U_1$  (fig. 6.79, d); se găsește



$$T_{I_1I_2} = \frac{\frac{1}{\underline{A}_{22}}}{1 - \left( -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} \right) \left( -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} \right)} = \underline{A}_{11}.$$

Subgraful care dă legătura între  $U_1$  și  $I_2$  se reduce dedublând nodul  $U_2$  (fig. 6.79, e); se determină transferanța dintre  $U_1$  și  $I_2$



$$T_{U_1I_2} = \frac{\frac{1}{\underline{A}_{11}} \cdot \left( -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} \right)}{1 - \left( -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} \right) \left( -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} \right)} = -\underline{A}_{21}.$$

De asemenea subgraful care dă legătura între  $I_1$  și  $U_2$  se reduce dedublând nodul  $I_2$  (fig. 6.79, f); se determină astfel transferanța dintre  $I_1$  și  $U_2$

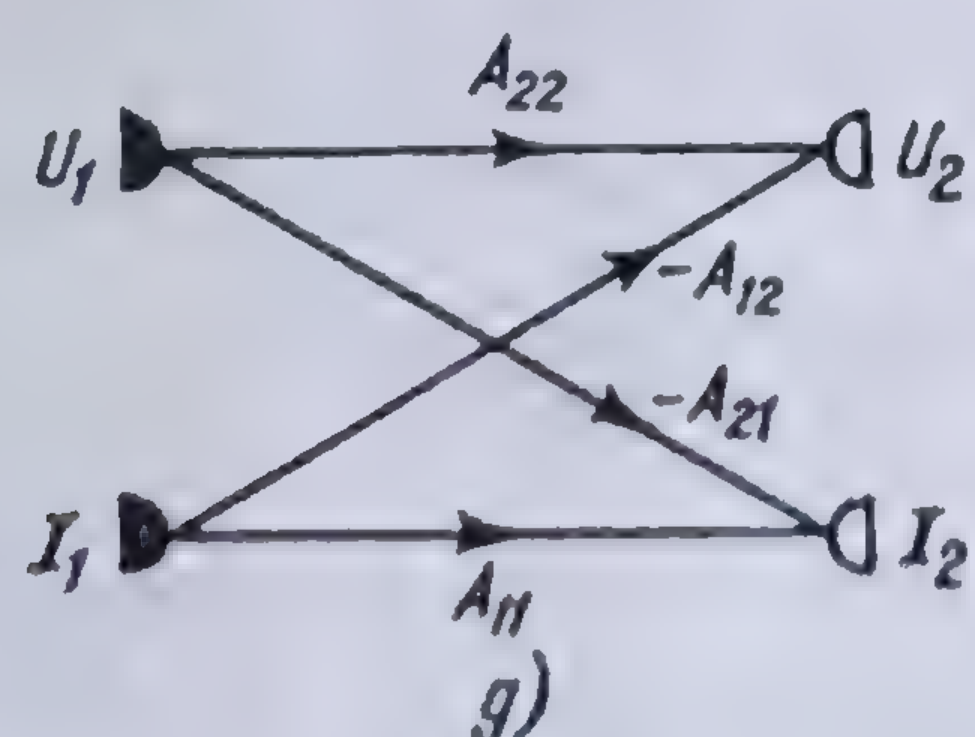


Fig. 6.79. Transformarea unui graf de tip  $\gamma$  într-un graf de tip  $\tau$ .

$$T_{I_1U_2} = \frac{\frac{1}{\underline{A}_{22}} \left( -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} \right)}{1 - \left( -\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}} \right) \left( -\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}} \right)} = -\underline{A}_{12}.$$

\* Operațiile indicate se fac conform regulilor date în paragraful 6.3.2.5.



Graful de transfer căutat este dat în figura 6.79, *g* și corespunde ecuației matriciale (6.114).

În același nod se poate proceda pentru găsirea matricei cuadripolului sub orice formă de prezentare.

d) *Interconectarea grafurilor cuadripolilor.* Interconectarea grafurilor cuadripolilor se face întotdeauna ca și interconectarea cuadripolilor, rezultatul obținut fiind un graf simplu. În raport cu modul cum se face această interconectare

(lanț, serie, paralel etc.) se va utiliza tipul de graf de cuadripol, efectuându-se operațiile respective de reducere și transformare a grafurilor conform principiilor indicate mai înainte.

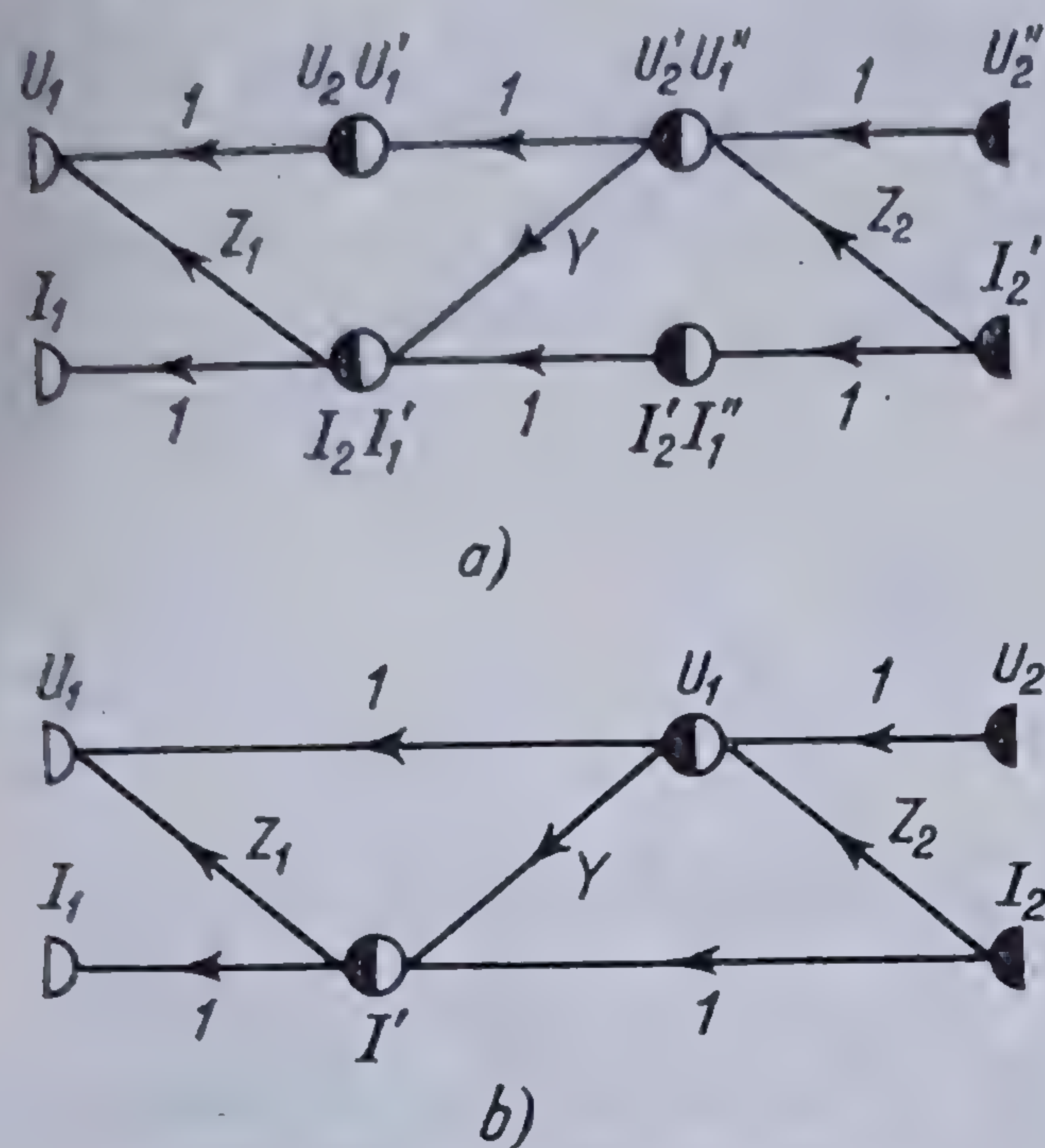


Fig. 6.80. Grafuri a trei cuadripoli legați în lanț.

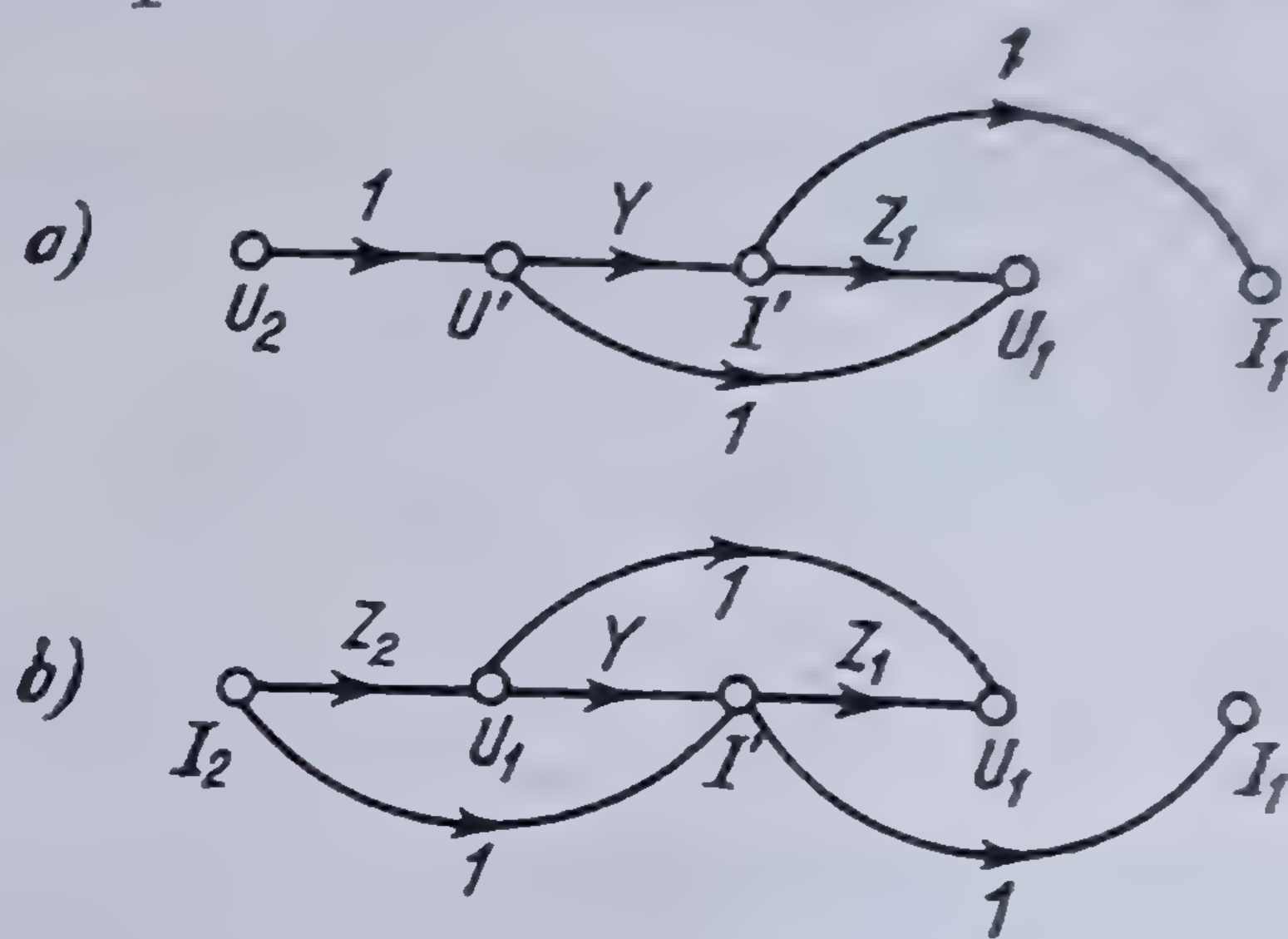


Fig. 6.81. Grafurile echivalente.  
a) Pentru  $I_2 = 0$ ; b) pentru  $U_2 = 0$

Pentru exemplificare fie să determinăm graful unui cuadripol în  $T$  obținut din interconectarea în cascadă a trei structuri simple (Tab.6.6 și 6.7); se obține graful din figura 6.80, *a*, care, reducând nodurile  $U_2U_1$  și  $I_2'I_1'$ , poate fi reprezentat mai simplu (fig. 6.80, *b*). Graful rezultat este o structură  $\gamma$ , căreia urmează să-i determinăm parametrii. Pentru aceasta facem pe rând  $I_2 = 0$  și  $U_2 = 0$  și calculăm transmitanțele corespunzătoare relațiilor (6.105) și (6.106). Calculul se face\* aplicând formula lui MASON (6.63) fie direct asupra grafului din figura 6.79, *b*, fie desenând din nou acest graf sub o formă mai ușor de analizat (fig. 6.81). Calculul, care nu prezintă nici o dificultate, conduce la expresiile parametrilor identice cu acelea din ecuațiile (6.138).

6.4.4.14. *Diagrama generală a cuadripolului.* Fie un cuadripol având parametrii  $\underline{A}$   $\underline{B}$   $\underline{C}$   $\underline{D}$  și ecuațiile generale scrise sub forma

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{D} \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.142)$$

$$\underline{A} \underline{D} - \underline{B} \underline{C} = 1, \quad (6.143)$$

în care tensiunile și curenții au semnificațiile obișnuite. Eliminând pe  $\underline{I}_2$  se obțin relațiile

$$\underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{D}} \underline{U}_2 - \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \underline{I}_1. \quad (6.144)$$

\* Există formule care dau direct parametrii grafului echivalent al unei cascade cu oricâte elemente. Vezi [245] pag. 118.



Fie

$$\underline{A} = A \angle \alpha, \quad \underline{B} = B \angle \beta, \quad \underline{D} = D \angle \delta,$$

$$\underline{U}_1 = U_1 \angle \theta, \quad \underline{U}_2 = U_2 \angle \underline{\theta}, \quad \underline{I}_2 = I_2 \angle -\varphi_2;$$

se ia tensiunea  $\underline{U}_2$  atît ca origine de fază, cît și ca unitate de măsură pentru tensiuni.

Dacă se consideră și curentul  $\underline{I}_1$ , defazat în urma tensiunii  $\underline{U}_1$  cu unghiul  $\varphi_1$ , atunci acest curent va fi defazat față de tensiunea  $\underline{U}_2$  cu unghiul  $\theta - \varphi_1$  și expresia sa va fi

$$\underline{I}_1 = I_1 \angle \theta - \varphi_1.$$

Ecuațiile (6.144) pot fi scrise

$$\left. \begin{aligned} A U_2 \angle \alpha + B I_2 \angle \beta - \varphi_2 &= U_1 \angle \theta, \\ \frac{U_2}{D} \angle -\delta + \frac{B}{D} I_1 \angle \beta - \delta + \theta - \varphi_1 &= U_1 \angle \theta, \end{aligned} \right\} \quad (6.145)$$

care construite grafic dau diagrama generală a cuadripolului. Pentru aceasta, se consideră un anumit regim de funcționare la ieșire, adică se consideră cunoscute  $U_2$ ,  $I_2$  și  $\varphi_2$ .

Prima din ecuațiile (6.145) arată că tensiunea de alimentare a cuadripolului este egală cu suma a doi fazori: fazorul  $A U_2 \angle \alpha$  constant ca lungime și care face un unghi  $\alpha$  cu originea fazelor și fazorul  $B I_2 \angle \beta - \varphi_2$ , care face unghiul  $\beta - \varphi_2$  cu originea fazelor (fig. 6.82). A doua ecuație (6.145) arată că aceeași

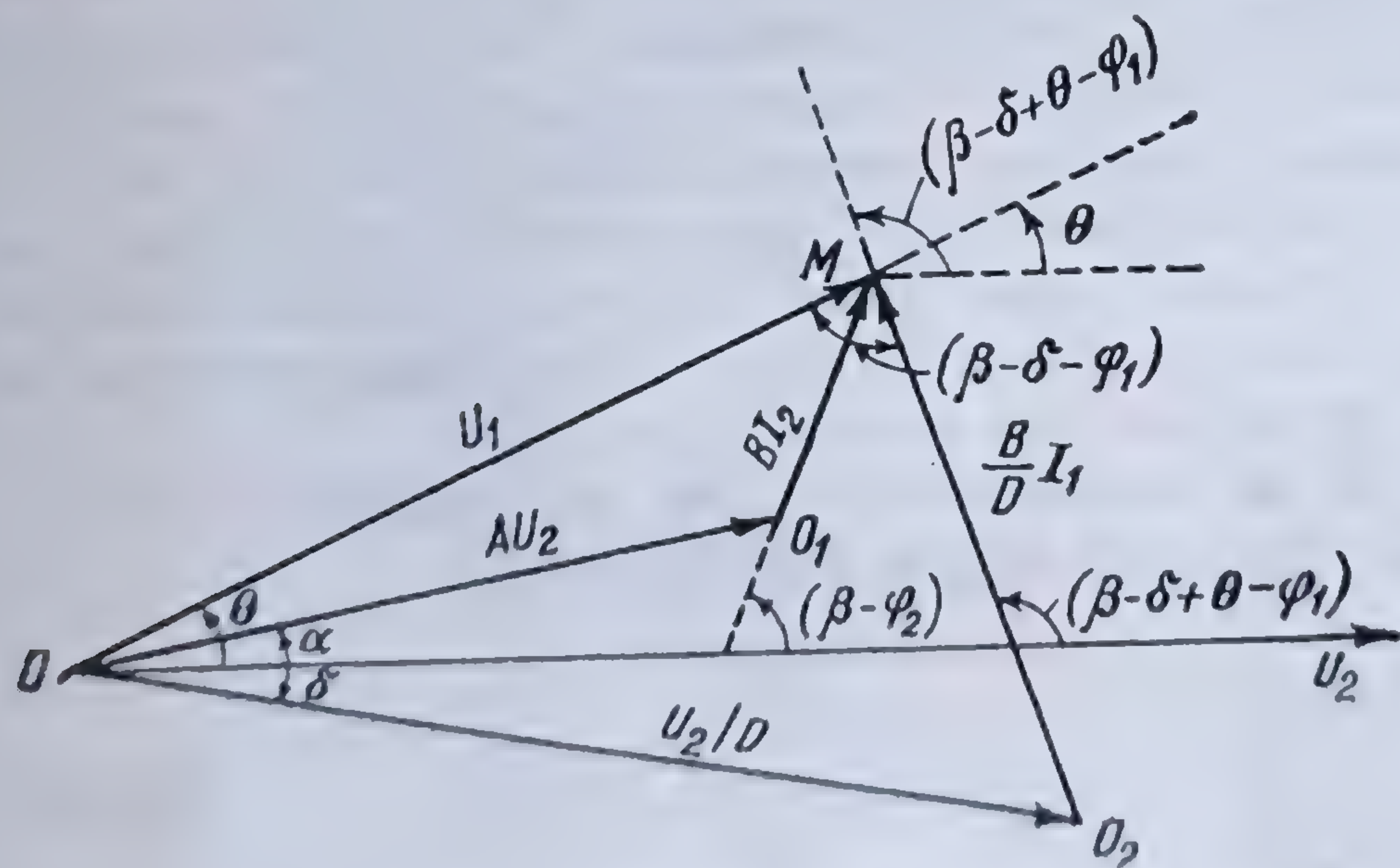


Fig. 6.82. Diagrama generală a cuadripolului.

tensiune  $\underline{U}_1$  poate fi obținută tot din suma a doi fazori, fazorul  $(U_2/D) \angle -\delta$  cunoscut și fazorul  $(B I_1/D) \angle \beta - \delta + \theta - \varphi_1$  necunoscut, dar care acum poate fi determinat destul de ușor. Într-adevăr, construind fazorul  $(U_2/D) \angle -\delta$  și, unind vârful său  $O_2$  cu vârful  $M$  al fazorului  $\underline{U}_1$ , se obține dreapta  $\overline{O_2 M}$  care este chiar fazorul căutat.

Coeficientul  $\frac{B}{D}$  fiind cu-

noscute, modulul fazorului

$\overline{O_2 M}$  va da mărimea curentului  $\underline{I}_1$ , iar argumentul său va da defazajul  $\theta - \varphi_1$  al acestui curent.

Este ușor de văzut că

$$\angle O M O_2 = \beta - \delta - \varphi_1$$

și deci, aceeași diagramă determină direct unghiul  $\varphi_1$ , deoarece  $\beta$  și  $\delta$  sînt cunoscute.



Ecuatiile (6.142) și (6.143) ale cuadripolului dau posibilitatea construirii unor diagrame sau topograme generale, care să permită rezolvarea tuturor problemelor ce privesc un anumit cuadripol într-un timp minim. Aceste topograme sînt de două tipuri: topograme sau diagrame cu un singur pol de tensiune și topograme sau diagrame cu poli multipli de tensiune. Ele pot rezolva toate problemele specifice cuadripolului.

**6.4.4.15. Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru cuadripol.** Construcția acestei diagrame se face pornind de la diagrama generală a cuadripolului. Se construiește triunghiul fundamental  $OO_1M$ , pentru o anumită valoare a lui  $I_2$  și a lui  $\varphi_2$ , tensiunea la ieșire  $U_2$  fiind considerată constantă și luată ca unitate de măsură și origine de fază (fig. 6.83), precum și fazorul  $\overline{OO_2} = (U_2/D) \angle -\delta$ .

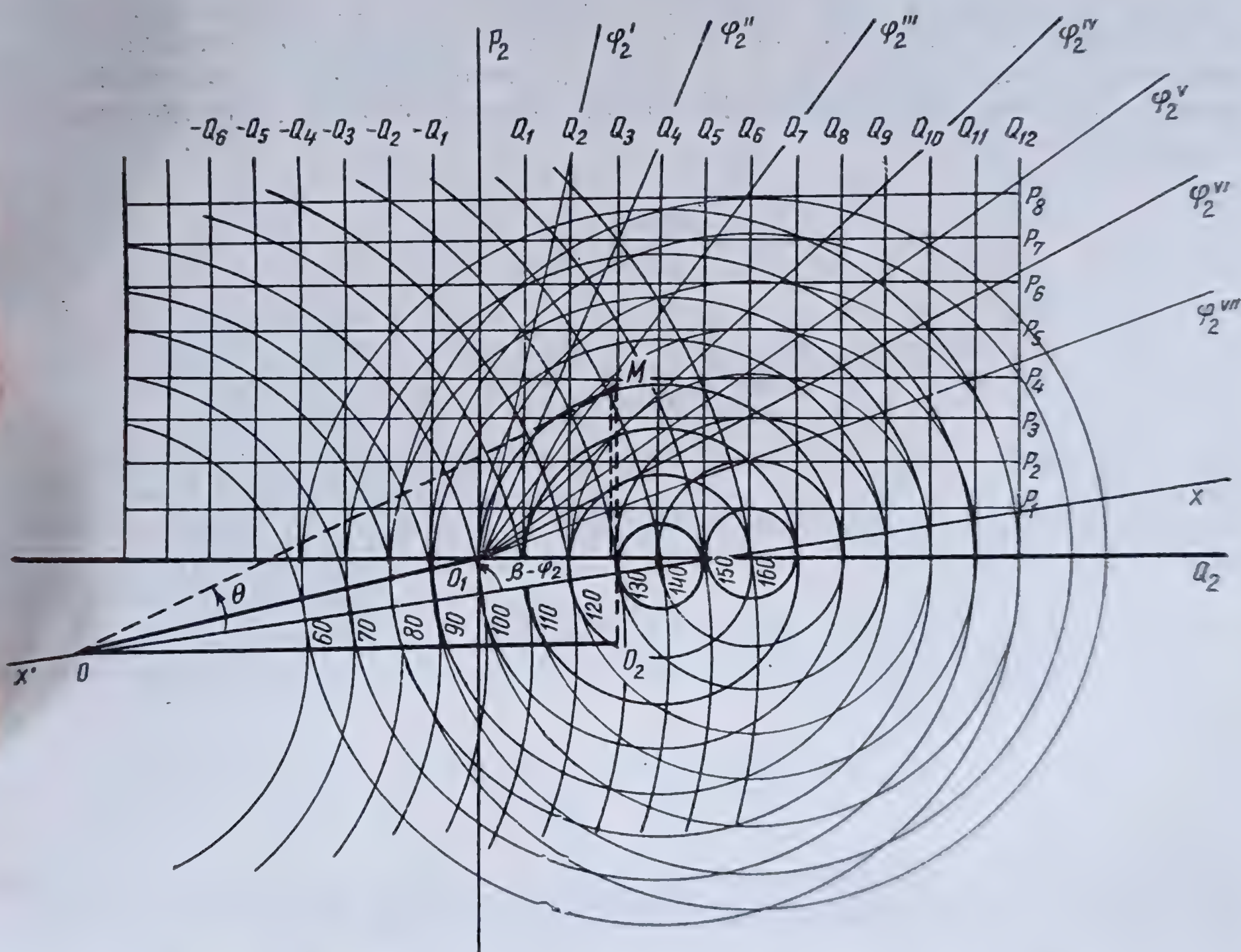


Fig. 6.83. Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru cuadripol.

Tensiunea la intrare  $U_1$  fiind reprezentată de fazorul  $\overline{OM}$ , locul geometric al punctelor de egală tensiune efectivă este o familie de cercuri concentrice, cu centrul în  $O$ . Aceste cercuri se gradează în procente din tensiunea  $U_2$ , luată ca unitate de măsură. În particular, locul geometric al punctelor de egală tensiune la intrare și la ieșire este cercul cu centrul în  $O$  și cu raza egală cu  $U_2$ .

Acest cerc va purta gradația 100 sau 1.

Locul geometric al punctelor de egal defazăj la sosire este format dintr-o familie de drepte trecînd prin punctul  $O_1$  și făcînd un unghi  $\beta - \varphi_2$  cu axa origine de fază. În particular, dreapta  $O_1P_2$ , care face cu axa de origine unghiul  $\beta$ ,



este locul geometric al fazorului  $BI_2$  pentru care,  $\varphi_2$  este egal cu zero; ea este deci locul geometric al punctelor corespunzând componentei *active* a curentului la ieșire; tensiunea  $U_2$  fiind constantă, această dreaptă poate fi gradată în *unități de putere activă*  $P_2$  la ieșire, procedându-se în felul următor: gradarea fiind liniară și ținând seama că, în  $O_1$ ,  $P_2 = 0$  rezultă că, dându-se o valoare particulară pentru  $I_2$ , care corespunde la o anumită putere activă  $U_2 I_2$ , se poate găsi un al doilea punct al scării și deci scara însăși.

De asemenea, pentru  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  se obține dreapta  $\overline{O_1 O_2}$  care este locul geometric al punctelor corespunzând componentei *reactive* a curentului la ieșire; ea poate fi gradată deci în unități de putere reactivă la ieșire  $Q_2$ .

Scara ei este aceeași ca și a dreptei de putere activă.

Pentru a avea diagrama completă, este necesar a se determina locul geometric al punctelor de egală pierdere de putere activă și reactivă, ținând seama că aceste pierderi sînt egale cu diferența dintre puterile date cuadripolului la bornele de intrare și puterile ce se obțin la bornele de ieșire, va trebui să fie determinată, expresia puterilor la intrare. Din ecuațiile generale ale cuadripolului se deduce

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{D}}{\underline{B}} \underline{U}_1 - \frac{\underline{U}_2}{\underline{B}},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{B}} - \frac{\underline{A}}{\underline{B}} \underline{U}_2.$$

Valorile conjugate ale acestor mărimi fiind

$$\underline{I}_1^* = \frac{\underline{D}^*}{\underline{B}^*} \underline{U}_1^* - \frac{\underline{U}_2}{\underline{B}^*},$$

$$\underline{I}_2^* = \frac{\underline{U}_1^*}{\underline{B}^*} - \frac{\underline{A}^*}{\underline{B}^*} \underline{U}_2,$$

puterile aparente, la intrarea și la ieșirea din cuadripol, sînt

$$\left. \begin{aligned} \underline{S}_1 &= P_1 + j Q_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \frac{\underline{D}^*}{\underline{B}^*} \underline{U}_1 \underline{U}_1^* - \frac{\underline{U}_2}{\underline{B}^*} \underline{U}_1 \\ \underline{S}_2 &= P_2 + j Q_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \frac{\underline{U}_1^* \underline{U}_2}{\underline{B}^*} - \frac{\underline{A}^*}{\underline{B}^*} \underline{U}_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.146)$$

Punînd

$$\underline{U}_1 = u_1 + j u_1', \quad \underline{U}_2 = u_2, \quad \underline{A} = a + j a', \quad \underline{B} = b + j b', \quad \underline{D} = d + j d'$$



se obține

$$P_1 = \frac{(bd + b'd')(u_1^2 + u_1'^2) - (bu_1 - b'u_1')u_2}{b^2 + b'^2},$$

$$Q_1 = \frac{(b'd - bd')(u_1^2 + u_1'^2) - (b'u_1 + bu_1')u_2}{b^2 + b'^2},$$

$$P_2 = \frac{-(ab + a'b')u_2^2 + (bu_1 + b'u_1')u_2}{b^2 + b'^2},$$

$$Q_2 = \frac{-(ab' - a'b)u_2^2 + (b'u_1 - bu_1')u_2}{b^2 + b'^2}$$

și pierderile respective sînt

$$P_1 - P_2 = \frac{bd + b'd'}{b^2 + b'^2} \left[ u_1'^2 + \left( u_1 - \frac{b'u_2}{bd + b'd'} \right)^2 \right] + u_2^2 \frac{ab' + a'b - \frac{b^2}{bd + b'd'}}{b^2 + b'^2}$$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{b'd - bd'}{b^2 + b'^2} \left[ u_1'^2 + \left( u_1 - \frac{b'u_2}{bd - bd'} \right)^2 \right] + u_2^2 \frac{ab' - a'b - \frac{b'^2}{b'd - bd'}}{b^2 + b'^2}.$$

Din expresia acestor pierderi se vede că ele se compun dintr-un termen constant, proporțional cu tensiunea la ieșirea din cuadripol care este constantă, și dintr-un termen variabil, care este funcție de componentele tensiunii la intrarea în cuadripol și deci este funcție de încărcarea cuadripolului. Termenul constant constituie pierderile minime  $p_m$ .

Punctului  $M$  de funcționare, considerat în figura 6.82 îi corespunde coordonatele  $u_1$  și  $u_1'$ . Fie, pe această diagramă, punctul  $N$  de coordonate

$$u_1' = 0 \text{ și } u_1 = \frac{b}{bd + b'd'} u_2.$$

Este ușor de văzut că, pătratul distanței  $\overline{MN}$  înmulțită cu mărimea constantă

$$\frac{bd + b'd'}{b^2 + b'^2}$$

reprezintă tocmai partea variabilă a pierderilor.

În consecință, locul geometric al punctelor de egală pierdere de putere activă este format dintr-o familie de cercuri concentrice, cu centrul în  $N$ . Gradarea locului geometric se face înmulțind pătratul razei cercului respectiv măsurată în volți cu partea reală a admitanței  $\frac{D}{B}$  de scurtcircuit și adunînd acestui produs valoarea pierderilor minime de putere activă.



La fel, se arată că și locul geometric al pierderilor reactive este format dintr-o altă familie de cercuri concentrice, cu centrul în punctul  $T$  de coordonate,

$$u'_1 = 0 \text{ și } u_1 = \frac{b'}{b'd - bd'} u_2.$$

Gradarea acestui loc geometric se face înmulțind pătratul razei respective, măsurată în volți, cu *partea complexă* a admitanței ( $\underline{D}/\underline{B}$ ) de funcționare în scurtcircuit și adunând la acest produs valoarea pierderilor minime de putere reactivă.

Diagrama se utilizează în modul următor :

— Se definește regimul de funcționare dându-se  $P_2$  și  $Q_2$  (sau  $P_2$  și  $\varphi_2$ ) stabilindu-se pe diagramă poziția punctului  $M$  corespunzătoare funcționării date.

— Se determină pe cercul respectiv tensiunea la intrare  $U_1$  precum și defazajul acesteia  $\theta$  față de tensiunea la ieșire  $U_2$ .

— Pe cercurile respective, se determină pierderile activă  $p$  și reactivă  $q$  deducându-se astfel puterile activă și reactivă la intrare.

— Cunoscând aceste puteri, se deduce defazajul  $\varphi_1$  la intrare, precum și randamentul electric al circuitului.

— Tot pe această diagramă se poate determina direct și curentul la intrare  $I_1$ , precum și defazajul la intrare  $\varphi_1$ . Pentru aceasta, se unește punctul  $O_2$  cu punctul  $M$  de funcționare considerat : segmentul  $\overline{O_2M}$ , măsurat la scara curentului  $I_1$ , dă mărimea acestui curent.

**OBSERVAȚIE.** Dacă diagrama ar fi fost construită cu o unitate de tensiune  $\underline{U}'_2$  diferită de  $\underline{U}_2$ , s-ar fi obținut o figură homotetică cu precedentă : toate lungimile  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{OB}$ , ar fi fost reduse în raportul  $\underline{U}'_2/\underline{U}_2$ .

Pentru o aceeași putere la ieșire  $P_2 = I_2 \underline{U}'_2$ , punctul respectiv ar fi avut ordonata redusă în raportul  $(\underline{U}'_2/\underline{U}_2)^2$ . Într-adevăr, curentul la ieșire  $\underline{I}_2$  este proporțional cu  $\overline{AB}$  și tensiunea este proporțională cu  $\overline{OA}$ , fiecare din acestea fiind reduse în raportul  $\underline{U}'_2/\underline{U}_2$ , rezultă că ordonata punctului  $P$  de pe axa  $OP$  va fi proporțională cu produsul celor două segmente reduse, deci ordonata punctului  $\underline{P}_2$  va fi redusă în raportul  $(\underline{U}'_2/\underline{U}_2)^2$ .

Rezultă dar, că diagrama dată poate fi folosită pentru orice tensiune la ieșire  $\underline{U}'_2$ , diferită de tensiunea  $\underline{U}_2$  care a fost luată ca unitate pentru construirea diagramei, cu condiția de a reduce scările tensiunilor în raportul  $\underline{U}'_2/\underline{U}_2$  și scările puterilor în raportul  $(\underline{U}'_2/\underline{U}_2)^2$ .

**6.4.4.16. Diagrama puterilor sau diagrama cercului cuadripolului cu doi poli de tensiune.** Se poate construi pentru cuadripol o diagramă la care se fixează axele puterilor activă și reactivă, deducându-se locul punctelor de egală tensiune. Pentru aceasta, se consideră puterea aparentă la intrarea în cuadripol și la ieșirea din cuadripol, a căror expresii sînt date de relațiile (6.146).

Luînd ca origine de fază tensiunea de sosire  $\underline{U}_2$ , rezultă

$$\underline{U}_1 = U_1 | \underline{0}, \quad \underline{U}_2 = U_2 | \underline{0}, \quad \underline{B} = B | \underline{\beta}, \quad \underline{D} = D | \underline{\delta}$$

și deci expresia puterii aparentă la intrarea în cuadripol este

$$\underline{S}_1 = P_1 + jQ_1 = \frac{D}{B} U_1^2 | \underline{\beta - \delta} - \frac{U_1 U_2}{B} | \underline{0 + \beta}. \quad (6.147)$$



Expresia explicită a celor două puteri este

$$P_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \cos(\beta - \delta) - \frac{U_1 U_2}{B} \cos(\theta + \beta),$$

$$Q_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \sin(\beta - \delta) - \frac{U_1 U_2}{B} \sin(\theta + \beta).$$

Pentru calculul puterii aparente la ieșire, se procedează în același mod și se găsește

$$\underline{S}_2 = P_2 + jQ_2 = \frac{U_1 U_2}{B} \underline{|\beta - \theta|} - \frac{A}{B} U_2^2 \underline{|\beta - \alpha|}, \quad (6.148)$$

de unde

$$P_2 = \frac{U_1 U_2}{B} \cos(\beta - \theta) - \frac{A}{B} U_2^2 \cos(\beta - \alpha),$$

$$Q_2 = \frac{U_1 U_2}{B} \sin(\beta - \theta) - \frac{A}{B} U_2^2 \sin(\beta - \alpha).$$

Se construiesc relațiile (6.147) și (6.148), în sistemul de axe de coordonate  $OP$  și  $OQ$  (fig. 6.84). Din relația (6.147) rezultă că fazorul  $\underline{S}_1$  se compune din fazorul

$$\overline{OO_1} = \frac{D}{B} U_1^2 \underline{|\beta - \delta|},$$

la care se adaugă fazorul

$$\overline{O_1 N_1} = -\frac{U_1 U_2}{B} \underline{|\beta + \theta|}.$$

Puterea aparentă la intrare  $\underline{S}_1$  este deci reprezentată de fazorul  $\overline{ON_1}$ , a cărui componente pe cele două axe sînt puterea activă și puterea reactivă, furnizate cuadripolului la intrare.

Se poate arăta ușor pe figură că unghiul  $OO_1 N_1$  este egal cu  $(\delta + \theta)$ ; pentru anumite valori determinate pentru  $U_1$  și  $U_2$ , dacă unghiul  $\theta$  variază, punctul  $N_1$  descrie un cerc cu centrul în punctul  $O_1$  și cu raza

$$\overline{O_1 N_1} = \frac{U_1 U_2}{B}.$$

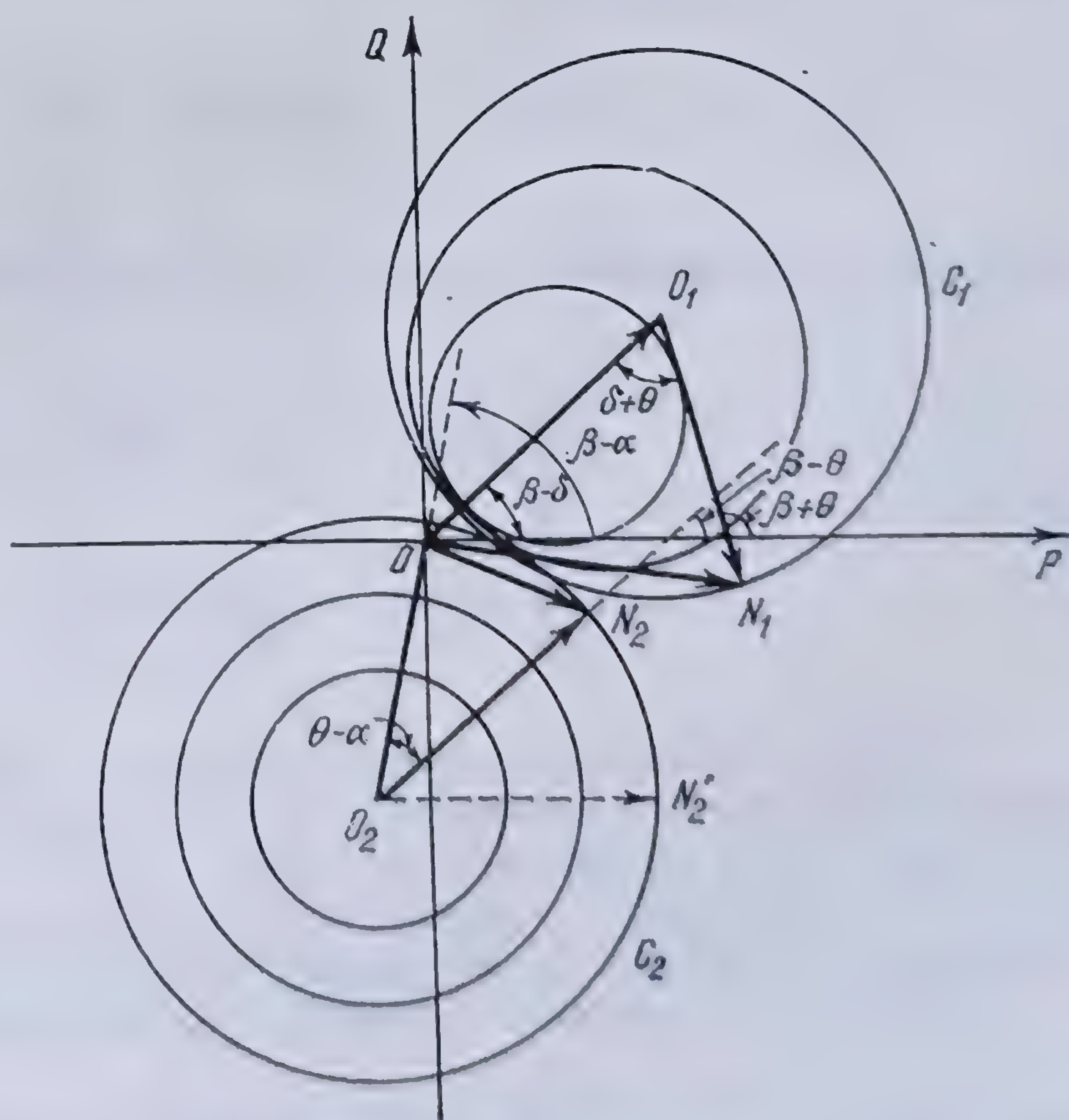


Fig. 6.84. Diagrama puterilor pentru cuadripol.



Coordonatele centrului  $O_1$  sînt

$$x_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \cos (\beta - \delta),$$

$$y_1 = \frac{D}{B} U_1^2 \sin (\beta - \delta).$$

În același mod, se construiește fazorul  $\underline{S}_2$  care este format din fazorul fix

$$\overline{OO_2} = - \frac{A}{B} U_2 \underline{|\beta - \alpha|},$$

la care se adaugă fazorul

$$\overline{O_2N_2} = \frac{U_1U_2}{B} \underline{|\beta - \theta|}.$$

Puterea aparentă la ieșire  $\underline{S}_2$  va fi deci reprezentată de fazorul  $\overline{ON_2}$  ale cărui proiecții pe cele două axe dau puterea activă și reactivă la ieșirea din cuadripol.

Este ușor de văzut că, fazorul  $\overline{O_2N_2}$  este și el mobil în jurul punctului  $O_2$  și deci punctul  $N_2$  descrie un cerc cu centrul în  $O_2$  când unghiul  $\theta$  variază și pentru anumite valori ale lui  $U_1$  și  $U_2$ , unghiul  $\overline{OO_2N_2}$  fiind egal cu  $(\alpha - \theta)$  în acest caz. Raza acestui cerc este

$$\overline{O_2N_2} = \frac{U_1U_2}{B},$$

egală deci cu raza cercului precedent. Coordonatele centrului sînt :

$$\begin{cases} x_2 = - \frac{A}{B} U_2^2 \cos (\beta - \alpha) \\ y_2 = - \frac{A}{B} U_2^2 \sin (\beta - \alpha) \end{cases}$$

Cu aceste elemente se poate construi diagrama căutată : pentru aceasta, se trasează pe epură două familii de cercuri  $C_1$  și  $C_2$ , de rază egală, corespunzînd la diversele valori ale tensiunii  $U_1$ . Pentru  $U_2$  constant, aceste familii de cercuri sînt cercuri cu centrul pe dreapta  $\overline{OO_1}$ , pentru familia de cercuri  $C_1$  și cercuri concentrice cu centrul în  $O_2$  pentru familia de cercuri  $C_2$ .

Utilizarea diagramei se face în modul următor.

**6.4.4.17. Aplicații ale teoriei generale a cuadripolului. 1. Studiul punții WHEATSTONE.** O punte WHEATSTONE (fig. 6.85) poate fi privită ca un cuadripol la care bornele  $a_1b_1$  (corespunzătoare diagonalei pîlă) sînt bornele de intrare ale



cuadripolului și bornele  $a_2b_2$  (corespunzătoare diagonalei galvanometru) sînt bornele de ieșire ale cuadripolului. Să determinăm cei patru parametri  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$  și  $\underline{D}$  ai acestui cuadripol. Pentru aceasta se aplică metoda generală \*.

— Se leagă în scurtcircuit bornele de ieșire și se determină impedanța circuitului. În cazul de față, această determinare se poate face prin calcul. Într-adevăr, bornele  $a_2$  și  $b_2$  fiind în scurtcircuit, impedanțele  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_3$  sînt în paralel; de asemenea și impedanțele  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_4$  sînt în paralel; cele două grupuri de impedanțe sînt apoi legate în serie. Impedanța echivalentă este deci

$$\underline{Z}_{1sc} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}}.$$

— Se lasă cuadripolul deschis la ieșire (bornele  $a_2b_2$  izolate). Impedanța corespunzătoare se compune din impedanțele  $(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$  și  $(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)$  legate în paralel

$$\underline{Z}_{10} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}.$$

Dacă se alimentează cuadripolul prin bornele de ieșire  $a_2b_2$  bornele de intrare fiind izolate, impedanța echivalentă se compune din impedanțele  $(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)$  și  $(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)$  legate în paralel. Se obține

$$\underline{Z}_{20} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}.$$

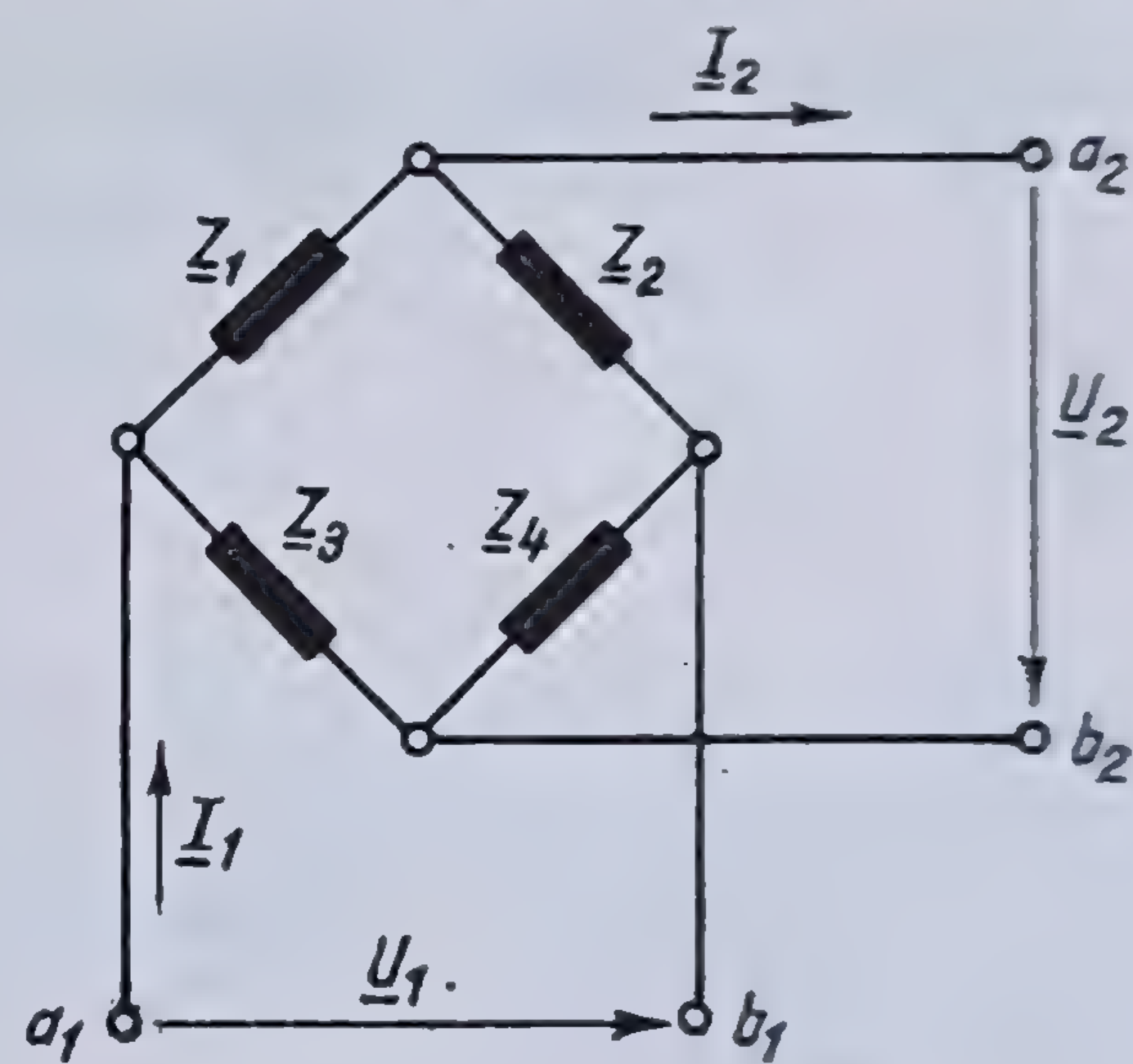


Fig. 6.85. Puntea WHEATSTONE.

Cei patru parametri ai cuadripolului pot fi calculați și cu ajutorul relațiilor (6.110) găsindu-se

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4} \\ \underline{B} &= \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4} \\ \underline{C} &= \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4} \\ \underline{D} &= \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4} \end{aligned} \right\} \quad (6.149)$$

Fie de găsit acum condiția de echilibru a punții WHEATSTONE. Dacă  $\underline{Z}$  este impedanța galvanometrului sau aparatului de zero folosit și care se montează la bornele de ieșire  $cd$  ale cuadripolului, atunci

$$\underline{U}_2 = \underline{Z} \underline{I}_2 \quad (6.150)$$

\* Vezi 6.4.4.3.



Din prima ecuație a cuadripolului (6.142), ținând seama de relația (6.150), se deduce

$$\underline{U}_1 = (\underline{A} \underline{Z} + \underline{B}) \underline{I}_2,$$

de unde

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{A} \underline{Z} + \underline{B}}$$

sau, ținând seama de valorile obținute pentru coeficienții  $\underline{A}$  și  $\underline{B}$  în relațiile (6.149) se obține

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1 (\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4)}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) \underline{Z} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}.$$

Pentru ca puntea să fie în echilibru trebuie ca  $\underline{I}_2 = 0$ , ceea ce se obține când

$$\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_4$$

sau

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4},$$

adică relația cunoscută a punții.

Prin metoda cuadripolului, fie direct, fie prin transformare într-un cuadripol echivalent în  $T$  sau  $\pi$ , se poate rezolva orice problemă de punte.

2. *Cablu subteran.* Un cablu subteran, de  $3 \times 150 \text{ mm}^2$  secțiune, având caracteristicile pe fază:  $R = 0,121 \text{ } \Omega/\text{km}$ ,  $L = 0,7 \text{ mH/km}$  și  $C = 0,32 \text{ } \mu\text{F/km}$  și o lungime de 60 km, este închis pe impedanța sa caracteristică. Dacă acest cablu este alimentat cu o tensiune de 60 kV între faze, 50 Hz, se cere: curentul la plecare, curentul la sosire, defazajele respective și curentul de încărcare a cablului.

Se neglijează conductanța, iar  $L$  și  $C$  sînt respectiv inductanța și capacitatea de serviciu a cablului.

Sistemul, fiind presupus perfect simetric și echilibrat, poate fi studiat monofazat între o fază și pămînt. Pe de altă parte, cablul fiind scurt, poate fi asemuit cu un cuadripol în  $T$ , în care

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{1}{2} (R + j L \omega) l$$

$$\underline{Y} = j C \omega l,$$

$l$  fiind lungimea cablului.

Constantele cuadripolului se deduc din relațiile

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \underline{Z} \underline{Y}, \quad \underline{B} = 2 \underline{Z} + \underline{Z}^2 \underline{Y}, \quad \underline{C} = \underline{Y}.$$

Ținînd seama că

$$\underline{U}_2 = \underline{Z} \underline{I}_2$$



în care, cuadripolul fiind simetric

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{B}{C}},$$

ecuațiile cuadripolului devin

$$\underline{U}_1 = (\underline{A} \underline{Z}_c + \underline{B}) \underline{I}_2$$

și

$$\underline{I}_1 = (\underline{C} \underline{Z}_c + \underline{A}) \underline{I}_2,$$

din care se găsește

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{C} \underline{Z}_c + \underline{A}}{\underline{A} \underline{Z}_c + \underline{B}} \underline{U}_1, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{A} \underline{Z}_c + \underline{B}}, \quad \underline{I}_i = \underline{I}_1 - \underline{I}_2.$$

Numeric se găsește

$$\underline{I}_1 = 450 + j 1 050 = 1 145 \angle 66^\circ 46' \text{ A},$$

$$\underline{I}_2 = 419 + j 820 = 920 \angle 62^\circ 58' \text{ A},$$

$$\underline{I}_i = 31 + j 236 = 238 \angle 81^\circ 56' \text{ A}.$$

#### 6.4.5. STUDIUL DIPOLULUI

**6.4.5.1. Ecuația dipolului.** Fie o rețea formată dintr-o grupare oarecare de impedanțe cuprinse între două borne  $a_1$  și  $a_2$  în interiorul căreia nu există nici o forță electromotoare și care, în afară de bornele  $a_1$  și  $a_2$ , nu mai are nici un fel de legătură electrică sau magnetică cu alte circuite exterioare (fig. 6.86).

Acest sistem poartă numele de *dipol*.

La bornele de intrare  $a_1 b_1$  se aplică o tensiune periodică sinusoidală, iar la bornele de ieșire  $a_2 b_2$  o impedanță  $\underline{Z}_s$ , care constituie sarcina dipolului. În aceste condiții, în circuitele dipolului vor apărea diverși curenți, care se presupun a fi de asemenea periodici sinusoidali. Întrucât în dipol nu există legături transversale, curentul care intră prin borna de intrare  $a_1$  este identic cu cel care iese prin borna de ieșire  $a_2$ . Pe de altă parte, sarcina dipolului poate fi înlocuită cu o tensiune periodică sinusoidală preluată la bornele de ieșire  $a_2 b_2$  ale dipolului și care este egală cu căderea de tensiune în impedanța de sarcină a acestuia.

Stabilirea ecuației dipolului se poate face în același mod ca și pentru stabilirea ecuațiilor cuadripolului \*. Se observă însă că un dipol nu este altceva decât un cuadripol simplu serie \*\*, astfel că ecuația sa este

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}, \quad (6.151)$$

\* Vezi 6.4.4.2.

\*\* Vezi 6.4.4.11. a.

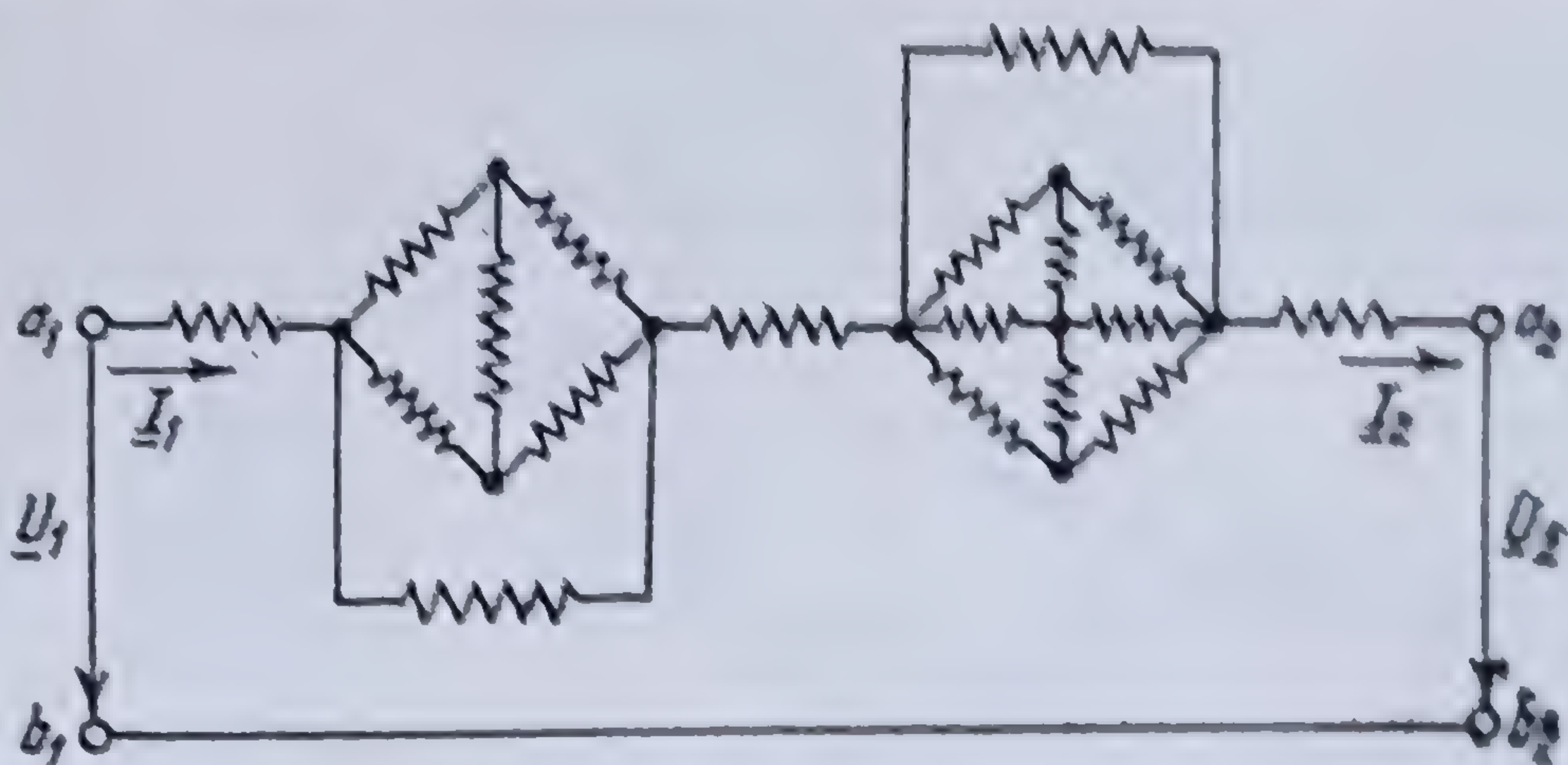


Fig. 6.86. Dipol în general.



în care am notat cu  $\underline{I}$  valoarea comună a celor doi curenți și cu  $\underline{Z}$  impedanța rețelei cuprinsă între bornele  $a_1$  și  $a_2$ .

Ecuția (6.151) se numește ecuația de funcționare a dipolului. Ea se întâlnește în studiul circuitelor electrice în care nu există legături transversale, ca de exemplu rețelele de transmitere de energie electrică, formate din linii și transformatoare la care se neglijează pierderile prin curenți derivați, curenții capacitivi și pierderile prin conductanță, precum și curenții de magnetizare ai transformatoarelor. Tot cu ajutorul teoriei dipolului se poate studia funcționarea mașinilor electrice la care se neglijează pierderile de mers în gol și curentul de magnetizare.

Legându-se la bornele de ieșire o impedanță variabilă  $\underline{Z}_e$ , se poate studia funcționarea dipolului, adică variația curentului absorbit de dipol în funcție de această impedanță pentru o tensiune de alimentare constantă, aplicându-se o metodă de inversiune sau construind direct diagrama.

Rezolvarea ecuației (6.151) poate fi făcută analitic sau grafic. În primul caz, se înlocuiesc fazorii dați cu expresiile lor analitice, rezultând, în mărime și fază, fazorii necunoscuți.

Metoda grafică constă în a construi ecuația (6.151). Pentru aceasta, se ia ca origine de fază una din mărimile date, de exemplu tensiunea  $\underline{U}_2$ . În acest caz rezultă

$$\underline{U}_1 = U_1 | \underline{\theta}, \quad \underline{U}_2 = U_2 | \underline{0}, \quad \underline{I} = I | \underline{-\phi}, \quad \underline{Z} = Z | \underline{\psi}$$

și ecuația (6.151) se poate scrie

$$\underline{U}_1 = U_1 | \underline{\theta} = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I} | \underline{\psi - \phi}, \quad (6.152)$$

care, construită grafic, dă diagrama de funcționare a dipolului (fig. 6.87).

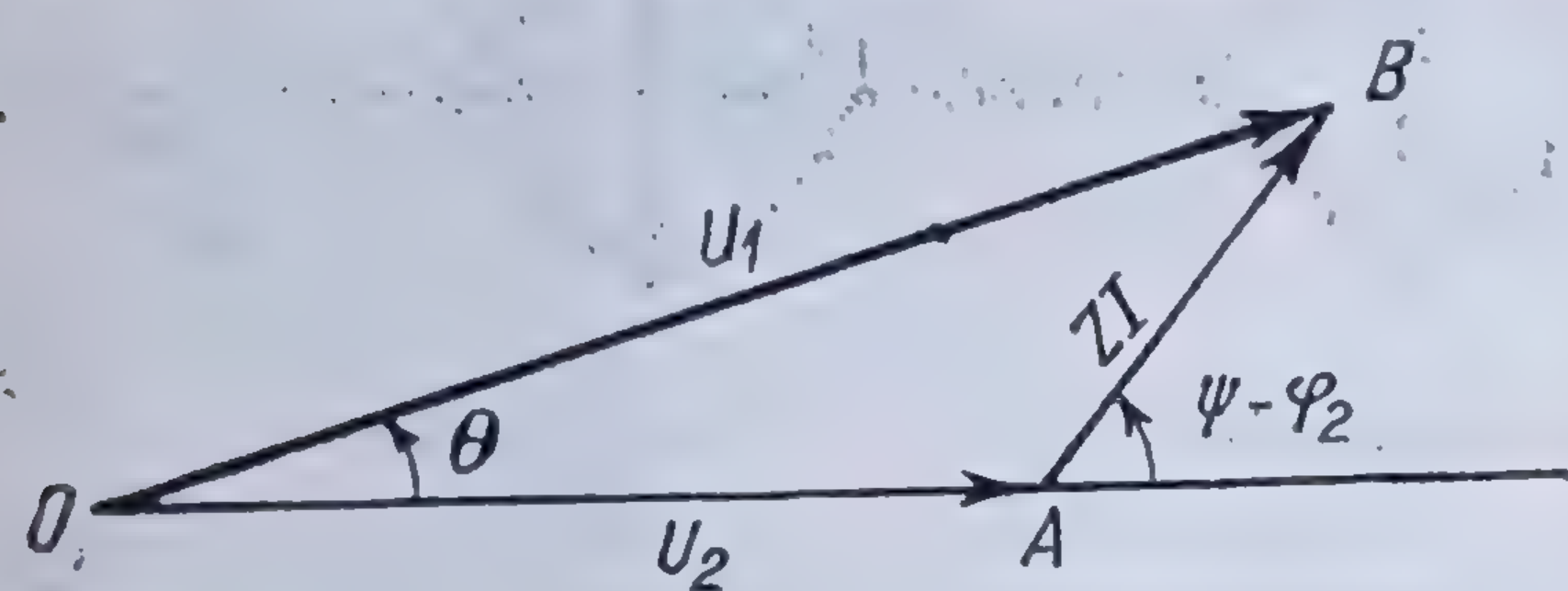


Fig. 6.87. Diagrama generală a dipolului.

Această diagramă rezolvă toate problemele ce se pot pune în cazul funcționării unui sistem electric (transmitere de energie sau mașină) fără pierderi transversale. Astfel, dându-se tensiunea la ieșire  $\underline{U}_2$  și curentul  $\underline{I}$ , se poate determina tensiunea la intrare în dipol  $\underline{U}_1$ , cu defazajul său  $\theta$ , precum și defazajul curentului la intrare în dipol.

Cu ajutorul ecuației (6.151) se poate trasa și o diagramă sau topogramă generală de funcționare a sistemului, ca și în cazul cuadripolului.

Topogramele de funcționare ale unui dipol pot fi construite și ele după două principii diferite :

- topograme sau diagrame cu un singur pol de tensiune;
- topograme sau diagrame cu poli multipli de tensiune (în particular cu doi poli de tensiune).

**6.4.5.2. Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru dipol.** Construcția acestei diagrame se face pornind de la ecuația (6.151) și de la diagrama de funcționare a dipolului (fig. 6.87). Din această diagramă rezultă că, locul geometric al vârfului fazorului tensiunii  $\underline{U}_1$ , aplicată dipolului, când curentul în dipol variază, atât în mărime cât și în fază, este o familie de cercuri concentrice cu centrul în  $O$



(fig. 6.88); tensiunea la ieșire  $\underline{U}_2$  fiind presupusă constantă și luată ca unitate de măsură, cercurile-loc geometric ale lui  $\underline{U}_1$  pot fi gradate fie în valoare absolută, fie în procente din  $\underline{U}_2$ . De asemenea, locul geometric al punctelor care au un același defazaj  $\varphi_2$  la ieșire este o familie de drepte trecând prin vârful  $A$  al fazorului  $\underline{U}_2$  și făcând unghiul  $\psi - \varphi_2$  cu axa  $OA$  luată ca origine de fază. În particular, locul geometric al punctelor de defazaj nul la ieșire ( $\varphi_2 = 0$ ), pentru care factorul de putere este egal cu unitatea, este dreapta  $AP$  care face cu axa  $OA$  unghiul  $\psi$ ; de asemenea, locul geometric al punctelor de defazaj  $\pi/2$ , pentru care factorul de putere este nul, este dreapta  $AQ$ , perpendiculară pe precedentă. Axele ortogonale  $AP$  și  $AQ$  sînt în același timp și axe de putere activă și reactivă și, în consecință, pot fi gradate ca atare. Pentru aceasta, tensiunea la ieșire  $\underline{U}_2$  fiind luată ca unitate de măsură se dă o putere la ieșire;  $P_2$  corespunde unui curent la ieșire  $I_2 = \frac{P_2}{U_2}$ . Pe axa  $AP$ , în diagrama tensiuni-

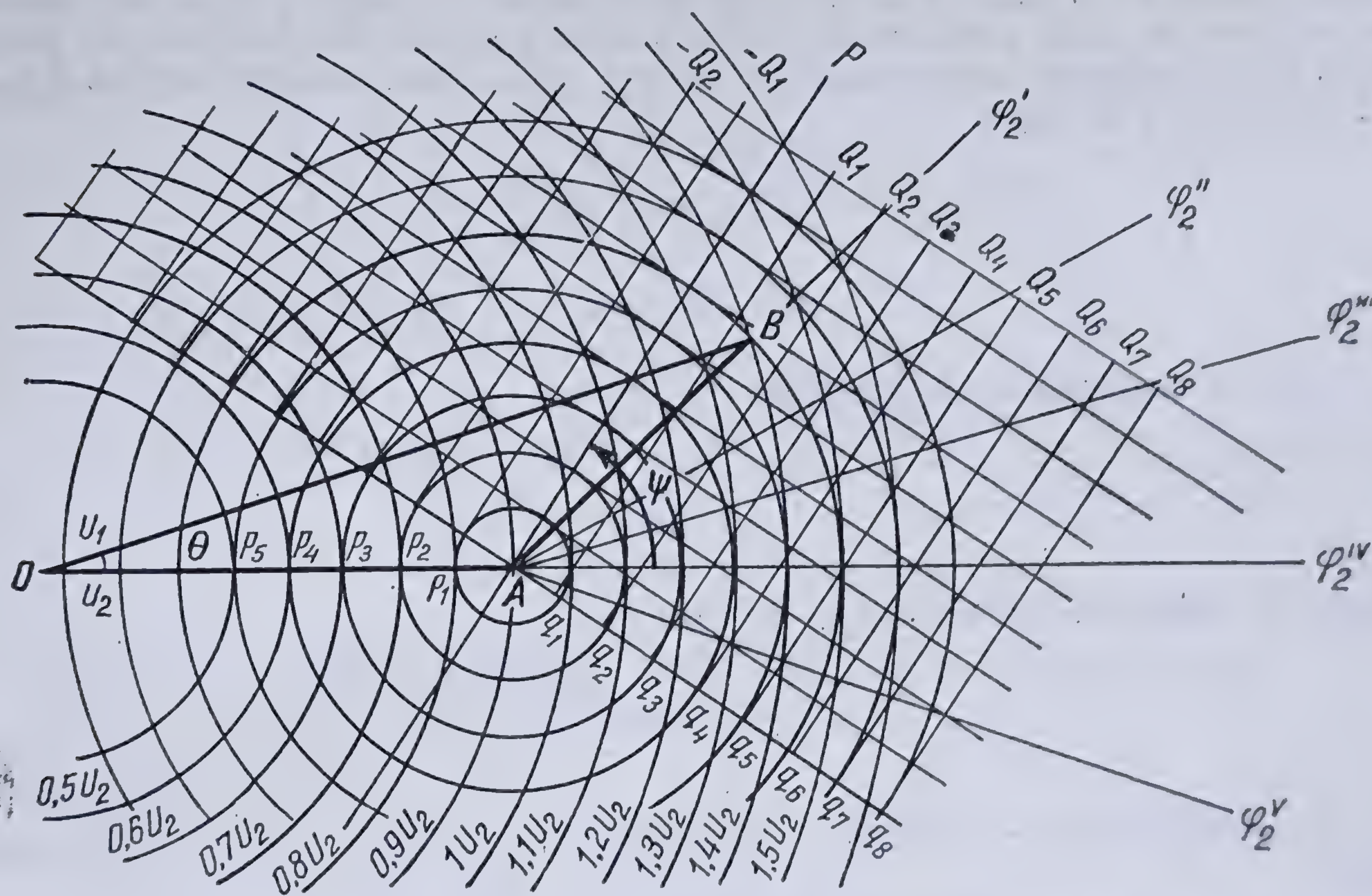


Fig. 6.88. Diagrama cercului cu un singur pol de tensiune pentru dipol.

lor, acestui curent îi corespunde un punct  $P_2$  astfel determinat, încît lungimea  $AP_2$  este egală cu  $ZP_2/U_2$ . Odată cu punctul  $P_2$  este determinată și scara puterilor active. În același mod se determină și scara puterilor reactive.

Pentru determinarea pierderilor în dipol se procedează astfel: unui punct  $B$  al diagramei îi corespunde un curent a cărui valoare efectivă este dată de relația

$$I = \frac{\overline{AB}}{Z},$$

astfel că pierderile prin efect JOULE sînt

$$RI^2 = \frac{R}{Z^2} (\overline{AB})^2,$$



iar pierderile reactive

$$XI^2 = \frac{X}{Z^2} (\overline{AB})^2.$$

Cum aceste pierderi sînt independente de defazaj, locul geometric al punctelor de egală pierdere de putere activă sau reactivă în dipol va fi o familie de cercuri concentrice cu centrul în punctul  $A$ , aceste pierderi fiind proporționale cu vectorul  $AB$ . Această familie de cercuri va fi gradată în pierderi de putere activă și reactivă (în valori absolute sau relative).

Utilizarea diagramei se face în felul următor: se dă de exemplu puterea activă  $P_2$  și puterea reactivă  $Q_2$  la ieșire, coordonatele punctului de funcționare  $B$  în sistemul de axe  $AP$  și  $AQ$ . Acest punct se găsește pe un cerc de egală tensiune a cărui gradație dă *căderea de tensiune* între intrare și ieșire; el se mai găsește și pe un cerc de egală pierdere de putere a cărui gradație dă pierderea de putere activă și pierderea de putere reactivă. Se pot găsi astfel puterile activă și reactivă la intrarea în dipol

$$P_1 = P_2 + p,$$

$$Q_1 = Q_2 + q,$$

obținîndu-se randamentul dipolului

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

precum și defazajul curentului la intrare

$$\varphi_1 = \arctg \frac{Q_1}{P_1}$$

În același mod se rezolvă orice problemă de dipol, oricare ar fi datele inițiale.

**OBSERVAȚIE.** Diagrama precedentă poate fi folosită și pentru o altă tensiune  $U'_2$  diferită de tensiunea  $U_2$  pentru care a fost întocmită \*.

Pentru aceasta, se înmulțesc toate valorile tensiunilor cu raportul  $(U'_2/U_2)$  și valorile puterilor cu raportul  $(U'_2/U_2)^2$ .

**6.4.5.3. Diagrama puterilor sau diagrama cercului dipolului cu doi poli de tensiune.** Diagrama precedentă a fost stabilită pornindu-se de la diagrama tensiunilor, deducîndu-se apoi axele puterilor și gradarea lor respectivă. Se poate proceda și invers, dîndu-se axele de putere și deducîndu-se locul punctelor de egală tensiune.

Pentru aceasta, se pornește de la ecuația fundamentală a dipolului (6.151).

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I},$$

\* Vezi 6.4.4.15, observația.



din care se deduce

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}}.$$

Puterea aparentă la intrarea în dipol  $\underline{S}_1$  se obține înmulțind tensiunea  $\underline{U}_1$  cu conjugata curentului  $\underline{I}$ . Dacă se ia ca origine de fază tensiunea  $\underline{U}_2$  și dacă  $\theta$  este unghiul de defazaj între  $\underline{U}_1$  și  $\underline{U}_2$  iar  $\psi$  argumentul lui  $\underline{Z}$ , atunci

$$\underline{U}_1 = U_1 \angle \theta, \quad \underline{Z} = Z \angle \psi, \quad \underline{U}_2 = U_2 \angle 0,$$

$$\underline{I} = \frac{U_1 \angle \theta - U_2 \angle 0}{Z \angle \psi}$$

de unde

$$\underline{I}^* = \frac{U_1 \angle -\theta - U_2 \angle 0}{Z \angle -\psi} = \frac{U_1 \angle \psi - \theta - U_2 \angle \psi}{Z}$$

și deci

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}^* = \frac{U_1^2 \angle \psi - U_1 U_2 \angle \psi + \theta}{Z} \quad (6.153)$$

sau

$$\underline{S}_1 = \frac{1}{Z} \{ U_1^2 (\cos \psi + j \sin \psi) - U_1 U_2 [\cos (\psi + \theta) + j \sin (\psi + \theta)] \}$$

Rezultă

$$P_1 = \frac{U_1^2}{Z} \cos \psi - \frac{U_1 U_2}{Z} \cos (\psi + \theta),$$

$$Q_1 = \frac{U_1^2}{Z} \sin \psi - \frac{U_1 U_2}{Z} \sin (\psi + \theta).$$

În mod analog, se obțin puterile activă și reactivă la ieșire, găsindu-se

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}^* = \frac{U_1 U_2 \angle -\theta - U_2^2 \angle 0}{Z \angle -\psi} = \frac{U_1 U_2 \angle \psi - \theta - U_2^2 \angle \psi}{Z} \quad (6.154)$$

sau

$$\underline{S}_2 = \frac{1}{Z} \{ U_1 U_2 [\cos (\psi - \theta) + j \sin (\psi - \theta)] - U_2^2 (\cos \psi + j \sin \psi) \},$$



de unde rezultă

$$P_2 = \frac{U_1 U_2}{Z} \cos(\psi - \theta) - \frac{U_2^2}{Z} \cos \psi,$$

$$Q_2 = \frac{U_1 U_2}{Z} \sin(\psi - \theta) - \frac{U_2^2}{Z} \sin \psi.$$

Fie sistemul de axe de coordonate ortogonale  $OP$  și  $OQ$  gradate respectiv în puteri active și reactive, în care se trasează sistemul de fazori al puterilor aparente  $\underline{S}_1$  și  $\underline{S}_2$ .

Din relația (6.153) se vede că  $\underline{S}_1$  este un fazor format (fig. 6.89) din fazorul

$$\overline{OO_1} = \frac{U_1^2}{Z} \mid \underline{\psi}$$

la care se adaugă fazorul

$$\overline{O_1 N_1} = - \frac{U_1 U_2}{Z} \mid \underline{\psi + \theta}.$$

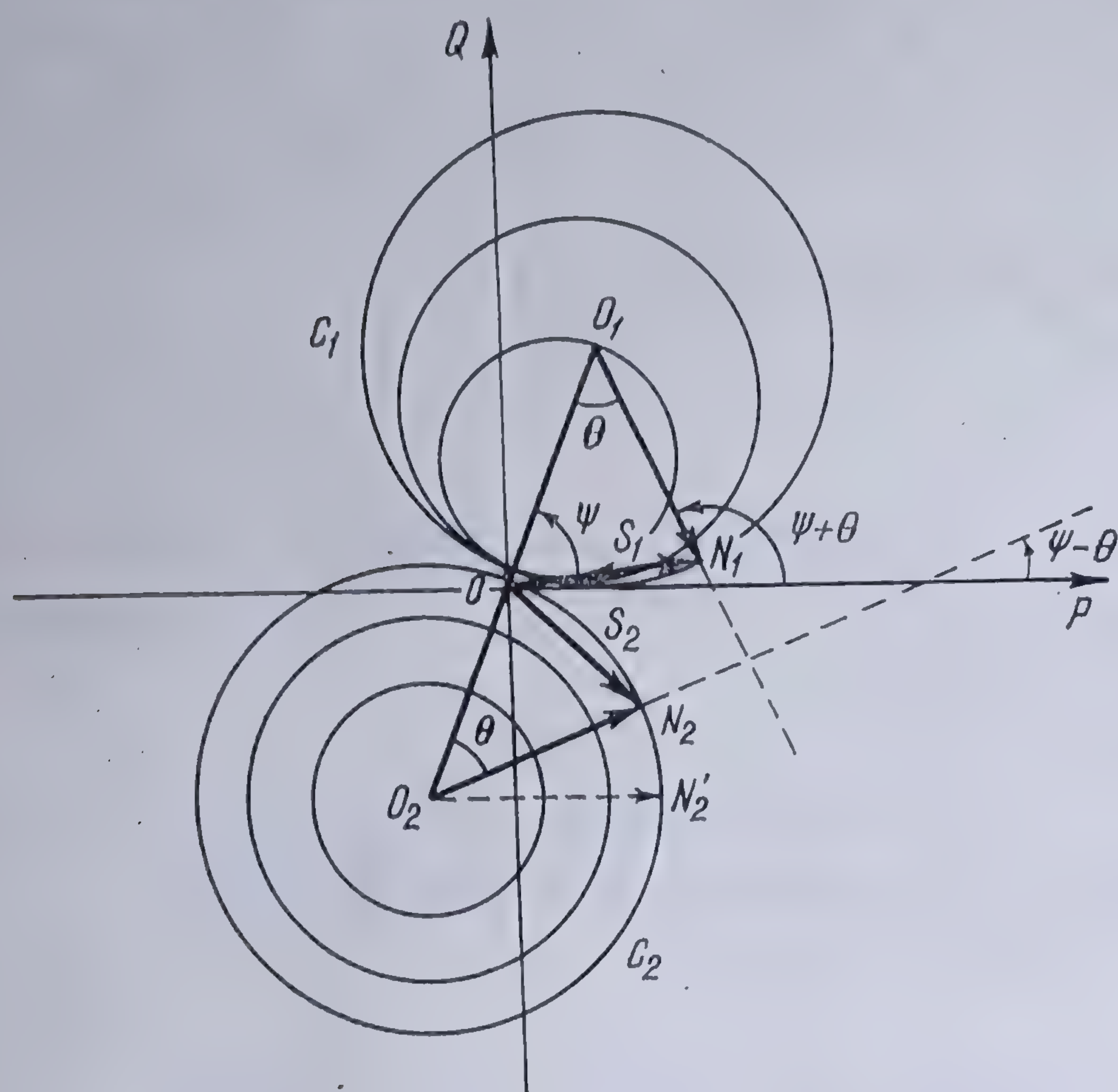


Fig. 6.89. Diagrama puterilor pentru dipol.

scrie un cerc  $C_1$  cu centrul în  $O_1$  și de rază

$$\overline{O_1 N_1} = \frac{U_1 U_2}{Z}.$$

În mod analog, din relația (6.154) se vede că  $\underline{S}_2$  este un fazor egal cu suma fazorilor

$$\overline{OO_2} = - \frac{U_2^2}{Z} \mid \underline{\psi}$$

și

$$\overline{O_2 N_2} = \frac{U_1 U_2}{Z} \mid \underline{\psi - \theta}.$$

Puterea aparentă la intrare  $\underline{S}_1$  va fi deci reprezentată de fazorul  $ON$  a cărui componente pe cele două axe reprezintă puterile activă și reactivă furnizate dipolului la intrare.

Este ușor de văzut că unghiul  $OO_1 N_1$  este egal cu  $\theta$ . Rezultă dar, că dacă  $\underline{U}_1$  și  $\underline{U}_2$  sînt constante iar unghiul  $\theta$  variază, punctul  $N_1$  va de-



Puterea aparentă la ieșire  $S_2$  va fi deci reprezentată de fazorul  $\overline{ON_2}$  a cărui componente după cele două axe reprezintă puterile activă și reactivă ieșite din dipol. Aceasta poate fi dirijată dinspre dipol către exterior dacă coordonatele sînt pozitive și invers dacă ele sînt negative.

Și în acest caz, se vede ușor că unghiul  $OO_2N_2$  este egal cu  $\theta$ ; în consecință, dacă  $U_1$  și  $U_2$  sînt constante, iar unghiul  $\theta$  variază, punctul  $N_2$  descrie cercul  $C_2$  de centrul  $O_2$  și avînd raza

$$\overline{O_2N_2} = \frac{U_1U_2}{Z},$$

egală cu a cercului precedent. Se vede de asemenea, că punctele  $O_1$ ,  $O$  și  $O_2$  sînt coliniare, ceea ce rezultă din însăși construcția fazorilor  $\overline{OO_1}$  și  $\overline{OO_2}$ .

Coordonatele centrelor  $O_1$  și  $O_2$  ale cercurilor  $C_1$  și  $C_2$  sînt

$$\text{pentru } O_1 \quad x_1 = \frac{U_1^2}{Z} \cos \psi \text{ și } y_1 = \frac{U_1^2}{Z} \sin \psi,$$

$$\text{pentru } O_2 \quad x_2 = -\frac{U_2^2}{Z} \cos \psi \text{ și } y_2 = -\frac{U_2^2}{Z} \sin \psi.$$

Topograma se construiește trasînd pe epură două familii de cercuri  $C_1$  și  $C_2$ , de rază egală, corespunzînd diverselor valori ale tensiunilor  $U_1$  și  $U_2$ .

Considerînd, ca și în cazul precedent, că  $U_2$  este constant, rezultă că centrul cercului  $C_2$  este fix și deci familia acestui cerc este formată din cercuri concentrice, raza lor variînd cu  $U_1$ . Coordonatele centrului  $O_1$  fiind funcție de  $U_1$ , centrele cercurilor  $C_1$  se vor deplasa pe dreapta  $OO_1$ .

Utilizarea diagramei se face în felul următor: se dau puterile activă și reactivă la ieșire  $P_2$  și  $Q_2$ , cu ajutorul cărora se fixează coordonatele punctului  $N_2$ , care se găsește pe un cerc  $C_2$  de rază  $(U_1U_2/Z)$ . Dacă mărimea tensiunii la ieșire este dată, se deduce mărimea tensiunii la intrare  $U_1$ .

Se deduce, de asemenea, unghiul  $\theta = \angle N_2O_2O$  pe care îl fac cele două tensiuni. Cunoșcînd tensiunea la intrare  $U_1$  se determină punctul  $O_1$ , centrul cercului  $C_1$  și se trasează apoi dreapta  $O_1N_1$  care face unghiul  $\theta$  cu dreapta  $\overline{OO_1}$ , determinîndu-se punctul de funcționare la intrare  $N_1$  pe cercul de rază  $U_1U_2/Z$ .

Coordonatele acestui punct dau puterea activă  $P_1$  și puterea reactivă  $Q_1$  la plecare. Cu aceste date se poate calcula randamentul dipolului și defazajul între tensiune și curent la intrare.

**OBSERVAȚIE.** Aplicînd această diagramă sistemelor de transmitere de energie electrică se poate deduce o proprietate importantă a acestora și anume că, pentru  $U_1$  și  $U_2$  constante, nu se poate depăși puterea activă de transmis peste o anumită limită. Această putere corespunde punctului de pe cercul  $C_2$ , care are abscisa maximă și care corespunde unghiului  $\theta = \psi^*$ .

Valoarea acestei puteri este

$$P_{2m} = \frac{U_1U_2}{Z} - \frac{U_2^2}{Z} \cos \psi.$$

\* Raza  $ON_2'$  este paralelă cu axa  $OP$ .



6.4.5.4. Puterea maximă transferată printr-un dipol. Fie un dipol a cărui ecuație de funcționare este (6.151)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2$$

și căruia i se aplică la ieșire o sarcină  $\underline{Z}_2$ . Conform teoremei lui THÉVENIN, curen-  
tul ce străbate această impedanță este

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z} + \underline{Z}_2},$$

căderea de tensiune la bornele sale fiind

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z} + \underline{Z}_2} \underline{U}_1.$$

Ne propunem să determinăm puterea maximă absorbită de impedanța  $\underline{Z}_2$  și deci transferată de dipol.

Puterea aparentă absorbită de sarcină este dată de relația

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z} + \underline{Z}_2} \underline{U}_1 \cdot \frac{\underline{U}_1^*}{\underline{Z}^* + \underline{Z}_2^*} = \frac{\underline{Z}_2}{(\underline{Z} + \underline{Z}_2)(\underline{Z}^* + \underline{Z}_2^*)} \underline{U}_1^2. \quad (6.155)$$

Să punem

$$\underline{Z}_2 = \varepsilon^{2a} \underline{Z}, \quad (6.156)$$

în care

$$\underline{a} = a_1 + ja_2;$$

cu această notație relația (6.155) devine

$$\underline{S}_2 = \frac{\underline{U}_1^2}{4\underline{Z}^*} \frac{\varepsilon^{2a}}{(1 + \varepsilon^{2a})(1 + \varepsilon^{2a*})},$$

sau, împărțind numărătorul și numitorul cu  $4\varepsilon^a \varepsilon^{a*}$ ,

$$\underline{S}_2 = \frac{\underline{U}_1^2}{4\underline{Z}^*} \cdot \frac{\varepsilon^{j2a_2}}{\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} a^*} = \frac{\underline{U}_1^2}{2\underline{Z}^*} \frac{\varepsilon^{j2a_2}}{\operatorname{ch} 2a_1 + \cos 2a_2}, \quad (6.157)$$

întrucât

$$\frac{\varepsilon^a}{\varepsilon^{a*}} = \varepsilon^{j2a_2}.$$

Notînd

$$\underline{Z} = \underline{Z} | \underline{\psi} \quad \text{și} \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_2 | \underline{\psi}_2$$

relația (6.156) poate fi scrisă

$$\underline{Z}_2 | \underline{\psi}_2 = \varepsilon^{2a_1} \underline{Z} | \underline{\psi} + 2a_2, \quad (6.158)$$



de unde rezultă

$$\psi_2 = \psi + 2a_2$$

și deci

$$2a_2 = \psi_2 - \psi.$$

Cu această notație și ținând seama că

$$e^{j2a_2} = \cos 2a_2 + j \sin 2a_2 = \cos (\psi_2 - \psi) + j \sin (\psi_2 - \psi),$$

expresia (6.157) a puterii aparente absorbită de sarcină poate fi pusă sub forma

$$\underline{S}_2 = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\cos \psi_2}{\operatorname{ch} 2a_1 + \cos (\psi_2 - \psi)} + j \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\sin \psi_2}{\operatorname{ch} 2a_1 + \cos (\psi_2 - \psi)} = P_2 + jQ_2, \quad (6.159)$$

scoțându-se astfel în evidență expresia puterii active și a puterii reactive absorbite de sarcină și deci transferate de dipol.

a) Să examinăm mai întâi condițiile în care se transferă prin dipol puterea aparentă maximă.

Modulul puterii aparente este

$$S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} 2a_1 + \cos (\psi_2 - \psi)}.$$

Pentru ca această expresie să fie maximă este necesar ca numitorul ei să fie minim, condiție ce este realizată dacă cele două funcții de la numitor au valorile minime.

Pentru funcția hiperbolică, valoarea minimă este egală cu 1 și se obține atunci când argumentul său este nul; rezultă deci

$$a_1 = 0.$$

Pentru a determina minimul funcției sinusoidale, trebuie să observăm că argumentul  $\psi_2$  al impedanței de sarcină trebuie să fie cuprins în intervalul

$$\left( +\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right) \text{ adică, trebuie să avem}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_2 = \psi + 2a_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Luând valoarea acestui argument egală cu valoarea limitei inferioare, rezultă

$$\psi_2 = \psi + 2a_2 = -\frac{\pi}{2},$$



de unde

$$\psi_2 - \psi = -\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)$$

și deci

$$\cos(\psi_2 - \psi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\sin\psi.$$

Expresia puterii aparente maxime transferate prin dipol este deci

$$S_{2\max} = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{1}{1 - \sin\psi}.$$

Ținând seama de rezultatele obținute mai sus și de relația (6.158) expresia impedanței de sarcină devine

$$\underline{Z}_2 = Z \left| -\frac{\pi}{2} \right.$$

unde  $Z = |Z|$ , ceea ce arată că sarcina este pur capacitivă.

b) Să examinăm acum condițiile necesare pentru ca prin dipol să fie transferată puterea activă maximă.

Expresia puterii active este (6.159)

$$P = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\cos\psi_2}{\operatorname{ch} 2a_1 + \cos(\psi_2 - \psi)}. \quad (6.160)$$

Minimul acestei expresii se obține pentru valorile lui  $a_1$  și  $\psi_2$  pentru care

$$\frac{\partial P}{\partial a_1} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial P}{\partial \psi_2} = 0.$$

Derivând expresia (6.160) în raport cu  $a_1$  și anulând această derivată se obține

$$\operatorname{sh} 2a_1 = 0,$$

de unde rezultă  $a_1 = 0$ .

Introducem această valoare în expresia (6.160) și apoi o derivăm; anulând derivata respectivă, se obține

$$-\sin\psi_2 [1 + \cos(\psi_2 - \psi)] + \cos\psi_2 \sin(\psi_2 - \psi) = 0,$$

de unde rezultă

$$\sin\psi_2 + \sin\psi = 0$$

sau

$$\psi_2 = -\psi.$$



Din relația (6.158) rezultă

$$\underline{Z}_2 = Z_2 | \underline{\psi}_2 = Z | \underline{\psi}_2 = Z | -\psi = Z^*,$$

care exprimă condiția ca prin dipol să fie transferată puterea activă maximă. Expresia acestei puteri este

$$P_{2max} = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\cos \psi}{1 + \cos 2\psi} = \frac{U_1^2}{4Z} \cdot \frac{1}{\cos \psi}.$$

Randamentul transmisiei în aceste condiții nu depășește 50%. Într-adevăr, puterea activă la intrarea în dipol este

$$P_1 = \Re [U_1 I_2^*] = U_1^2 \Re \left[ \frac{1}{Z^* + Z_2^*} \right] = \frac{U_1^2}{Z} \Re \left[ \frac{1}{|-\psi + | + \psi} \right] = \frac{U_1^2}{2Z} \frac{1}{\cos \psi}$$

și deci

$$\eta = \frac{P_{2max}}{P_1} = \frac{\frac{U_1^2}{4Z} \cdot \frac{1}{\cos \psi}}{\frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{1}{\cos \psi}} = \frac{1}{2}.$$

c) În sfârșit, să examinăm condițiile necesare pentru ca prin dipol să se transfere puterea reactivă maximă.

Din relația (6.159) rezultă expresia puterii reactive absorbită de sarcină, sub forma

$$Q = \frac{U_1^2}{2Z} \cdot \frac{\sin \psi_2}{\operatorname{ch} 2a_1 + \cos (\psi_2 - \psi)}.$$

Aplicînd aceeași metodă ca și în cazul puterii active, se găsește că maximul puterii reactive se obține, dacă

$$\operatorname{sh} 2a_1 = 0$$

și

$$\cos \psi_2 + \cos \psi = 0.$$

Din prima dintre aceste relații rezultă

$$a_1 = 0,$$

iar din a doua

$$\psi_2 - \psi = \pm \pi$$

În aceste condiții, din relația (6.158) rezultă

$$\underline{Z}_2 = Z_2 | \underline{\psi}_2 = Z | \underline{\psi}_2 = Z | \pi + \psi = -Z | \psi = -Z, \quad (6.161)$$

ceea ce nu este posibil decît dacă, dipolul avînd impedanța formată dintr-o reactanță inductivă pură, sarcina este o reactanță capacitivă pură și reciproc.



În general, cum  $R \neq 0$ , condiția (6.161) nu poate fi îndeplinită și deci, în cazul general nu poate exista transfer maxim de putere reactivă.

**6.4.5.5. Dipoli fără pierderi de putere activă.** Un asemenea dipol este format dintr-o combinație de inductanțe și capacități perfecte — fără pierderi ohmice. Ecuația acestui dipol este

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + jX\underline{I}$$

și se caracterizează prin aceea că reactanța sa, care depinde de frecvență, se bucură de următoarele proprietăți:

- Derivata sa în raport cu frecvența este întotdeauna pozitivă.
- În origine, valoarea ei este nulă sau  $-\infty$ .
- Pentru frecvențe infinite, valoarea ei este nulă sau  $+\infty$ .
- Prin fixarea punctelor de zero și infinit, precum și a unei valori particulare, reactanța este perfect determinată.

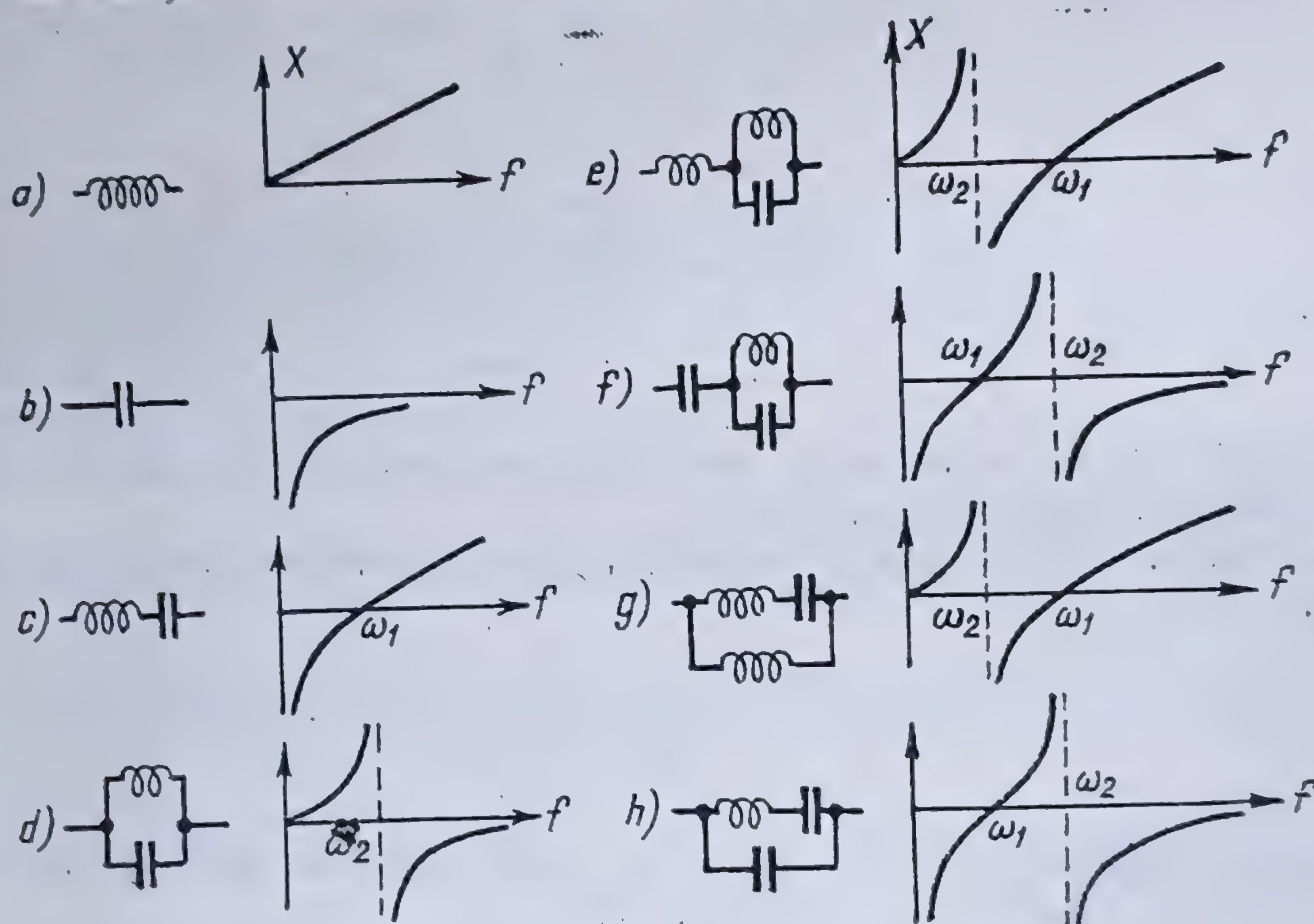


Fig. 6.90. Reactanța unor dipoli reactivi.

În figura 6.90 sînt dați cei mai simpli dipoli cu reactanță pură, precum și variația valorii acesteia în funcție de frecvență.

Demonstrarea proprietăților indicate se face prin verificare directă. Într-adevăr, fie dipolul de tipul  $g$  (fig. 6.90).  
Avem

$$X = \frac{j \left( L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right) \cdot j L_2 \omega}{j (L_1 + L_2) \omega - j \frac{1}{C_1 \omega}} = j \frac{L_1 L_2 C_1 \omega^3 - L_2 \omega}{(L_1 + L_2) C_1 \omega^2 - 1}$$

Se vede imediat că

$$\text{pentru } \begin{cases} \omega = 0, \\ \omega = +\infty, \end{cases} \quad \begin{cases} X = 0 \\ X = +\infty. \end{cases}$$



Reactanța se mai anulează pentru valoarea

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

corespunzătoare rezonanței circuitului serie ( $L_1, C_1$ ); pentru valoarea

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C_1}},$$

expresia reactanței este discontinuă.

Calculînd derivata, se găsește

$$\frac{dX}{d\omega} = \frac{2L_2^2 C_1 \omega}{[(L_1 + L_2) C_1 \omega^2 - 1]^2},$$

care este întotdeauna pozitivă întrucît  $\omega > 0$ .

Din examinarea figurii 6.90 rezultă că există dipoli fără pierderi la care aranjarea diferită a inductanțelor și capacităților să producă aceleași efecte (montajele *e* și *g*) sau efecte întârziate (montajele *c* cu *e* și *g*).

Aceste montaje au numeroase aplicații în practică unde se utilizează fenomenul de rezonanță electrică.

**6.4.5.6. Exemplu de aplicație a teoriei dipolului.** Ne propunem să studiem funcționarea unui motor sincron, la care se neglijează pierderile la mersul în gol, folosind diagrama cu doi poli de tensiune.

Un motor sincron poate funcționa în două moduri : *subexcitat* și *supraexcitat*\*. Se va examina problema în ambele cazuri.

a) *Motorul subexcitat.* Fie  $\underline{U}'$  tensiunea aplicată la borne, care este egală și de sens contrar cu tensiunea  $\underline{U}$  produsă la borne de motor,  $\underline{E}$  forța electromotoare a motorului,  $\underline{I}$  curentul absorbit de motor,  $\varphi$  unghiul de defazaj al curentului  $\underline{I}$  față de tensiunea produsă  $\underline{U}$ ,  $\theta$  unghiul de defazaj al forței electromotoare  $\underline{E}$  față de aceeași tensiune  $\underline{U}$  și  $\psi$  unghiul de defazaj al impedanței  $\underline{Z}$  față de curentul  $\underline{I}$ , definit prin relația  $\text{tg } \psi = \frac{X}{R}$ .

Ecuatia tensiunilor motorului este

$$\underline{E} = \underline{U} + R\underline{I} + jX\underline{I} = \underline{U} + \underline{Z}\underline{I},$$

analoagă cu ecuația de funcționare a unui dipol.

Motorul funcționînd subexcitat, rezultă  $E < U$  și diagrama tensiunilor este dată în figura 6.91.

Ecuatiile puterilor sînt :

— puterea aparentă internă (produsă)

$$S_1 = \underline{E} \cdot \underline{I}^* ;$$

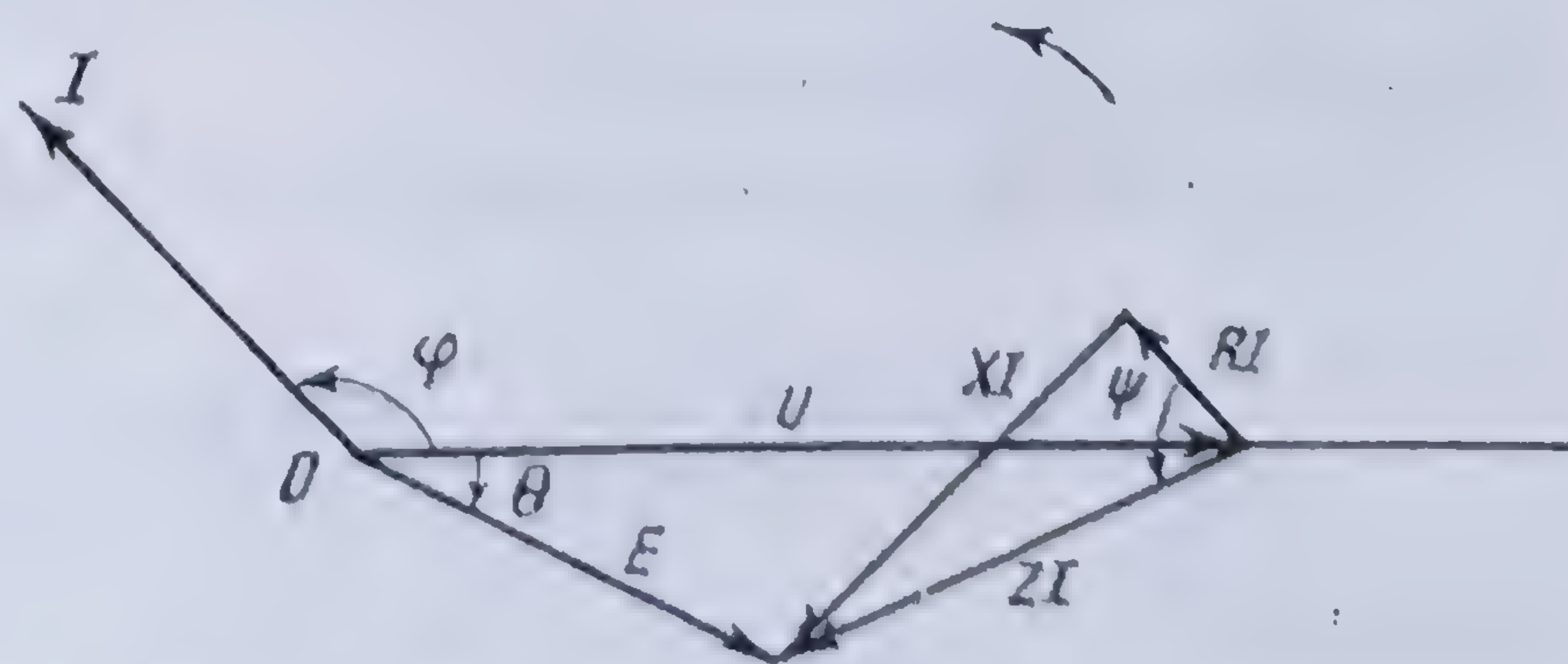


Fig. 6.91. Diagrama motorului sincron subexcitat.

\* Vezi [14] pag. 452 ; vezi și [192] pag. 330

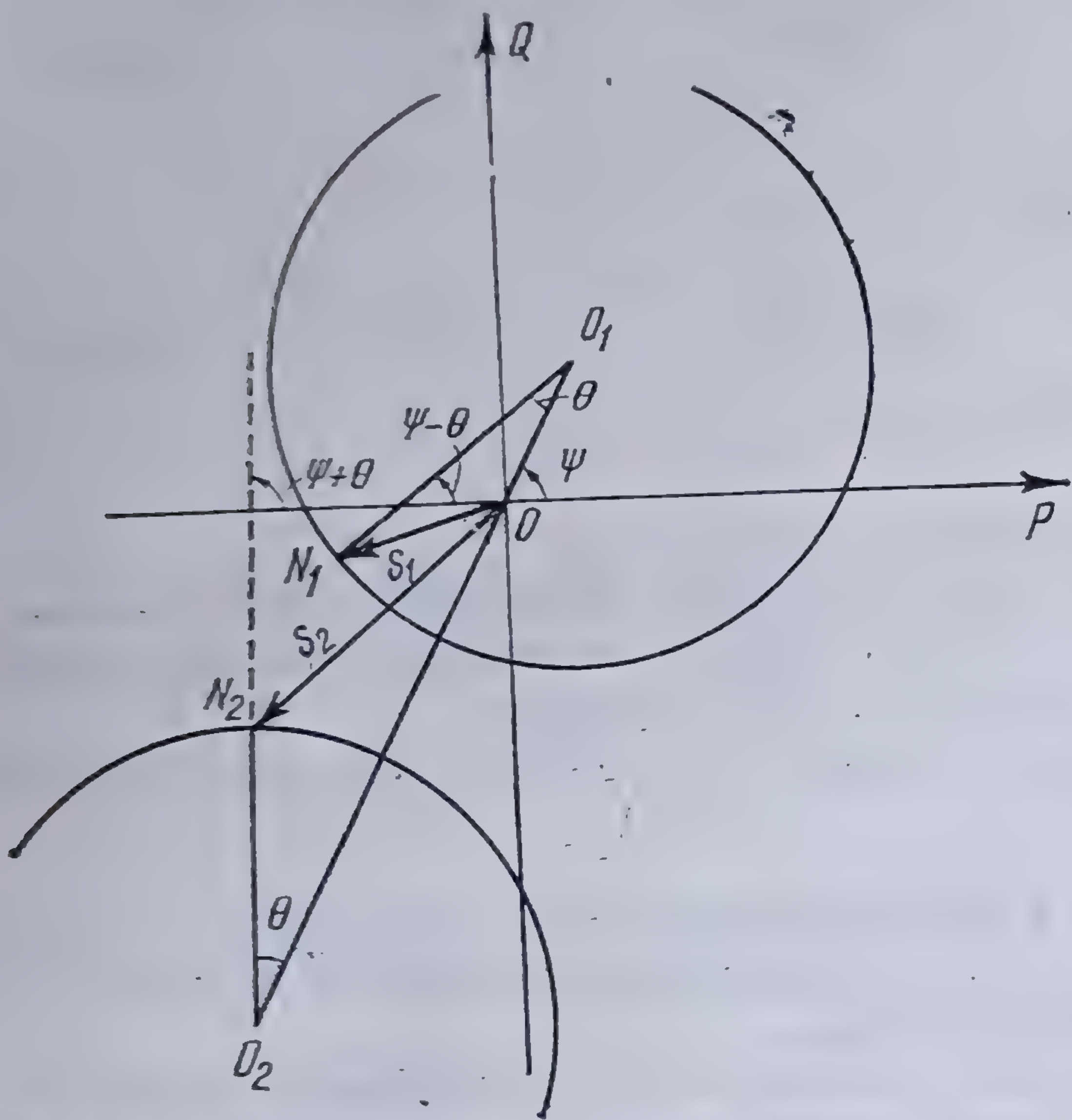


— puterea aparentă la borne

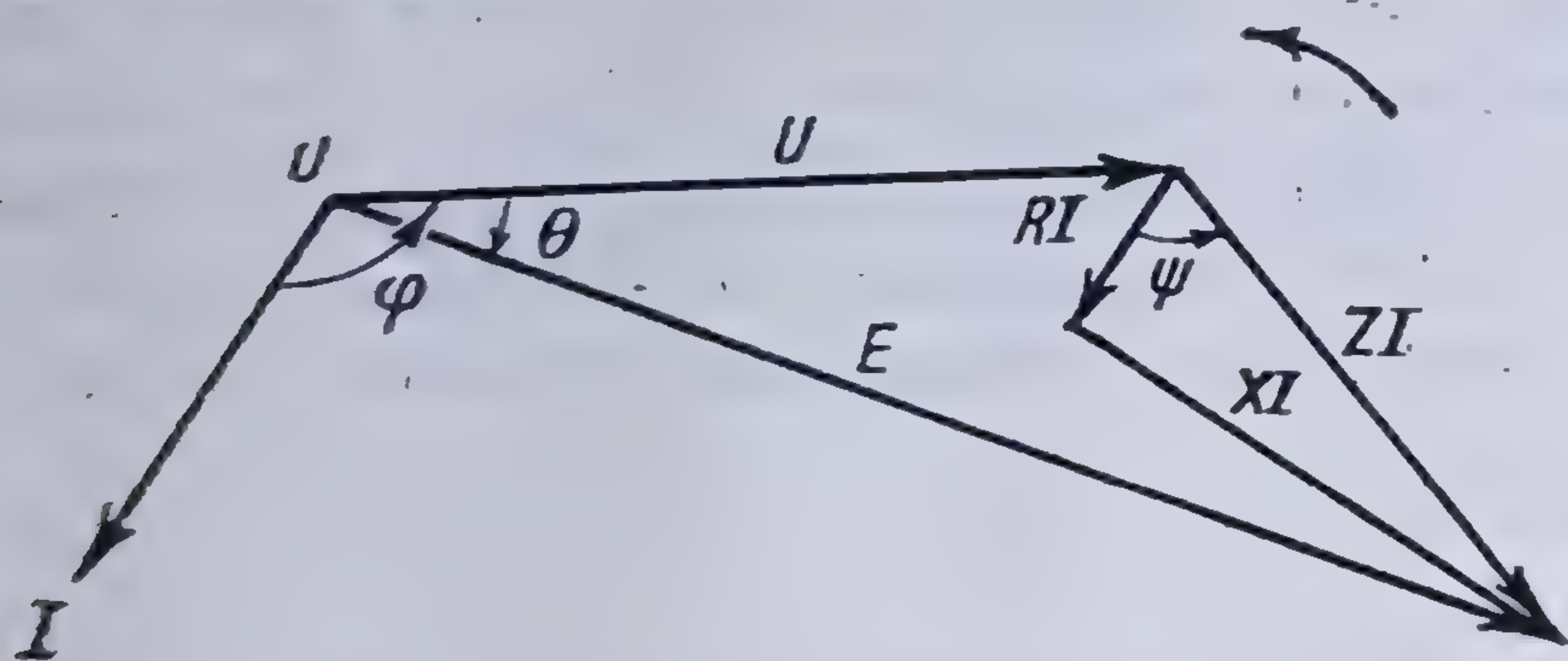
$$\underline{S}_2 = \underline{U} \cdot \underline{I}^*.$$

Dacă se ia ca origine de fază fazorul  $\underline{I}$ , atunci

$$\underline{E} = E|_{-\theta-\varphi}, \quad \underline{U} = U|_{-\varphi}, \quad \underline{Z} = Z|_{\psi}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{E} - \underline{U}}{\underline{Z}}$$



**Fig. 6.92. Diagrama puterilor motorului sincron subexcitat.**



**Fig. 6.93. Diagrama motorului sincron supraexcitat.**

și rezultă

$$\underline{I^*} = \frac{E \left| \theta + \phi - U \right| \phi}{Z \left| - \psi \right|} =$$

$$= \frac{E}{Z} \left| \frac{\theta + \varphi + \psi}{\theta + \psi} \right| - \frac{U}{Z} \left| \frac{\varphi + \psi}{\theta + \psi} \right|$$

de unde

$$S_1 = \frac{E^2}{Z} |\psi| - \frac{EU}{Z} |\psi - \theta|,$$

Şi

$$\underline{S}_2 = \frac{EU}{Z} \underline{|\psi + \theta|} - \frac{U^2}{Z} \underline{|\dot{\psi}|}.$$

Diagrama puterilor se construiește ușor și este cea din figura 6.92. Din această diagramă rezultă imediat că motorul sincron subexcitat *absoarbe* atât putere activă cât și putere reactivă. Se deduce, de asemenea, randamentul electric al motorului, care este raportul  $P_1/P_2$ .

b) *Motorul sincron supraexcitat.* În acest caz  $U < E$  și diagrama tensiunilor este dată de figura 6.93.

Cu aceleași notații, ca și în cazul precedent, se obține

$$\underline{E} = E|_{\varphi=0}, \quad \underline{U} = U|_{\varphi}, \quad \underline{Z} = Z|_{\psi}, \quad \underline{I} = \frac{\underline{E} - \underline{U}}{\underline{Z}}$$

și rezultă

$$I^* = \frac{E|- \varphi + 0 - U| - \varphi}{Z| - \psi} = \frac{E}{Z} |0 - \varphi + \psi| - \frac{U}{Z} |- \varphi + \psi|,$$



de unde

$$\underline{S}_1 = \frac{k^2}{Z} |\underline{\psi} - \frac{EU}{Z} | \underline{\psi} - \theta$$

și

$$\underline{S}_2 = \frac{EU}{Z} | \underline{\psi} + \theta - \frac{U^2}{Z} | \underline{\psi} .$$

Se observă că ecuațiile puterii au aceeași formă, ceea ce era, de altfel, de așteptat. Diagrama puterilor este dată în figura 6.94, construcția ei nereprezentând nici o dificultate.

Din această diagramă rezultă imediat că, motorul supraexcitat *produce* putere reactivă.

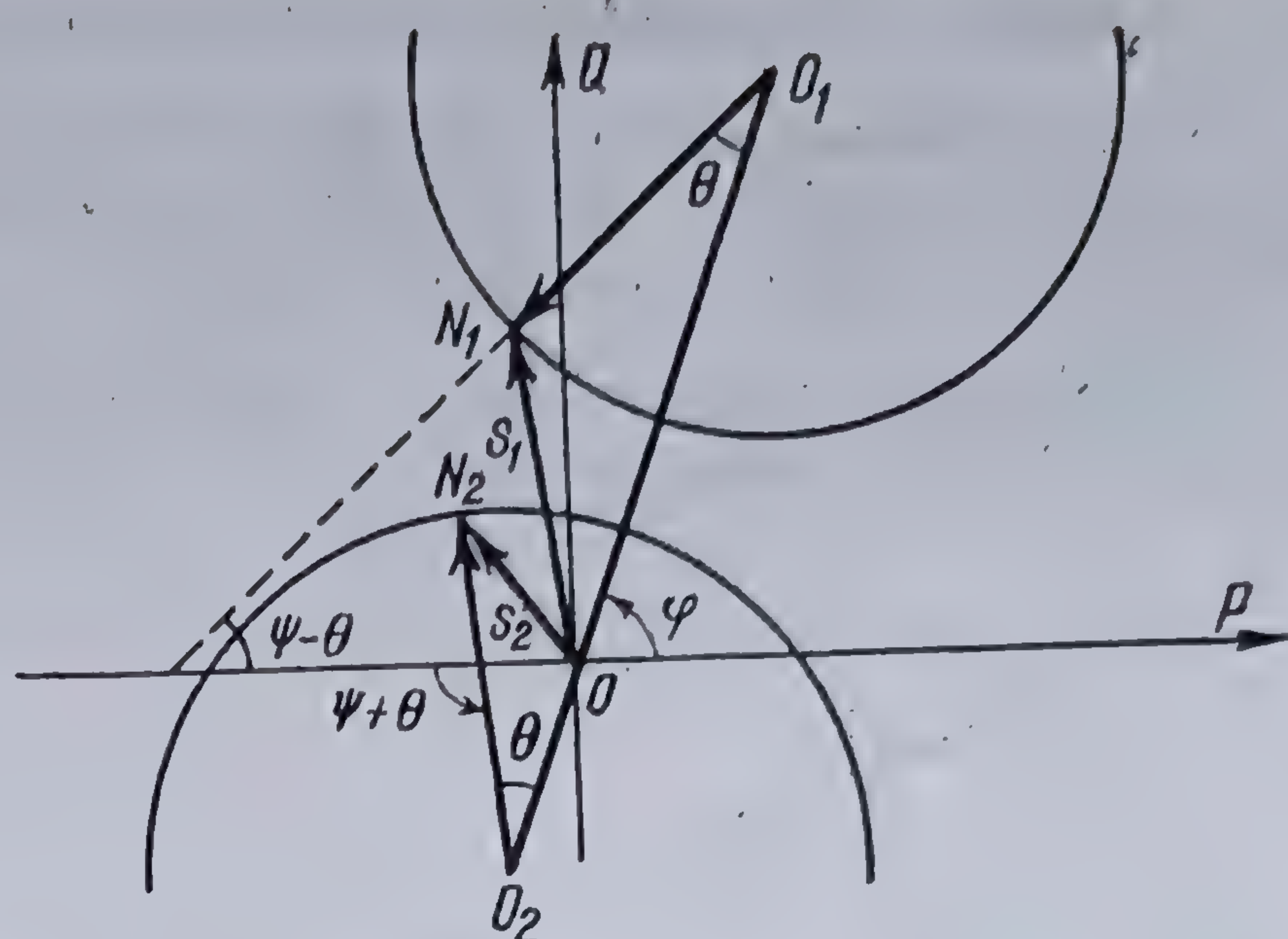


Fig. 6.94. Diagrama puterilor motorului sincron supraexcitat.

## 6.5. UTILIZAREA INVERSIUNII LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE

### 6.5.1. INVERSIUNEA GEOMETRICĂ \*

6.5.1.1. Definiții. *A* fiind un punct al unei figuri și *O* un punct în plan sau în spațiu, un punct *A'* situat pe dreapta *OA*, astfel încât  $OA \times OA' = \pm k^2$ , se numește inversul punctului *A* (fig. 6.95).



Fig. 6.95. Puncte inverse.

Punctul *O* se numește *origine*, *pol* sau *centru de inversiune*. Punctele *A* și *A'* se numesc *puncte inverse* sau *puncte reciproce*. Dreptele *OA* și *OA'* se numesc *raze vectoare reciproce*.

Două figuri se numesc *reciproce* sau *inverse* dacă sînt formate din puncte inverse, două cîte două, în raport cu un același punct luat ca centru de inversiune.

Transformarea unei figuri într-o alta cu ajutorul inversiunii se numește *transformare prin raze vectoare reciproce* sau *transformare prin inversiune*.

$\pm k^2$  se numește *putere de inversiune*.

Puterea negativă arată că punctele sînt de o parte și alta a originii; puterea este pozitivă cînd punctele sînt situate de aceeași parte cu originea.

\* Acest paragraf a fost redactat de Prof. AL. AL. ROȘU.



6.5.1.2. Proprietăți. Inversiunea se bucură de următoarele proprietăți.

a) Inversiunea este o transformare punctuală reciprocă. Punctul  $A'$  fiind inversul punctului  $A$ , și punctul  $A$  este la rândul său inversul punctului  $A'$  față de aceeași origine și cu aceeași putere.

b) Dacă punctul  $A$  se apropie de origine, inversul său se depărtează. Deci, dacă  $A$  tinde spre origine,  $A'$  tinde spre infinit și reciproc.

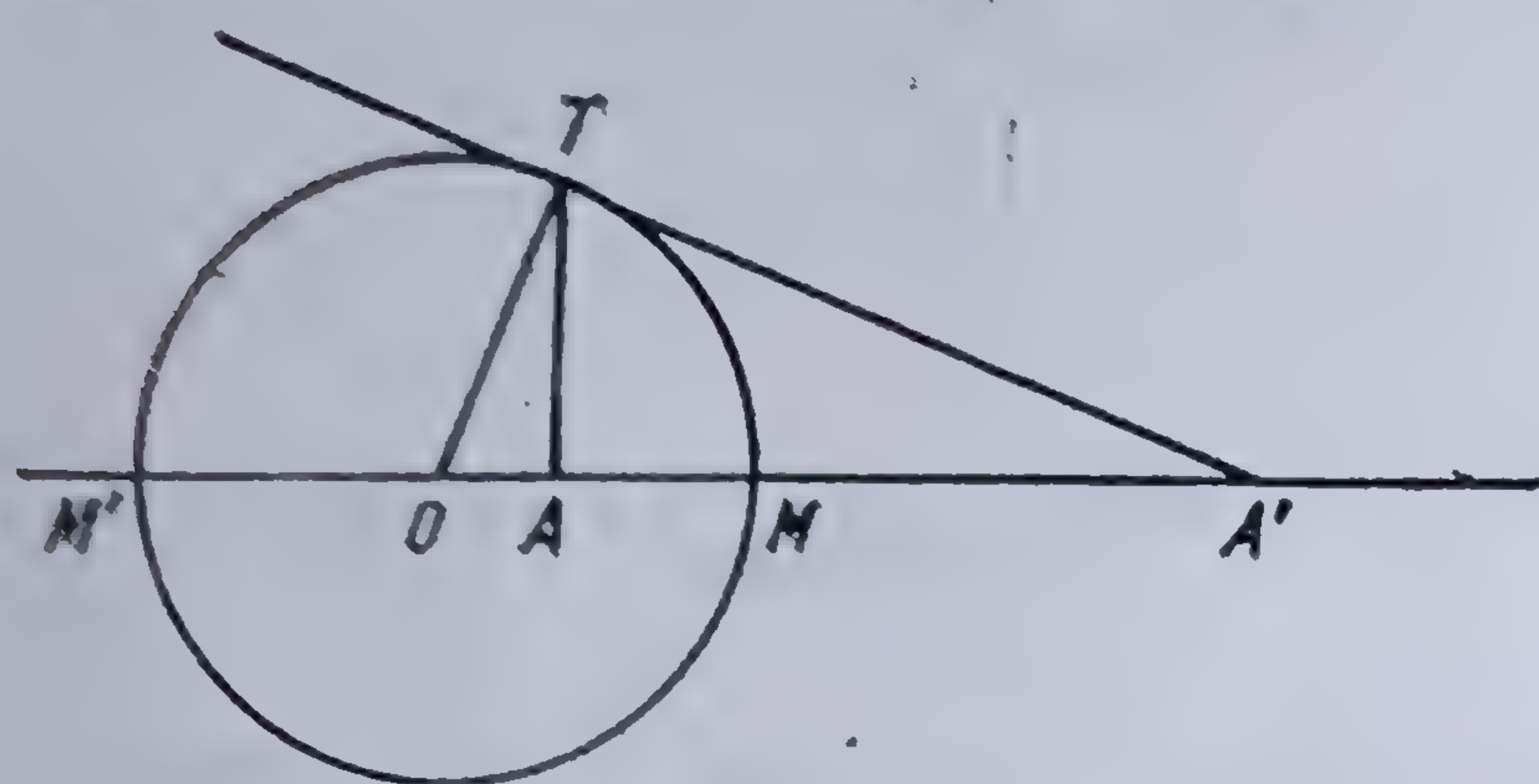


Fig. 6.96. Construirea inversului unui punct cu ajutorul cercului de inversiune.

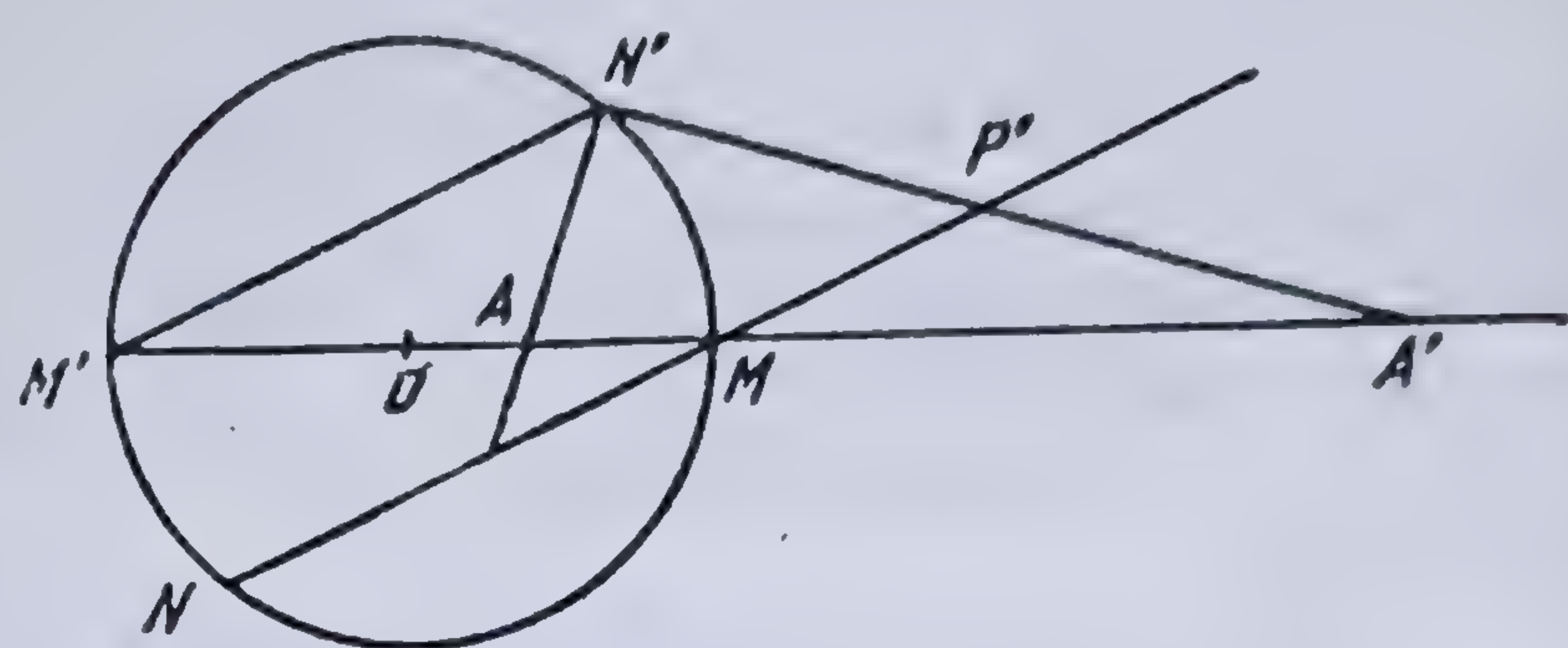


Fig. 6.97. Construirea conjugatului armonic al unui punct.

c) Inversiunea are o infinitate de puncte duble, adică de puncte care se transformă în ele înseși. Toate aceste puncte se găsesc situate pe un cerc cu centrul în origine și având raza egală cu  $k$ . Acest cerc poartă numele de *cerc de inversiune* sau *cerc fundamental*.

d) Cercul de inversiune poate servi la construirea inversului unui punct dat (fig. 6.96). Dacă  $O$  este originea, iar  $k^2$  puterea de inversiune, raza cercului de inversiune fiind  $k$ , ne propunem să găsim inversul unui punct dat  $A$ , adică un punct  $A'$ , astfel ca  $OA \cdot OA' = k^2$ . Pentru aceasta se ridică din  $A$  o perpendiculară pe segmentul  $OA$  care intersectează cercul fundamental în  $T$  și se duce tangenta în  $T$  la acest cerc. Această tangentă va intersecta dreapta  $OA$  în punctul  $A'$ , inversul punctului  $A$ . Într-adevăr, conform teoremei catetei, în triunghiul dreptunghic  $OTA'$  avem  $OA \cdot OA' = OT^2 = k^2$ .

Dacă punctul  $A'$  este exterior cercului de inversiune, inversul său este în interior și se obține ducând din  $A'$  tangenta la cerc. Punctul  $A$  unde coarda contactelor intersectează dreapta  $OA'$ , este inversul punctului  $A'$  dat.

Punctele  $M, M'$  unde dreapta  $AA'$  intersectează cercul fundamental, formează împreună cu punctele  $A, A'$  o diviziune armonică. În consecință, găsirea inversului unui punct  $A$  revine în a căuta conjugatul armonic al acestui punct în raport cu punctele unde raza vectoare  $OA$  intersectează cercul fundamental.

Construcția se poate face ducându-se prin punctele  $M, M'$  două coarde arbitrare paralele care intersectează a doua oară cercul fundamental în punctele  $N, N'$  (fig. 6.97). Dreapta  $AN'$  intersectează coarda  $MN$  în punctul  $P$ . Se notează cu  $P'$  simetricul punctului  $P$  în raport cu  $M$ , situat pe coarda  $MN$ . Dreapta  $N'P'$  intersectează dreapta  $MM'$  în punctul  $A'$ , care este conjugatul armonic al punctului  $A$  în raport cu  $M$  și  $M'$ .

Dacă punctul  $A$  este exterior cercului, construcția este aceeași.



O altă construcție a inversului unui punct dat se poate face scriind relația  $OA \cdot OA' = k^2$  sub forma  $\frac{OA}{k} = \frac{k}{OA'}$  și construind al patrulea proporțional cu 3 segmente date.

Se ia pe segmentul  $OA$  punctul  $B$  astfel, încît  $OB = k$ , iar pe o dreaptă oarecare, trecînd prin  $O$ , un punct  $C$  astfel ca  $OC = k$  (fig. 6.98). Paralela dusă din  $B$  la  $AC$  intersectează dreapta  $OC$  în  $A''$ . Luînd pe segmentul  $OA$  de la  $O$  către  $A$  ( $OA' = OA''$ ) se va obține punctul  $A'$  inversul punctului  $A$ .

În cazul unei puteri negative, punctul  $A'$  se va construi pe segmentul  $OA$  în sens opus lui  $A$ .

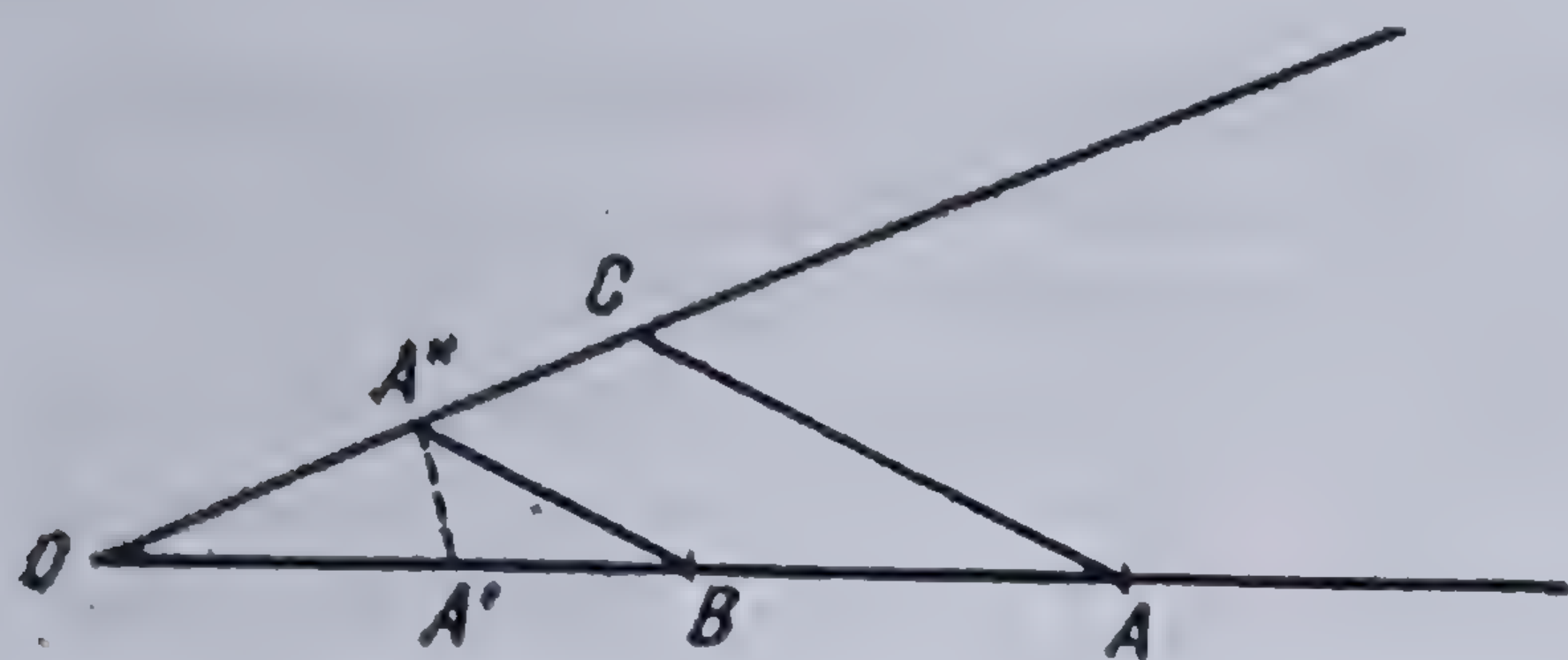


Fig. 6.98. Construirea celei de a patra proporționale.

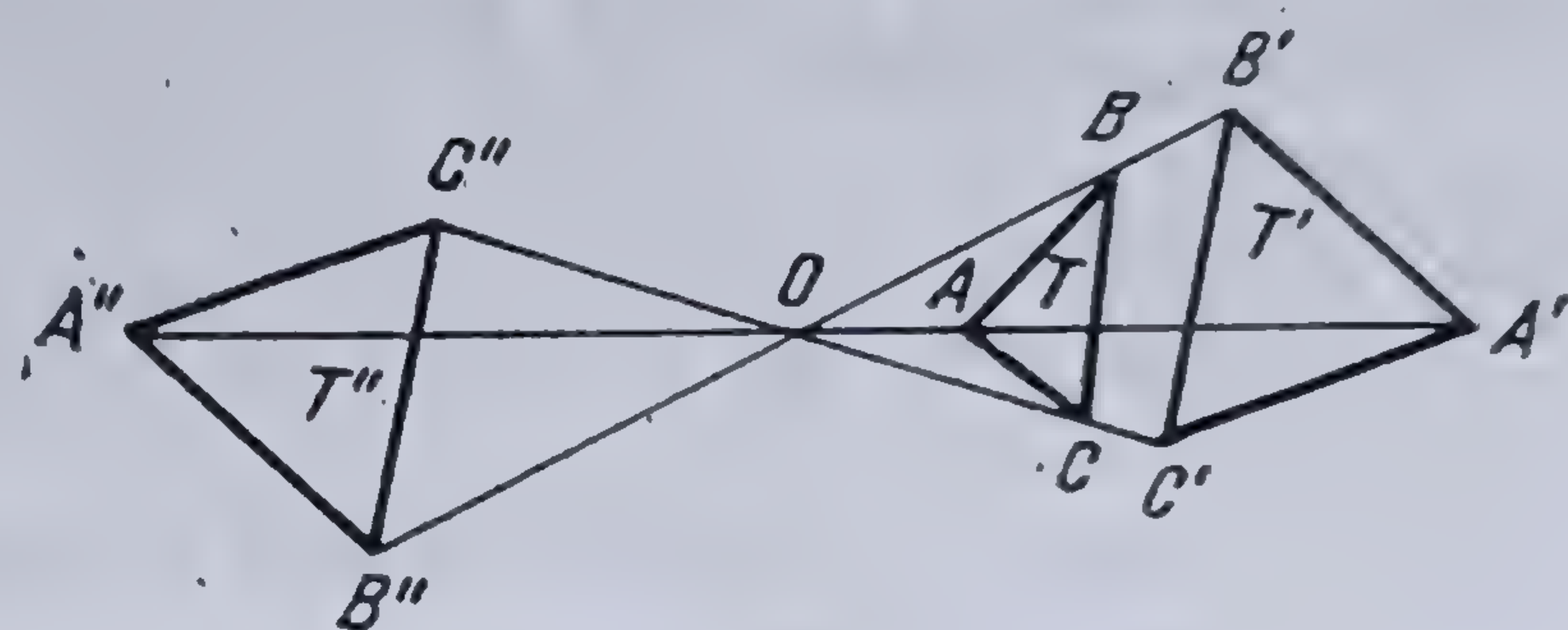


Fig. 6.99. Figuri inverse.

e) Un cerc care trece prin două puncte inverse intersectează ortogonal cercul fundamental.

Reciproc, dacă două puncte  $M$ ,  $M'$  au proprietatea că oricare cerc trecînd prin ele intersectează sub un unghi drept un cerc dat, atunci ele sînt inverse în raport cu acesta din urmă.

f) Dacă se caută inversele unui punct  $M$  față de o origine  $O$  cu puteri de inversiune  $k_1^2$  și  $k_2^2$ , se obțin punctele  $M_1$  și  $M_2$ . Aceste puncte nu sînt inverse față de originea  $O$ , ci sînt omotetice în raportul  $k_1^2/k_2^2$ .

Într-adevăr, din relațiile

$$OM \cdot OM_1 = k_1^2$$

și

$$OM \cdot OM_2 = k_2^2,$$

se obține prin împărțire

$$\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{k_1^2}{k_2^2},$$

ceea ce arată că punctul  $M_2$  nu este inversul punctului  $M_1$ , ci omoteticul său.

Se mai observă că dacă  $k_1^2 = -k_2^2$ , punctul  $M_1$  este simetricul punctului  $M_2$  față de originea  $O_1$ . Deci, dacă o figură  $T$  se transformă printr-o inversiune de putere  $k^2$ , se obține o figură  $T'$ , iar dacă se transformă printr-o inversiune de putere  $-k^2$ , se obține o figură  $T''$ , simetrică cu  $T'$  față de originea  $O$ . Figurile  $T'$  și  $T''$  fiind simetrice, au aceleași proprietăți; deci, în locul unei inversiuni cu putere negativă, se poate face o inversiune de aceeași origine și de aceeași putere, dar pozitivă (fig. 6.99).



g) Două perechi de puncte inverse sînt conciclice (fig. 6.100). Dacă  $M'_1$  și  $M'_2$  sînt inversele punctelor  $M_1$  și  $M_2$  față de originea  $O$ , înseamnă că

$$OM_1 \cdot OM'_1 = OM_2 \cdot OM'_2$$

sau

$$\frac{OM'_1}{OM'_2} = \frac{OM_2}{OM_1},$$

de unde rezultă că triunghiurile  $OM_1M_2$  și  $OM'_1M'_2$  sînt asemenea, avînd un unghi comun și laturile proporționale.

Triunghiurile  $OM_1M_2$  și  $OM'_1M'_2$  fiind asemenea, rezultă egalitatea unghiurilor  $OM_1M_2$  și  $OM'_1M'_2$  care se opun la laturi proporționale. Deci, patrulaterul  $M_1M_2M'_2M'_1$  este inscriptibil avînd unghiurile opuse suplimentare. Dreptele  $M_1M_2$  și  $M'_1M'_2$  se numesc *antiparalele*. Reciproc, dacă prin două vîrfuri ale unui triunghi se duce un cerc, punctele unde acesta intersectează din nou laturile triunghiului sînt puncte inverse ale celor două vîrfuri în raport cu vîrfurile al treilea.

h) Triunghiurile  $OM_1M_2$  și  $OM'_1M'_2$  fiind asemenea (fig. 6.100), rezultă relațiile metrice

$$M'_1M'_2 = M_1M_2 \frac{k^2}{OM_1 \cdot OM_2},$$

deoarece

$$\frac{M'_1M'_2}{M_1M_2} = \frac{OM'_1}{OM_2} = \frac{OM_1 \cdot OM'_1}{OM_1 \cdot OM_2} = \frac{k^2}{OM_1 \cdot OM_2}$$

și

$$M_1M_2 = M'_1M'_2 \frac{k^2}{OM'_1 \cdot OM'_2},$$

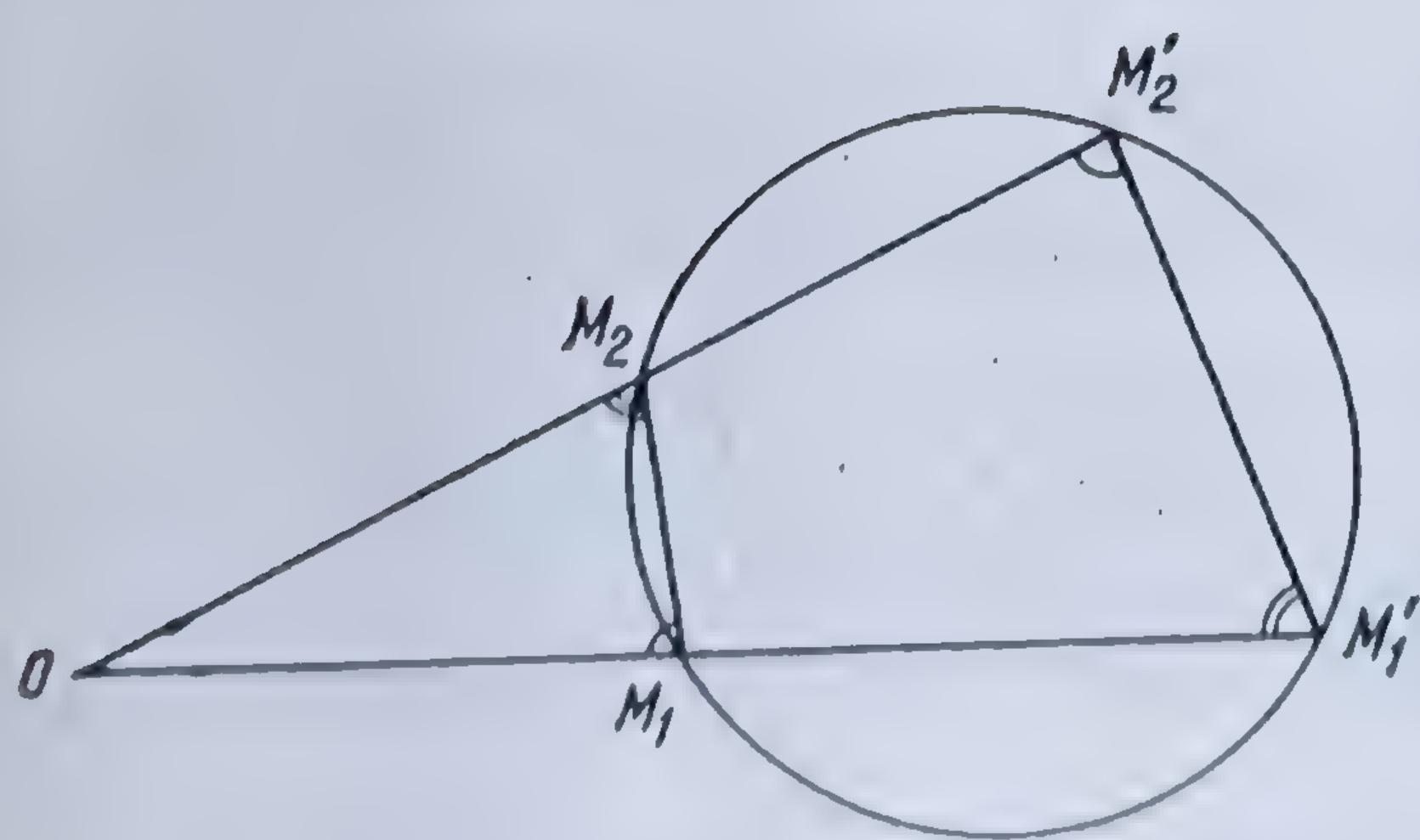


Fig. 6.100. Puncte inverse conciclice.

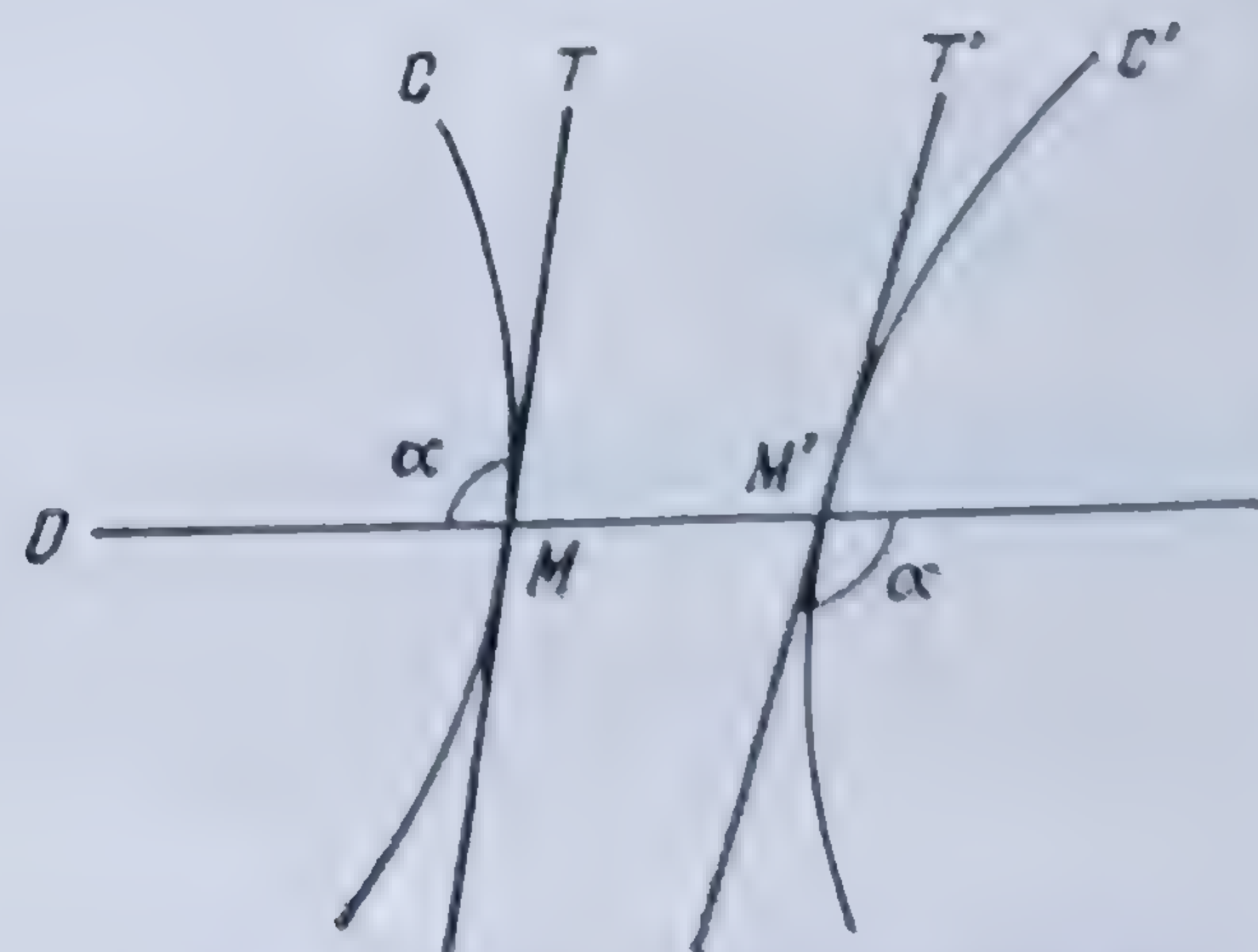


Fig. 6.101. Conservarea unghiurilor.

care servesc la determinarea mărimilor pe figura inversă în funcție de mărimile inițiale și reciproc.

i) Inversiunea este o *transformare conformă*: ea conservă unghiurile. Dacă două curbe trecînd printr-un punct fac între ele un unghi  $\alpha$ , același unghi  $\alpha$  va fi făcut și de inversele curbelor considerate (fig. 6.101).



Proprietatea rezultă imediat considerînd unghiul făcut de raza vectoare  $OM$  cu tangenta în  $M$  la curba  $C$  ca fiind egal cu unghiul făcut de raza vectoare  $OM'$  cu tangenta în  $M'$  la curba  $C'$ , inversa curbei  $C$  (punctul  $M'$  fiind inversul punctului  $M$ ). Această egalitate se deduce prin trecerea la limită a secantei  $M_1M_2$  din figura 6.100, considerînd punctele  $M_1$  și  $M_2$  situate pe o curbă  $C$ .

Dacă prin punctul  $M$  vor trece două curbe, unghiul lor va fi diferența unghiurilor formate de tangentele în  $M$  la cele două curbe cu raza vectoare  $OM$ . Această diferență rămîne aceeași cînd curbele  $C_1$  și  $C_2$  se transformă în  $C'_1$  și  $C'_2$ . Dacă două curbe sînt tangente, atunci și inversele lor vor fi tangente.

**6.5.1.3. Transformările de bază.** Pentru ilustrarea propozițiilor enunțate mai înainte, să considerăm teoremele de bază în inversiune.

a) O dreaptă care trece prin origine se transformă în ea însăși. Această transformare este evidentă din chiar definiția inversiunii, care cere ca inversul unui punct  $M$  să fie situat pe raza vectoare  $OM$ .

b) O dreaptă oarecare se transformă într-un cerc trecînd prin origine.

Fie  $D$  dreapta dată și  $M$  un punct curent al ei (fig. 6.102); fie  $A$  piciorul perpendicularei duse din origine pe dreapta  $D$ ; notînd cu  $A'$ ,  $M'$  inversele punctelor  $A$  și  $M$ , patrulaterul  $AA'M'M$  trebuind să fie inscriptibil\*, unghiul  $MM'A'$  este drept. Punctele  $O$  și  $A'$  fiind fixe, cînd  $M$  descrie dreapta  $D$ , punctul  $M'$  — inversul lui  $M$  — va descrie cercul de diametru  $OA'$ . Din demonstrația de mai sus se desprinde ușor modul de a construi inversa unei drepte.

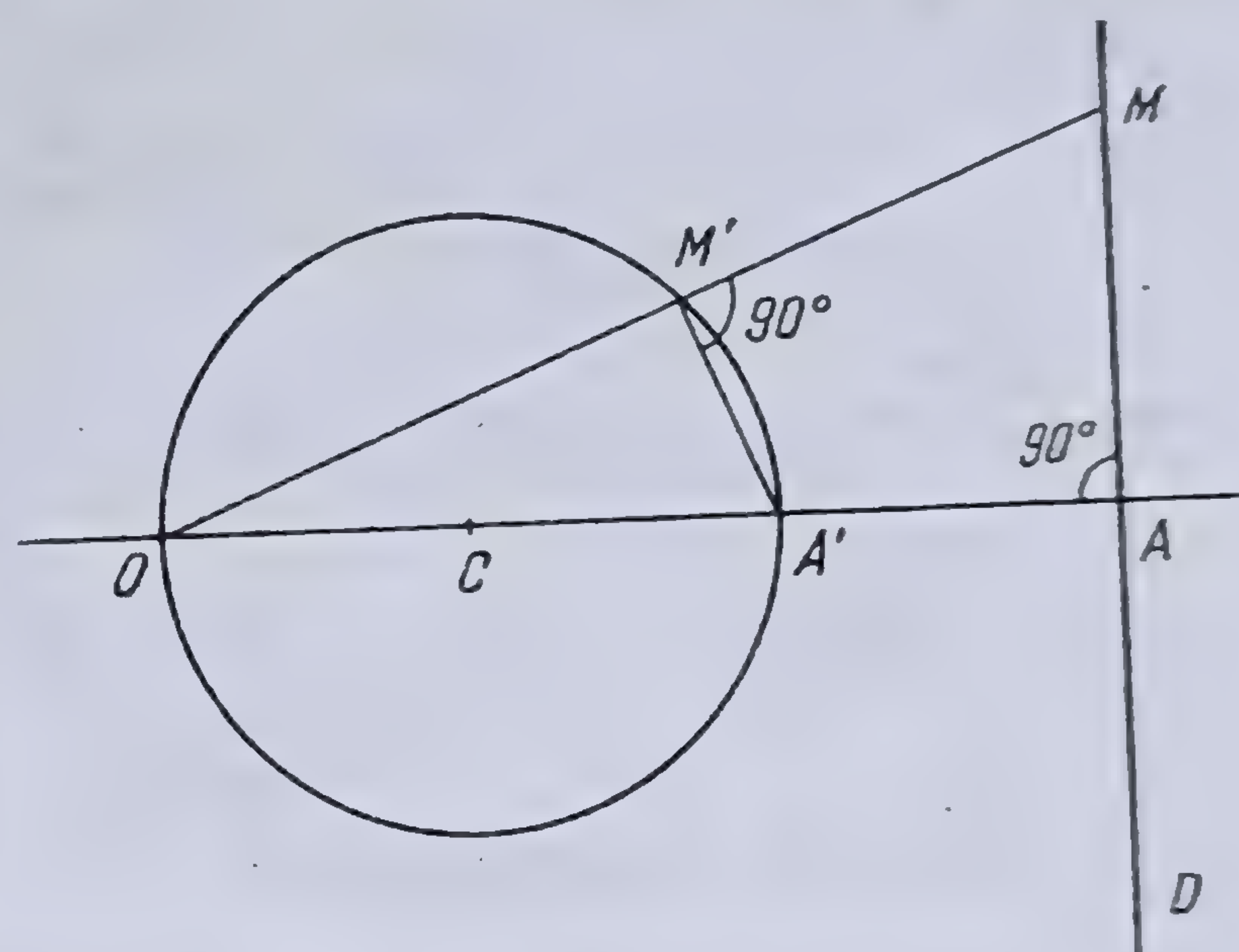


Fig. 6.102. Inversul unei drepte.

c) Un cerc trecînd prin origine se transformă într-o dreaptă. Teorema aceasta este reciproca teoremei precedente. Într-adevăr, dacă punctele de pe cerc sînt inversele punctelor dreptei  $D$ , atunci și punctele de pe dreaptă vor fi inversele punctelor de pe cerc \*\*; construcția dreptei  $D$ , inversa cercului, trecînd prin origine, se face imediat: se duce diametrul trecînd prin origine, care va intersecta a doua oară cercul în punctul  $A'$ . Se construiește inversul punctului  $A'$ , obținîndu-se punctul  $A$ . Perpendiculara în  $A$  pe diametrul  $OA'$  este inversa cercului.

Poziția dreptei  $D$ , inversa cercului dat, depinde de puterea de inversiune:

$$\text{— cînd } \begin{cases} k^2 > 4R^2, & \text{dreapta este exterioară cercului;} \\ k^2 < 4R^2, & \text{dreapta intersectează cercul în două puncte;} \\ k^2 = 4R^2, & \text{dreapta este tangentă la cerc;} \\ k^2 = 2R^2, & \text{dreapta trece prin centrul cercului.} \end{cases}$$

Aceste observații apar evidente dacă se scrie  $k^2 = OA \cdot OA' = 2Rd$ , unde  $d$  reprezintă distanța de la origine la dreapta  $D$ .

\* Vezi 6.5.1.2, punctul  $g$ .

\*\* Vezi 6.5.1.2, punctul  $a$ .



d) Un cerc care nu trece prin origine se transformă tot într-un cerc (fig. 6.103).

Fie cercul  $C$  de rază  $R$  și  $M$  un punct curent al său care devine prin inversiune  $M'$ .

Raza vectoare  $OM$  intersectează a doua oară cercul  $C$ , în punctul  $N$ . Notînd cu  $p^2$  puterea originii față de cercul  $C$ ,  $p^2 = OM \cdot ON$ , și  $k^2$  puterea care transformă prin inversiune pe  $M$  în  $M'$ , adică  $k^2 = OM \cdot OM'$ , prin împărțire se obține

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{k^2}{p^2}, \quad (6.162)$$

relație care arată că punctul  $M'$  este omoteticul punctului  $N$ . Deci, cînd punctul  $M$  și în același timp punctul  $N$ , descrie cercul  $C$ , omoteticul punctului  $N$ ,

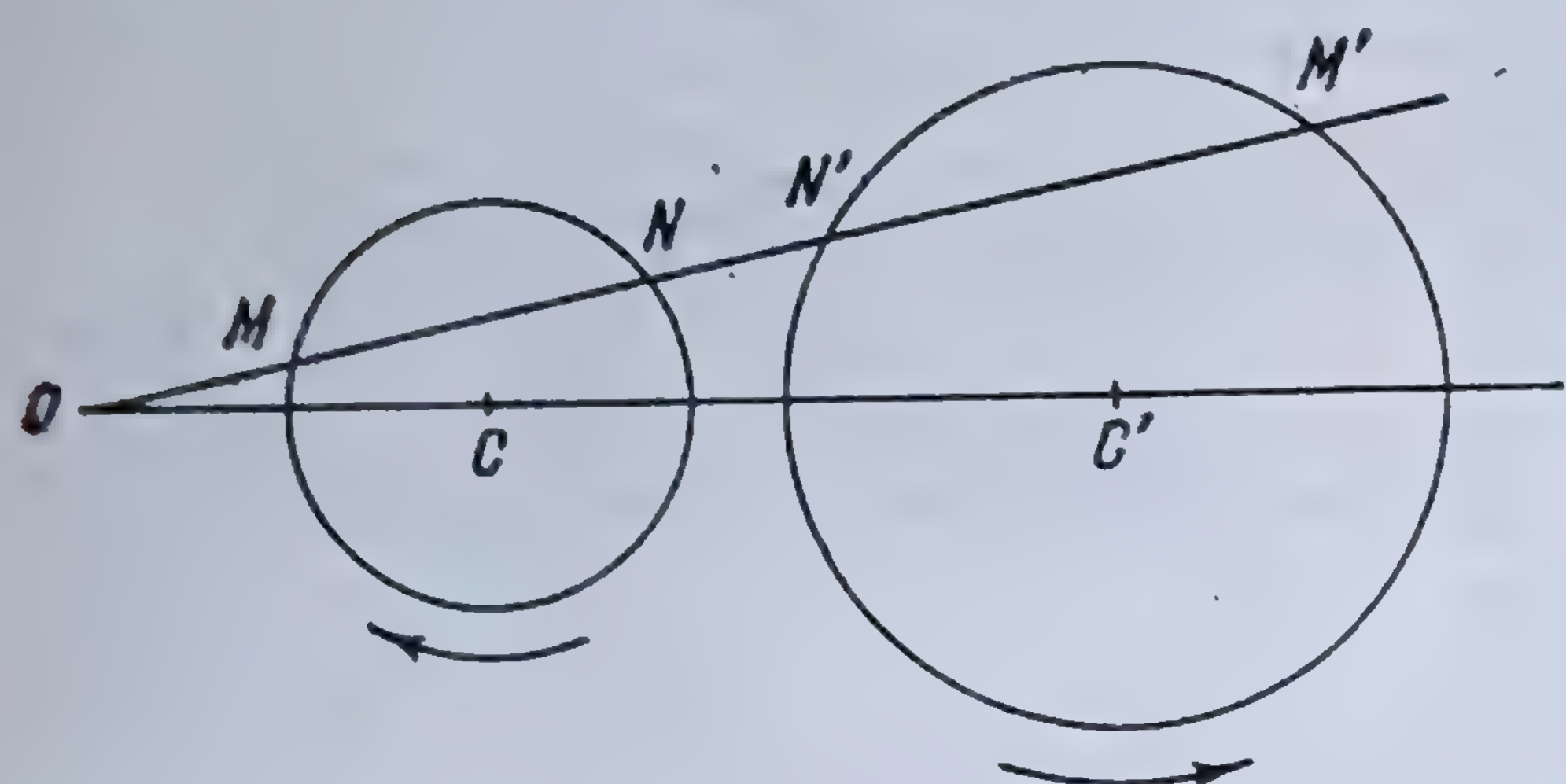


Fig. 6.103. Inversul unui cerc.

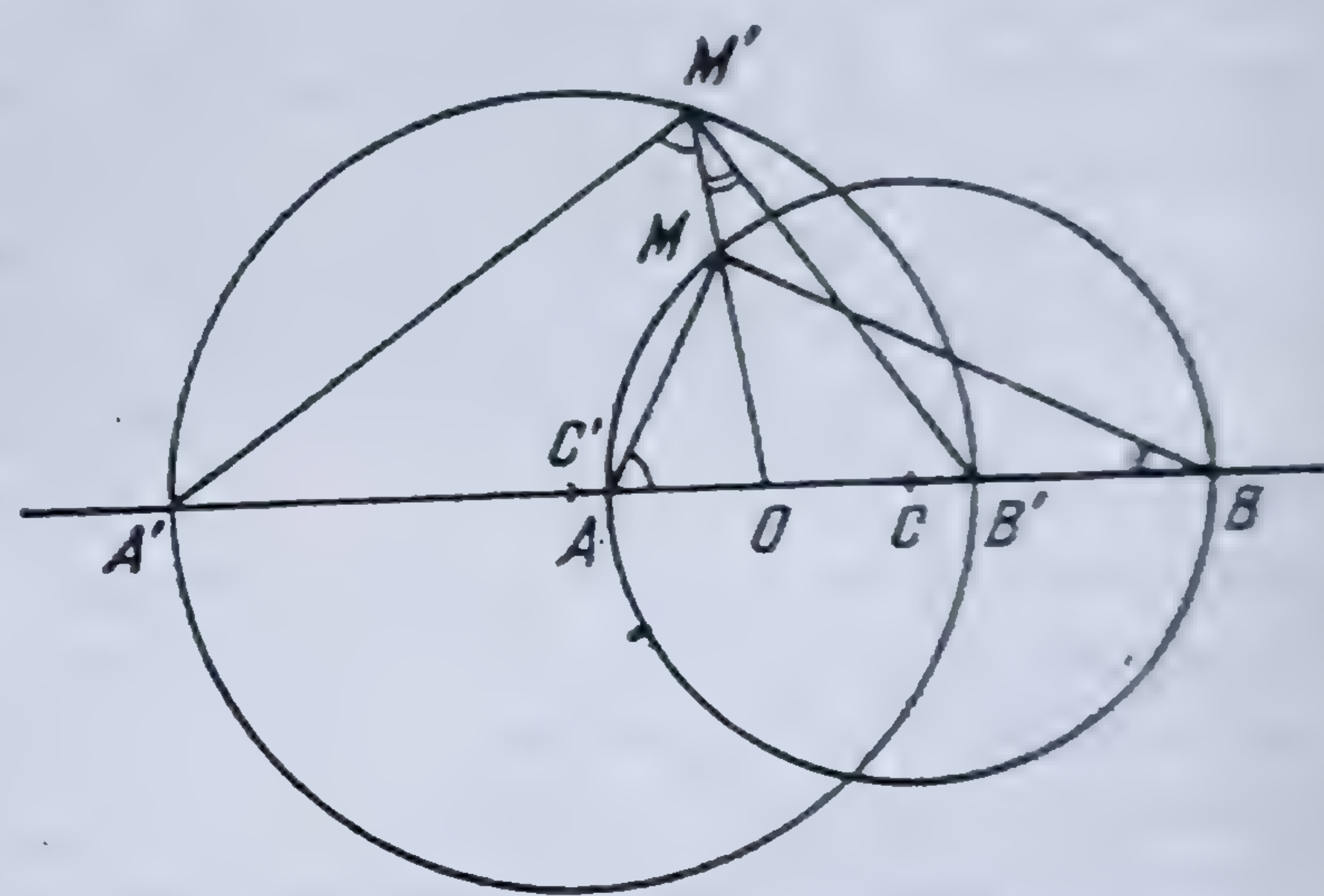


Fig. 6.104. Construirea inversului unui cerc.

adică punctul  $M'$  (inversul punctului  $M$ ), va descrie omoteticul cercului  $C$ , adică tot un cerc  $C'$ .

Determinarea centrului și a razei cercului  $C'$ , deci construirea arcului invers, se face prin omotetie. Astfel, centrul său  $C'$  este omotetic cu centrul  $C$  și în același raport de omotetie ca și punctele  $N$  și  $M'$ ; de asemenea razele, adică

$$OC' = OC \times \frac{k^2}{p^2}; \quad R' = R \times \frac{k^2}{p^2}, \quad (6.163)$$

Se vede că centrul cercului  $C'$  este pe raza vectoare  $OC$ .

În concluzie, dacă se transformă, prin inversiunea de putere  $k^2$ , un cerc care nu trece prin origine, se obține un cerc omotetic cu cercul dat, centrul de omotetie fiind originea, iar raportul de omotetie fiind  $\frac{k^2}{p^2}$ , unde  $p^2$  este puterea originii față de cercul dat.

Inversul unui cerc  $C$  față de un pol  $O$  se poate construi ușor observînd următoarele:

Dreapta  $OC$  intersectează cercul  $C$  în două puncte fixe  $A$  și  $B$  (fig. 6.104). Dacă  $A'$ ,  $B'$  sînt inversele punctelor  $A$  și  $B$  iar  $M'$  inversul unui punct oarecare  $M$  situat pe cercul  $C$ , atunci patrulaterole  $AMM'A'$  și  $BMM'B'$  sînt inscrip-tibile, deci

$$\sphericalangle MAO = \sphericalangle A'M'M \text{ și } \sphericalangle MBO = \sphericalangle MM'B';$$



cum

$$\sphericalangle MAO + \sphericalangle MBO = 90^\circ$$

înseamnă că\*

$$\sphericalangle A'M'M + \sphericalangle B'M'M = 90^\circ.$$

Rezultă că unghiul  $A'M'B'$  este drept și cum punctele  $A'$ ,  $B'$  rămân fixe, când  $M$  descrie cercul  $C$ ,  $M'$  inversul lui  $M$  va descrie un cerc de diametru  $A'B'$ , cerc ușor de construit, indiferent unde se află polul  $O$  în raport cu cercul  $C$ .

**OBSERVAȚII.** 1. Puterea originii față de cercul dat,

$$p^2 = OM \cdot ON$$

este puterea de inversiune care transformă cercul în el însuși.

Considerînd originea exterioară cercului  $C$ ,

$$p^2 = OT^2 = d^2 - R^2,$$

unde  $d$  este distanța de la pol la centrul cercului  $C$ .

2. În cazul când originea este interioară cercului  $C$ , avem

$$p^2 = R^2 - d^2.$$

3. Dacă originea este în centrul cercului

$$p^2 = R^2.$$

4. Poziția inversului unui cerc se poate determina ținînd seama de poziția originii și de valorile lui  $k^2$ . De exemplu, dacă originea este în centrul cercului  $C$ , atunci  $OC = 0$ , deci și  $OC' = 0$  și se poate spune că inversul unui cerc, luînd drept origine centrul acestuia este un cerc concentric cu cercul considerat.

Din relația

$$R' = R = \frac{k^2}{p^2}$$

se deduce

$$R' = \frac{k^2}{R}$$

relație care va determina raza cercului în funcție de  $k^2$ . Dacă  $R^2 < k^2$ , inversul cercului  $C$  va fi exterior acestuia; dacă  $R^2 > k^2$ , inversul lui  $C$  va fi în interiorul acestuia.

5. Trebuie menționat că centrele cercurilor inverse nu sînt puncte inverse ci puncte omotetice. De asemenea, coarda  $M'_1M'_2$ , unind inversele punctelor

---

\* Demonstrația se poate adapta oricum ar apărea pe figură punctele  $A'$ ,  $B'$ ,  $M'$ .



$M_1, M_2$ , nu este inversa coardei  $M_1 M_2$ , ci antiparalelă cu ea (deoarece inversa ar fi trebuit să fie un cerc).

6. Cînd originea este exterioră cercului, dacă un punct se mișcă pe acest cerc în sens direct, inversul său se mișcă în sens retrograd; cînd originea este interioară, punctul și inversul său se mișcă în același sens.

e) O familie de drepte paralele oarecare se transformă într-o familie de cercuri tangente în polul inversiunii și ale căror centre se găsesc pe perpendiculara din pol pe direcția dreptelor paralele (fig. 6. 105).

Dreapta tangentă cercului fundamental se transformă într-un cerc tangent cercului fundamental în punctul comun cu dreapta.

O rețea de drepte perpendiculare oarecare se transformă într-o rețea de cercuri ortogonale trecînd prin pol, tangente între ele în pol pe familii (fig. 6.106).

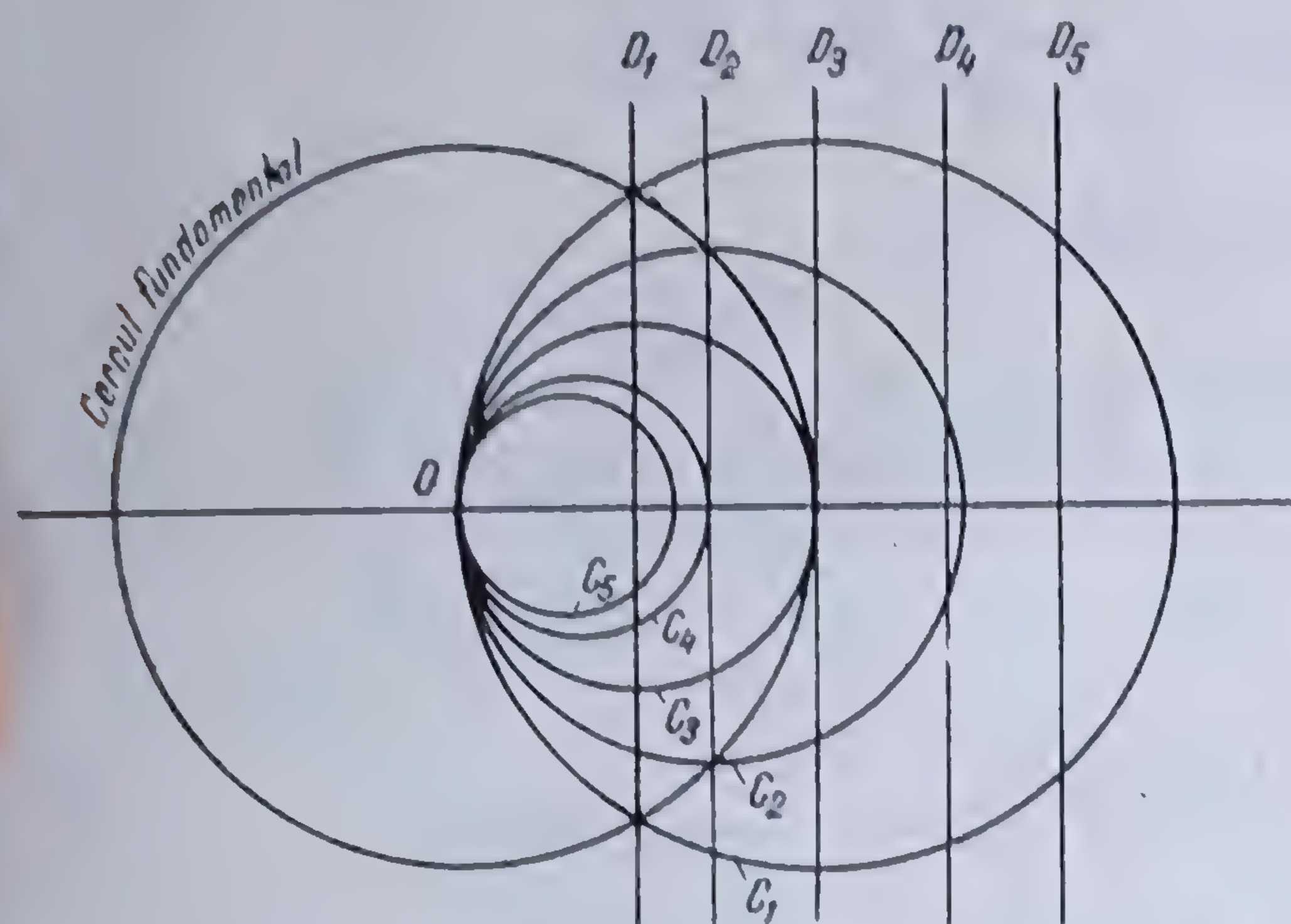


Fig. 6.105. Inversul unei familii de drepte paralele.

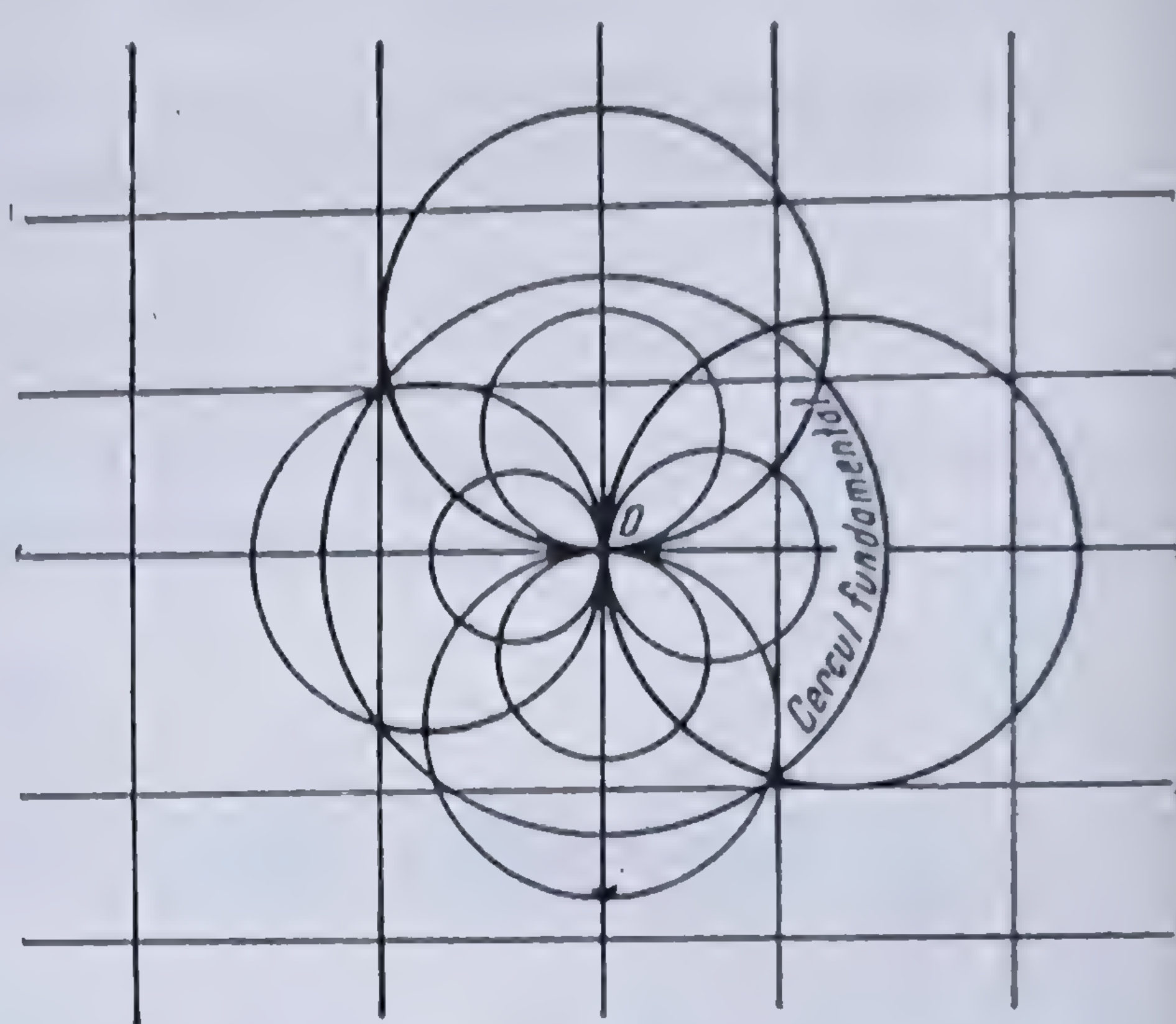


Fig. 6.106. Inversul unei familii de drepte ortogonale.

6.5.1.4. Studiul analitic al inversiunii geometrice. 1. Raportînd punctul  $M(x, y)$  la un sistem de axe perpendiculare duse prin pol, găsim corespondența între coordonatele lui  $M$  și ale punctului  $M'(x'y')$ , inversul lui  $M$ .

Din

$$\frac{OM}{x} = \frac{OM'}{x'}; \quad \frac{OM \cdot OM'}{xx'} = \frac{k^2}{xx'} = \left(\frac{OM}{x}\right)^2 = \left(\frac{OM'}{x'}\right)^2$$

și

$$\frac{OM}{y} = \frac{OM'}{y'},$$

rezultă

$$x' = k^2 \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{și} \quad y' = k^2 \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (6.164)$$

sau

$$x = k^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad \text{și} \quad y = k^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$



Relațiile de mai sus arată reciprocitatea transformării prin inversiune și conduc la găsirea curbelor inverse, servind în același timp la regăsirea proprietăților inversiunii.

## 2. Cercul $C$

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

se transformă în cercul  $C'$ .

$$D(x^2 + y^2) + BK^2x + CK^2y + AK^4 = 0$$

Dacă  $D = 0$  cercul  $C$  trece prin origine și atunci  $C'$  se reduce la o dreaptă.

Dacă  $A = 0$ , ecuația  $C$  se reduce la o dreaptă și atunci  $C'$  reprezintă un cerc trecând prin pol.

Determinarea centrelor și razelor celor două cercuri se face cu ușurință și se regăsește analitic relația \*

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{R'}{R} = \frac{K^2}{p^2}.$$

3. Tratarea analitică permite transformarea prin inversiune și a altor curbe.

4. În general, inversa unei conice în raport cu unul din focare este melcul lui PASCAL. Inversa parabolei este cardioida.

5. Dacă polul de inversiune este în  $P(a, b)$ , formulele de transformare devin

$$X = \frac{k^2(x-a)}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{și} \quad Y = \frac{k^2(y-b)}{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

obținute din relațiile (6.164) prin translația axelor de coordonate în punctul  $P(a, b)$ .

**6.5.1.5. Aplicații.** Aplicând proprietățile și transformările de bază indicate mai înainte, se deduc unele propoziții care pot fi aplicate la construcțiile grafice necesare rezolvării problemelor de inversiune, din studiul circuitelor electrice.

1. Două cercuri oarecare pot fi considerate unul inversul celuilalt. Rămîne de văzut, față de ce origine și de ce putere. Dacă se va lua drept origine  $S$  centrul de omotetie al celor două cercuri, iar ca putere de inversiune  $\mu^2$ , media geometrică între puterile lui  $S$  față de cele două cercuri considerate, adică  $\mu^4 = p_1^2 \cdot p_2^2$ , sigur că unul din cercuri va fi inversul celuilalt. Într-adevăr, notînd cu  $C_1$ ,  $C_2$  și  $R_1$ ,  $R_2$  centrele și razele celor două cercuri, atunci

$$\frac{SC_1^2 - R_1^2}{SC_2^2 - R_2^2} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \frac{p_1^4}{p_1^2 p_2^2}.$$

\* Vezi relațiile (6.162) și (6.163).



Cum însă

$$\frac{\overline{SC_1^2}}{\overline{SC_2^2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{p_1^2}{\mu^2},$$

rezultă că

$$\mu^4 = p_1^2 p_2^2$$

și deci

$$\mu^2 = \sqrt{p_1^2 p_2^2}.$$

În consecință, două cercuri pot fi considerate unul ca inversul celuilalt în două moduri diferite, deoarece ele pot fi considerate ca omotetice în două moduri diferite, alegîndu-se ca pol centrele lor de asemănare.

2. Există o infinitate de inversiuni care transformă un cerc  $C$  în el însuși.

În afara inversiunii avînd ca pol centrul cercului  $C$  iar ca putere  $R^2$ , care suprapune cercul fundamental cercului dat, orice punct al planului nesi-tuat pe cercul  $C$  este polul unei inversiuni a cărei putere este egală cu puterea acelui punct față de cerc.

3. Raportul distanțelor de la un punct oarecare situat pe cercul funda-mental la două puncte inverse este constant.

Într-adevăr, din relația  $OA \cdot OA' = OM^2$ , unde  $M$  este situat pe cercu-fundamental iar  $A, A'$  cele două puncte inverse, rezultă asemănarea triunghiul-rilor  $OMA$  și  $OMA'$ , de unde se deduce

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{OA}{OM},$$

astfel, că raportul  $\frac{MA}{MA'}$  nu depinde de poziția lui  $M$  pe cercul fundamental.

4. Două cercuri date pot fi transformate totdeauna printr-o aceeași in-versiune, fie în două drepte, fie în două cercuri concentrice, dacă cercurile nu se intersectează.

5. *Inversorul lui PLANCELLIER* este un instrument care trasează curbele plane transformate prin inversiune. Este construit pe baza teoremei :

Fie un romb  $MPM'Q$  și un punct  $O$  astfel, încît  $OP = OQ$ . Punctul  $O$  rămînînd fix, dacă presupunem rombul articulat și lungimile  $OP, OQ$  constante, atunci punctele  $M, M'$  vor descrie două figuri inverse una față de cealaltă (fig. 6.107).

Într-adevăr, punctele  $M, M', O$  fiind egal depărtate de  $P$  și  $Q$  sînt situ-ate pe mediatoarea lui  $PQ$ . Descriînd din  $P$  ca centru un cerc care trece prin  $M, M'$ , produsul  $OM \cdot OM'$  va fi constant ca fiind egal cu puterea punctului  $O$  în raport cu acest cerc, adică egal cu  $OP^2 - PM^2$ . Deci cînd punctul  $M$  descrie o curbă, punctul  $M'$  va descrie curba transformată prin inversiunea de pol  $O$ .

6. *Inversorul lui HART* este un alt instrument folosit pentru trasarea curbelor inverse și se compune din patru bare articulate în punctele  $A, B, C, D$



astfel, încît să formeze un contraparalelogram (un trapez isoscel fără baze). Printr-un punct fix  $O$  luat pe bara  $AB$  se duce o paralelă cu bazele care intersectează celelalte bare în punctele  $M, M', L$  devenite indisolubil fixate pe aceste

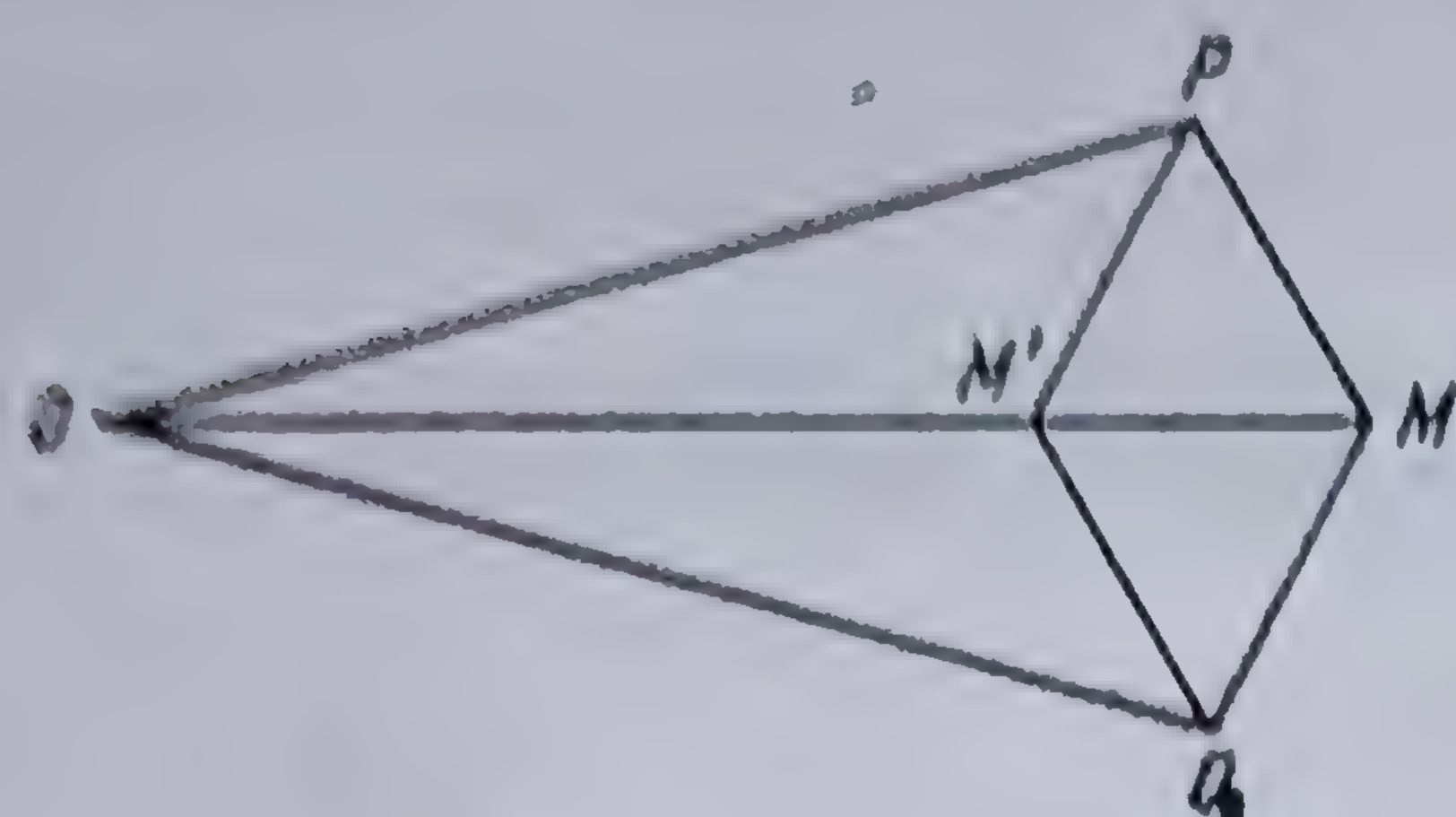


Fig. 6.107. Principiul inversorului lui PLANCELLIER.

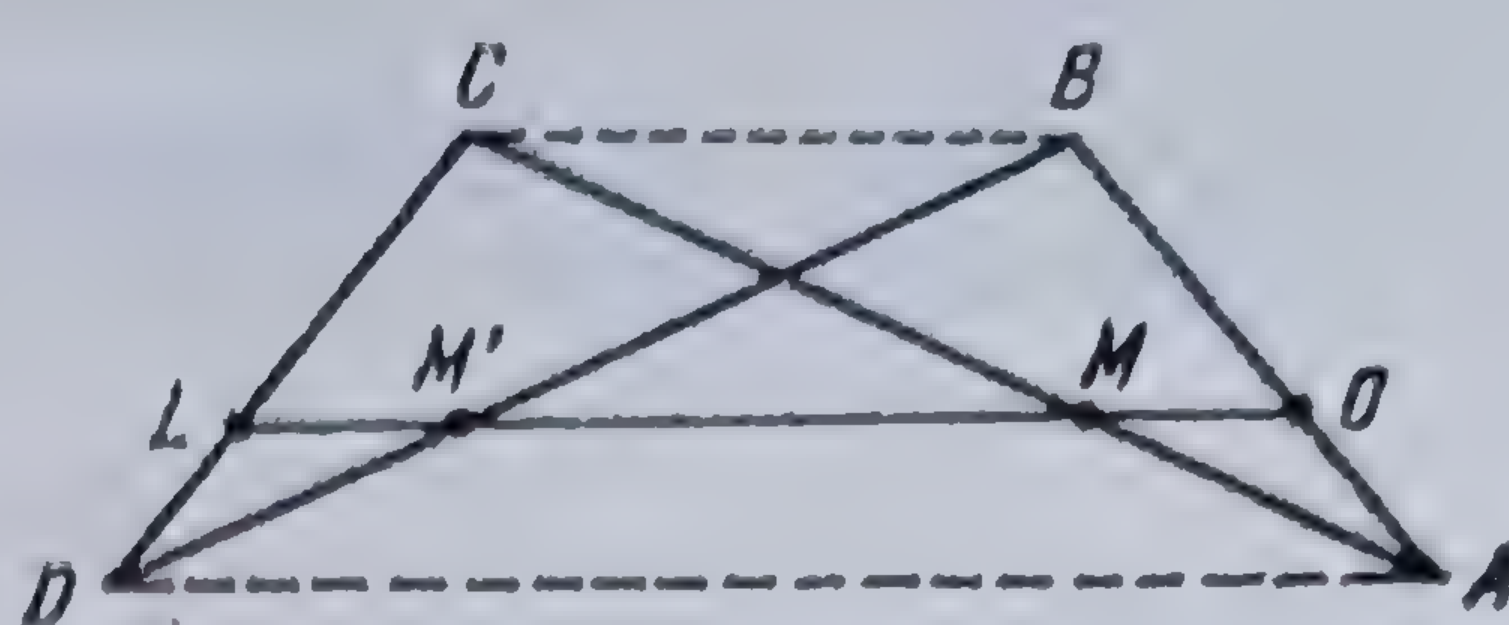


Fig. 6.108. Principiul inversorului lui HART.

bare. Produsul  $OM \cdot OM'$  fiind constant indiferent de poziția barelor, punctele  $M, M'$  sînt inverse; deci cînd  $M$  descrie o curbă dată, punctul  $M'$  va descrie curba inversă, polul inversiunii rămînînd fix în  $O$  (fig. 6.108).

### 6.5.2. INVERSIUNEA FAZORIALĂ

6.5.2.1. Generalități. Fie un fazor  $\underline{V}$  de modul  $V$  și de argument  $\varphi$ , a cărei expresie este

$$\underline{V} = V | \varphi$$

Inversul acestui fazor față de originea sa, puterea de inversiune  $k^2$  fiind un număr real, este fazorul

$$\underline{W} = \frac{k^2}{\underline{V}} = \frac{k^2}{V} | -\varphi,$$

a cărui modul satisface condiția de inversiune

$$|\underline{W}| \cdot |\underline{V}| = k^2,$$

dar al cărui argument este conjugat argumentului fazorului dat.

Rezultă deci, că inversiunea fazorială se deosebește de inversiunea geometrică prin aceea că figura inversă este conjugată figurii inversate.

În cazul cînd puterea de inversiune este un număr complex, figura inversă este simetrică figurii inversate în raport cu afixul numărului complex, rădăcina pătrată a puterii de inversiune. Într-adevăr, fie  $\underline{Z}_1$  fazorul de inversat,  $\underline{Z}_0^2$  puterea de inversiune și  $\underline{Z}_2$  fazorul invers; inversiunea căutată este dată de relația

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_0^2}{\underline{Z}_1}$$

care, scrisă în funcție de module și argumente, devine

$$Z_2 | \varphi_2 = \frac{Z_0^2 | 2 \varphi_0}{Z_1 | \varphi_1},$$



de unde rezultă dubla egalitate

$$Z_2 = \frac{Z_0^2}{Z_1} \text{ sau } Z_1 \cdot Z_2 = Z_0^2$$

și

$$\varphi_2 = 2\varphi_0 - \varphi_1.$$

Relația între module arată că modulul fazorului căutat se obține printr-o inversiune geometrică a fazorului  $Z_1$ , puterea de inversiune fiind

$$Z_0^2 = [|Z_0|]^2.$$

Relația între argumente, care poate fi scrisă

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

sau

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_0,$$

arată că direcția fazorului  $Z_2$  este simetrică cu direcția fazorului  $Z_1$  față de direcția afixului lui  $Z_0$ . Într-adevăr, luând pe acesta din urmă ca origine de fază, se obține

$$\varphi_2 = -\varphi_1,$$

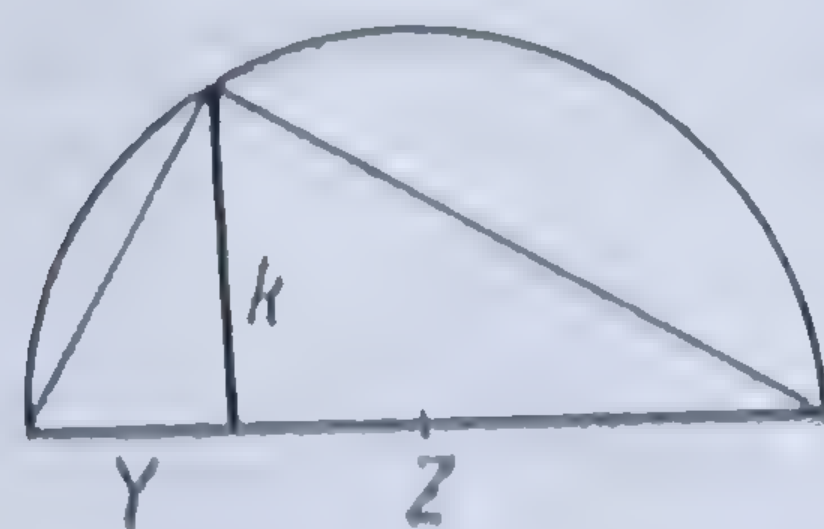
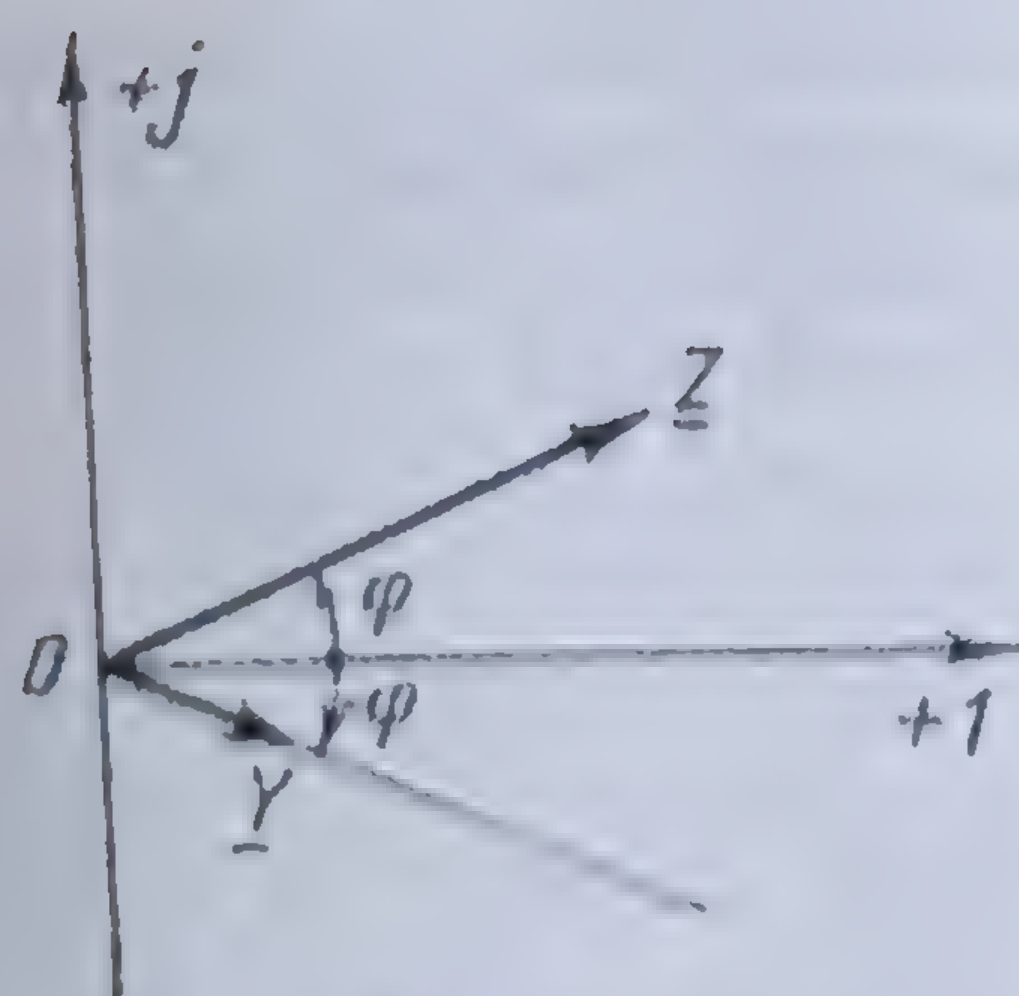
ceea ce arată simetria celor două direcții față de  $Z_0$ .

**OBSERVAȚIE.** Inversiunea fazorială la care puterea de inversiune este un număr real este un caz particular al inversiunii fazoriale la care puterea de inversiune este un număr complex, numărul real fiind un număr complex la care partea complexă e nulă și afixul său este așezat pe axa reală.

**6.5.2.2. Determinarea grafică a inversului unui fazor dat.** Determinarea grafică a inversului unui fazor se face diferit, după cum puterea de inversiune este un număr real sau complex.

a) *Puterea de inversiune este un număr real.* Fie fazorul  $Z = Z|\varphi$ . Inversul său este

$$\underline{Y} = \frac{k^2}{Z} | -\varphi.$$



Construcția grafică a acestui fazor se face astfel (fig. 6.109): Se construiește unghiul  $-\varphi$ , obținându-se direcția fazorului  $\underline{Y}$ . Pentru a determina modulul respectiv, se pornește de la relația

$$Z \cdot Y = k^2,$$

Fig. 6.109. Construirea inversului unui fazor, puterea de inversiune fiind un număr real.

care se poate obține prin construcția mediei proporționale.



O construcție mai potrivită epurelor pentru determinarea modulului fazorului invers se obține folosind metoda de construire a polarei unui punct exterior față de un cerc dat (fig. 6.110). Pentru aceasta se construiește mai întâi fazorul conjugat  $\underline{Z}^*$  al fazorului dat. Din vârful acestui fazor se duc cele două tangente la cercul de inversiune construit cu centrul în originea axelor de coordonate; dreapta care unește punctele de contact ale celor două tangente este polara căutată. Ea intersectează fazorul  $\underline{Z}^*$  în punctul  $\underline{Y}$ , vârful fazorului căutat  $\underline{Y}$ .

Aplicând triunghiului  $OPZ^*$  teorema catetei rezultă

$$Y \cdot Z = k^2.$$

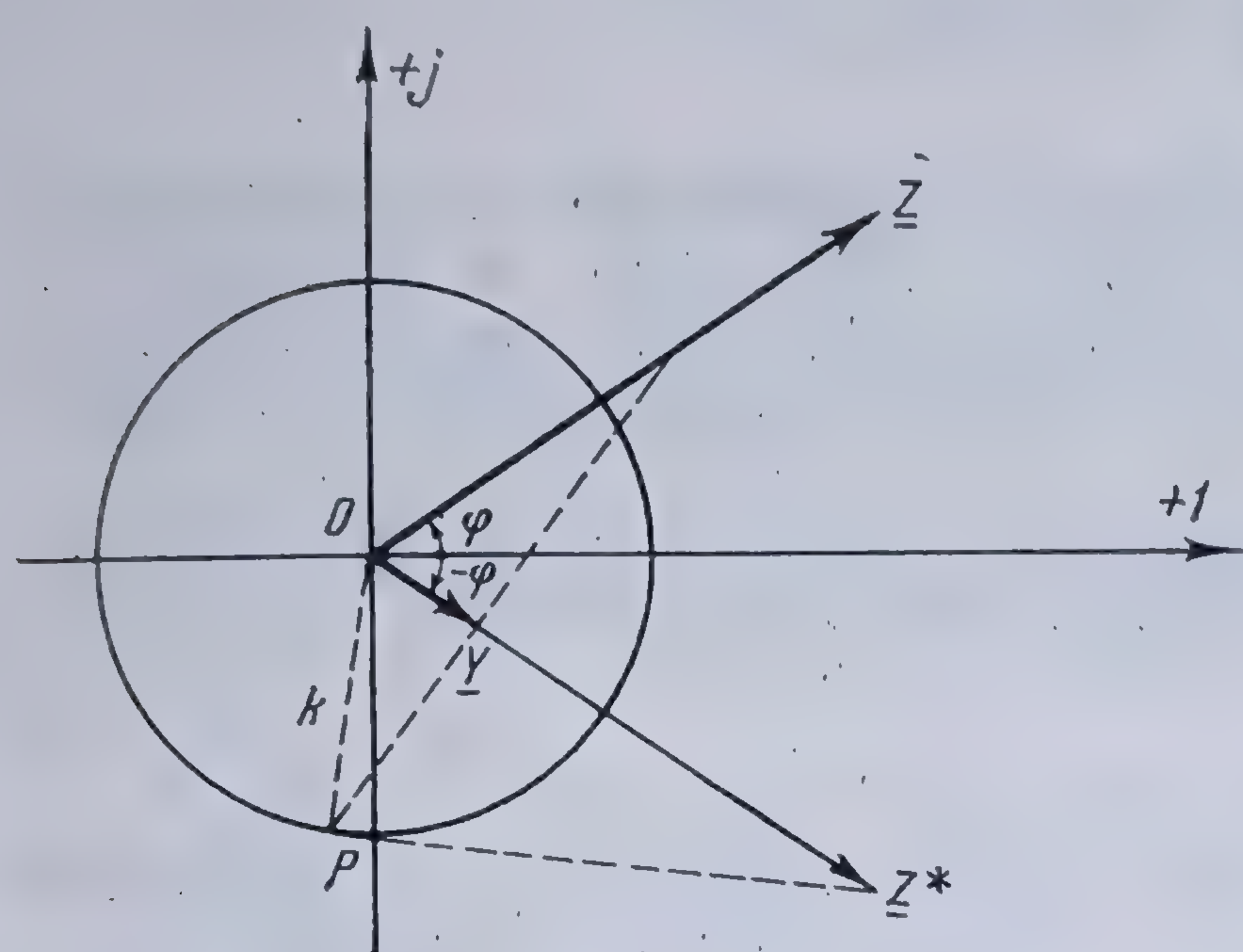


Fig. 6.110. Construirea inversului unui fazor cu ajutorul polarei.

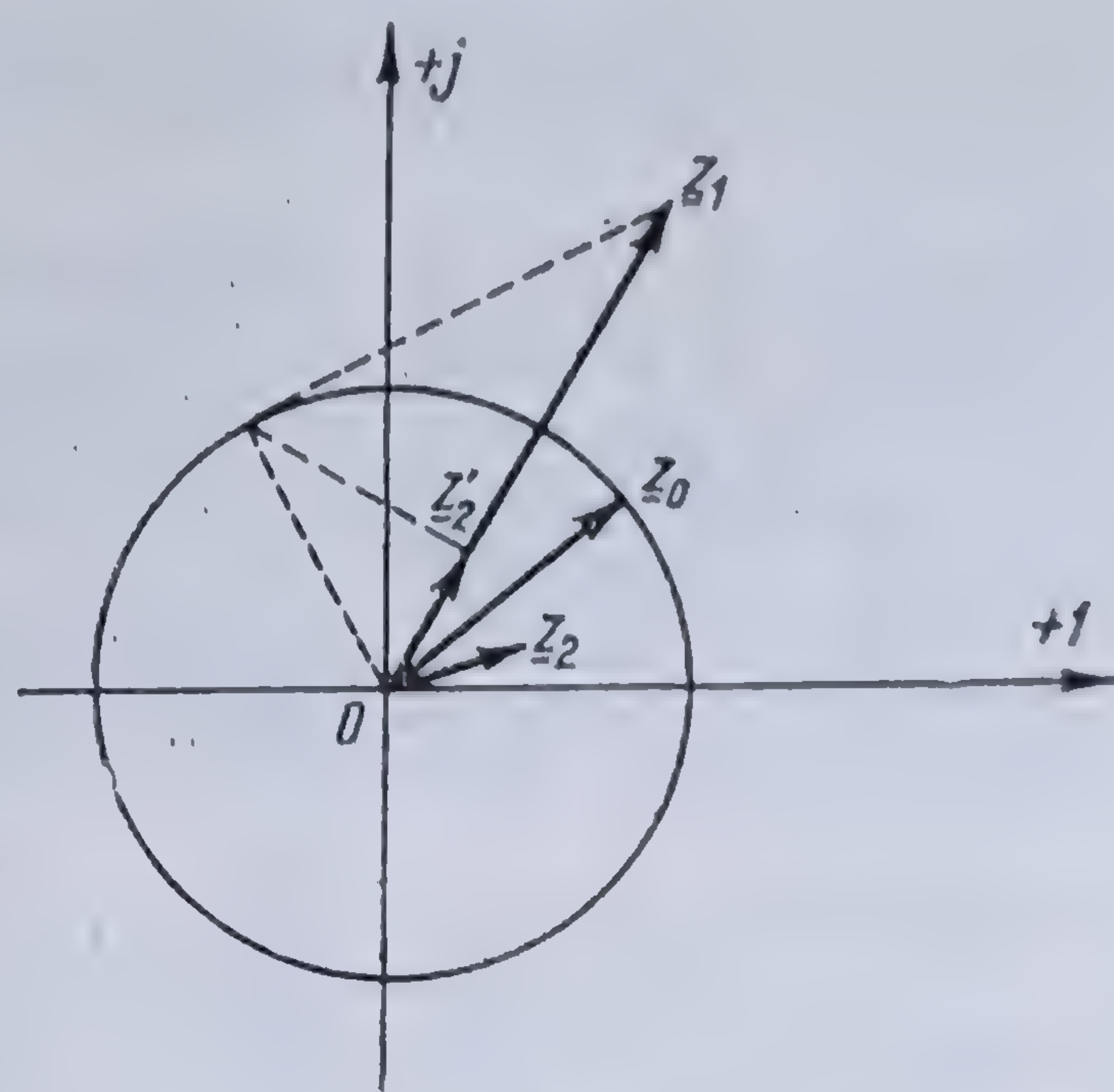


Fig. 6.111. Construirea inversului unui fazor, puterea de inversiune fiind un număr complex.

b) *Puterea de inversiune este un număr complex.* În acest caz (fig. 6.111), dacă  $\underline{Z}_0^2$  este puterea de inversiune, se construiește cercul de rază  $|\underline{Z}_0|$  și, în raport cu acest cerc, cu ajutorul polarei vârfului fazorului  $\underline{Z}_1$ , se găsește vârful fazorului  $\underline{Z}_2$ , a cărui lungime este chiar modulul  $Z_2$  căutat. Luându-se apoi simetricul acestui fazor față de afixul  $\underline{Z}_0$ , se găsește fazorul inversat  $\underline{Z}_2'$  căutat.

**OBSERVAȚII.** 1. Pentru a construi polara căutată, nu este necesar a se duce cele două tangente la cerc. Este suficient a se construi un cerc de  $OZ^*$  ca diametru, care să intersecteze cercul de rază unitară chiar în punctele de contact căutate, după cum se poate demonstra ușor.

2. În cazul când fazorul a cărui inversiune se caută este mai mic decât raza cercului de inversiune, se procedează în sens invers: din vârful fazorului  $\underline{Y}$  se ridică o perpendiculară care intersectează cercul de inversiune în punctul  $P$ ; ducându-se tangenta la cerc în acest punct, aceasta intersectează semidreapta  $OZ^*$  în punctul  $Z^*$ , vârful fazorului conjugat  $\underline{Z}^*$ . Se construiește conjugatul acestui fazor obținându-se fazorul  $\underline{Z}$  căutat.

## 6.6. DIAGrameLE-LOC GEOMETRIC

### 6.6.1. GENERALITAȚI

Fiind dată o mașină electrică alimentată de o rețea electrică de curent alternativ sinusoidal, sau o rețea electrică oarecare, la diverse regimuri de funcționare, prin diferitele circuite circulă diverși curenți. Acești curenți se



determină cu ajutorul teoremelor lui KIRCHHOFF, prin metoda circuitelor independente, obținându-se un număr de ecuații liniare egal cu numărul curenților căutați.

Aceste ecuații se numesc ecuațiile de funcționare în regim permanent ale mașinii sau rețelei electrice și sînt, în general,

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= \underline{k}_1 \underline{E} = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{1n} \underline{I}_n, \\ \underline{E}_2 &= \underline{k}_2 \underline{E} = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{2n} \underline{I}_n, \\ &\vdots \\ \underline{E}_n &= \underline{k}_n \underline{E} = \underline{Z}_{n1} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{n2} \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{nn} \underline{I}_n, \end{aligned} \right\} \quad (6.165)$$

în care  $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \dots, \underline{E}_n$  sînt presupuse constante și cunoscute. Ele pot fi exprimate în funcție de o forță electromotoare fixă  $\underline{E}$ , coeficienții  $\underline{k}$  reprezentînd rapoarte complexe sau nu. Cantitățile complexe  $\underline{Z}$  sînt funcții algebrice întregi de o variabilă independentă  $\lambda$  a mașinii sau relației. În general, ele sînt funcții de  $\lambda$  sau  $1/\lambda$  de gradul 1.

Sistemul (6.165) se rezolvă aplicînd regulile obișnuite de calcul, de obicei regula lui CRAMER. Se obține astfel curentul căutat sub formă

$$\underline{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \underline{k}_1 \underline{Z}_{12} \dots \underline{Z}_{1n} \\ \underline{k}_n \underline{Z}_{n2} \dots \underline{Z}_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} \underline{Z}_{12} \dots \underline{Z}_{1n} \\ \underline{Z}_{n1} \underline{Z}_{n2} \dots \underline{Z}_{nn} \end{vmatrix}} \underline{E} = \frac{\sum \underline{k}_1 \underline{Z}_{22} \dots \underline{Z}_{nn} \underline{E}}{\sum \underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} \dots \underline{Z}_{nn}} \quad (6.166)$$

care reprezintă expresia generală a unui curent oarecare, circulînd în circuitul electric dat. Explicitînd expresia (6.166) în funcție de o variabilă independentă, se obține

$$\underline{I} = \underline{E} \frac{\underline{A}_0 + \underline{A}_1 \lambda + \underline{A}_2 \lambda^2 + \dots + \underline{A}_m \lambda^m}{\underline{B}_0 + \underline{B}_1 \lambda + \underline{B}_2 \lambda^2 + \dots + \underline{B}_n \lambda^n} = \underline{E} \frac{\underline{A}(m)}{\underline{B}(n)}. \quad (6.167)$$

În această expresie  $\underline{A}_j$  și  $\underline{B}_j$  reprezintă mărimi complexe bine definite, iar  $\underline{A}(m)$  și  $\underline{B}(n)$ , funcții complexe, de gradul  $m$  și respectiv  $n$ .

Impedanța aparentă a circuitului este dată de relația

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}_1} = \frac{\sum \underline{Z}_{11} \underline{Z}_{22} \dots \underline{Z}_{nn}}{\sum \underline{k}_1 \underline{Z}_{22} \dots \underline{Z}_{nn}} = \frac{\underline{B}(n)}{\underline{A}(m)}. \quad (6.168)$$

Comparînd relațiile (6.167) și (6.168), se vede că  $\underline{I}$  și  $\underline{Z}$  sînt funcții inverse una alteia. Oricare din ele s-ar lua în considerație, se vede că, atunci cînd  $\lambda$  variază între  $-\infty$  și  $+\infty$ , fazorii respectivi  $\underline{I}$  sau  $\underline{Z}$  iau diverse valori (ca mărime și poziție). Vîrfurile oricăruia din acești fazori va descrie o curbă (un loc geometric, hodograful aceluia fazor care se numește *diagrama-loc geometric a mașinii sau a rețelei electrice*, sau simplu *diagrama mașinii sau a rețelei*).

Trasarea diagramei-loc geometric se face, în general, dîndu-se diferite valori variabilei independente și figurîndu-se punctele corespunzătoare într-un



sistem de referință dat. De multe ori, anumite proprietăți speciale ale figurilor permit construirea diagramei cu mai multă ușurință.

Se poate întâmpla, uneori, ca funcția inversă să fie mai ușor de construit (spre exemplu o diagramă de impedanță) se va construi atunci această diagramă și se va obține diagrama căutată aplicând o metodă de inversiune. În acest caz, pentru simplificarea figurii, se face uneori o convenție asupra semnelor argumentelor după cum urmează:

Fie astfel fazorul impedanță

$$\underline{Z} = x + jy,$$

care poate fi, de exemplu, reprezentat mai ușor. Fazorul curent

$$\underline{I} = \frac{k^2}{\underline{Z}} = \frac{k^2}{x + jy} = k^2 \frac{x - jy}{x^2 + y^2}$$

are același argument ca și fazorul impedanță, însă de semn contrar.

Se convine a se da lui  $\underline{I}$  același argument ca și lui  $\underline{Z}$ , ceea ce revine în ceea ce privește fazorii de curent, a se considera unghiurile pozitive în sensul mișcării acelor ceasornicului. Cu această convenție,  $\underline{I}$  și  $\underline{Z}$  au aceeași direcție și sens, și modulele inverse unul altuia: locurile geometrice respective sînt curbe inverse una alteia.

Va trebui, însă, să se menționeze dacă este vorba de un fazor de curent sau de unul de impedanță, deoarece sensul lor de rotire este diferit.

O diagramă o dată trasată, se va completa cu scări, pentru a se putea determina în fiecare punct valoarea corespunzătoare a variabilei, precum și cu alte mărimi caracteristice.

Diagrama astfel completată va fi imaginea concretă a proprietăților mașinii sau ale rețelei electrice; ea va da posibilitatea urmăririi tuturor regimurilor de funcționare.

#### 6.6.2. PROPRIETĂȚILE GENERALE ALE DIAGRAMELOR \*

Relația (6.168) poate fi scrisă sub forma complexă explicită

$$\underline{Z} = \frac{B'(n) + jB''(n)}{A'(m) + jA''(m)} \quad (6.169)$$

sau, făcînd rațional numitorul,

$$\underline{Z} = \frac{[A'(m)B'(n) + A''(m)B''(n)] + j[A'(m)B''(n) - A''(m)B'(n)]}{[A'(m)]^2 + [A''(m)]^2} \quad (6.170)$$

Gradul numărătorului acestei expresii este  $m + n$ , iar al numitorului  $2m$ . Dacă  $A'(m)$  și  $A''(m)$  au un număr  $m'$  de rădăcini comune\*\*,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m'}$ , ambii termeni ai expresiei (6.170) se divid cu produsul

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{m'}),$$

\* După L. OTS-CHEVALIER [209].

\*\* Aceste rădăcini pot fi reale sau imaginare. În general, în cazurile care ne interesează, ele sînt reale.



ceea ce micșorează gradul lor cu  $m'$ . Expresia (6.170) devine atunci :

$$\underline{Z} = \frac{C'(m+n-m') + jC''(m+n-m')}{D'(2m-m')},$$

avînd componentele după axe

$$Z' = \frac{C'(m+n-m')}{D'(2m-m')} \text{ și } Z'' = \frac{C''(m+n-m')}{D'(2m-m')}.$$

Din relația (6.169) se deduce modulul

$$\underline{Z}^2 = Z'^2 + Z''^2 = \frac{[B'(n)]^2 + [B''(n)]^2}{[A'(m)]^2 + [A''(m)]^2}.$$

Se enunță următoarele proprietăți, ușor de verificat :

a) Gradul curbei lui  $\underline{Z}$  este dat de cea mai mare dintre valorile  $m+n-m'$  și  $2m-m'$ .

b) Curba lui  $\underline{Z}$  trece prin origine, dacă  $m > n$  sau  $m' > 0$ . Acest punct va fi simplu, dublu sau triplu,..., după valoarea lui  $n''$ , dacă  $m=n$ , sau după valoarea lui  $n'' + 1$ , dacă  $m > n$ ,  $n''$  fiind numărul de rădăcini diferite ale numărului.

c) Curba lui  $\underline{Z}$  este discontinuă, dacă  $m < n$  sau dacă  $m' > 0$ . Numărul de ramuri ale acestei curbe este egal cu  $m''$  sau cu  $m'' + 1$ , după cum  $m > n$  sau  $m < n$ .

d) Forma curbei este astfel, încît ea nu poate fi intersectată de un cerc decît într-un număr de puncte dat de cea mai mare dintre valorile  $2m$  sau  $2n$ .

e) Inversa curbei  $\underline{Z}$  în raport cu un punct exterior oarecare este o curbă închisă de aceeași speță, al cărei grad este dat de valoarea cea mai mare dintre  $2m$  sau  $2n$ .

f) Inversa curbei lui  $\underline{Z}$  în raport cu unul dintre punctele sale este o curbă de aceeași speță însă discontinuă, al cărui grad este mai mic decît cea mai mare dintre valorile  $2m$  sau  $2n$ .

### 6.6.3. STUDIUL CITORVA LOCURI GEOMETRICE PARTICULARE

În general, diagramele-loc geometric ale mașinilor electrice sau ale rețelilor electrice reprezintă curbe simple, adică drepte sau cercuri. Foarte rar întîlnim alte curbe de ordinul doi (conice) și mai rar curbe de ordin superior. Acestea din urmă se întîlnesc mai ales în radiofonie.

În cele ce urmează se vor examina mai amănunțit locurile geometrice reprezentate prin drepte sau cercuri.

#### 6.6.3.1. Locul geometric al fazorului $\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B}$ . Fie

$$A = a_0 + ja_1 \text{ și } B = b_0 + jb_1.$$

Ecuția fazorului al cărui loc geometric se caută poate fi scrisă

$$Z = a_0 + ja_1 + \lambda(b_0 + jb_1) = a_0 + \lambda b_0 + j(a_1 + \lambda b_1).$$



Din această expresie reiese că  $\underline{Z}$  este un fazor a cărei parte reală este

$$x = a_0 + \lambda b_0$$

și a cărei parte complexă este

$$y = a_1 + \lambda b_1.$$

Dacă se elimină  $\lambda$ , între aceste două expresii, se obține

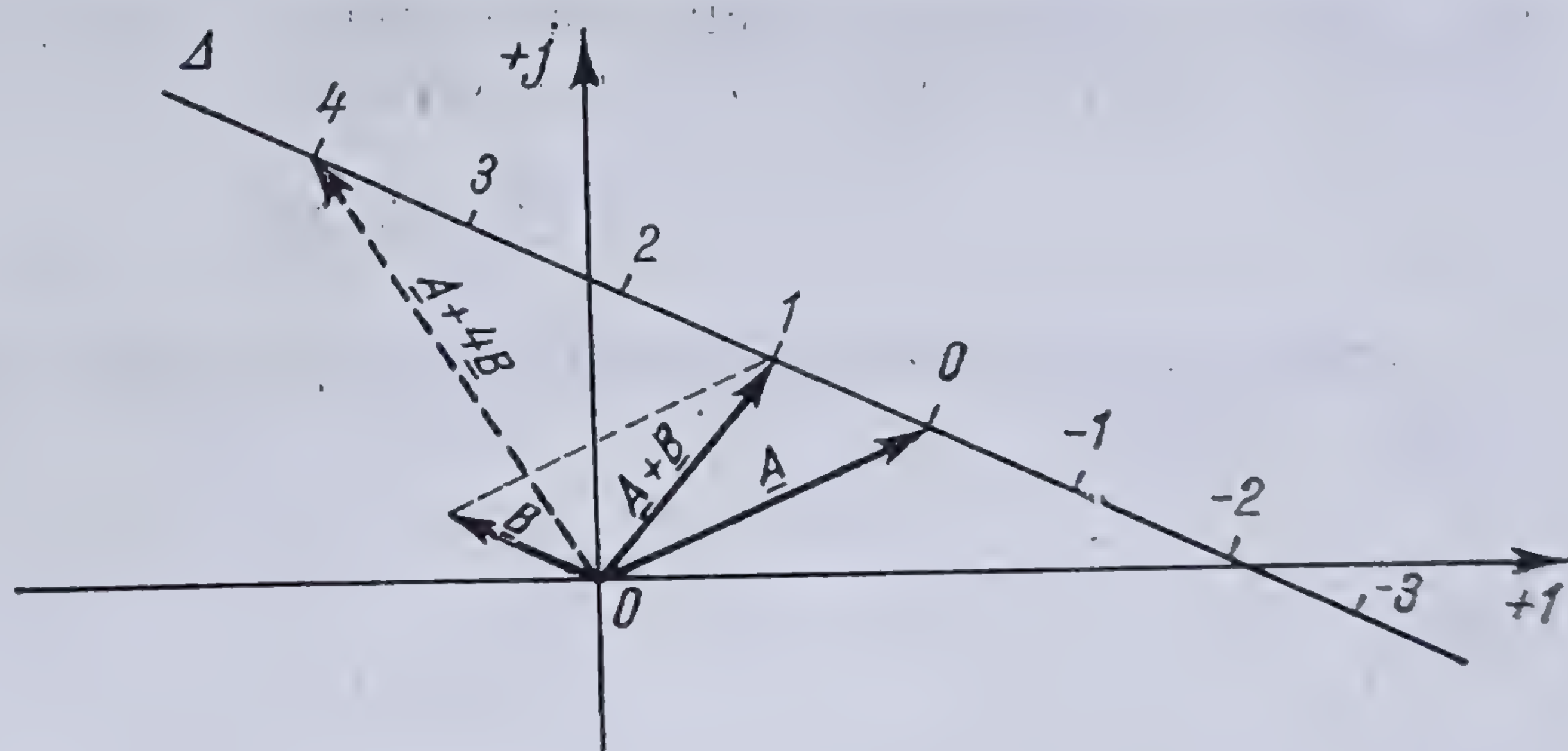
$$\frac{x - a_0}{b_0} = \frac{y - a_1}{b_1}$$

care este ecuația unei drepte. Deci, locul geometric al fazorului

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B}, \quad (6.171)$$

când  $\lambda$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , este o dreaptă. Lucrul acesta se poate arăta și direct. Într-adevăr, fie fazorii  $\underline{A}$  și  $\underline{B}$  (fig. 6.112). Dacă se dau diverse valori lui  $\lambda$ , se obține locul geometric căutat. Într-adevăr, pentru  $\lambda = 0$  se obține ca punct al locului geometric chiar vârful  $\underline{A}$  al fazorului  $\underline{A}$ . Pentru  $\lambda = 1$  se

Fig. 6.112: Locul geometric al fazorului  $\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B}$ .



obține  $\underline{Z} = \underline{A} + \underline{B}$ , trebuind deci să se facă adunarea fazorilor  $\underline{A}$  și  $\underline{B}$ , operație cunoscută. Pentru  $\lambda = 2$  va trebui să se adune fazorii  $\underline{A}$  și  $2\underline{B}$ , ceea ce înseamnă să se adauge rezultantei precedente încă o dată fazorul  $\underline{B}$  și să se facă rezultanta.

Procedând în același mod, se găsește locul geometric căutat, care este dreapta  $\Delta$ , care se obține așezînd în continuare unul după altul fazorii echipolenți cu  $\underline{B}$ .

De aici rezultă că locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu direcția fazorului  $\underline{B}$ . În consecință, pentru a construi locul geometric al fazorului dat de ecuația (6.171) este suficient a duce prin vârful fazorului  $\underline{A}$  o paralelă la direcția fazorului  $\underline{B}$ .

Gradarea locului geometric se face în funcție de  $\lambda$ . Astfel, punctul de zero al scării este chiar punctul corespunzător vârfului fazorului  $\underline{A}$ . Pornind de la acest punct se poartă de o parte și de alta mărimi egale cu modulul fazorului  $\underline{B}$ ,



luându-se acesta ca unitate de măsură. Sensul pozitiv sau negativ se determină ținându-se seama de convenția ce s-a făcut mai înainte\*. În general, și dacă nimic nu este specificat, se consideră ca sens pozitiv, sensul direct trigonometric.

*Cazuri particulare.* După forma fazorilor componenți, se pot deosebi diverse cazuri particulare :

$$a) \quad \underline{A} = 0.$$

În acest caz, ecuația locului geometric este

$$\underline{Z} = \lambda \underline{B}$$

și locul geometric căutat este o dreaptă trecând prin origine și a cărei direcție se confundă cu direcția vectorului  $\underline{B}$ . Punctul de zero al scării locului geometric este de data aceasta chiar originea axelor de coordonate.

$$b) \quad \underline{A} = \mu \underline{B}.$$

Ecuația locului geometric devine

$$\underline{Z} = (\lambda + \mu) \underline{B},$$

care este tot o dreaptă trecând prin origine. Punctul de zero al scării locului geometric se obține pentru  $\lambda = 0$  și este dat de

$$\underline{Z} = \mu \underline{B}.$$

Originea axelor de coordonate este un punct al locului geometric corespunzând valorii

$$\lambda = -\mu.$$

$$c) \quad \underline{B} = B.$$

Ecuația locului geometric devine

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda B.$$

Întrucât fazorul  $\underline{B}$  s-a redus numai la componenta lui reală, locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu axa reală și trecând prin vârful fazorului  $\underline{A}$ .

$$d) \quad \underline{B} = \pm jB.$$

Ecuația locului geometric devine

$$\underline{Z} = \underline{A} \pm \lambda jB$$

\* Vezi 6.6.1



și deoarece fazorul  $\underline{B}$  s-a redus la componenta lui complexă, locul geometric căutat este o dreaptă paralelă cu axa complexă, trecând prin vârful fazorului  $\underline{A}$ .

*Observații asupra variabilei independente  $\lambda$ .* În studiul prezentat mai sus, nu s-a făcut nici o rezervă asupra formei variabilei independente  $\lambda$ . Aceasta poate fi la rândul ei o funcție oarecare de  $\theta$ , de exemplu

$$\lambda = f(\theta). \quad (6.172)$$

În acest caz, scara poate să fie gradată în raport cu această variabilă independentă și diviziunile ei să urmeze legea dată de funcția (6.172); scara se numește *funcțională*.

În cazul când gradarea se face în funcție de  $\lambda$ , scara este întotdeauna liniară, oricare ar fi funcția lui  $\lambda$ .

**6.6.3.2. Locul geometric al fazorului  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{A} + \lambda \underline{B}}$ .** Este ușor de văzut că fazorul dat este inversul fazorului

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B},$$

al cărui loc geometric este o dreaptă. Ținând seama că inversa unei drepte este un cerc care trece prin origine\*, locul geometric al fazorului dat este un cerc trecând prin origine.

Această inversiune fiind o inversiune fazorială, construcția locului geometric al fazorului

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{A} + \lambda \underline{B}} \quad (6.173)$$

se face astfel :

Se construiește mai întâi dreapta

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B},$$

apoi conjugata ei. Cercul invers al dreptei conjugate trece prin origine și centrul său se găsește pe perpendiculara dusă din origine pe această dreaptă. Dacă  $OP$  este distanța de la origine la dreapta, atunci diametrul este dat de relația

$$2r = \frac{k^2}{OP} = OP_e,$$

și se construiește cu ajutorul cercului de inversiune. Trasarea cercului se face imediat iar gradarea lui se obține ducând din origine raze vectoriale prin diviziunile dreptei  $\underline{Z}^*$ , conjugata dreptei  $\underline{Z}$ . Originea corespunde punctelor de la infinit ale dreptei (fig. 6.113).

\* Vezi 6.5.1.3 punctul b.



Pe cale analitică, se poate arăta că locul geometric căutat este un cerc trecînd prin origine. Pentru aceasta, se explicitază ecuația (6.173) obținîndu-se

$$\underline{Y} = \frac{a_0 + \lambda b_0}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2} - j \frac{a_1 + \lambda b_1}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2}.$$

Notînd partea reală a fazorului  $\underline{Y}$

$$\frac{a_0 + \lambda b_0}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2} = x,$$

partea complexă

$$\frac{a_1 + \lambda b_1}{(a_0 + \lambda b_0)^2 + (a_1 + \lambda b_1)^2} = y$$

și eliminînd pe  $\lambda$  între aceste relații se obține

$$(x^2 + y^2)(a_1 b_0 - a_0 b_1) + b_1 x + b_0 y = 0,$$

care este ecuația unui cerc care trece prin origine.

Elementele caracteristice ale acestui cerc sînt coordonatele centrului

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0};$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \quad (6.174)$$

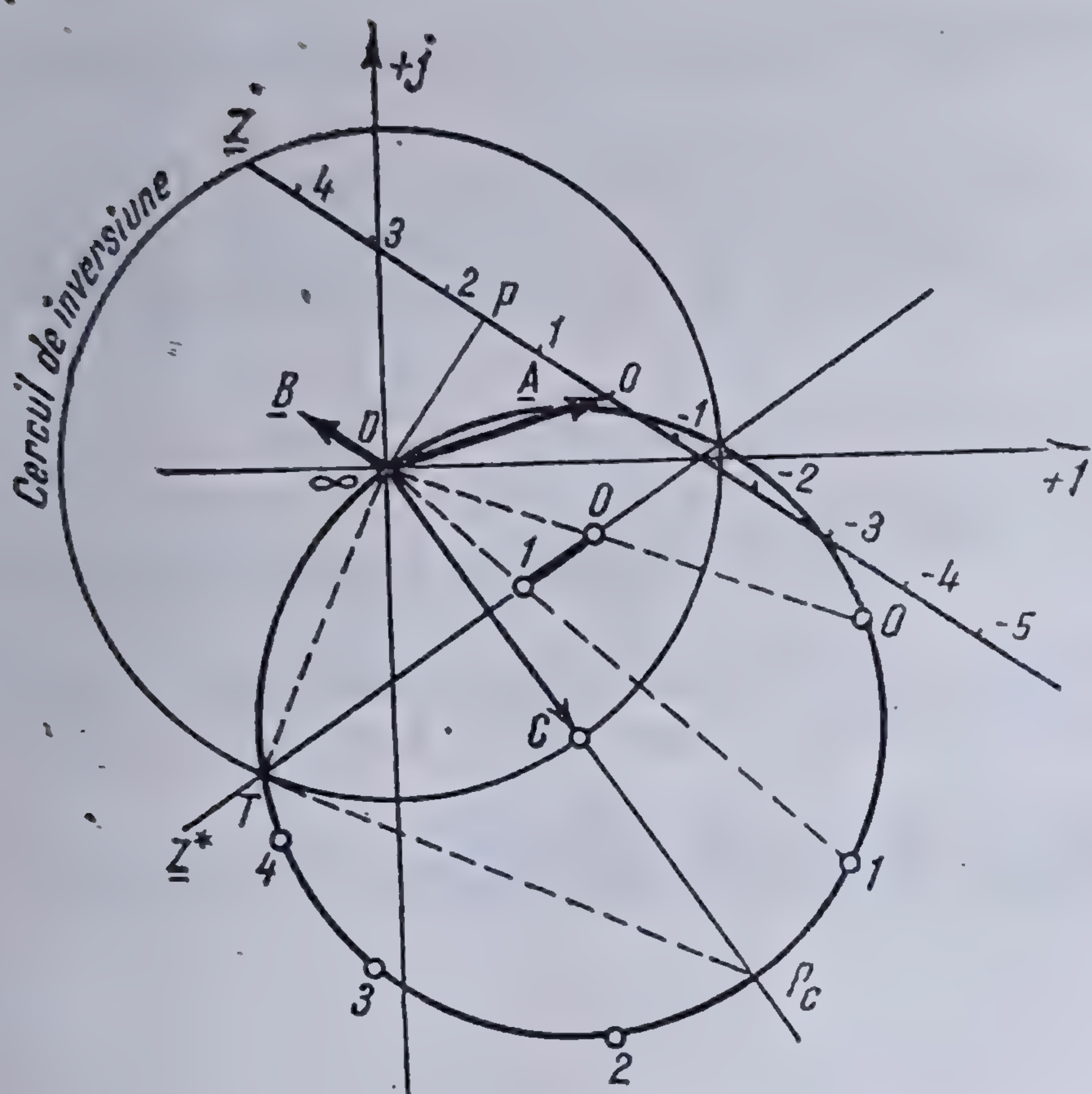


Fig. 6.113. Locul geometric al fazorului  $\underline{Y} = 1/(\underline{A} + \lambda \underline{B})$ .

și raza

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_0^2 + b_1^2}{a_0 b_1 - a_1 b_0}. \quad (6.175)$$

Scriînd ecuația normală a dreptei reprezentînd locul geometric al fazorului  $\underline{Z} = \underline{A} + \lambda \underline{B}$ ,

$$\frac{b_1}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}} x - \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}} y + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}} = 0, \quad (6.176)$$

distanța de la origine la această dreaptă este

$$\delta = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{\sqrt{b_0^2 + b_1^2}}.$$

Comparînd această relație cu expresia (6.175) care dă mărimea razei, se vede că diametrul cercului-loc geometric căutat este egal cu inversa distanței  $OP$  de la origine la dreapta-loc geometric al fazorului  $\underline{Z}$ , adică același rezultat la care se ajunsese direct prin metoda inversiunii.



Coeficientul unghiular al dreptei (6.176) fiind

$$m = \frac{b_1}{b_0},$$

coeficientul unghiular al conjugatei acesteia este

$$m_c = -\frac{b_1}{b_0}.$$

Coeficientul unghiular al diametrului principal  $OM$  se obține din relația (6.174) și este

$$m_d = \frac{b_0}{b_1}.$$

Înmulțind acești doi coeficienți unghiulari se obține

$$m_c m_d = -1,$$

de unde rezultă că acest diametru este perpendicular pe conjugata drepte de la numitor, ceea ce se găsește și pe calea directă.

6.6.3.3. Locul geometric al vectorului  $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda \underline{B})/(\underline{C} + \lambda \underline{D})$ . Fie de găsit locul geometric al fazorului

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}}. \quad (6.177)$$

Se observă de la început că această ecuație se reproduce prin inversiune, fapt destul de important și care va fi folosit mai târziu.

Efectuînd împărțirea, se obține

$$\underline{I} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} + \left( \underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}} \right) \frac{1}{\underline{C} + \lambda \underline{D}} = \underline{M} + \underline{N} \times \underline{I}_0 \quad (6.178)$$

în care s-a notat

$$\underline{M} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}; \quad \underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}}; \quad \underline{I}_0 = \frac{1}{\underline{C} + \lambda \underline{D}}.$$

Să interpretăm relația (6.178). Pentru aceasta, să considerăm o anumită valoare a lui  $\lambda$ . Produsul  $\underline{N} \times \underline{I}_0$  arată că fazorul  $\underline{I}_0$  este rotit cu un unghi egal cu argumentul fazorului  $\underline{N}$  și modulul său este înmulțit cu modulul aceluiasi fazor. Pe de altă parte, locul geometric al fazorului  $\underline{I}_0$  reprezintă un cerc al cărui centru și diametru principal sînt bine definite și care trece prin origine. Se poate spune deci, că prin înmulțirea cu fazorul  $\underline{N}$ , diametrul principal al cercului este rotit cu un unghi egal cu argumentul fazorului  $\underline{N}$  iar mărimea acestui diametru se înmulțește cu modulul aceluiasi fazor. Deci,  $\underline{N} \times \underline{I}_0$  reprezintă tot un cerc trecînd prin origine.



Pentru a avea completă ecuația (6.178), urmează ca la fiecare punct al cercului obținut să se adauge fazorul constant  $\underline{M}$ . Rezultatul obținut va fi tot un cerc, deplasat în același sens cu cantitatea  $\underline{M}$ . Pentru aceasta este suficient a se deplasa numai centrul cercului  $\underline{N} \times \underline{I}_0$  cu fazorul  $\underline{M}$ .

Din cele ce preced rezultă că locul geometric al vectorului reprezentat de ecuația (6.178) este un cerc pentru care originea este un punct exterior.

Există mai multe posibilități de a construi cercul-loc geometric al fazorului  $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda \underline{B}) / (\underline{C} + \lambda \underline{D})$ :

a) O primă metodă constă în a construi relația fazorială (6.178). Pentru aceasta se procedează în modul următor (fig. 6.114):

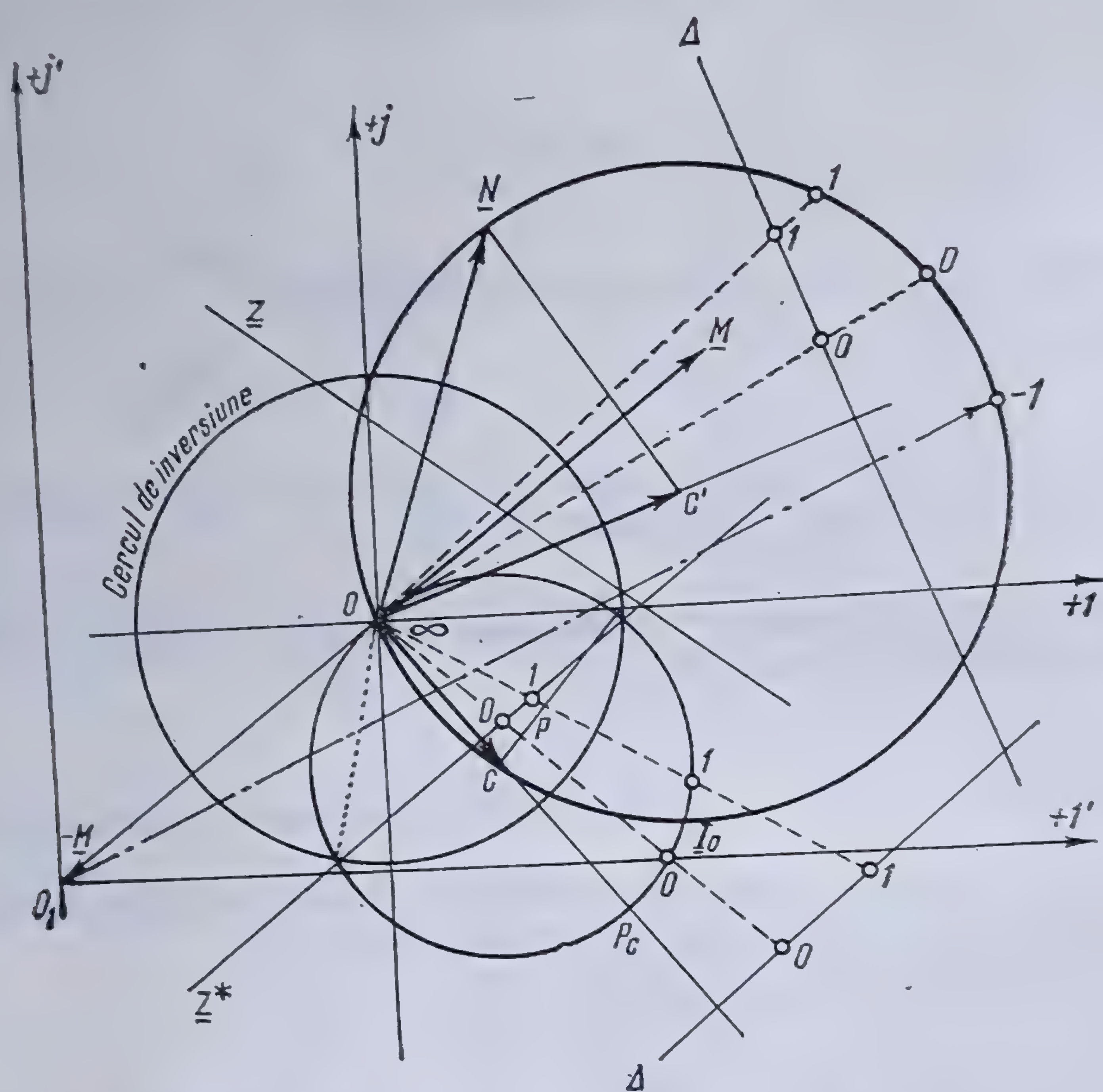


Fig. 6.114. Locul geometric al fazorului  $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda \underline{B}) / (\underline{C} + \lambda \underline{D})$ .

— Se trasează dreapta  $\underline{Z} = \underline{C} + \lambda \underline{D}$ , stabilindu-i-se o scară și o direcție. Se trasează apoi dreapta conjugată  $\underline{Z}^*$ .

— Se trasează perpendiculara  $OP$  pe dreapta  $\underline{Z}^*$ , se determină diametrul și centrul cercului  $\underline{I}_0$ , inversul dreptei  $\underline{Z}$ .

— Se determină fazorii  $\underline{M} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}$  și  $\underline{N} = \underline{A} - \frac{\underline{B} \cdot \underline{C}}{\underline{D}}$ .

— Se efectuează produsul  $\underline{N} \times \underline{I}_0$  operîndu-se asupra vectorului  $OC$ , corespunzător centrului  $C$  al cercului  $\underline{I}_0$ . Se obține astfel centrul cercului-loc geometric căutat și diametrul său principal.

— Se deplasează originea axelor de coordonate în vârful vectorului  $-\underline{M}$ . Pentru a se obține gradarea cercului se procedează astfel:



Se rotește dreapta  $Z^*$  pînă ce ea ajunge perpendiculară pe diametrul principal al cercului-loc geometric  $O$ . Se unesc diviziunile de pe această dreaptă cu originea  $O$  a axelor de coordonate și se obține gradarea cercului.

Diagrama cercului este astfel obținută și se poate determina pentru orice valoare a lui  $\lambda$  mărimea și poziția fazorului respectiv. În figura 6.113 s-a determinat această mărime pentru  $\lambda = -1$ .

b) O a doua metodă de a construi locul geometric căutat, constă în a se da trei valori particulare lui  $\lambda$  și a se determina astfel trei puncte prin care se poate duce cercul căutat. Se iau de obicei valorile caracteristice  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \infty$  și  $\lambda = 1$ , obținându-se fazorii

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \quad \underline{I}_\infty = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \text{ și } \underline{I}_1 = \frac{\underline{A} + \underline{B}}{\underline{C} + \underline{D}},$$

prin vîrfurile cărora se trasează cercul-loc geometric căutat (fig. 6.115). Pentru gradarea cercului se procedează în felul următor : se unește  $I_{\infty}$  cu  $C$ , și perpendicular pe această direcție, se duce o dreaptă oarecare  $\Delta$ .

Se duc direcțiile  $\overline{I_\infty I_0}$  și  $\overline{I_\infty I}$  și, unde acestea intersectează dreapta  $\Delta$ , se obțin punctele 0 și 1. Se divide dreapta  $\Delta$  cu această unitate și din  $I_\infty$  se duc raze vectoriale la aceste diviziuni. Punctele de intersecție ale cercului cu aceste raze vectoriale dau punctele de gradare ale cercului. Pentru a obține

mărimea fazorului corespunzător unei anumite valori a lui  $\lambda$ , se unește originea axelor de coordonate cu diviziunea corespunzătoare de pe cerc și se obține fazorul căutat în mărime și în direcție.

**OBSERVAȚII.** 1. În cazul cînd segmentul unitate 0—1 are dimensiuni nepotrivite epurei, fiind prea mare sau prea mic, se ia o altă dreaptă  $\Delta_1$ , paralelă cu  $\Delta$ , astfel ca segmentul unitate să aibă dimensiunile dorite.

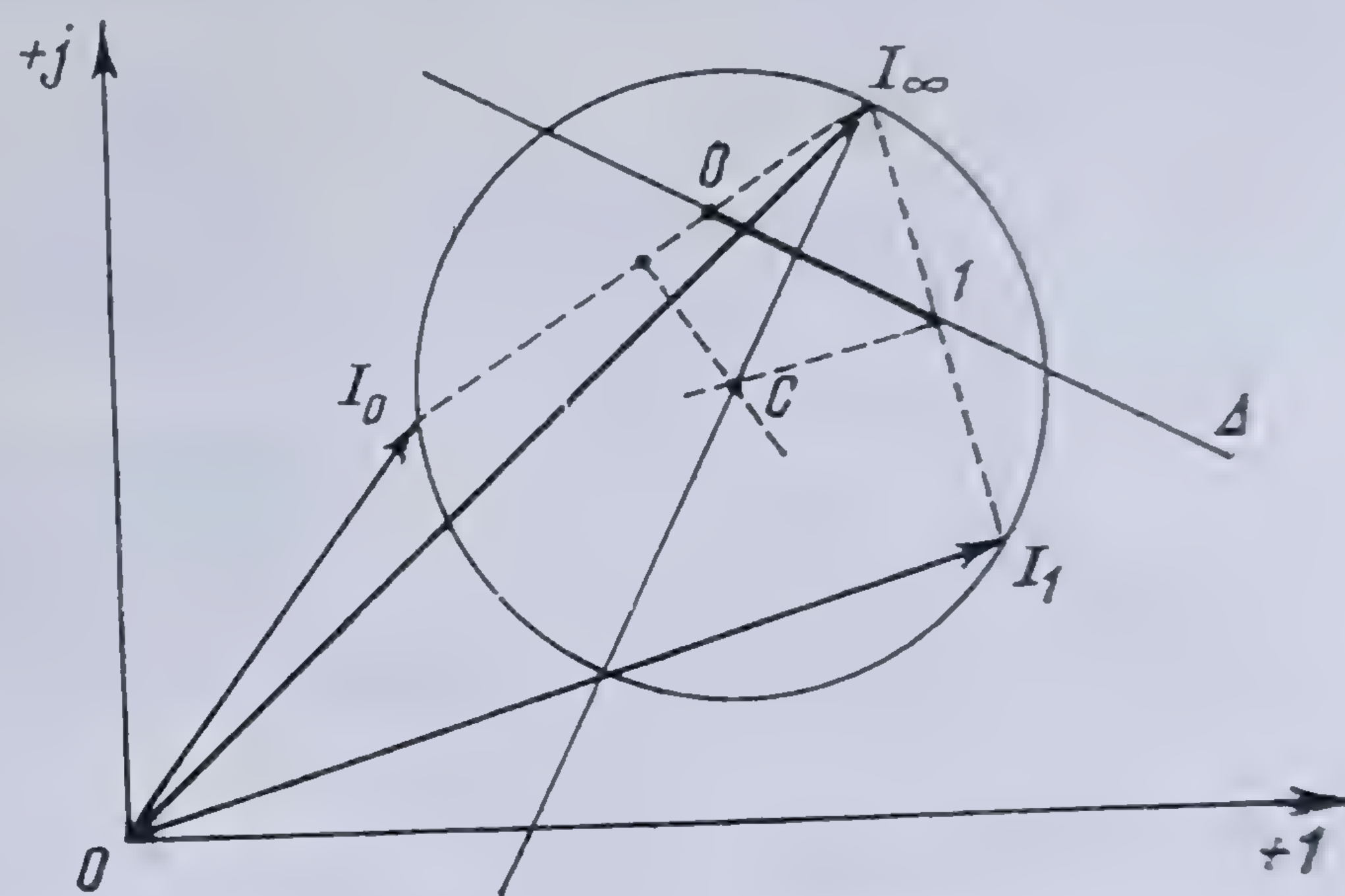
2. În cazul cînd cercul urmează a fi gradat în valori inverse  $\left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right)$ ,

se unește  $I_0$  cu  $C$  și perpendicular pe această direcție se duce dreapta  $\Delta'$ ; segmentul unitate este determinat pe această dreaptă cu ajutorul razelor vectoriale  $I_0 I_\infty$  și  $I_0 I_1$ , care determină respectiv punctele 0 și 1. Într-adevăr pentru  $\lambda = \infty$ ,  $\theta = 0$  și pentru  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 1$ .

3. Dreptele  $\Delta$  și  $\Delta'$  sînt paralele respectiv cu tangentele la cerc în punctele  $I_\infty$  și  $I_0$ . Determinarea unui punct pe cerc se face mult mai greu printr-o tangentă decît printr-o secantă. În consecință, pentru a se determina punctul respectiv, se duce o paralelă cu tangenta corespunzătoare și, perpendiculara dusă prin centrul cercului pe această direcție va intersecta cercul în punctul căutat.

Într-adevăr, fie funcția

$$I = \frac{A + \lambda B}{C + \lambda D},$$



**Fig. 6.115. Construcția industrială a fazorului**  
 $I = (A + \lambda B)/(C + \lambda D)$ .



Se rotește dreapta  $Z^*$  până ce ea ajunge perpendiculară pe diametrul principal al cercului-loc geometric  $C$ . Se unesc diviziunile de pe această dreaptă cu originea  $O$  a axelor de coordonate și se obține gradarea cercului.

Diagrama cercului este astfel obținută și se poate determina pentru orice valoare a lui  $\lambda$  mărimea și poziția fazorului respectiv. În figura 6.113 s-a determinat această mărime pentru  $\lambda = -1$ .

b) O a doua metodă de a construi locul geometric căutat, constă în a se da trei valori particulare lui  $\lambda$  și a se determina astfel trei puncte prin care se poate duce cercul căutat. Se iau de obicei valorile caracteristice  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = \infty$  și  $\lambda = 1$ , obținându-se fazorii

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \quad \underline{I}_\infty = \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \text{ și } \underline{I}_1 = \frac{\underline{A} + \underline{B}}{\underline{C} + \underline{D}},$$

prin vîrfurile cărora se trasează cercul-loc geometric căutat (fig. 6.115). Pentru gradarea cercului se procedează în felul următor: se unește  $I_\infty$  cu  $C$ , și perpendicular pe această direcție, se duce o dreaptă oarecare  $\Delta$ .

Se duc direcțiile  $\overline{I_\infty I_0}$  și  $\overline{I_\infty I_1}$  și, unde acestea intersectează dreapta  $\Delta$ , se obțin punctele 0 și 1. Se divide dreapta  $\Delta$  cu această unitate și din  $I_\infty$  se duc raze vectoriale la aceste diviziuni. Punctele de intersecție ale cercului cu aceste raze vectoriale dau punctele de gradare ale cercului. Pentru a obține

mărimea fazorului corespunzător unei anumite valori a lui  $\lambda$ , se unește originea axelor de coordonate cu diviziunea corespunzătoare de pe cerc și se obține fazorul căutat în mărime și în direcție.

**OBSERVAȚII.** 1. În cazul cînd segmentul unitate 0—1 are dimensiuni nepotrivite epurei, fiind prea mare sau prea mic, se ia o altă dreaptă  $\Delta_1$ , paralelă cu  $\Delta$ , astfel ca segmentul unitate să aibă dimensiunile dorite.

2. În cazul cînd cercul urmează a fi gradat în valori inverse  $\left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right)$ , se unește  $I_0$  cu  $C$  și perpendicular pe această direcție se duce dreapta  $\Delta'$ ; segmentul unitate este determinat pe această dreaptă cu ajutorul razelor vectoriale  $\overline{I_0 I_\infty}$  și  $\overline{I_0 I_1}$ , care determină respectiv punctele 0 și 1. Într-adevăr pentru  $\lambda = \infty$ ,  $\theta = 0$  și pentru  $\lambda = 1$ ,  $\theta = 1$ .

3. Dreptele  $\Delta$  și  $\Delta'$  sînt paralele respectiv cu tangentele la cerc în punctele  $I_\infty$  și  $I_0$ . Determinarea unui punct pe cerc se face mult mai greu printr-o tangentă decît printr-o secantă. În consecință, pentru a se determina punctul respectiv, se duce o paralelă cu tangenta corespunzătoare și, perpendiculara dusă prin centrul cercului pe această direcție va intersecta cercul în punctul căutat.

Într-adevăr, fie funcția

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

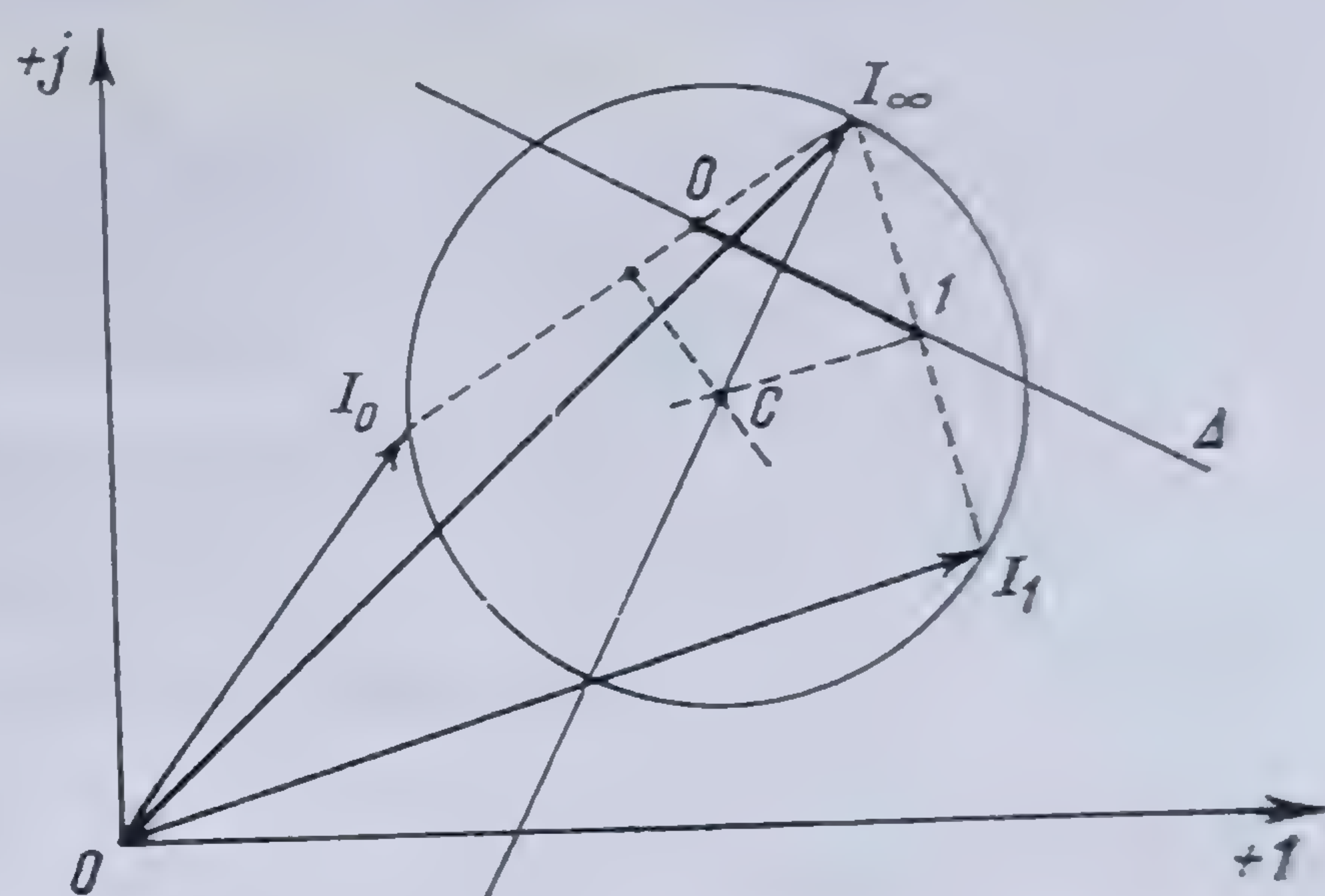


Fig. 6.115. Construcția industrială a fazorului  $\underline{I} = (\underline{A} + \lambda \underline{B})/(\underline{C} + \lambda \underline{D})$ .



care pentru o anumită valoare a lui  $\lambda$ , reprezintă fazorul  $OM$  (fig. 6.116). Dacă se dă lui  $\lambda$  o creștere,  $\Delta\lambda$  oricât de mică, îi va corespunde și lui  $\underline{I}$  o creștere, obținându-se relația

$$\underline{I}' = \underline{I} + \Delta\underline{I} = \frac{\underline{A} + (\lambda + \Delta\lambda)\underline{B}}{\underline{C} + (\lambda + \Delta\lambda)\underline{D}}$$

care este reprezentată de fazorul  $OM'$ .

Creșterea  $\Delta\underline{I}$  este reprezentată de coarda  $MM'$  și are valoarea

$$\Delta\underline{I} = \underline{I}' - \underline{I} = \frac{(\underline{B}\underline{C} - \underline{A}\underline{D})\Delta\lambda}{(\underline{C} + \lambda\underline{D}) \cdot [\underline{C} + (\lambda + \Delta\lambda)\underline{D}]}$$

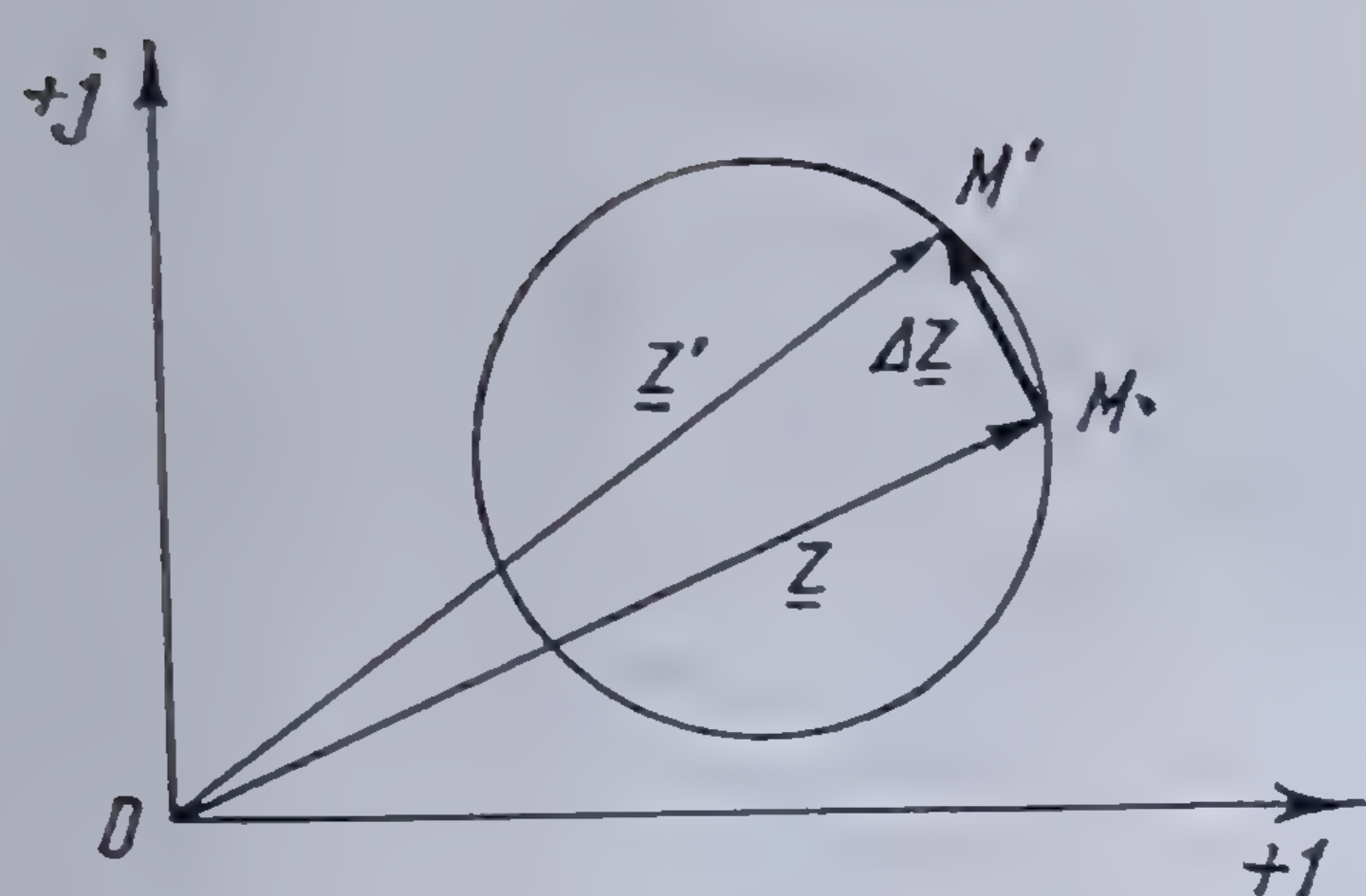


Fig. 6.116. Determinarea tangentei la cerc.

Direcția coardei  $MM'$  este dată de argumentul fazorului  $\Delta\underline{I}$  sau, ceea ce este tot una,  $\Delta\lambda$  fiind un număr real, al fazorului  $\frac{\Delta\underline{I}}{\Delta\lambda}$ . Făcînd pe  $\Delta\lambda$  să tindă către zero, coarda  $MM'$  devine tangentă la cerc în punctul  $M$  și direcția sa este dată de argumentul vectorului

$$\underline{T} = \frac{\underline{B}\underline{C} - \underline{A}\underline{D}}{(\underline{C} + \lambda\underline{D})^2}.$$

Dîndu-se diverse valori lui  $\lambda$ , se obțin direcțiile tangentelor corespunzătoare. Astfel,

$$\text{pentru } \lambda = 0, \underline{T}_{\lambda=0} = -\frac{\underline{B}\underline{C} - \underline{A}\underline{D}}{\underline{C}^2};$$

$$\text{pentru } \lambda = \infty, \underline{T}_{\lambda=\infty} = -\frac{\underline{B}\underline{C} - \underline{A}\underline{D}}{\underline{D}^2}.$$

La această ultimă expresie se ajunge pornind de la relația (6.177) în care se face schimbarea de variabilă

$$\lambda = \frac{1}{0}.$$

În acest caz, direcția tangentei este dată de argumentul vectorului

$$\underline{T}' = \frac{\underline{B}\underline{C} - \underline{A}\underline{D}}{(0\underline{C} + \underline{D})^2}$$

și se vede că

$$\underline{T}'_{0=0} = \underline{T}_{\lambda=\infty} = -\frac{\underline{B}\underline{C} - \underline{A}\underline{D}}{\underline{D}^2}.$$



*Cazuri particulare.* În raport cu forma fazorilor componenți se pot deosebi diverse cazuri particulare :

$$a) \quad \underline{A} = 0.$$

În acest caz, rezultă succesiv

$$\underline{I} = \frac{\lambda \underline{B}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}} = \frac{1}{\frac{\underline{C}}{\lambda \underline{B}} + \frac{\underline{D}}{\underline{B}}} = \frac{1}{\underline{C}_1 + 0 \underline{D}_1}$$

și locul geometric căutat este un cerc trecând prin origine, avînd diviziunile corespunzătoare inverselor variabilei date (cerc cu scară inversă).

$$b) \quad \underline{B} = 0.$$

În acest caz ecuația locului geometric se reduce la

$$\underline{I} = \frac{\underline{A}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

locul geometric căutat fiind un cerc trecînd prin origine.

$$c) \quad \underline{D} = 0.$$

Ecuația locului geometric devine

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\underline{C}},$$

care se vede ușor că este ecuația unei drepte.

$$d) \quad \underline{C} = 0.$$

Ecuația locului geometric devine

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\lambda \underline{D}} = \underline{A}_1 + 0 \underline{B}_1,$$

în care

$$\underline{A}_1 = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}, \quad \underline{B}_1 = \frac{\underline{A}}{\underline{D}} \quad \text{și} \quad 0 = \frac{1}{\lambda};$$

rezultă dar, că locul geometric căutat este o dreaptă ale cărei diviziuni sînt inversele variabilei date.

$$e) \quad \underline{A} = m \underline{B}.$$



În acest caz ecuația locului geometric devine

$$\underline{I} = (m + \lambda) \underline{B} \frac{1}{\underline{C} + \lambda \underline{D}}, \quad (6.179)$$

care este ecuația unui cerc trecînd prin origine. Într-adevăr, punînd

$$\theta = \frac{1}{m + \lambda}, \quad (6.180)$$

ecuația (6.178) se poate scrie

$$\underline{I} = \frac{\underline{B}}{\underline{D} + (\underline{C} - m\underline{D}) \theta},$$

care este ecuația unui cerc trecînd prin origine cu scara funcțională  $\theta$ .

$$f) \quad \underline{C} = m \underline{D}.$$

Ecuția locului devine

$$\underline{I} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{(m + \lambda) \underline{D}}$$

și făcînd aceeași substituție (6.179) se obține

$$\underline{I} = \left( \frac{\underline{B}}{\underline{D}} \right) + \left( \frac{\underline{A} - m \underline{B}}{\underline{D}} \right) \theta,$$

care este o dreaptă cu scara funcțională (6.180).

Dacă în același timp și mărimea complexă  $\underline{B}$  este nulă, dreapta loc geometric trece prin origine, care corespunde valorii  $\lambda = \infty$ .

**6.6.3.4. Locul geometric al fazorului  $\underline{I} = \underline{F} + \underline{R} \angle \varphi$ .** Sînt cazuri cînd variabila este un unghi, cum ar fi cazul unei mărimi reprezentată în funcție de un defazaj. Ecuația locului geometric este

$$\underline{I} = \underline{F} + \underline{R} \varepsilon^{j\varphi} = \underline{F} + \underline{R} \angle \varphi, \quad (6.181)$$

în care  $\underline{F}$  și  $\underline{R}$  sînt doi fazori constanți. Construirea locului se face imediat, observînd că fazorul  $\underline{R}$ , construit în vîrfurile fazorului  $\underline{F}$  se rotește în sensul direct cînd  $\varphi$  variază. Locul respectiv este deci un cerc cu centrul în vîrfurile fazorului  $\underline{F}$  și de rază  $\underline{R}$ ; gradația zero a acestui cerc se obține pentru  $\varphi = 0$ . Cercul se gradează în unități de  $\varphi$  (fig. 6. 117).



Un caz particular interesant este pentru  $\underline{F} = 0$ , locul respectiv fiind un cerc cu centrul în origine și cu raza egală cu modulul fazorului  $\underline{R}$ .

**OBSERVAȚIE.** Ecuațiile (6.177) și (6.181) reprezentând ecuația generală a unui cerc, ele se pot deduce una din cealaltă. Aceasta se obține prin identificarea celor două ecuații.

Pentru aceasta este necesar să fie modificată forma ecuației (6.181). În această ecuație  $\varepsilon^{j\varphi}$  este un fazor de modul unitate și de argument variabil. Punând

$$\varepsilon^{j\varphi} = \frac{\underline{C}^* + \lambda \underline{D}^*}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

rezultă

$$\text{mod. } \varepsilon^{j\varphi} = 1,$$

$$\text{tg } \varphi = -2 \frac{(c_1 + \lambda d_1)(c_2 + \lambda d_2)}{(c_1 + \lambda d_1)^2 - (c_2 + \lambda d_2)^2} = f(\lambda).$$

Relația (6.181) se poate scrie

$$\underline{I} = \underline{F} + \underline{R} \frac{\underline{C}^* + \lambda \underline{D}^*}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

care identificată cu relația (6.177) dă

$$\underline{F} \cdot \underline{C} + \underline{R} \cdot \underline{C}^* = \underline{A},$$

$$\underline{F} \cdot \underline{D} + \underline{R} \cdot \underline{D}^* = \underline{B}$$

și rezultă

$$\underline{F} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{D}^* - \underline{B} \cdot \underline{C}^*}{\underline{C} \cdot \underline{D}^* - \underline{D} \cdot \underline{C}^*} \text{ și } \underline{R} = \frac{\underline{B} \cdot \underline{C} - \underline{A} \cdot \underline{D}}{\underline{C} \cdot \underline{D}^* - \underline{D} \cdot \underline{C}^*}.$$

Modulul razei se calculează ușor din expresia respectivă.

Rezultă de aici că locul geometric căutat este perfect determinat atunci când se cunoaște fazorul care determină centrul și modulul razei.

**6.6.3.5. Locuri geometrice de ordin superior.** S-a arătat mai înainte că studiul circuitelor electrice (mașini sau rețele) conduce la un sistem de ecuații liniare între cantitățile complexe ale curentului, impedanței și forței electromotoare, care rezolvate dau o relație de forma (6.168)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{B}_0 + \lambda \underline{B}_1 + \lambda^2 \underline{B}_2 + \dots + \lambda^n \underline{B}_n}{\underline{A}_0 + \lambda \underline{A}_1 + \lambda^2 \underline{A}_2 + \dots + \lambda^m \underline{A}_m},$$

în care  $\underline{A}$  și  $\underline{B}$  sînt cantități complexe (fazori) iar  $\lambda$  o variabilă reală care caracterizează funcționarea circuitului și în raport cu care se studiază această funcționare. Cum  $\lambda$  poate lua orice valoare între  $-\infty$  și  $+\infty$ , rezultă că vârful fazorului  $\underline{Z}$  va descrie o curbă, care a fost numită locul geometric al fazorului  $\underline{Z}$  sau diagrama-loc geometric.

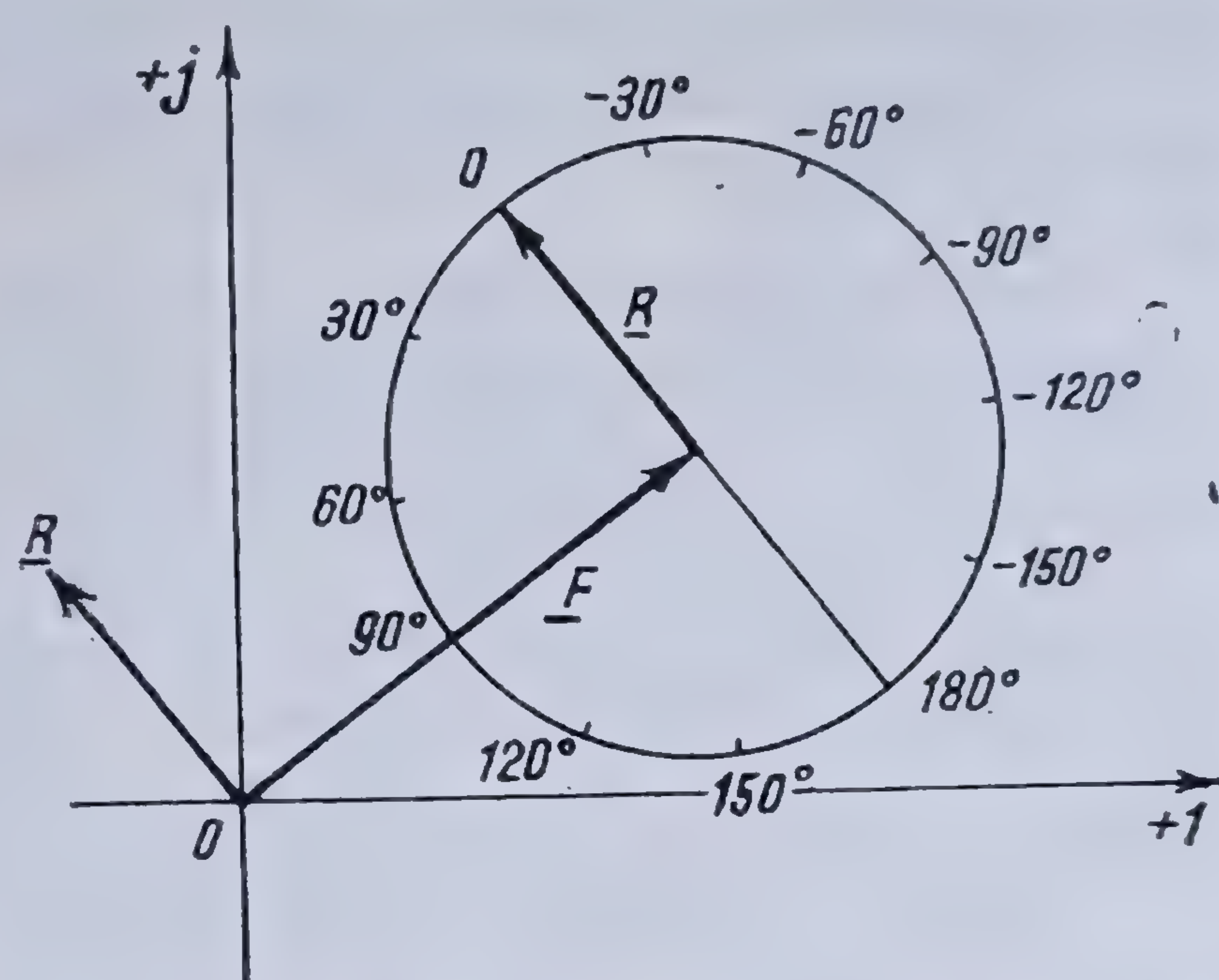


Fig. 6.117. Locul geometric al fazorului  $\underline{I} = \underline{F} + \underline{R} \varepsilon^{j\varphi}$ .



Ecuatia (6.168) este o curbă de un grad oarecare în  $\lambda$ . În cele ce preced au fost studiate curbele la care variabila era de gradul întâi și anume: curbele de ordinul întâi (dreapta) și curbele de ordinul doi (cercul).

În studiul mașinilor electrice, a circuitelor din radiotehnică etc., apar uneori curbe la care variabila este de un grad mai mare decât unu, formînd astfel clasa curbelor de ordin superior.

Este necesar a se face de la început o deosebire între gradul variabilei și ordinul curbei respective. Astfel, ecuațiile

$$\underline{Z} = \underline{A} + \lambda^2 \underline{B} \text{ și } \underline{P} = \underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^2 \underline{C}$$

sînt amîndouă ecuații de gradul doi în  $\lambda$ ; însă pe cînd prima, prin substituția  $\lambda^2 = \theta$  devine ecuația unei *drepte*, deci o curbă de ordinul întâi, în a doua ecuație această substituție nemaiputîndu-se face, curba rămîne o curbă de ordinul doi.

Se obișnuiește a se numi dreapta a cărei variabilă este  $\lambda^2$ , o *dreaptă de ordinul doi*; de asemenea cercul a cărei variabilă este  $\lambda^2$  se numește un *cerc de ordinul patru*. O caracteristică a acestor curbe este că ele nu conțin decît diviziuni pozitive, iar scara de divizare (dreapta  $\Delta$ ) are diviziuni pătratice.

În categoria curbelor de ordinul doi intră și *conicele*, elipsa, parabola și hiperbola, curbe care apar destul de des în studiul mașinilor electrice, cercul fiind un caz particular al acestora. Studiul acestor curbe se efectuează direct, întocmai ca și în cazul dreptei și cercului, fără a se trece prin coordonatele carteziane, și construcția lor se face prin puncte, dînd diverse valori variabilei.

Ecuatia generală a conicelor este

$$\underline{K} = \frac{\underline{A}' + v \underline{B}' + v^2 \underline{C}'}{a + vb + v^2 c},$$

în care  $v$  este variabila și  $a, b, c$  numere reale. Trinomul de la numitorul acestei expresii poate fi pus sub forma

$$c (v - v_1) (v - v_2),$$

în care

$$v_{1,2} = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}}$$

sînt rădăcinile sale. Natura conicelor depinde de natura acestor rădăcini, deci de natura realizantului lor.

a) *Elipsa*. Dacă realizantul rădăcinilor numitorului ecuației conicelor este imaginar, rădăcinile  $v_1$  și  $v_2$  sînt complex conjugate și conica este o elipsă. Făcînd în ecuația conicei substituția

$$2v = (v_1 + v_2) + j (v_1 - v_2) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

în care  $\theta$  este un unghi real, ecuația elipsei devine

$$\underline{H} = \underline{A} + \underline{B} \epsilon^{j\theta} + \underline{C} \epsilon^{j\theta} \quad (6.182)$$



în care

$$\underline{A} = -\frac{1}{c(v_1 - v_2)^2} [2 \underline{A}' + (v_1 + v_2) \underline{B}' + 2 v_1 v_2 \underline{C}'],$$

$$\underline{B} = -\frac{1}{c(v_1 - v_2)^2} [\underline{A}' + v_2 \underline{B}' + v_2^2 \underline{C}'],$$

$$\underline{C} = -\frac{1}{c(v_1 - v_2)^2} [\underline{A}' + v_1 \underline{B}' + v_1^2 \underline{C}'].$$

Studiul și construcția elipsei se face ușor cu ajutorul ecuației (6.182), din care rezultă că centrul său se găsește în vârful fazorului  $\underline{A}$ . Pentru a construi elipsa se trasează, cu centrul în vârful vectorului  $\underline{A}$ , două cercuri cu razele  $|\underline{B}|$  și  $|\underline{C}|$ , care se gradează unul în sens invers (cercul de rază  $|\underline{B}|$ ) și celălalt în sens direct (cercul de rază  $|\underline{C}|$ ) (fig. 6.118).

Originea gradării corespunde unghiului  $\theta = 0$  și se obține ducând în vârful fazorului  $\underline{A}$  fazori echipolenți cu vectorii  $\underline{B}$  și  $\underline{C}$ . Punctul de zero al locului geometric corespunde sumei

$$\underline{H}_0 = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}.$$

Locul geometric se obține efectuând suma (6.182) pentru diverse valori ale lui  $\theta$ .

Cele două semiaxe sînt fazori cu originea în centrul elipsei (vârful fazorului  $\underline{A}$ ) și avînd modulele, respectiv,  $[|\underline{B}| + |\underline{C}|]$  și  $[|\underline{B}| - |\underline{C}|]$ .

Argumentul  $\theta_1$  al axei mari corespunde unghiului  $\theta$  pentru care cei doi fazori  $\underline{B}$  și  $\underline{C}$  sînt în fază, iar argumentul  $\theta_2$  al axei mici corespunde unghiului  $\theta$  pentru care cei doi fazori  $\underline{B}$  și  $\underline{C}$  sînt în opoziție, cele două argumente fiind legate prin relația  $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Grafic, argumentul  $\theta_1$  al axei mari se determină observînd că cei doi fazori se rotesc în sensuri contrarii cînd  $\theta$  variază și ei vor coincide cînd unghiurile parcurse de cei doi vectori vor fi egale. Mărimea unghiului  $\theta$  de rotire al celor doi fazori, pentru momentul de coincidență de fază, se determină cu ajutorul relației metrice

$$\beta - \theta = \gamma + \theta,$$

în care  $\beta$  este argumentul fazorului  $\underline{B}$  iar  $\gamma$  argumentul fazorului  $\underline{C}$ , din care se deduce

$$\theta = \frac{\beta - \gamma}{2};$$

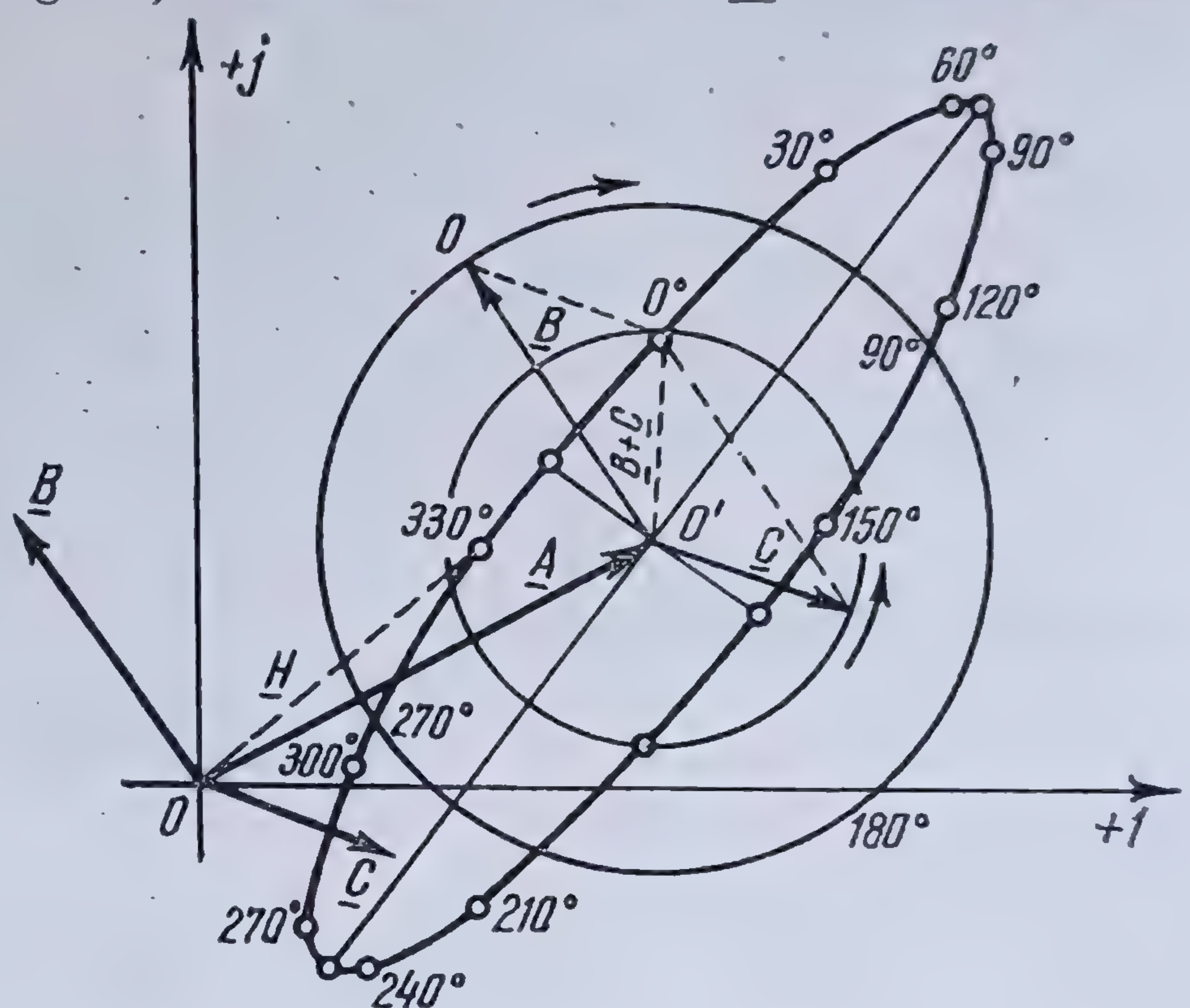


Fig. 6.118. Construcția elipsei.



în consecință, direcția axei mari coincide cu direcția unghiului bisectoarei dintre cei doi fazorî.

În cazul particular  $\underline{B} = 0$  (sau  $\underline{C} = 0$ ), ecuația (6.182) se transformă în ecuația (6.181) a cercului.

Dacă fazorii  $\underline{B}$  și  $\underline{C}$  au modulele egale,  $|\underline{B}| = |\underline{C}|$ , atunci  $\underline{C} = \underline{B} e^{i\gamma}$  iar relația (6.182) devine

$$\underline{H} = \underline{A} + \underline{B} [e^{-i\theta} + e^{i(\theta+\gamma)}],$$

din care se vede că elipsa degenerază într-un segment de dreaptă, avînd direcția axei mari a elipsei.

b) *Parabola*. În acest caz, realizantul rădăcinilor numitorului ecuației conicelor este nul. Făcînd în ecuația conicei substituția

$$\lambda = \frac{1}{v + \frac{b}{2c}},$$

de unde

$$v = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \lambda \frac{b}{2c} \right),$$

se obține ecuația parabolei

$$\underline{P} = \underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^2 \underline{C}, \quad (6.183)$$

în care

$$\underline{A} = \frac{\underline{C}'}{c};$$

$$\underline{B} = -\frac{1}{c} \left[ \underline{B}' - \frac{b}{2c} \underline{C}' \right];$$

$$\underline{C} = \frac{1}{c} \left[ \underline{A}' - \frac{b}{2c} \underline{B}' + \frac{b^2}{4c^2} \underline{C}' \right].$$

Construcția acestei curbe se face adăugîndu-se la fiecare punct al dreptei  $\underline{A} + \lambda \underline{B}$  fazorul  $\lambda^2 \underline{C}$ , a cărui modul crește cu pătratul lui  $\lambda$  (fig. 6.119)\*.

Punctul de zero al diagramei coincide cu vîrfurile fazorului  $\underline{A}$ .

Se observă, de asemenea, că axa parabolei este paralelă cu dreapta  $\underline{A} + \lambda^2 \underline{C}$ , adică cu fazorul  $\underline{C}$ . Față de direcția fazorului  $\underline{B}$ , dreapta  $\underline{A} + \lambda^2 \underline{C}$  este un diametru conjugat.

c) *Hiperbola*. Realizantul rădăcinilor numitorului ecuației conicelor este în acest caz real și, dacă se face substituția

$$\lambda = \frac{v - v_1}{v - v_2},$$

\* Se poate obține parabola și dacă se pornește de la dreapta de ordinul doi  $\underline{A} + \lambda^2 \underline{C}$  la care se adaugă fazorul  $\lambda \underline{B}$ .



se obține ecuația hiperbolei sub forma

$$\underline{U} = \underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^{-1} \underline{C},$$

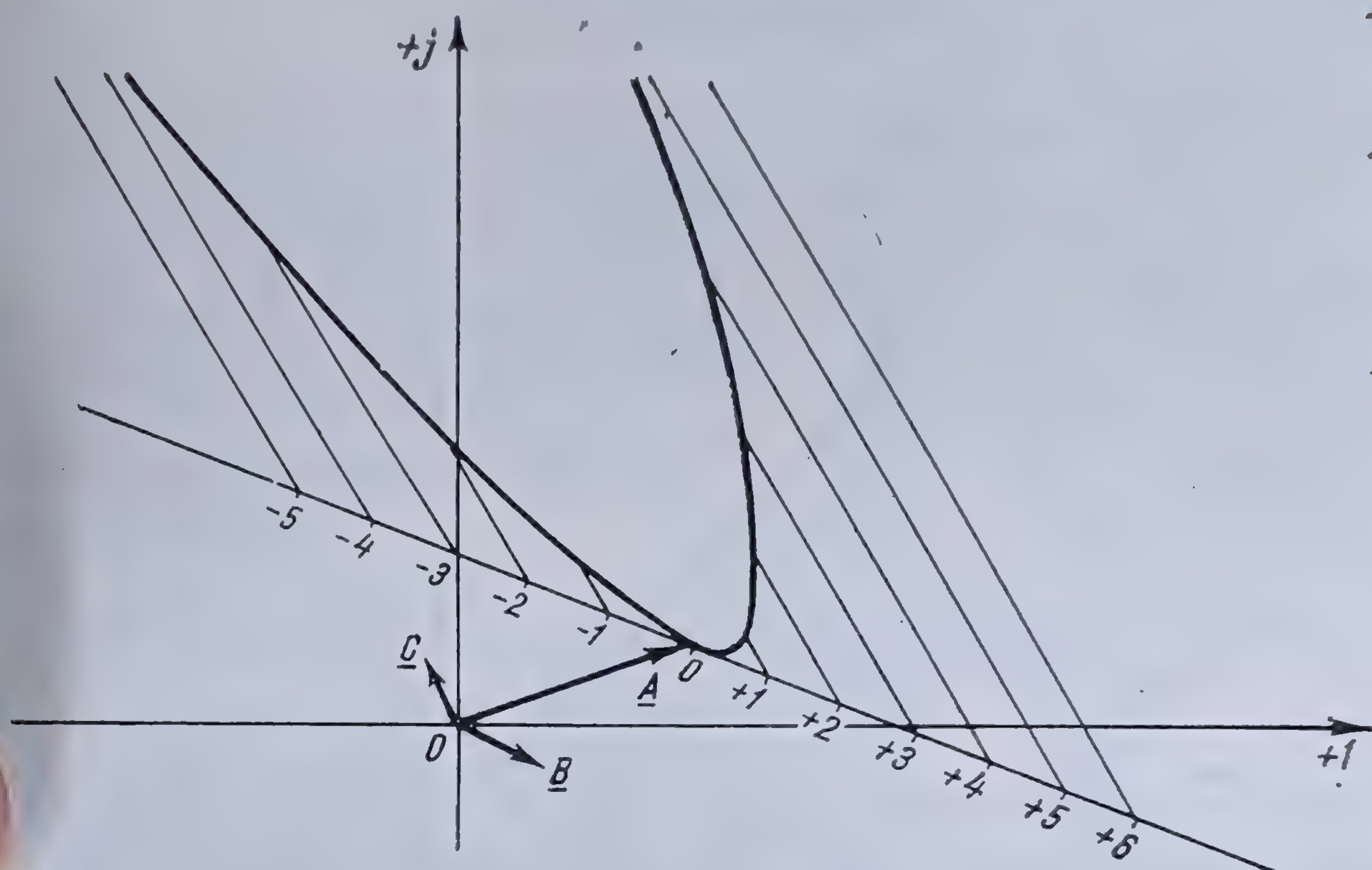


Fig. 6.119. Construcția parabolei.

în care

$$\underline{A} = \frac{1}{c(v_1 - v_2)^2} [2 \underline{A}' + (v_1 + v_2) \underline{B}' + 2v_1 v_2 \underline{C}'],$$

$$\underline{B} = \frac{1}{c(v_1 - v_2)^2} [\underline{A}' + v_2 \underline{B}' + v_2^2 \underline{C}'],$$

$$\underline{C} = \frac{1}{c(v_1 - v_2)^2} [\underline{A}' + v_1 \underline{B}' + v_1^2 \underline{C}'].$$

Construcția acestei curbe se face observând că dreptele

$$\underline{D}_1 = \underline{A} + \lambda \underline{B} \text{ și } \underline{D}_2 = \underline{A} + \lambda^{-1} \underline{C}$$

sînt asimptotele curbei și se întretaie în vârful fazorului  $\underline{A}$  (fig. 6.120).

În consecință, dreptei  $\underline{D}_1$  i se adaugă fazorului  $\lambda^{-1} \underline{C}$ , iar dreptei  $\underline{D}_2$ , căreia i se face în prealabil substituția  $\lambda^{-1} = 0$ , fazorului  $\lambda \underline{B} = 0^{-1} \underline{B}$ , obținîndu-se ambele ramuri ale curbei,  $\lambda$ , respectiv 0, variînd între  $-\infty$  și  $+\infty$ .

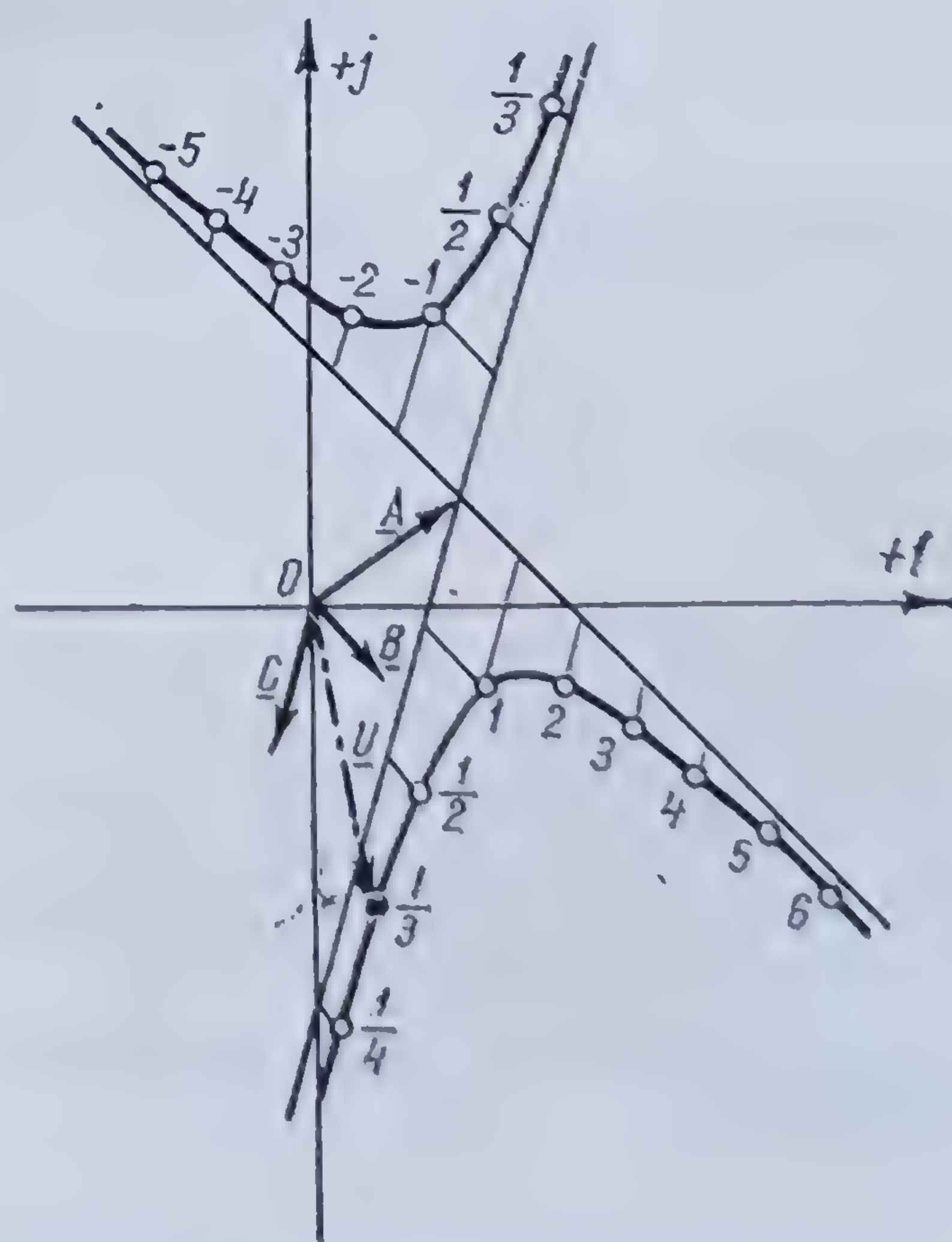


Fig. 6.120. Construcția hiperbolei.



Dintre curbele de ordin superior se va studia o curbă de ordinul trei, *cubica circulară*, și o curbă de ordinul patru, *melcul lui PASCAL*.

d) *Cubica circulară*. Are ecuația

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^2 \underline{C}}{\underline{D} + \lambda \underline{E}}.$$

Efectuând diviziunea, se obține

$$\underline{K} = \underline{R} + \lambda \underline{S} + \underline{T} \times \underline{I}_0,$$

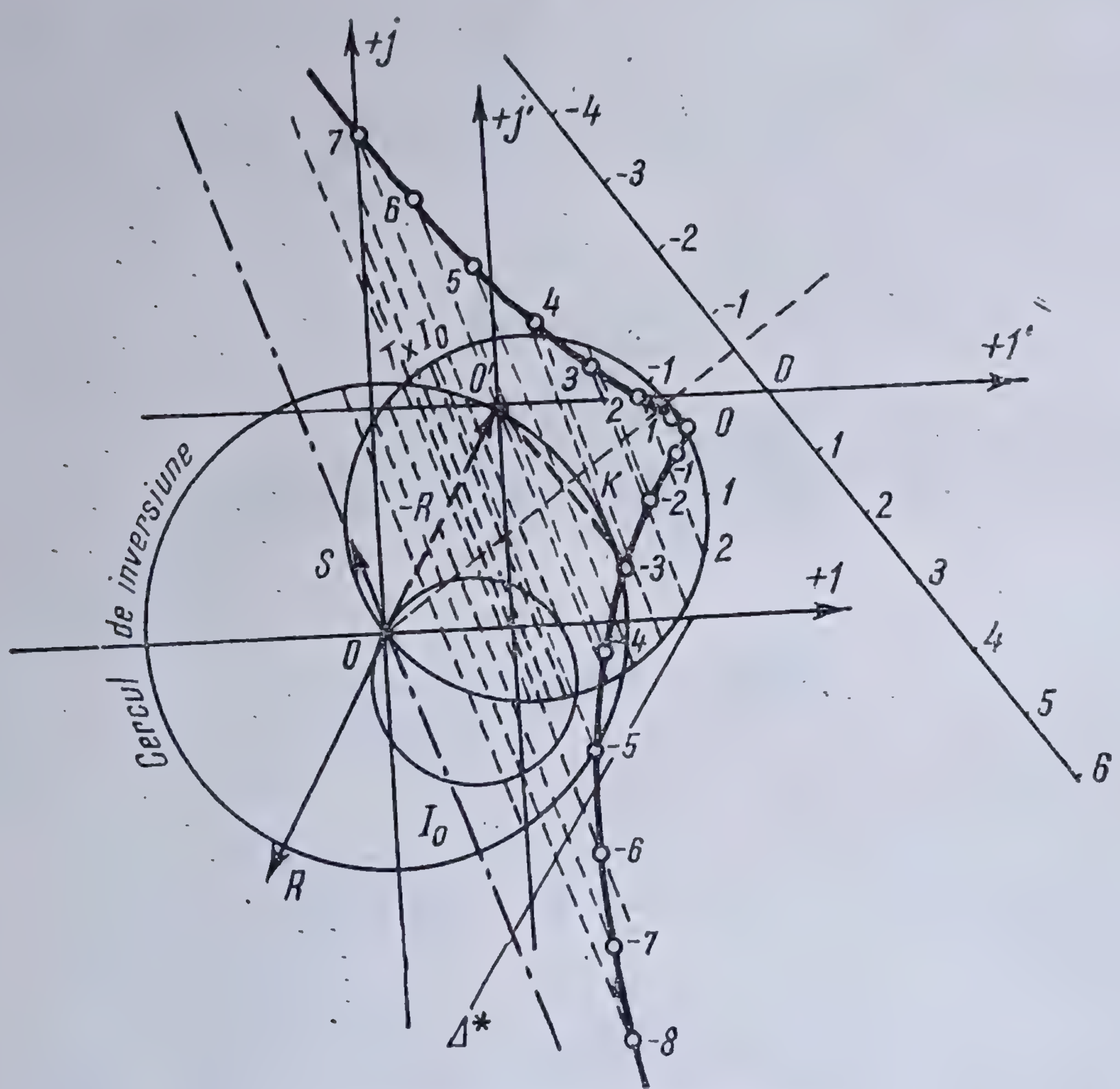


Fig. 6.121. Construcția cubicei circulare

în care s-a notat

$$\underline{R} = \frac{\underline{B} - \frac{\underline{C}}{\underline{E}} \underline{D}}{\underline{E}}; \quad \underline{S} = \frac{\underline{C}}{\underline{E}}; \quad \underline{T} = \underline{A} - \underline{R} \cdot \underline{D}; \quad \underline{I}_0 = \frac{1}{\underline{D} + \lambda \underline{E}}.$$

Construcția acestui loc geometric (fig. 6.121) se face adăugînd fiecărui punct al cercului  $\underline{T} \times \underline{I}_0$  fazorii  $\lambda \underline{S}$ . Se observă că fazorul  $\underline{R}$  are ca efect schimbarea originii axelor de coordonate, în vîrfurile fazorului  $-\underline{R}$  și că, pentru  $\lambda = \infty$ , dreapta  $\underline{R} + \lambda \underline{S}$  devine infinită, ceea ce înseamnă că ea este asimptotă la curbă. Curbă se trasează prin puncte și gradarea ei se face în raport cu gradarea cercului  $\underline{T} \times \underline{I}_0$ .

e) *Quarticele*. Sînt curbe de gradul patru, a căror ecuație generală este de forma

$$\underline{Q} = \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B} + \lambda^2 \underline{C}}{\underline{D} + \lambda \underline{E} + \lambda^2 \underline{F}}.$$



Sub forma aceasta generală, curbele de gradul patru sînt rar întîlnite în electrotehnică. Mai des se întîlnește un caz particular al acestor curbe și anume *melcul lui PASCAL* a cărui ecuație este

$$\underline{M} = \underline{A} + \underline{B}\varepsilon^{-j\theta} + \underline{C}\varepsilon^{-j2\theta} \quad (6.184)$$

și a cărui construcție se face întocmai ca și cea a elipsei (fig. 6.122): în vârful fazorului  $\underline{A}$  se trasează cercurile concentrice de rază  $|\underline{B}|$  și  $|\underline{C}|$ , după care curba se construiește prin puncte. Gradarea se face în funcție de unghiul  $\theta$ , fiecare punct corespunzînd sumei fazoriale (6.184).

Punctul zero al acestui loc geometric corespunde sumei

$$\underline{M}_0 = \underline{A} + \underline{B} + \underline{C}.$$

Axa sa de simetrie trece prin vârful fazorului  $\underline{A}$  și este paralelă cu simetricul vectorului  $\underline{C}$  față de fazorul  $\underline{B}$ . Pentru  $C > B/2$ , melcul are un punct dublu real situat pe cercul de rază  $C$ . Pentru  $C = B/2$ , punctul dublu este un punct de întoarcere și melcul devine o *cardioidă*. Pentru  $C < B/2$ , punctul dublu este imaginar.

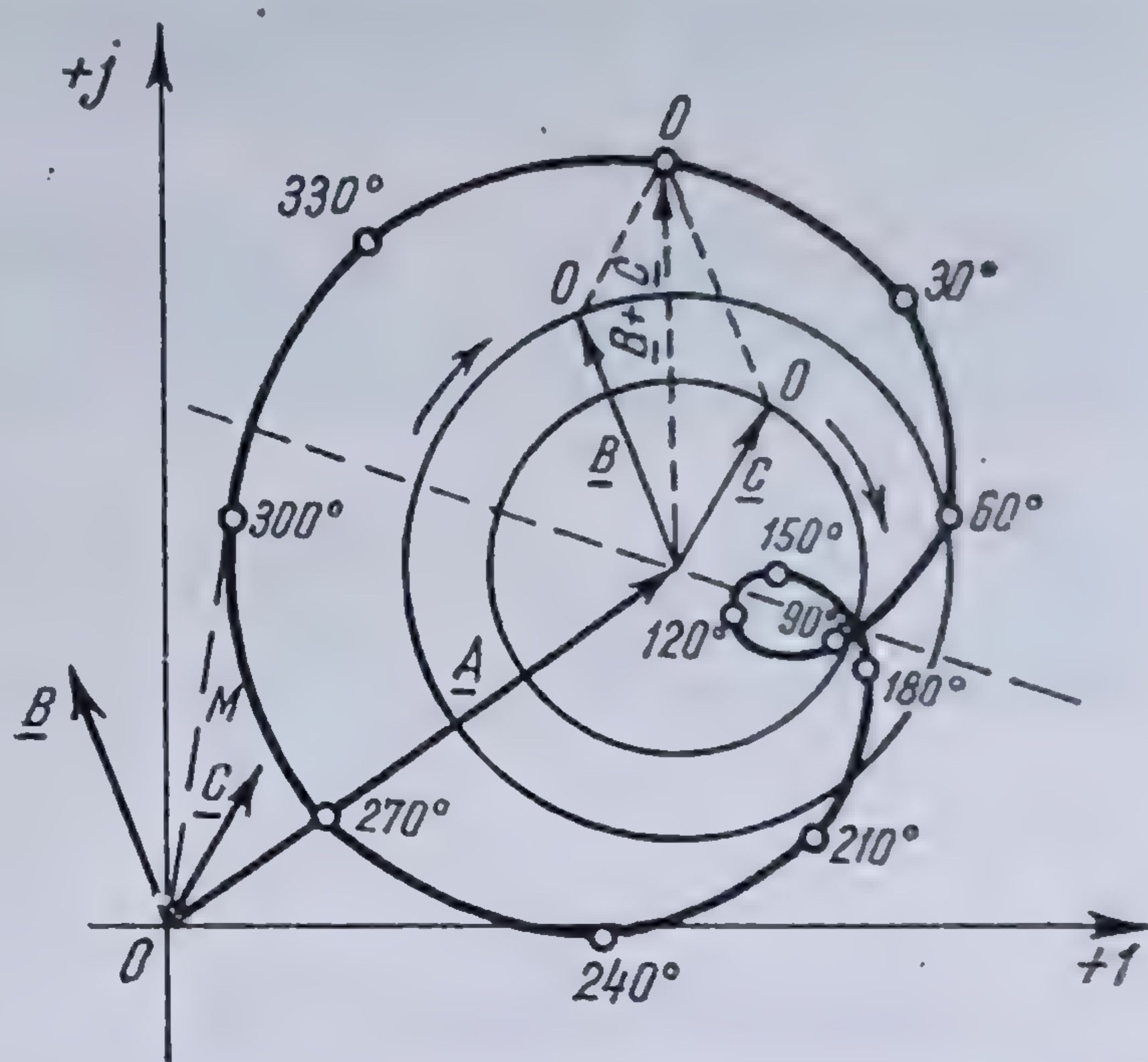


Fig. 6.122. Construcția melcului lui PASCAL.

#### 6.6.4. DESPRE SCĂRILE GRAFICE

În calculele grafice care se fac cu fazorii este necesar, ca după ce s-a trasat epura să se poată citi rezultatele.

Pentru aceasta, trebuie să se cunoască corespondența care există între diversele scări. Aceasta trebuie să constituie o preocupare numai în cazul înmulțirii, împărțirii și inversiunii.

Într-adevăr, numai în aceste cazuri se fac operații între mărimi de natură cu totul diferită, rezultatul putînd fi o mărime a cărei natură să fie de asemenea diferită de a componentelor. Astfel, înmulțind algebric un fazor tensiune cu un fazor curent, se obține o mărime complexă care reprezintă o putere.

O dată stabilită corespondența scărilor, se trasează scara rezultantă, care rămîne valabilă oricîte operații de același fel sînt de efectuat pe aceeași epură.

Fie produsul

$$\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I},$$

care trebuie efectuat grafic prin metoda cunoscută\*. Pentru aceasta, se iau următoarele scări:

pentru impedanța $Z$	1 $\Omega = a$ mm
pentru curentul $I$	1 A = $b$ mm
pentru vectorul unitate	$c$ mm.

și fie  $x$  mm scara tensiunii rezultante.

\* Vezi 4.2.4.2.



Din figura 4.20, care dă grafic mărimea modulului, rezultă

$$\frac{U}{Z} = \frac{I}{1}, \quad (6.185)$$

ținând seamă de modulele scărilor, se obține

$$U[x] = \frac{Z [a] \times I [b]}{1 \cdot [c]},$$

și cum

$$U = ZI,$$

rezultă că

$$[x] = \frac{[a] [b]}{[c]}. \quad (6.186)$$

*Exemplu numeric.* Fie

$$a = 20 \text{ mm}; b = 10 \text{ mm}; c = 25 \text{ mm};$$

rezultă

$$[x] = \frac{20 \times 10}{25} = 8 \text{ mm},$$

adică pentru scara tensiunilor se va lua  $1 \text{ V} = 8 \text{ mm}$ .

Relația (6.185) se aplică și în cazul diviziunii. Într-adevăr, fie de data aceasta  $y$  mm scara necunoscută a curentului,  $a$  mm scara tensiunilor,  $b$  mm scara impedanțelor și  $c$  mm scara luată pentru vectorul unitate. Se obține

$$I [y] = \frac{U [a]}{Z [b]} \times 1 [c],$$

de unde rezultă

$$[y] = \frac{[a] [c]}{[b]}.$$

Cu valorile din exemplul numeric precedent, se găsește

$$[y] = \frac{8 \times 25}{20} = 10 \text{ mm}.$$

Fie acum, cazul inversiunii

$$Y = \frac{k^2}{Z}.$$



Raționând ca mai sus, se obține

$$[y] = \frac{[c]^2}{[a]} \quad (6.187)$$

și, în cazul numeric tratat, pentru  $a = 20 \text{ mm}/\Omega$  și  $c = 25 \text{ mm}$ , se găsește  $y = 31,25 \text{ mm}$ .

**OBSERVAȚIE.** În toate operațiile grafice în care intervine *vectorul unitate*, al cărui modul este fixat în mod cu totul arbitrar, acesta poate fi astfel fixat, încât dându-se anumite module pentru două dintre mărimi, să rezulte un anumit modul pentru a treia mărime.

Astfel, în cazul inversiunii, problema se poate pune în felul următor: scara impedanțelor fiind  $a \text{ mm}/\Omega$ , care este raza cercului de inversiune, pentru ca scara admitanțelor să fie  $b \text{ mm}/S$ ? Ținând seama de relația (6.187) se obține

$$c = \sqrt{ab} \text{ mm}.$$

De asemenea, în exemplul dat în cazul înmulțirii, care este valoarea ce trebuie dată modului vectorului unitate, pentru ca, pentru  $a = 20 \text{ mm}/\Omega$  și  $b = 10 \text{ mm}/A$ , să rezulte  $x = 10 \text{ mm}/V$ ?

Din relația (6.186) se deduce imediat

$$[c] = \frac{[a] [b]}{[x]} = \frac{20 \times 10}{10} = 20 \text{ mm}.$$

#### 6.6.5. TRANSPUNEREA UNEI DIAGrame-LOC GEOMETRIC ÎNTR-O CURBĂ CARACTERISTICĂ

Orice diagramă-loc geometric, obținută în modul cum s-a arătat mai sus, poate fi transpusă într-o curbă care să reprezinte într-un sistem de axe de coordonate, variația fazorului respectiv în funcție de variabila considerată. Pentru aceasta, se va lua un sistem de axe de coordonate în care, în abscisă se vor pune mărimi proporționale cu variabila considerată, iar în ordonate mărimi proporționale cu vectorul a cărui variație se studiază (fig. 6.123).

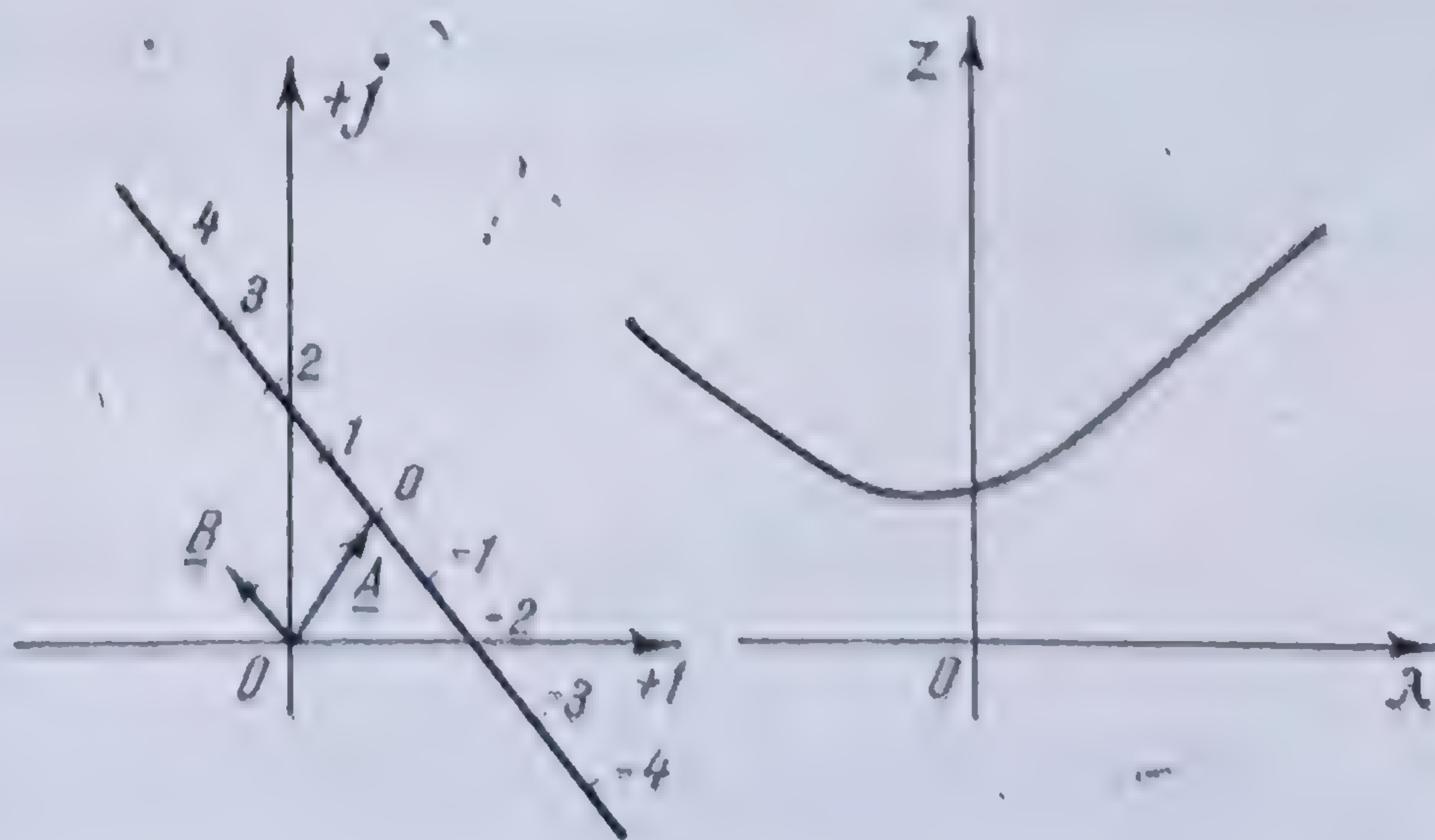


Fig. 6.123. Curbă caracteristică.



Se obțin astfel o serie de puncte, care unite vor da o curbă numită *curba caracteristică* a fenomenului studiat.

#### 6.6.6. DREAPTA PUTERII

Pentru a se putea rezolva cu ajutorul diagramei-loc geometric toate problemele privind funcționarea circuitului electric corespunzător, aceasta trebuie completată cu anumite elemente, care să permită determinarea ușoară a mărimilor căutate. Una din aceste mărimi este *puterea*, activă sau reactivă, sub ambele ei aspecte, *puterea dată* din afara unui circuit, ceea ce este tot una cu *puterea absorbită* de circuit, și *puterea utilă*, transformată sau utilizată efectiv de circuit. Cu ajutorul acestor elemente se pot deduce ușor *pierderile* în circuit și *randamentul* circuitului.

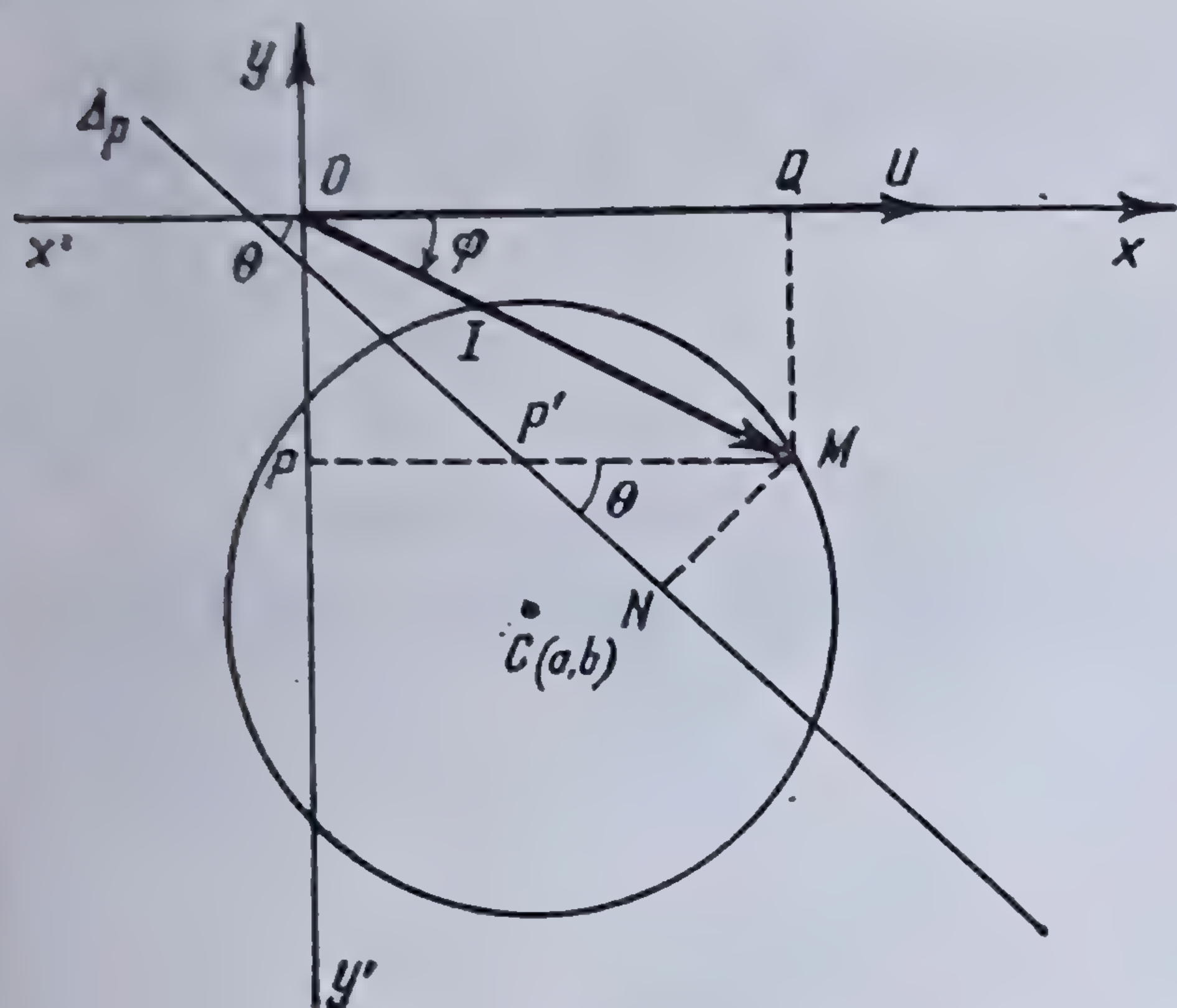


Fig. 6.124. Dreapta puterii.

Aceste elemente se pot determina foarte ușor, numai prin simpla măsurare a distanței de la un punct al diagramei cercului la anumite drepte fixe trasate pe această diagramă.

În cele ce urmează se va examina numai problema puterii active, problema puterii reactive tratându-se în același mod.

a) *Puterea dată*. Fie diagrama cercului pentru un curent (fig. 6.124). Se observă că, dacă se ia tensiunea de alimentare ca origine de fază, puterea

activă totală absorbită la bornele de intrare, este dată, la o anumită scară, de abscisa  $\overline{MP}$  a punctului  $M$  de funcționare considerat. Într-adevăr,

$$\overline{MP} = I_p = I \cos \varphi,$$

astfel, încît puterea activă dată circuitului este

$$P_1 = UI_p = UI \cos \varphi = U(\overline{MP}).$$

Tensiunea fiind constantă, puterea activă dată circuitului se măsoară prin distanța de la punctul considerat la axa ordonatelor.

De asemenea, ordonata punctului  $M$  măsoară puterea reactivă dată circuitului. Într-adevăr,

$$\overline{MQ} = I_d = I \sin \varphi$$

și deci,

$$Q_1 = UI \sin \varphi = U(\overline{MQ}).$$

b) *Puterea utilă*. Se numește putere utilă  $P_2$ , puterea activă ce se consumă în impedanța variabilă legată la bornele de ieșire ale circuitului. Această pu-



tere este egală cu *puterea dată* din care se scad pierderile prin efect JOULE-LENZ din circuit și care pot fi exprimate prin relația

$$p = RI^2,$$

unde  $R$  este o constantă, corespunzând rezistenței echivalente a circuitului.

Dacă  $x$  și  $y$  sînt coordonatele punctului  $M$  considerat, atunci pierderile JOULE pot fi exprimate prin relația

$$p = R(x^2 + y^2).$$

Ecuția cercului loc-geometric fiind

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2,$$

în care  $a$ ,  $b$  și  $\rho$  sînt coordonatele centrului și raza, rezultă că

$$x^2 + y^2 = 2ax + 2by + (\rho^2 - a^2 - b^2)$$

și deci

$$p = 2Rax + 2Rby + R(\rho^2 - a^2 - b^2).$$

Puterea dată fiind

$$P_1 = Ux,$$

puterea utilă se poate scrie

$$P_2 = P_1 - p = (U - 2Ra)x - 2Rby - R(\rho^2 - a^2 - b^2);$$

$P_2$  are deci o formă liniară

$$P_2 = Ax + By + C.$$

Fie dreapta  $\Delta_p$ , a cărei ecuație este

$$P_2 = 0.$$

Ordonata la origine a acestei drepte este

$$y_0 = -\frac{C}{B} = \frac{a^2 + b^2 - \rho^2}{2b},$$

iar coeficientul ei unghiular

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{A}{B} = \frac{U - 2Ra}{2Rb},$$

de unde se deduce

$$\sin \theta = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Distanța de la punctul  $M$  (de coordonate  $x$  și  $y$ ) la dreapta

$$Ax + By + C = 0$$



este dată de relația

$$\overline{MN} = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{P_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Înălțimea segmentului  $\overline{MP'}$ , paralel cu axa  $Ox$ , este

$$\overline{MP'} = \frac{\overline{MN}}{\sin \theta} = - \frac{P_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{A},$$

de unde rezultă că

$$P_2 = -A(\overline{MP'}) = (2Ra - U)(\overline{MP'}).$$

În consecință, puterea utilă  $P_2$  se măsoară prin segmentul de dreaptă  $\overline{MP'}$ , raportat la scara respectivă, cantitatea  $(2Ra - U)$  fiind o constantă.

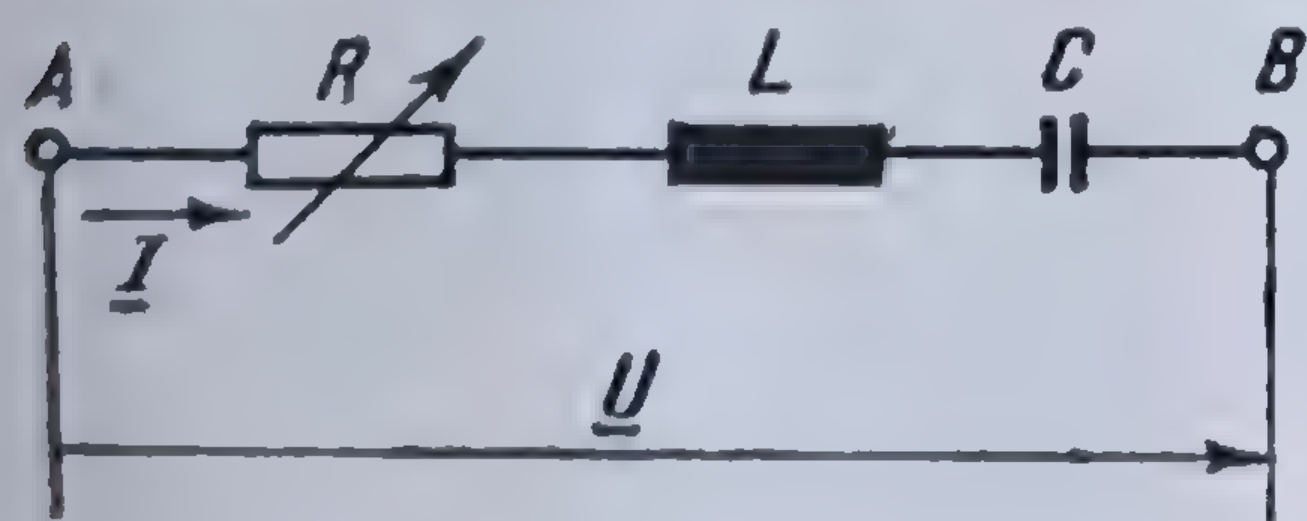
**OBSERVAȚII.** 1. Puterea utilă este nulă pentru  $\lambda = 0$  și  $\lambda = \infty$ . Într-adevăr, pentru  $\lambda = 0$ , circuitul este în scurtcircuit și deci puterea utilă consumată în impedanța de utilizare este nulă. De asemenea când  $\lambda = \infty$ , bornele de ieșire ale circuitului sînt izolate, puterea utilă este nulă și în acest caz. În consecință, distanțele corespunzătoare punctelor de pe cerc pentru care  $\lambda = 0$  și  $\lambda = \infty$  sînt nule și deci dreapta  $\Delta_p$  trece prin aceste puncte. Ea poate fi trasată fără calcul.

2. Dacă  $\underline{U}$  nu este luat drept origine de fază, atunci toate elementele de mai sus se raportează la un nou sistem de axe, rotit față de precedentul, cu un unghi egal cu argumentul fazorului tensiune.

3. Dreapta puterii reactive se construiește în același mod.

#### 6.6.7. APLICAȚII

**6.6.7.1. Circuite electrice serie.** Fie un circuit electric format dintr-un rezistor de rezistență  $R$ , o bobină de inductanță  $L$  și un condensator de capacitate  $C$ , legate în serie (fig. 6.125) și alimentate cu o tensiune sinusoidală



$$u = U \sqrt{2} \cos \omega t.$$

Presupunînd că rezistența  $R$  este variabilă, se cere variația curentului  $\underline{I}$  din circuit. Fie

$$\underline{Z} = R + jX,$$

în care s-a notat

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C};$$

rezistența  $R$ , variabilă, poate fi scrisă

$$R = \lambda R_1,$$



$\lambda$  fiind o variabilă oarecare, variind între 0 și  $+\infty$  iar  $R_1$  o valoare constantă a rezistenței. Impedanța circuitului se poate scrie

$$\underline{Z} = \lambda R_1 + jX.$$

Curentul  $\underline{I}$  căutat este dat de relația

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U}{\lambda R_1 + jX}.$$

Este ușor de văzut că locul geometric al lui  $\underline{I}$  este un cerc trecînd prin originea axelor de coordonate.

Să-i precizăm poziția. Pentru aceasta se construiește dreapta

$$\Delta = \lambda R_1 + jX, \quad (6.188)$$

care se vede că este o paralelă la axa  $0, +1$  dusă prin vîrfurile vectorului  $jX$ . Într-adevăr, vectorul  $jX$  este așezat chiar pe axa complexă, iar vectorul  $R_1$  este așezat pe axa reală.

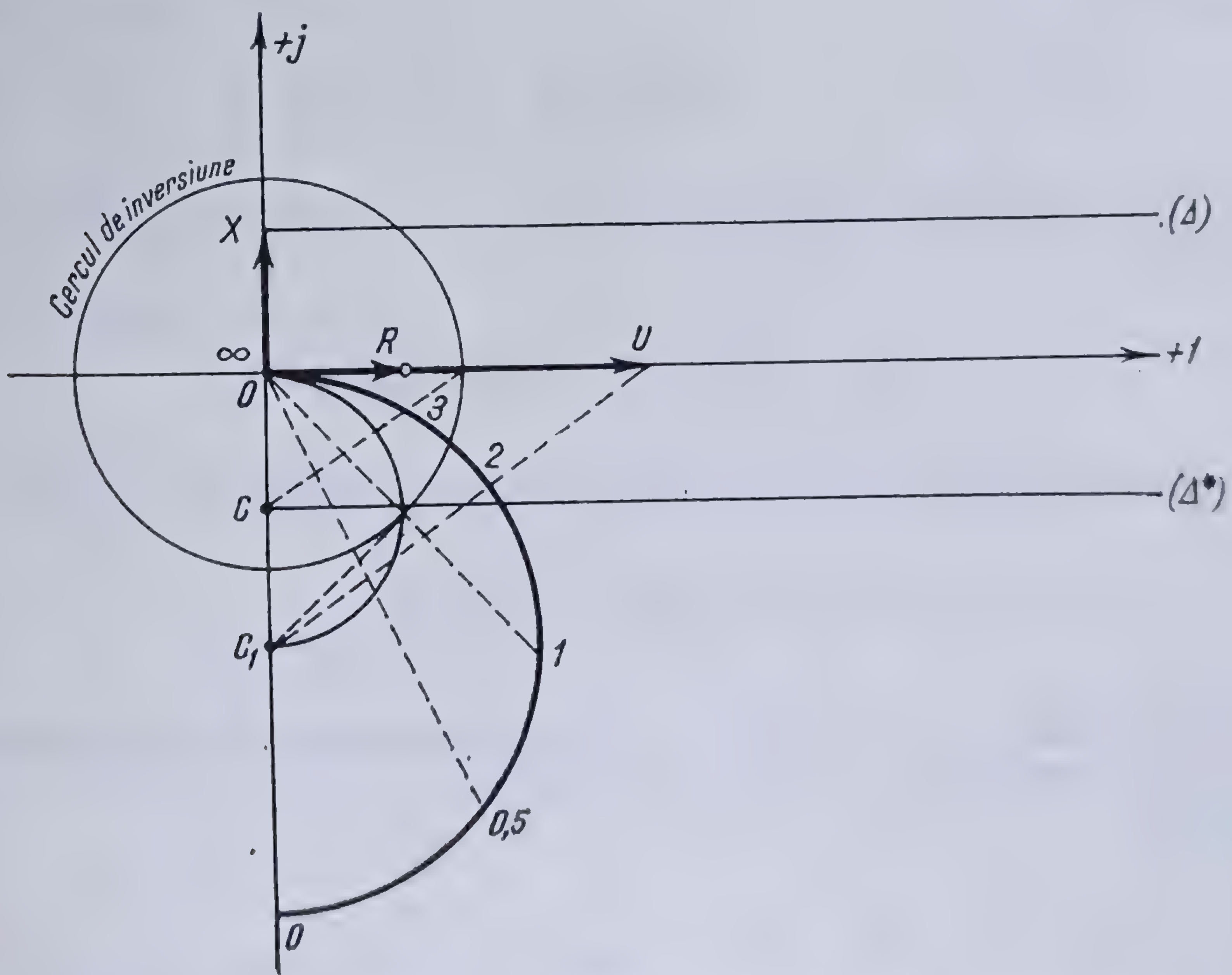


Fig. 6.126. Locul geometric al fazorului de curent într-un circuit serie.

Pentru a construi cercul invers dreptei (6.188) se procedează așa cum s-a arătat în paragraful 6.6.3.1. Ținînd seama că  $\lambda \in [0, \infty)$ , locul geometric al vectorului admitanță este *semicercul* cu centrul în  $C$  (fig. 6.126). Pentru a găsi locul geometric al fazorului de curent va trebui să se efectueze produsul

$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y}, \quad (6.189)$$



dar cum

$$u = U \sqrt{2} \cos \omega t$$

și, deci,

$$\underline{U} = U \underline{0},$$

rezultă că va trebui să se dilate numai raza cercului cu centrul în  $C$ . Fazorul  $\underline{U}$ , avînd argumentul  $0$ , fazorul produs va fi tot în direcția vectorului  $\overline{OC}$ , și produsul se efectuează pe cale grafică.

Urmează să se determine scările pentru a se putea folosi epura. Dacă se presupune că pentru construcția epurei s-a luat:

- scara impedanțelor  $a$  mm/ $\Omega$
- scara tensiunilor  $b$  mm/V
- scara vectorului unitar  $c$  mm,

se determină scara admitanței, aplicînd relația de inversiune și se obține

$$Y[y] = \frac{[c]^2}{Z[a]},$$

de unde rezultă

$$[y] = \frac{[c]^2}{[a]}.$$

Pentru a determina scara curentului se folosesc relațiile (6.186) și (6.189), obținîndu-se

$$I[x] = U[b] \cdot Y \frac{[c]^2}{[a]} \cdot \frac{1}{[c]},$$

întrucît s-a folosit același vector unitar, de unde rezultă că

$$[x] = \frac{[b][c]}{[a]} \text{ mm/A.}$$

În cazul cînd vrem ca scara lui  $I$  să fie aceeași cu scara lui  $Y$ , trebuie ales modulul scării vectorului unitate, în consecință.

Scriind

$$[x] = [y] = \frac{[c]^2}{[a]} = \frac{[b][c]}{[a]},$$

rezultă că

$$[c] = [b],$$

adică modulul scării vectorului unitate trebuie să fie egal cu modulul scării tensiunilor. Caracteristica curentului în funcție de variabila  $\lambda$  se deduce din locul geometrie al fazorului curent, așa cum s-a arătat în paragraful 6.6.5.

Se obține o curbă continuă (fig. 6.127).



6.6.7.2. Circuit electric paralel. Fie un circuit format din două impedanțe legate în paralel (fig. 6.128) dintre care una variabilă în raport cu rezistența și alimentat cu tensiunea periodică sinusoidală

$$u = U\sqrt{2} \cos \omega t.$$

Se cere variația curentului total debitat de sursă. Presupunând pe  $R_1$  variabil și notînd

$$R_1 = \lambda R,$$

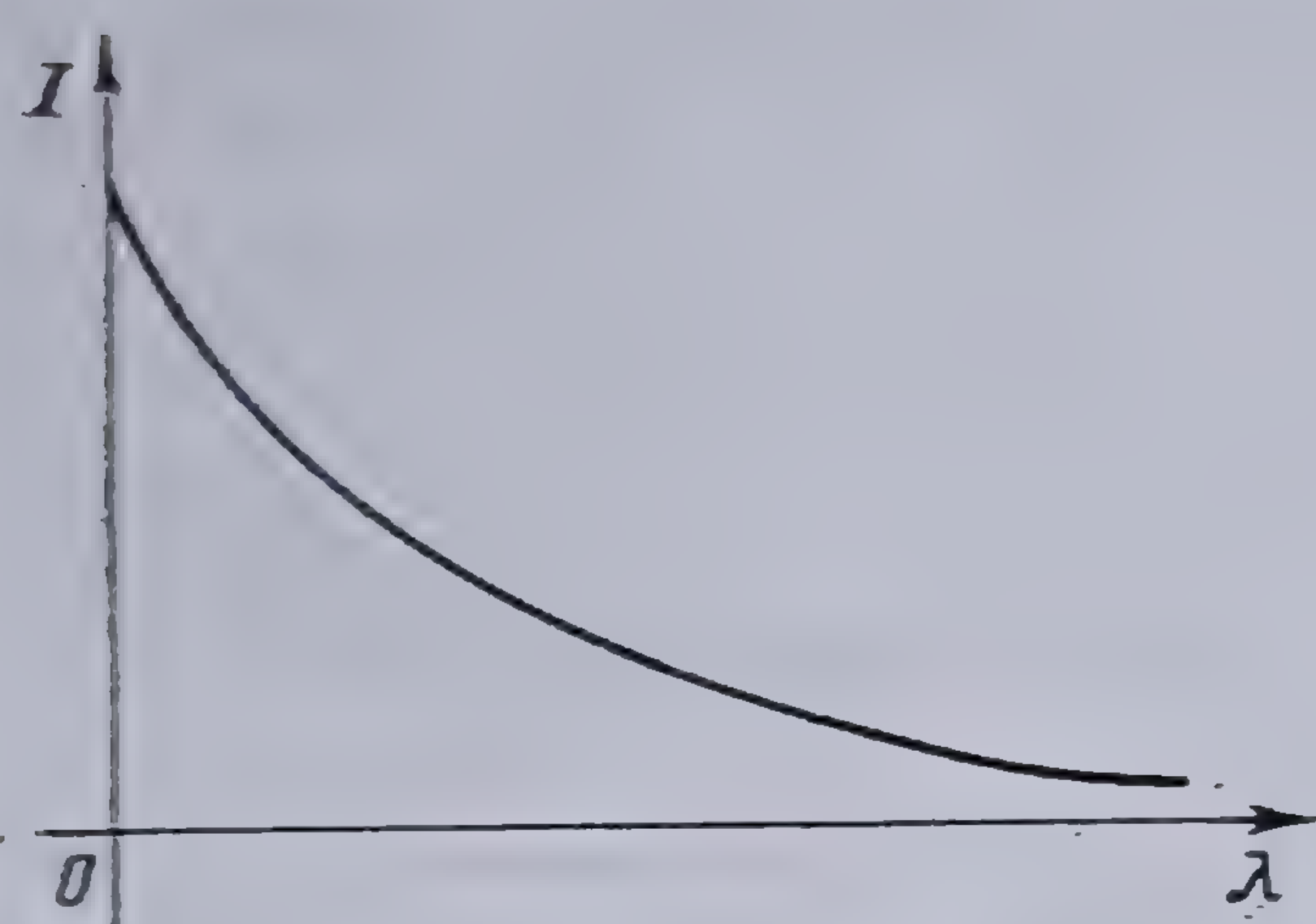


Fig. 6.127. Caracteristica circuitului serie.

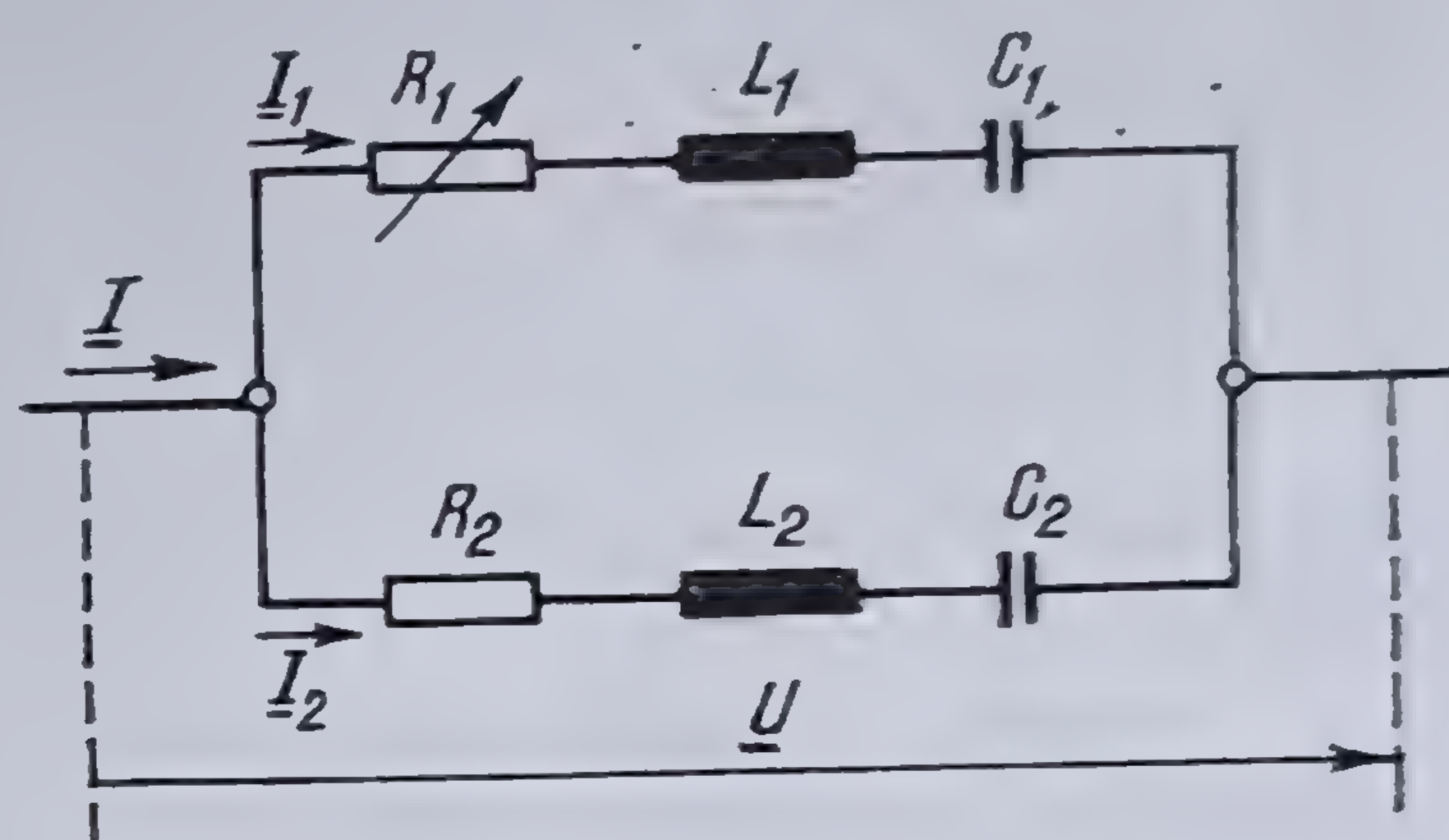


Fig. 6.128. Circuit paralel.

în care  $\lambda$  variază de la 0 la  $\infty$ , rezultă că

$$\underline{Z}_1 = \lambda R + jX_1,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2,$$

în care s-a notat

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Impedanța totală a circuitului este

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{X_1 (-X_2 + jR_2) + \lambda R(R_2 + jX_2)}{R_2 + j(X_1 + X_2) + \lambda R}.$$

Valoarea curentului căutat este dată de relația

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} \frac{R_2 + j(X_1 + X_2) + \lambda R}{X_1 (-X_2 + jR_2) + \lambda R(R_2 + jX_2)}. \quad (6.190)$$

Locul geometric căutat fiind de forma

$$\underline{I} = \underline{U} \frac{\underline{A} + \lambda \underline{B}}{\underline{C} + \lambda \underline{D}},$$

reprezintă un cerc oarecare în plan, a cărui construcție este cunoscută.

Se poate construi locul geometric mai ușor, dacă se scrie relația (6.190) sub forma

$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y} = \underline{U} \underline{Y}_1 + \underline{U} \underline{Y}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2}.$$



de unde rezultă că locul geometric se compune dintr-un fazor constant  $\frac{U}{\underline{Z}_2}$  și din locul geometric al lui  $\frac{U}{\underline{Z}_1}$ .

Construcția locului geometric rezultă acum imediat: locul geometric al fazorului

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{\underline{Z}_1} = \frac{U}{\lambda R + jX}$$

este locul geometric care a fost trasat în exemplul precedent și anume un cerc cu centrul pe axa complexă, trecând prin origine. La acest cerc trebuie adăugat fazorul

$$\underline{I}_2 = \frac{U}{\underline{Z}_2},$$

care este un fazor fix, ceea ce revine în a deplasa axele de coordonate cu fazorul  $-\underline{I}_2$ .

Pentru trasarea scărilor și a caracteristicii se procedează ca în exemplul precedent, măsurarea fazorilor făcându-se din noua origine.

**6.6.7.3. Studiul unui circuit în T.** Fie un circuit în T, reprezentând circuitul echivalent al unui cuadripol oarecare\*, alimentat cu o tensiune  $\underline{U}_1$  și ale cărei borne de ieșire sînt închise pe o impedanță oarecare variabilă  $\underline{Z}_1 = \lambda \underline{Z}_2$  (fig. 6.129).

Fie de studiat variația curentului  $\underline{I}_1$ , absorbit de circuit cînd  $\lambda$  variază luînd orice valoare între  $-\infty$  și  $+\infty$ . Curentul  $\underline{I}_1$  căutat este dat de relația

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \underline{Y},$$

în care  $\underline{Y}$  este admitanța totală a circuitului. Calculul ei se face din aproape în aproape. Admitanța echivalentă la nodurile  $C_1$  și  $C_2$  este

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \lambda \underline{Z}_2},$$

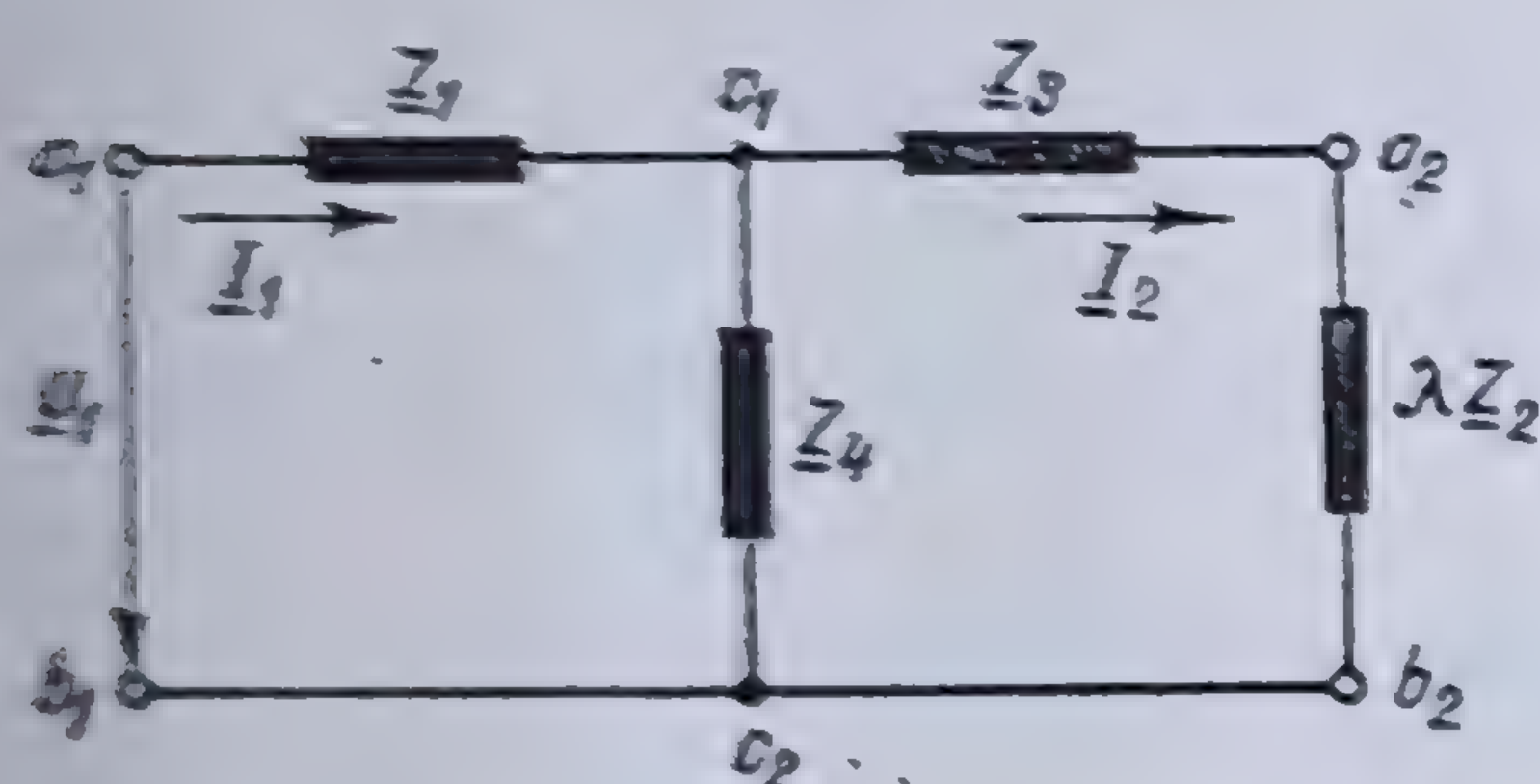


Fig. 6.129. Cuadripolul în T, de studiat.

iar impedanța echivalentă la bornele de intrare  $a_1$  și  $b_1$  este

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{1}{\underline{Y}_1},$$

astfel încît impedanța totală a circuitului este

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1 + \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_4} + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \lambda \underline{Z}_2}}} \quad (6.191)$$

\* Vezi 6.4.4.9.



și deci curentul căutat, după ce am făcut toate calculele, este

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \lambda \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 + \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) + \lambda (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4) \underline{Z}_2}.$$

Se recunoaște ușor că ecuația curentului este de forma

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 \frac{\underline{M} + \lambda \underline{N}}{\underline{P} + \lambda \underline{R}},$$

deci locul geometric al fazorului său este un cerc, avînd centrul într-un punct oarecare al planului. Construcția lui se face urmîndu-se metoda indicată \*. Se poate însă construi locul geometric construind expresia (6.191) din aproape în aproape, în modul următor :

— se construiește dreapta  $\underline{Z}_3 + \lambda \underline{Z}_2$  care se inversează, obținîndu-se cercul admitanței  $\underline{Y}_3$ .

— Se inversează vectorul impedanță  $\underline{Z}_4$ , obținîndu-se vectorul admitanță  $\underline{Y}_1$ .

— Se adună aceste admitanțe, obținîndu-se admitanța  $\underline{Y}_{34}$ , care se inversează, obținîndu-se impedanța  $\underline{Z}_{34}$ .

— Se adună această impedanță cu impedanța  $\underline{Z}_1$  și se obține impedanța totală  $\underline{Z}$ , care se inversează, obținîndu-se admitanța totală  $\underline{Y}$ .

— Se înmulțește admitanța  $\underline{Y}$  cu fazorul  $\underline{U}$  și se obține locul geometric căutat.

Urmînd indicațiile de mai sus, construcția epurei se face imediat (fig. 6.130).

Gradarea locului geometric se face urmărind pentru fiecare inversiune gradarea respectivă. Este suficient a se urmări pe epură numai punctele 0, 1 și  $\infty$ , cu acestea obținîndu-se la sfîrșit unitatea pentru divizare \*\*.

În ceea ce privește scările, acestea se stabilesc așa cum s-a arătat mai înainte \*\*\*. Astfel, în exemplul de față, se alege modulul scării de impedanță  $[Z_1]$  și raza cercului de inversiune  $[c_1]$  în raport cu care se construiește dreapta  $\Delta_3$  și se face inversiunea acestei drepte. Pentru admitanța  $\underline{Y}_3$  obținută, rezultă un modul al scării dat de relația

$$[I_1] = \frac{[c_1]^2}{[Z_1]}.$$

Inversînd admitanța rezultantă  $\underline{Y}_{34}$ , se obține vectorul impedanță  $\underline{Z}_{34}$ , a cărui scară are modulul  $[Z_2]$  dat de relația

$$[Z_2] = \frac{[k_1]^2}{[y_1]},$$

\* Vezi 6.6.3.3.

\*\* Vezi 6.6.3.3, b

\*\*\* Vezi 6.6.4.



în care  $k_1$  este raza cercului în raport cu care s-a făcut inversiunea; ținând seama de valoarea lui  $y_1$ , se obține

$$[Z_2] = \left[ \frac{k_1}{C_1} \right]^2 [Z_1].$$

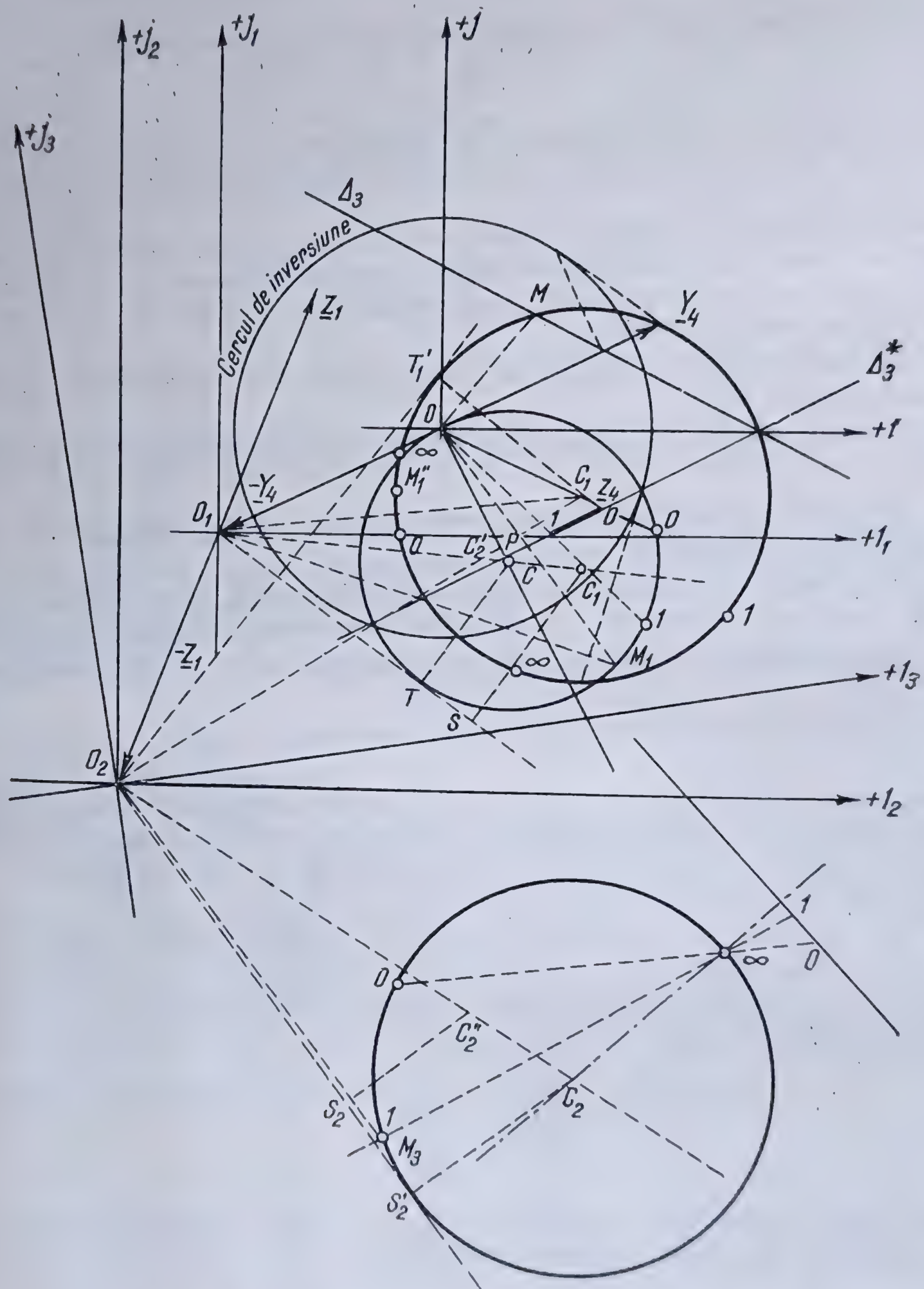


Fig. 6.130. Diagrama loc-geometric a unui cuadripol în T.

Inversiunea următoare dă modulului admitanței  $\underline{Y}$ , care va fi, urmărind aceeași cale,

$$[y_2] = \left[ \frac{k_2}{k_1} \right]^2 \cdot \frac{[C_1]^2}{[Z_1]}$$



Pentru a obține modulul scării curentului, se fixează modulul scării tensiunii și al vectorului unitate și se aplică relația (6.186). Dacă  $[v]$  este modulul scării tensiunii și  $[C_2]$  cel al vectorului unitate, modulul scării curentului va fi

$$[a] = \left[ \frac{k_2}{k_1} \right]^2 \cdot \frac{[C_1]^2}{[C_2]} \cdot \frac{[v]}{[Z_1]}.$$

Construcția cercului loc-geometric al fazorului  $\underline{I}$  se poate face mai simplu, fie utilizând metoda industrială\*, fie utilizând metoda inversiunii cu un singur cerc. În această metodă, cercul invers al dreptei  $\Delta_3$  va fi cercul

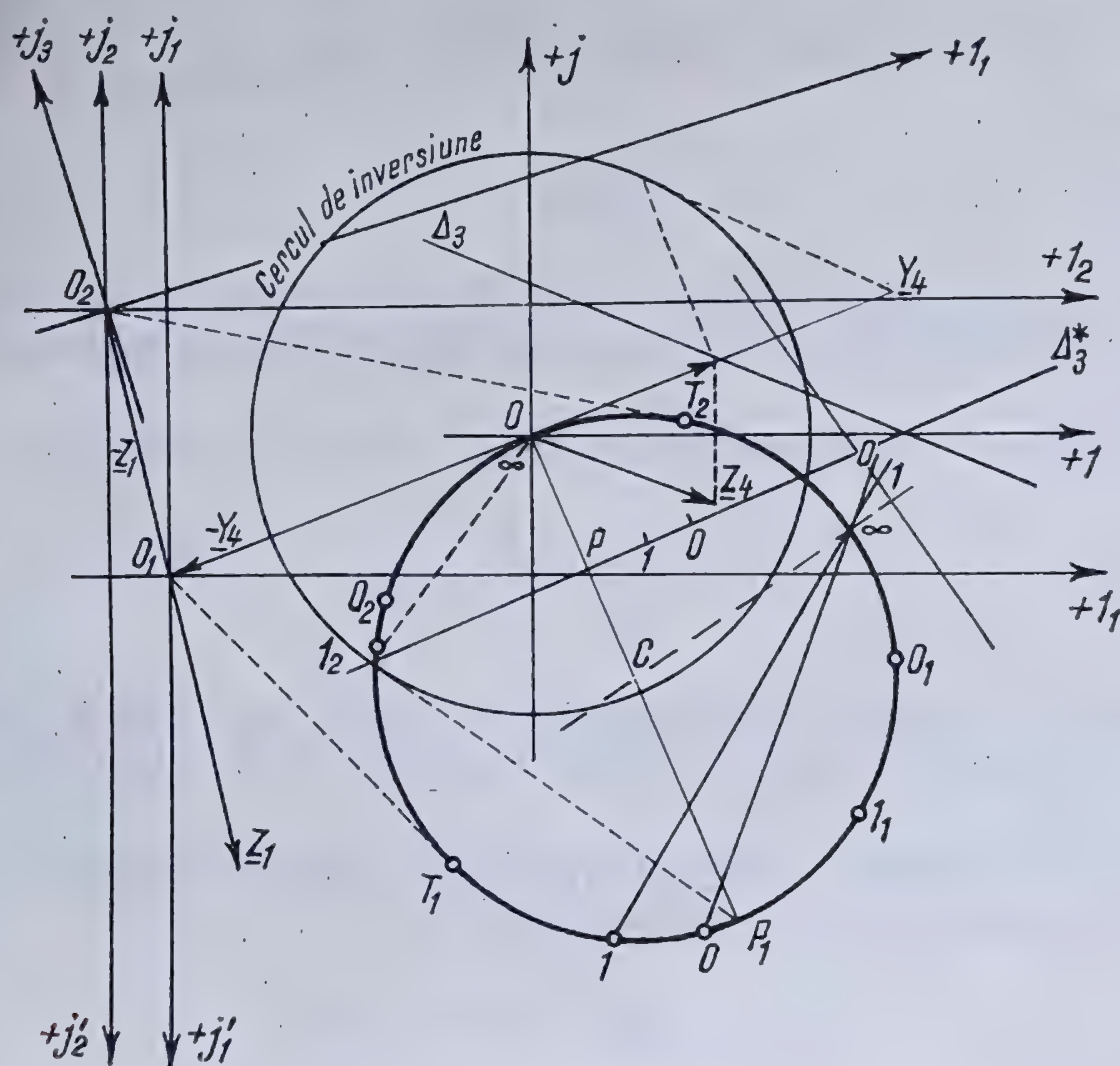


Fig. 6.131. Construcția locului geometric prin metoda inversiunii cu un singur cerc.

loc-geometric căutat, singura operație de efectuat fiind determinarea axelor finale necesare gradării cercului și găsirea modulului scării curentului. Construcția locului geometric se face în modul următor (fig. 6.131):

Se trasează dreapta  $\Delta_3$  și se inversează în raport cu cercul de inversiune; întrucît cercul obținut va reprezenta chiar locul geometric căutat, i se fixează diametrul  $\overline{OP_1}$  astfel ca dimensiunile lui să fie acceptabile pe epură. Va rezulta raza cercului de inversiune care se determină cu ajutorul relației

$$\overline{OP} \times \overline{OP_1} = k_1^2,$$

$OP$  fiind cunoscut.

\* Vezi 6.6.3.3,b



Modulul scării admitanței este

$$[y_1] = \frac{[k_1]^2}{[Z_1]},$$

$[Z_1]$  fiind modulul scării impedanței, ales arbitrar.

Față de același cerc de inversiune se inversează fazorul  $\underline{Z}_4$ , obținându-se vectorul  $\underline{Y}_4$ , care se adaugă cercului  $\underline{Y}_3$ , operație ce se realizează prin deplasarea axelor în vârful fazorului  $-\underline{Y}_4$ , obținându-se axele  $1_1O_1j_1$ .

Se inversează acum cercul obținut față de noua origine  $O_1$ ; cercul trebuind să se inverseze în el însuși, puterea de inversiune se determină prin relația

$$\overline{O_1T_1} \times \overline{O_1T_2} = \overline{O_1T_1}^2 = k_2^2,$$

de unde rezultă

$$k_2 = \overline{O_1T_1}.$$

Pentru a avea inversiunea fazorială va trebui să se schimbe sensul axei complexe astfel, încât cercul fazorului  $\underline{Z}_{34}$  se găsește raportat la sistemul de axe  $1_1O_1j_1'$ .

Modulul scării impedanțelor în acest sistem de axe este

$$[Z_2] = \frac{[k_2]^2}{[y_1]} = \frac{[k_2]^2}{[k_1]} [Z_1].$$

Operația de adunare a fazorului  $\underline{Z}_1$  cu cercul fazorului  $\underline{Z}_{34}$  se efectuează prin deplasarea originii axelor în vârful fazorului  $-\underline{Z}_1$ , obținându-se sistemul de referință  $1_2O_2j_2'$ .

Inversiunea cercului de impedanță  $\underline{Z}$  în raport cu originea  $O_2$  se obține în același mod, puterea de inversiune fiind

$$\overline{O_2T_2} \times \overline{O_2T_2} = \overline{O_2T_2}^2 = k_3^2,$$

de unde rezultă

$$k_3 = \overline{O_2T_2}.$$

Modulul scării admitanță este

$$[y_2] = \frac{[k_3]^2}{[Z_2]} = \left[ \frac{k_3}{k_2} \right]^2 \cdot \frac{[k_1]^2}{[Z_1]}.$$

Se inversează din nou axa complexă pentru a avea cercul admitanței  $\underline{Y}$  în adevărata sa poziție, sistemul de referință fiind acum  $1_2O_2j_2$ .

Pentru a se obține cercul loc-geometric al curentului  $I$ , trebuie efectuat produsul

$$\underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U} \quad (6.192)$$



Acest produs trebuie să îndeplinească condiția ca cercul reprezentativ să rămână același. Aceasta se obține scriind că modulul scării curentului este același cu modulul scării admitanței

$$[a] = \frac{[v] \cdot |y_2|}{[C]} = [y_2],$$

de unde rezultă

$$[v] = [C],$$

adică modulul vectorului unitate, corespunzător efectuării grafice a produsului (6.192), este egal cu modulul scării tensiunii.

În sfârșit, se rotesc axele cu unghiul  $-(\arg. \underline{U})$ , obținându-se sistemul de referință  $1_3 O_2 j_3$  față de care se găsește raportat cercul-loc geometric al curentului  $\underline{I}$  absorbit de circuitul în  $T$ .



## Capitolul VII

### CIRCUITE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV IN REGIM NESTAȚIONAR (TRANZITORIU)

#### 7.1. METODA GENERALĂ DE CALCUL

##### 7.1.1. GENERALITĂȚI

În funcționarea circuitelor electrice de curent alternativ se pun aceleași probleme ca și în cele de curent continuu în cazul când situația de funcționare în regim permanent este perturbată dintr-o cauză oarecare \* (schimbarea valorii impedanțelor din circuit, a tensiunilor de alimentare etc.). Perturbația ce apare în funcționarea circuitului de curent alternativ constă — ca și în cazul rețelelor de curent continuu — în adaptarea acestuia la noua situație de funcționare. Această adaptare se face, în general, prin oscilații ale circuitului în jurul noului regim de funcționare; în cazul curentului alternativ pot apărea însă situații în care adaptarea se face brusc, fără apariția acestor oscilații.

Extinzând rezultatele obținute în cazul circuitelor electrice de curent continuu, regimul tranzitoriu de funcționare a circuitelor electrice de curent alternativ poate fi considerat — în cazul circuitelor liniare — ca o suprapunere peste regimul forțat al unui regim liber. Ecuațiile de funcționare ale unui circuit în curent alternativ fiind izomorfe cu cele din curentul continuu, pentru o rețea oarecare se va obține un sistem de ecuații de tipul (3.191) sau (3.193) care se rezolvă în mod obișnuit.

În cazul curentului alternativ, sursele de tensiune sau de curent sînt funcții periodice de timp; soluțiile ce se vor obține pentru regimul forțat de funcționare vor fi de asemenea funcții periodice de timp, de aceeași formă cu sursele; soluțiile regimului liber vor fi însă funcții de timp, periodice sau nu, după natura parametrilor circuitului.

Rezultă dar, că soluțiile generale găsite în studiul regimului tranzitoriu efectuat asupra circuitelor de curent continuu vor fi valabile și pentru studiul regimului tranzitoriu în circuitele de curent alternativ.

Problemele de regim tranzitoriu ce apar în circuitele de curent alternativ sînt în general mai complicate din cauza defazajelor ce apar între diverșii curenți și tensiuni.

Studiul se poate face simplu, dacă în anumite situații bine definite se poate neglija energia magnetică față de energia electrostatică — sau invers — și deci transferul și transformarea acestor energii.

Problema se complică dacă aceasta nu este posibil.

Metodele de rezolvare sînt analoage cu cele utilizate în circuitele de curent continuu și se utilizează aceleași ecuații.

\* Vezi 3.6.



## 7.2. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU ÎN CIRCUITELE ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN CARE SE ȚINE SEAMA NUMAI DE O SINGURĂ FORMĂ DE ENERGIE

### 7.2.1. FORMULELE UTILIZATE

Rezolvarea acestui tip de probleme se face pornind direct de la ecuațiile de funcționare ale circuitului, ecuația (3.196)

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e,$$

pentru circuitele în care se neglijează energia electrostatică, ecuația (3.202)

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e$$

pentru circuitele în care se neglijează energia magnetică.

Se pot utiliza deci direct rezultatele obținute în cazul circuitelor de curent continuu și anume, relația (3.199)

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0}) e^{-\frac{R}{L}t}$$

pentru circuitele formate din rezistențe și inductanțe și relația (3.207)

$$u = u_p + (u_0 - u_{p0}) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

pentru circuitele formate din rezistențe și capacități, din această relație deducându-se apoi relațiile (3.208) și (3.209) care dau curentul din circuit, respectiv sarcina electrică cu care se încarcă condensatorul.

### 7.2.2. CIRCUITE ELECTRICE FORMATE DINTR-UN REZISTOR LEGAT ÎN SERIE CU O BOBINĂ

7.2.2.1. Închiderea unui circuit electric inductiv alimentat de o forță electromotoare alternativă sinusoidală. Fie un circuit electric inductiv, format dintr-un rezistor de rezistență  $R$  legat în serie cu o bobină de inductanță  $L$  și alimentat de o sursă de forță electromotoare alternativă sinusoidală de frecvență  $f$ , a cărei expresie este

$$e = E \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi),$$

în care  $\psi$  este un parametru care va permite definirea tensiunii la timpul  $t=0$ , de închidere a întrerupătorului. Se cere să se determine variația curentului în circuit la închiderea întrerupătorului  $K$  (fig. 7.1).

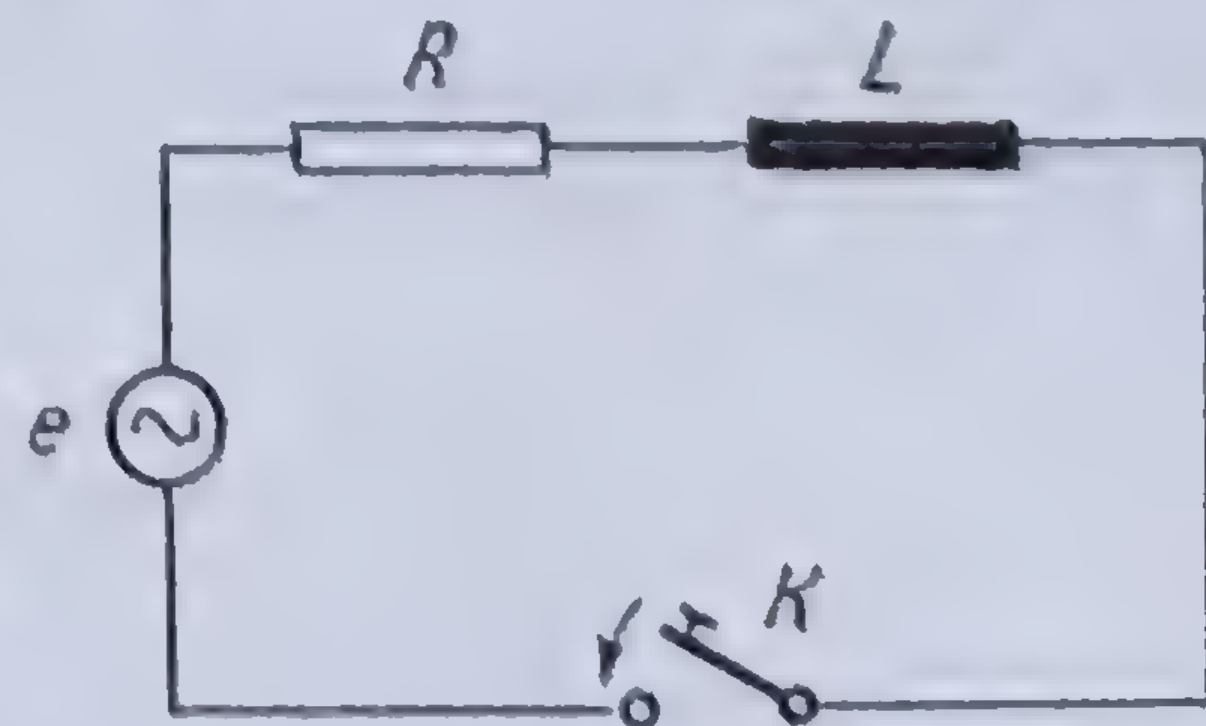


Fig. 7.1. Circuit electric serie cu  $R$  și  $L$  alimentat de o sursă de curent alternativ.



Înainte de închiderea întrerupătorului, circuitul fiind deschis, curentul este nul; deci și în momentul închiderii întrerupătorului curentul este nul. Rezultă :

$$i_0 = 0.$$

În regim forțat, curentul este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi),$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

valoarea curentului permanent la timpul  $t = 0_+$  va fi

$$i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin(\psi - \varphi)$$

și deci, curentul va avea expresia

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi) -$$

$$-(\sin \psi - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (7.1)$$

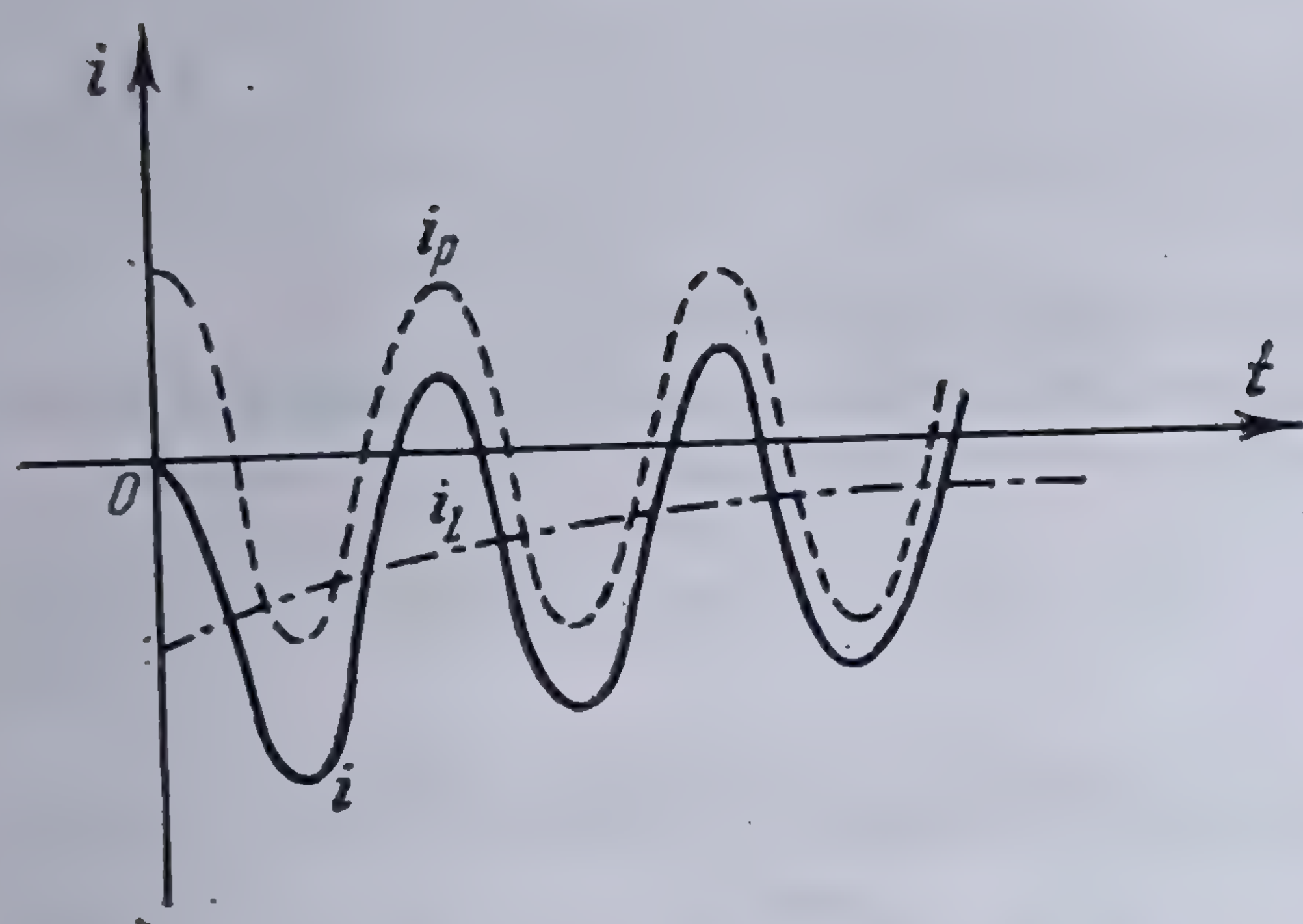


Fig. 7.2. Curba de curent la închiderea circuitului electric.

Curba acestui curent este dată în diagrama din figura 7.2. După cum se vede din figură, curentul  $i$ , care rezultă din diferența ordonatelor celor două curbe de curent (liber și permanent) este maximum după prima trecere prin zero a curentului forțat  $i_p$ ; acest maximum are cea mai mare valoare atunci când cele două curbe sînt tangente, ceea ce se exprimă scriind că în punctul de maxim coeficienții unghiulari ai celor două tangente sînt egali, adică

$$\frac{di_p}{dt} = \frac{di_l}{dt}$$

Să vedem care este valoarea parametrului  $\psi$  din expresia tensiunii pentru care se obține acest maximum maximorum. Pentru aceasta vom scrie egalitatea celor doi coeficienți unghiulari pentru timpul  $t = 0$ ; ținînd seama că la acest moment  $i_p + i_l = 0$ , rezultă

$$\left(\frac{di_p}{dt}\right)_{t=0} = -\left(\frac{di_l}{dt}\right)_{t=0}.$$

Se obține astfel

$$\omega \cos(\psi - \varphi) = -\frac{R}{L} \sin(\psi - \varphi),$$



sau

$$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi.$$

Ultima relație este satisfăcută pentru

$$\psi = 0 \quad \text{și} \quad \psi = \pi.$$

Aceste valori corespund trecerii tensiunii prin zero. Pentru  $\psi = 0$ , curentul rezultat este

$$= \frac{E\sqrt{2}}{Z} \left[ \sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

Valoarea maximă a curentului apare la timpul

$$t = \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) \cdot \frac{1}{\omega},$$

adică după un sfert de perioadă, și are ca valoare

$$i_{\max} = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \left[ 1 + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L\omega} \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right)} \right].$$

Dacă circuitul are reactanța mare și rezistența lui este mică, valoarea curentului maxim poate avea aproape de două ori valoarea amplitudinii maxime a curentului permanent.

Se observă că dacă închiderea circuitului se face în momentul în care  $\psi = \varphi$ , atunci termenul aperiodic dispare și regimul forțat se stabilește imediat, fără ca circuitul să treacă printr-un regim tranzitoriu.

**7.2.2.2. Deschiderea unui circuit electric inductiv alimentat de o sursă de forță electromotoare alternativă sinusoidală.** Fie (fig. 7.3) un circuit electric inductiv, format dintr-un rezistor de rezistență  $R$  legat în serie cu o bobină de inductanță  $L$  și alimentat de o sursă de forță electromotoare alternativă sinusoidală de forma

$$e = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi),$$

la timpul  $t = 0$ , când se deschide întrerupătorul, valoarea acestei forțe electromotoare este

$$e_0 = E\sqrt{2} \cos \psi.$$

Dacă se neglijează rezistența  $R$  față de reactanța  $L\omega$ , atunci curentul în inductanță va fi

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin(\omega t + \psi),$$

iar la timpul  $t = 0_-$ , valoarea sa este

$$i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin \psi,$$

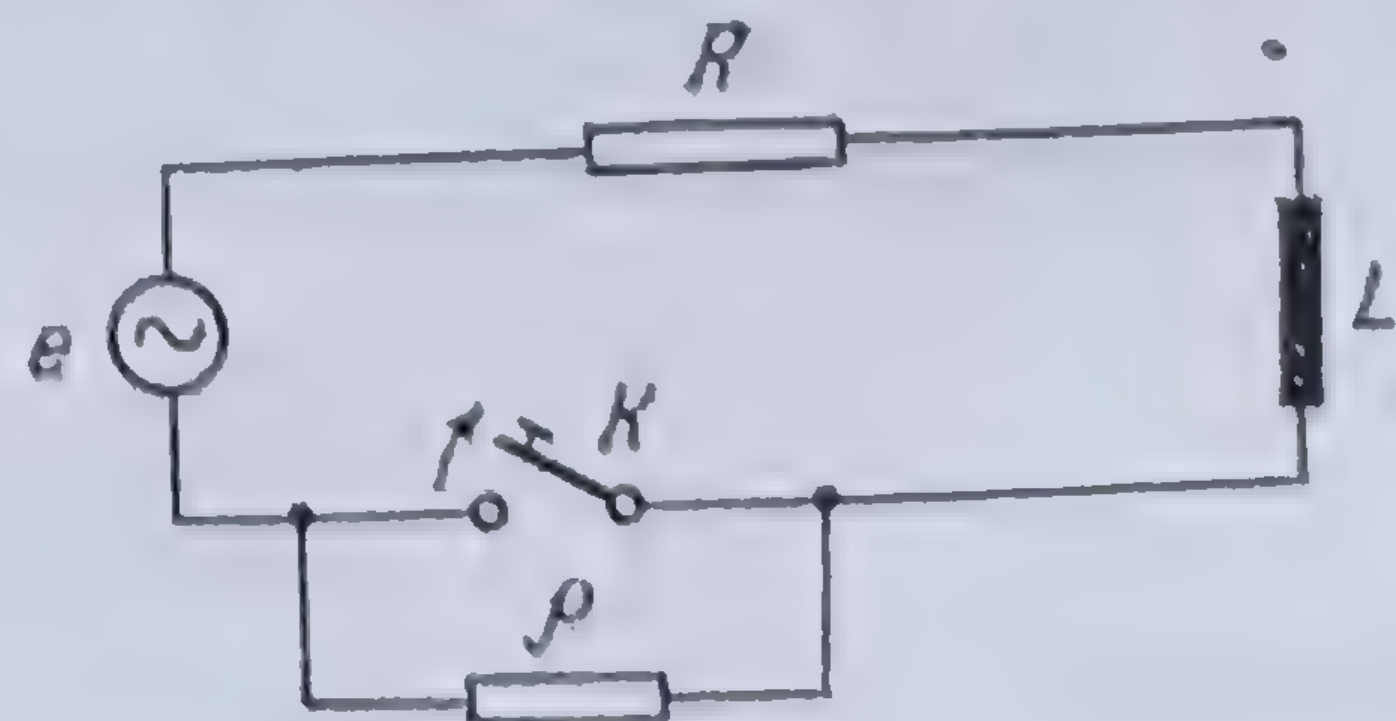


Fig. 7.3. Deschiderea unui circuit electric inductiv alimentat de o forță electromotoare alternativă sinusoidală.



După ce s-a deschis întrerupătorul, curentul în regim forțat este

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi)$$

în care

$$Z = \sqrt{\rho^2 + L^2 \omega^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{\rho}$$

La timpul  $t = 0_-$ , acest curent este

$$i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\psi - \varphi).$$

Constanta de timp a circuitului fiind  $\frac{L}{\rho}$ , expresia curentului în regim tranzitoriu se obține aplicînd relația (3.199)

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \sqrt{2}E \left[ \frac{\sin \psi}{L\omega} - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{Z} \right] e^{-\frac{\rho}{L}t}.$$

Dar,

$$L\omega = \rho \operatorname{tg} \varphi \quad \text{și} \quad Z = \rho / \cos \varphi$$

și deci

$$\frac{\sin \psi}{L\omega} - \frac{\cos(\psi - \varphi)}{Z} = \frac{\sin \psi}{\rho \operatorname{tg} \varphi} - \frac{\cos(\psi - \varphi) \cos \varphi}{\rho} = \frac{1}{\rho} \sin(\psi - \varphi) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$$

astfel, încît expresia curentului devine

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{E\sqrt{2}}{\rho} \sin(\psi - \varphi) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} e^{-\frac{\rho}{L}t}.$$

Tensiunea la bornele contactelor este

$$u = \rho i = \frac{E\sqrt{2}\rho}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + E\sqrt{2} \sin(\psi - \varphi) \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} e^{-\frac{\rho}{L}t}.$$

Din această relație, se vede că termenul tranzitoriu produce o supra-tensiune la bornele contactelor întrerupătorului.

Acest termen tranzitoriu dispare dacă  $\psi = \varphi$  adică dacă întrerupătorul se deschide la momentul pentru care tensiunea și curentul au valorile

$$E\sqrt{2} \cos \varphi \quad \text{și} \quad \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin \varphi = \frac{E}{Z}$$

deoarece

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{L\omega}{Z}.$$



Supratensiunea dispare în cazul când  $\rho$  este infinit mare ( $\varphi = 0$ ), adică atunci când întrerupătorul se deschide în momentul în care tensiunea trece prin maximum și curentul prin zero.

Ea este maximă pentru  $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$ , adică atunci când întrerupătorul se deschide în momentul când curentul are valoarea  $\frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \cos \varphi$ . Amplitudinea termenului tranzitoriu de tensiune este atunci

$$E\sqrt{2} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} = E\sqrt{2} \frac{\rho^2}{ZL\omega} = \frac{\rho}{L\omega} E\sqrt{2}$$

dacă  $\rho^2$  este suficient de mare pentru a se putea neglija reactanța  $L^2\omega^2$  față de el și pentru a se putea lua deci  $Z \cong \rho$ .

În practică, viteza de deschidere a întrerupătorului nu este atât de mare și între cele două contacte ale întrerupătorului ia naștere un arc, care limitează imediat supratensiunea ce ar lua naștere; dacă deschiderea întrerupătorului nu se face într-un moment favorabil, acest arc se stinge în momentul când curentul trece prin zero ( $\psi = 0$ ); termenul tranzitoriu al tensiunii avînd atunci amplitudinea, în valoare absolută,

$$E\sqrt{2} \cos^2 \varphi = E\sqrt{2} \frac{\rho^2}{\rho^2 + L^2\omega^2}.$$

Această amplitudine este mai mică decît amplitudinea forței electromotoare aplicată circuitului dacă  $\rho$  are o valoare finită, și este egală cu aceasta dacă  $\rho$  este infinit mare.

Rezultă dar, că deschiderea unui circuit inductiv, în curent alternativ sinusoidal este mult mai ușoară decît în cazul curentului continuu.

**7.2.2.3. Curentul liber din circuit în cazul scurtcircuitării la borne a sursei de curent alternativ sinusoidal.** Fie un circuit electric inductiv format dintr-un rezistor de rezistență  $R$ , legat în serie cu o bobină de inductanță  $L$  și alimentat de o sursă cu forța electromotoare alternativă sinusoidală de forma

$$e = E\sqrt{2} \cos \omega t.$$

Înainte de scurtcircuitarea bornelor sursei, curentul forțat care circulă în circuit este

$$i' = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos (\omega t - \varphi),$$

unde

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

Dacă se scurtcircuitază brusc bornele  $A$  și  $B$  ale sursei, curentul  $i$  din acest circuit se va anula, însă această anulare nu va fi instantanee, deoarece



energia  $\frac{1}{2} LI^2$  acumulată în câmpul magnetic al inductanței nu poate să se disipeze instantaneu (fig. 7.4).

Curentul din circuit va corespunde ecuației \*

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0,$$

a regimului liber și expresia sa este

$$i = A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

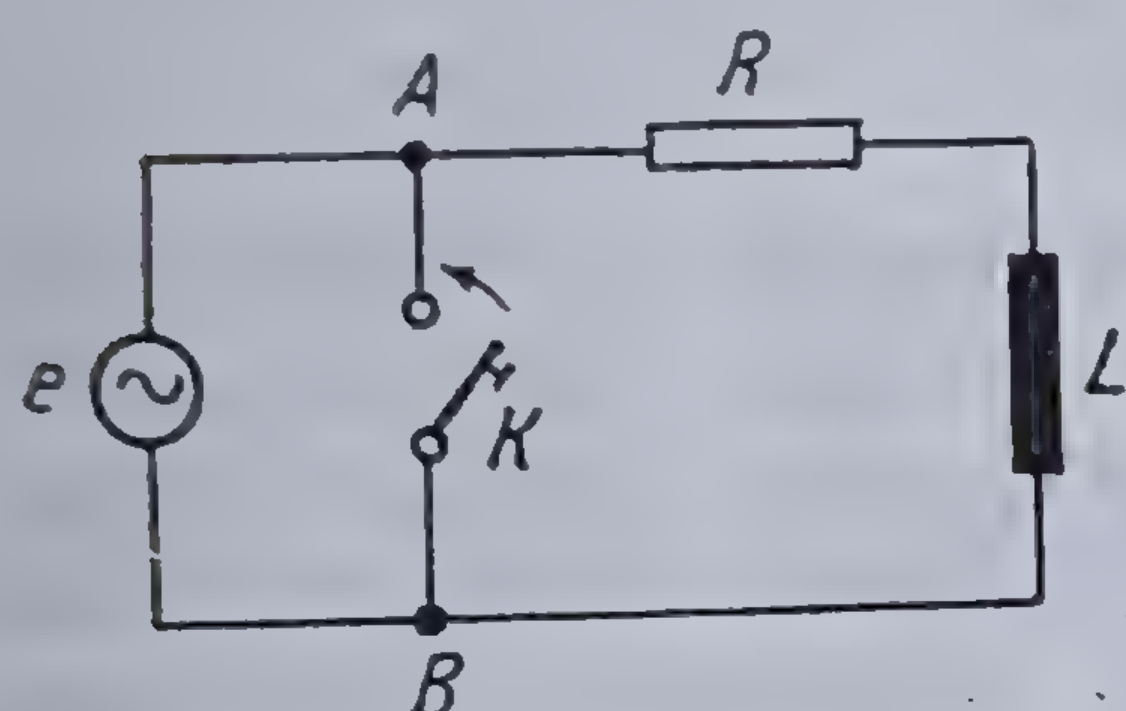


Fig. 7.4. Scurtcircuitarea sursei de curent alternativ într-un circuit electric inductiv.

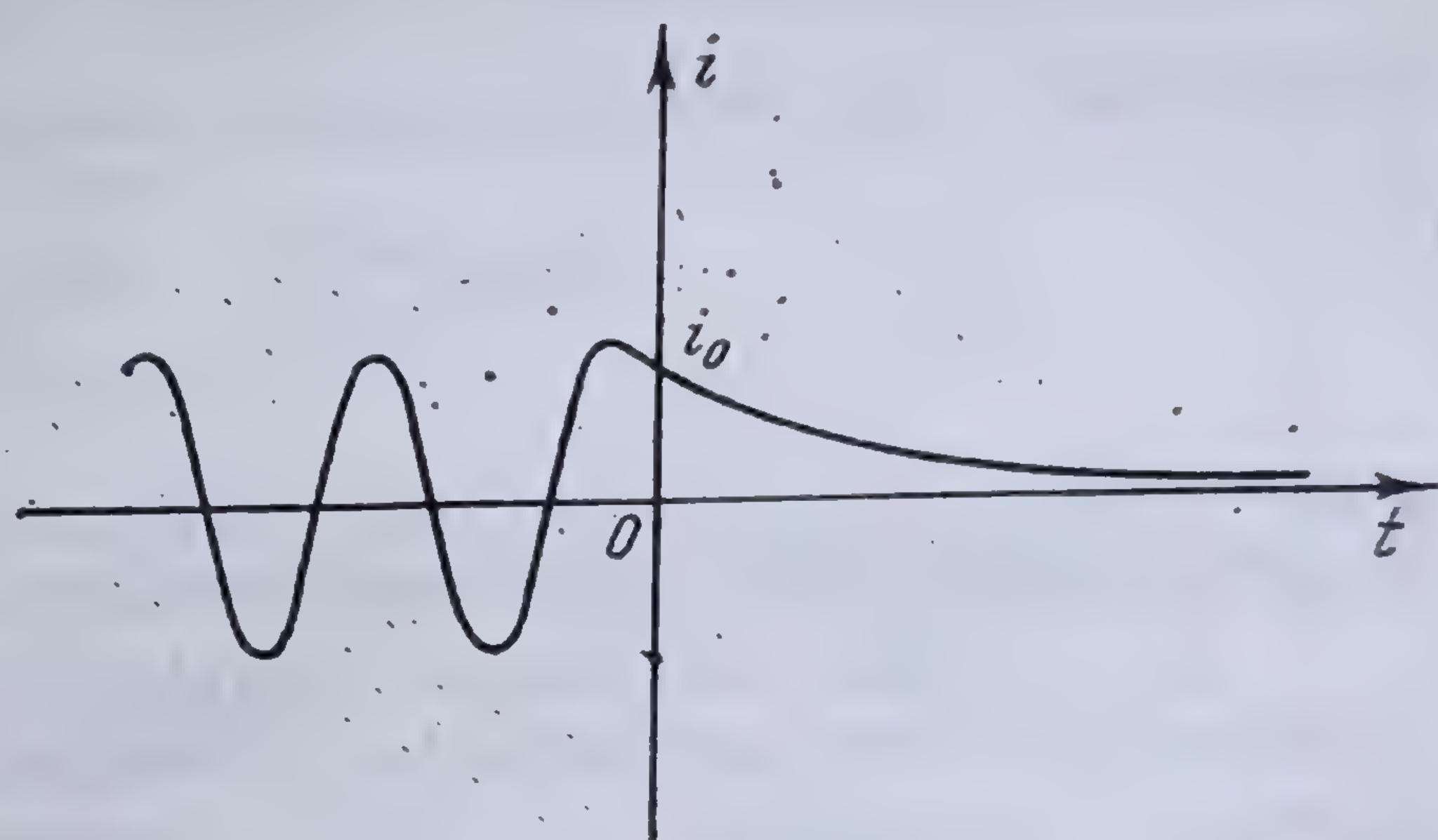


Fig. 7.5. Diagrama curentului electric în cazul scurtcircuitării sursei.

La timpul  $t = 0_-$ , adică înainte de a se scurtcircuita sursa, curentul are valoarea

$$i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi$$

deci  $A = i_0$  și atunci

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Diagrama curentului din circuit este dată în figura 7.5.

**7.2.2.4. Aplicație numerică.** Se dă un circuit electric inductiv format dintr-un rezistor de rezistență  $R_1 = 356 \Omega$  legat în serie cu o bobină de induc-tanță  $L = 0,638 \text{ H}$  și alimentat de o sursă de forță electromotoare

$$e = 3200 \cos \omega t.$$

La un moment dat rezistența scade brusc la  $R_2 = 200 \Omega$ . Frecvența tensiunii alternative fiind  $f = 50 \text{ Hz}$ , se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al curentului și să se traseze curba reprezentativă între limitele  $t_1 = -\frac{2\pi}{\omega}$  și

$$t_2 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

\* Aplicând relația (3.190) problema se rezolvă imediat. Într-adevăr, vom avea

$$i_p = i_{p0} = 0; i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi \text{ și deci } i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos \varphi e^{-\frac{R}{L}t}$$



Curentul în regim tranzitoriu este dat de relația (3.199). Înainte de variația rezistenței, curentul în regim forțat era

$$i = \frac{E \sqrt{2}}{Z_1} \cos(\omega t - \varphi_1),$$

în care

$$\sqrt{2} E = 3200 \text{ V}; \quad Z_1 = \sqrt{R_1^2 + L^2 \omega^2} = 400 \text{ } \Omega;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{L\omega}{R_1} = \frac{0,628 \times 2\pi \times 50}{356} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \varphi_1 = 30^\circ.$$

După variația rezistenței și stabilirea regimului forțat, curentul în circuit este

$$i_p = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2} \cos(\omega t - \varphi_2)$$

în care

$$\sqrt{2} E = 3200 \text{ V}; \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + L^2 \omega^2} = 200 \sqrt{2} \text{ } \Omega;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{L\omega}{R_2} = \frac{0,628 \times 2\pi \times 50}{200} = 1; \quad \varphi_2 = 45^\circ.$$

Se obține astfel,

$$i_0 = \frac{E \sqrt{2}}{Z_1} \cos \varphi_1 = \frac{3200}{400} \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} = 6,93 \text{ A};$$

$$i_{p0} = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2} \cos \varphi_2 = \frac{3200}{200} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 8 \text{ A}.$$

Ecuția curentului în regim tranzitoriu devine

$$i = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2} \cos(\omega t - \varphi_2) + E \sqrt{2} \left[ \frac{\cos \varphi_1}{Z_1} - \frac{\cos \varphi_2}{Z_2} \right] e^{-\frac{R_2}{L} t},$$

sau numeric

$$i = 11,35 \cos(\omega t - 45^\circ) - 1,07 e^{-314 t}.$$

Curba de variație a curentului se construiește ușor.

### 7.2.3. CIRCUITE ELECTRICE FORMATE DINTR-UN REZISTOR LEGAT ÎN SERIE CU UN CONDENSATOR

7.2.3.1. Încărcarea unui condensator în curent alternativ sinusoidal. Fie un circuit electric format dintr-un condensator de capacitate  $C$  legat în serie cu un rezistor de rezistență  $R$  și alimentat de o sursă cu forță electromotoare alternativă sinusoidală (fig. 7.6)

$$e = E \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi).$$



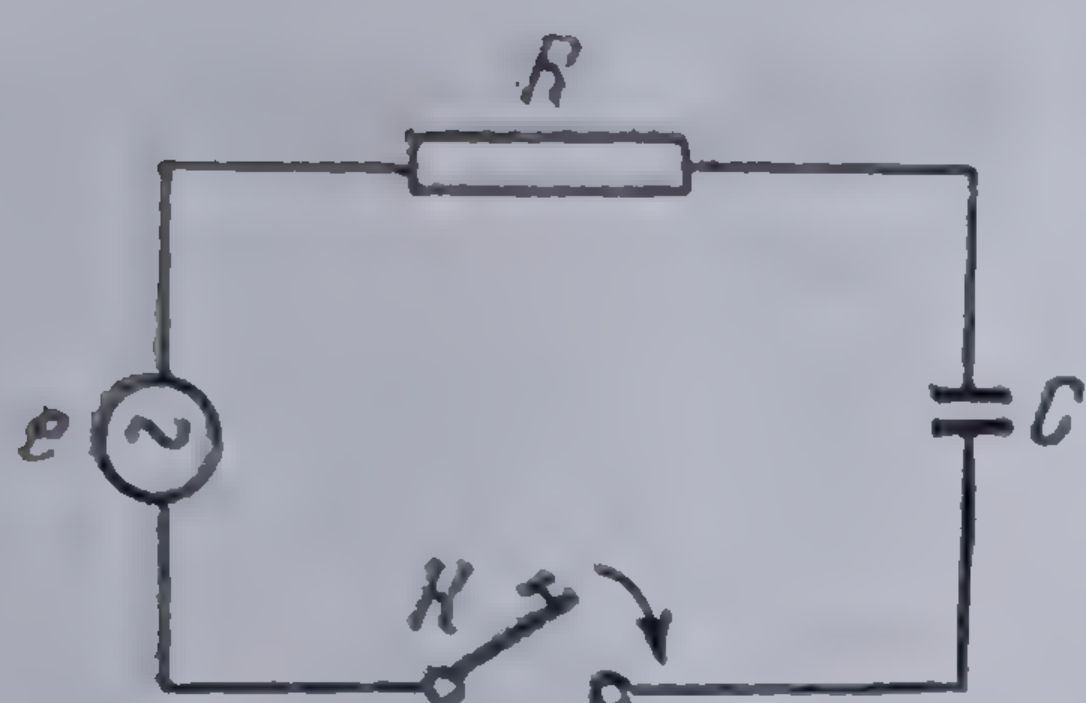
Legea după care se încarcă un condensator în curent alternativ se obține cu ajutorul relației generale (3.209).

Curentul permanent este

$$i_p = I \sqrt{2} \cos (\omega t + \psi + \varphi); \quad I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (1/C\omega)^2}} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC},$$

iar sarcina electrică cu care s-a încărcat condensatorul în regimul forțat este

$$q_p = \int_0^t i \, dt = \frac{I \sqrt{2}}{\omega} \sin (\omega t + \psi + \varphi) = Q \sin (\omega t + \psi + \varphi),$$



în care s-a notat :

$$Q = \sqrt{2} I / \omega.$$

La timpul  $t = 0_-$

Fig. 7.6. Circuit electric serie cu  $R$  și  $C$ , alimentat de o sursă de curent alternativ.

$$q_0 = 0 \quad \text{și} \quad q_{p0} = Q \sin (\psi + \varphi).$$

Deci, regimul tranzitoriu de încărcare a condensatorului este

$$q = Q \sin (\omega t + \psi + \varphi) - Q \sin (\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Curentul de încărcare va fi

$$i = \frac{dq}{dt} = I \sqrt{2} \cos (\omega t + \psi + \varphi) + \frac{I \sqrt{2}}{RC} \sin (\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

În momentul închiderii întrerupătorului, la timpul  $t = 0_-$ , curentul este

$$\begin{aligned} i_{(0)} &= \sqrt{2} I \left[ \cos (\psi + \varphi) + \frac{\sin (\psi + \varphi)}{RC \omega} \right] = \\ &= \sqrt{2} I [\cos (\psi + \varphi) + \operatorname{tg} \varphi \sin (\psi + \varphi)] = \sqrt{2} I \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} = \frac{E \sqrt{2}}{R} \cos \psi, \end{aligned}$$

deoarece

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}.$$

De aici, rezultă că în momentul închiderii întrerupătorului, curentul este limitat de rezistența  $R$  din circuit și este maxim dacă închiderea se face în momentul în care  $\psi = 0$ . Această valoare maximă este

$$i_{(0) \max} = \frac{E \sqrt{2}}{R}.$$



Pentru a se vedea cât de mare este acest curent în raport cu amplitudinea maximă a curentului forțat, se calculează raportul  $i_{(0)max}/I$ . Se găsește

$$\begin{aligned}\frac{i_{(0)max}}{I\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}{R} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{T}{2\pi t}\right)^2}.\end{aligned}$$

Fie, de exemplu, un cablu subteran pentru care  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  $R = 0,585 \Omega$  și pentru  $f = 50 \text{ Hz}$  se obține

$$\frac{1}{\omega RC} = \frac{10^6}{2\pi \cdot 50 \cdot 0,585 \cdot 1} = 5440;$$

curentul în momentul închiderii întrerupătorului este deci de 5440 de ori mai mare decât amplitudinea maximă a curentului forțat.

Rezultă deci, că, deoarece constanta de timp a circuitului este

$$\tau = RC = 0,585 \times 10^{-6} \text{ s},$$

adică

$$\frac{50 T \tau}{T} = 50 \tau \cong 30 \times 10^{-6}$$

dintr-o perioadă, curentul tranzitoriu de încărcare se stinge foarte repede și regimul forțat este atins în mai puțin de o jumătate de perioadă.

**7.2.3.2. Descărcarea unui condensator pe o rezistență.** Să presupunem că, la un moment dat se scurtcircuitază sursa care alimenta circuitul studiat în paragraful precedent.

Înainte de scurtcircuitarea sursei, cantitatea de electricitate ce străbatea condensatorul este dată de relația

$$q' = Q \sin(\omega t + \psi + \varphi)$$

în care

$$Q = I\sqrt{2}/\omega$$

În momentul scurtcircuitării sursei, la timpul  $t = 0_-$ , cantitatea de electricitate cu care era încărcat condensatorul este

$$q'_{t=0-} = q_0 = Q \sin(\psi + \varphi).$$

În regim forțat, după scurtcircuitarea sursei, cantitatea de electricitate din condensator este nulă, condensatorul descărcându-se complet; deci

$$q_p = 0;$$



rezultă a fortiori că și

$$q_{r0} = 0.$$

Din relația (3.210) se obține astfel expresia sarcinii electrice în regimul tranzitoriu de descărcare a condensatorului

$$q = Q \sin(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Curentul de descărcare al condensatorului este

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q}{RC} \sin(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{I\sqrt{2}}{RC\omega} \sin(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}},$$

iar tensiunea la bornele acestuia

$$u = \frac{q}{C} = \frac{Q}{C} \sin(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{I\sqrt{2}}{C\omega} \sin(\psi + \varphi) e^{-\frac{t}{RC}}$$

toate aceste mărimi,  $q$ ,  $i$  și  $u$ , scad după o lege exponențială.

**7.2.3.3. Aplicație numerică.** Se dă circuitul electric format dintr-un condensator având capacitatea  $C = 1,06 \mu F$ , legat în serie cu un rezistor de rezistență  $R_1 = 1732 \Omega$  și alimentat de o sursă cu tensiune alternativă cosinusoidală, având valoarea efectivă  $E = 2 \text{ kV}$ . La un moment dat, rezistența crește brusc la valoarea  $R_2 = 3000 \Omega$ . Frecvența tensiunii alternative fiind  $f = 50 \text{ Hz}$ , se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al tensiunii la bornele condensatorului.

Tensiunea la bornele condensatorului fiind dată de relația

$$u = \frac{q}{C};$$

va trebui stabilită în prealabil încărcarea condensatorului în regim tranzitoriu. Aceasta este dată de relația (3.209). Tensiunea la bornele condensatorului se obține împărțind această relație prin  $C$ .

Înainte de variația rezistenței, curentul în circuit era

$$i_1 = \frac{E\sqrt{2}}{Z_1} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

în care

$$E\sqrt{2} = 2000\sqrt{2} \text{ V}; \quad Z_1 = \sqrt{R_1^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} = 2 \cdot 10^3 \sqrt{3} \Omega; \quad \left( \frac{1}{C\omega} = 3 \cdot 10^3 \Omega \right);$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{R_1 C \omega} = \sqrt{3}; \text{ rezultă } \varphi_1 = 60^\circ.$$



De aici, se deduce sarcina electrică.

$$q_1 = \int_0^t i_1 dt = \frac{E}{Z_1 \omega} \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (7.2)$$

După variația rezistenței și stabilirea regimului forțat, curentul în circuit este

$$i_p = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

în care

$$E \sqrt{2} = 2000 \sqrt{2} \text{ V}; \quad Z_2 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} = 3 \cdot 10^3 \sqrt{2} \Omega;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 1; \quad \text{rezultă } \varphi_2 = 45^\circ,$$

de unde se deduce, ca mai sus, sarcina electrică corespunzătoare

$$q_p = \int_0^t i_p dt = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2 \omega} \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (7.3)$$

La timpul  $t = 0_+$ , relațiile (7.2) și (7.3) devin

$$q_0 = \frac{E \sqrt{2}}{Z_1 \omega} \sin \varphi_1 \quad \text{și} \quad q_{p0} = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2 \omega} \sin \varphi_2.$$

Rezultă dar, că în regimul tranzitoriu de încărcare a condensatorului, sarcina electrică are expresia:

$$q = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2 \omega} \sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{E \sqrt{2}}{\omega} \left[ \frac{\sin \varphi_1}{Z_1} - \frac{\sin \varphi_2}{Z_2} \right] e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

de unde, prin împărțire cu  $C$ , se deduce

$$u = \frac{E \sqrt{2}}{Z_2 C \omega} \sin(\omega t + \varphi_2) + \frac{E \sqrt{2}}{C \omega} \left[ \frac{\sin \varphi_1}{Z_1} - \frac{\sin \varphi_2}{Z_2} \right] e^{-\frac{t}{R_2 C}},$$

sau numeric

$$u = 2820 \sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ) + 1008 e^{-314 t}.$$

Curba de variație a tensiunii se construiește ușor.



### 7.3. STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV ÎN CARE SE ȚINE SEAMA DE AMBELE FORME DE ENERGIE

#### 7.3.1. CIRCUITE ELECTRICE FORMATE DINTR-UN REZISTOR, O BOBINĂ ȘI UN CONDENSATOR LEGAT ÎN SERIE

7.3.1.1. **Formule utilizate.** Regimul tranzitoriu fiind caracterizat în acest gen de probleme prin doi parametri, curentul din circuit și tensiunea la bornele condensatorului, pentru rezolvarea lor este necesar a porni de la două ecuații diferențiale și anume, de la ecuația (3.214)

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt = e,$$

care definește curentul în circuit, și de la ecuația (3.215)

$$CL \frac{d^2u}{dt^2} + CR \frac{du}{dt} + u = e,$$

care definește tensiunea la bornele condensatorului, ambele mărimi fiind definite în funcție de forța electromotoare  $e$  aplicată circuitului. Cele două mărimi nu sînt independente una de cealaltă și sînt legate prin relația (3.204)

$$i = C \frac{du}{dt}.$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații \* — relațiile (3.222)

$$u = u_p + \frac{e^{-\delta t}}{\Omega \sqrt{LC}} \left[ (u_0 - u_{p0}) \operatorname{sh}(\Omega t + \alpha) + (i_0 - i_{p0}) \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{sh} \Omega t \right]$$

și (3.223)

$$i = i_p - \frac{e^{-\delta t}}{\Omega L} \left[ (i_0 - i_{p0}) \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{sh}(\Omega t - \alpha) + (u_0 - u_{p0}) \operatorname{sh} \Omega t \right]$$

pot fi utilizate în același mod și în cazul circuitelor de curent alternativ.

Concluziile privind natura regimului tranzitoriu ce apare în circuitele electrice sînt aceleași, ele referindu-se numai la regimul liber de funcționare a circuitelor.

7.3.1.2. Închiderea unui circuit electric format dintr-un condensator legat în serie cu un rezistor inductiv, pe o sursă de forță electromotoare alternativă sinusoidală. Fie circuitul electric din figura 7.7, alimentat de forța electromotoare

$$e = E \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi);$$

se presupune că acest circuit este oscilant.

\* Vezi 3.6.3.



La timpul  $t = 0_-$ , înainte de închiderea întrerupătorului,

$$u_0 = 0 \quad \text{și} \quad i_0 = 0.$$

După închiderea întrerupătorului și stabilirea regimului forțat, curentul în circuit este

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi),$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R},$$

ar tensiunea la bornele condensatorului

$$u_p = \frac{1}{C} \int_0^t i_p dt = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

În consecință,

$$u_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \sin(\psi - \varphi); \quad i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \cos(\psi - \varphi).$$

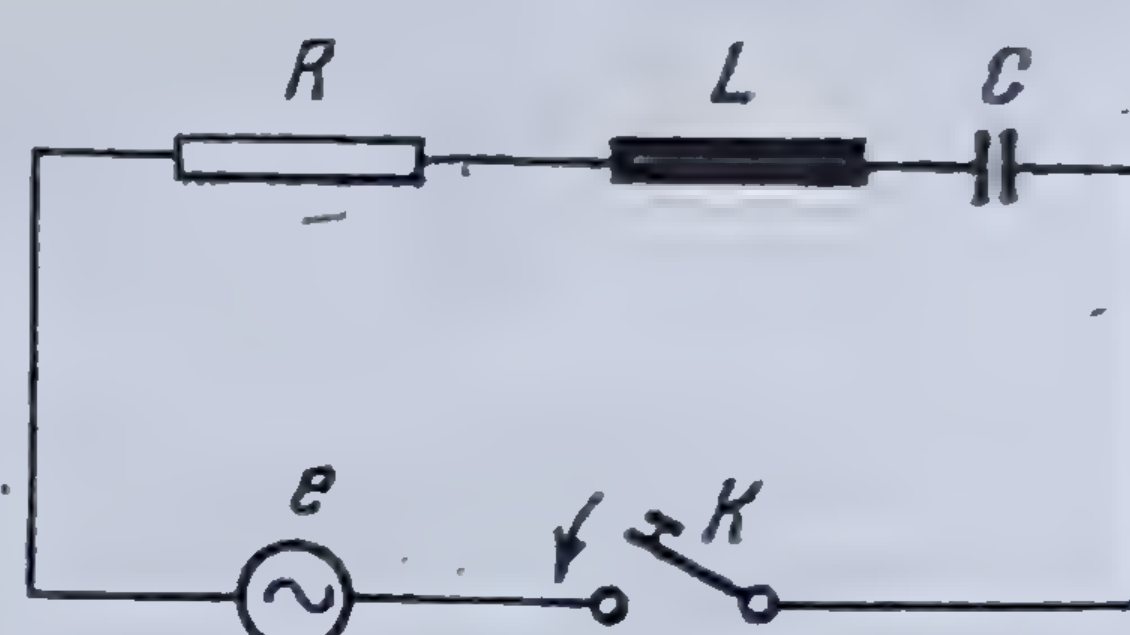


Fig. 7.7. Circuit electric cu  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , alimentat de o sursă de curent alternativ.

Introducându-se aceste valori în relațiile (3.222) și (3.223) se găsește

$$i = \frac{\sqrt{2} E}{Z} \left\{ \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L} \left[ \sqrt{\frac{L}{C}} \cos(\psi - \varphi) \sin(\Omega t - \alpha) + \frac{\sin(\psi - \varphi)}{C\omega} \sin \Omega t \right] \right\}. \quad (7.7)$$

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \left\{ \sin(\omega t + \psi - \varphi) - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega \sqrt{CL}} \left[ \sin(\psi - \varphi) \sin(\Omega t + \alpha) + \omega \sqrt{CL} \cos(\psi - \varphi) \sin \Omega t \right] \right\}, \quad (7.8)$$

care sînt relațiile generale ce dau curentul în circuit și tensiunea la bornele condensatorului.

Să examinăm forma curentului și a tensiunii în cîteva cazuri particulare.

a) Presupunînd că în circuit rezistența  $R$  este neglijabilă, se cere să se determine tensiunea la bornele condensatorului. În acest caz:

$$\delta = \frac{R}{2L} = 0 \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \infty; \text{ rezultă } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$



Relația (7.8) devine

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} [-\cos(\omega t + \psi) + \cos\psi \cos\Omega t - \omega\sqrt{CL} \sin\psi \sin\Omega t].$$

Dacă se face calculabilă prin logaritmi expresia \*

$$\cos\psi \cos\Omega t - \omega\sqrt{CL} \sin\psi \sin\Omega t$$

se găsește

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} [-\cos(\omega t + \psi) + \sqrt{1 + (\omega^2 CL - 1) \sin^2\psi} \cos(\Omega t + \chi)].$$

Amplitudinea totală este deci egală cu suma aritmetică a amplitudinilor termenilor de pulsație  $\omega$  și de pulsație  $\Omega$  și depinde numai de  $\psi$ , adică de faza tensiunii la momentul închiderii întrerupătorului.

În cazul când

$$\omega^2 LC - 1 < 0$$

rezultă

$$\frac{1}{\sqrt{CL}} = \Omega > \omega,$$

adică pulsația proprie a circuitului este mai mare decât pulsația  $\omega$  a forței electromotoare aplicate; amplitudinea maximă a tensiunii se obține pentru  $\sin\psi = 0$ , adică în cazul când se închide circuitul în momentul în care forța electromotoare trece prin maximum \*\*. Amplitudinea maximă este în acest caz egală cu de două ori amplitudinea tensiunii în regim forțat.

b) Cazul în care  $\Omega > \omega$  este cel mai des întâlnit în tehnică. La punerea sub tensiune a unui cablu, fenomenul acesta se produce întotdeauna, deoarece capacitatea cablului și reactanțele de scăpări ale transformatoarelor și generatoarelor formează un circuit oscilant.

---


$$* F = \cos\psi \cos\Omega t - \omega\sqrt{CL} \sin\psi \sin\Omega t = \cos\psi (\cos\Omega t - \omega\sqrt{CL} \tan\psi \sin\Omega t).$$

Punând

$$\omega\sqrt{CL} \tan\psi = \tan\chi,$$

se obține succesiv

$$F = \frac{\cos\psi}{\cos\chi} (\cos\chi \cos\Omega t - \sin\chi \sin\Omega t) = \frac{\cos\psi}{\cos\chi} \cos(\Omega t + \chi);$$

dar

$$\frac{\cos\psi}{\cos\chi} = \sqrt{1 + \tan^2\chi} \cos\psi = \cos\psi \sqrt{1 + \omega^2 CL \tan^2\psi} = \sqrt{\cos^2\psi + \omega^2 CL \sin^2\psi} = \sqrt{1 + (\omega^2 CL - 1) \sin^2\psi},$$

deci

$$F = \sqrt{1 + (\omega^2 CL - 1) \sin^2\psi} \cos(\Omega t + \chi).$$

\*\* Derivând expresia (7.8) și făcând  $t = 0$ , se obține succesiv

$$[\omega \sin(\omega t + \psi) - \Omega \sin\Omega t \cos\psi - \Omega\omega\sqrt{CL} \cos\Omega t \sin\psi]_{t=0} = \omega \sin\psi + \Omega\omega\sqrt{CL} \sin\psi = 2\omega \sin\psi = 0, \text{ deci } \psi = 0$$



Pentru ilustrarea celor de mai sus, se consideră exemplul următor:  
Fie un cablu al cărui curent de încărcare este  $0,2 I_n$ ,  $I_n$  fiind curentul nominal, și să presupunem că la funcționarea în plină sarcină căderea de tensiune inductivă în generator și transformator este de 25 % din tensiunea pe fază. În aceste condiții se obține

$$U\omega C = 0,2 I \quad \text{și} \quad I\omega L = 0,25 U,$$

de unde, prin înmulțire, rezultă

$$CL\omega^2 = 0,05 \quad \text{și} \quad \Omega = \frac{1}{CL} = 4,5 \omega,$$

adică frecvența proprie a circuitului este de 4,5 ori frecvența tensiunii.

Dacă se presupune că pierderea de tensiune reprezintă 5 % din tensiunea circuitului, atunci

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{0,25}{0,05} = 5; \quad \varphi \cong 78^\circ 45'.$$

Se presupune acum că întrerupătorul se închide la momentul

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

adică în momentul în care tensiunea la bornele condensatorului ar fi fost maximă dacă regimul forțat s-ar fi stabilit instantaneu\*. În acest caz, tensiunea aplicată la bornele circuitului are amplitudinea

$$U = [E\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi)]_{t=0} = \left[ E\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi\right) \right]_{t=0} = E\sqrt{2} \sin \varphi.$$

Curbele de tensiune și de curent ale regimului tranzitoriu se construiesc ușor pe cale grafică.

Se construiește întâi curba,

$$u_p = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi)$$

și se consideră ca origine a fenomenului tranzitoriu momentul când această curbă trece printr-un maximum (fig. 7.8).

\* Aceasta se deduce din relația (7.8) în care se presupune că nu există decât termenul corespunzător regimului forțat, din care, pentru condițiile de maximum, rezultă valoarea de mai sus.



Se construiește apoi cel de-al doilea termen al relației (7.8)

$$u_l = - \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z \Omega \sqrt{CL}} \varepsilon^{-\delta t} \sin(\Omega t + \alpha) = -A \varepsilon^{-\delta t} \sin(\Omega t + \alpha).$$

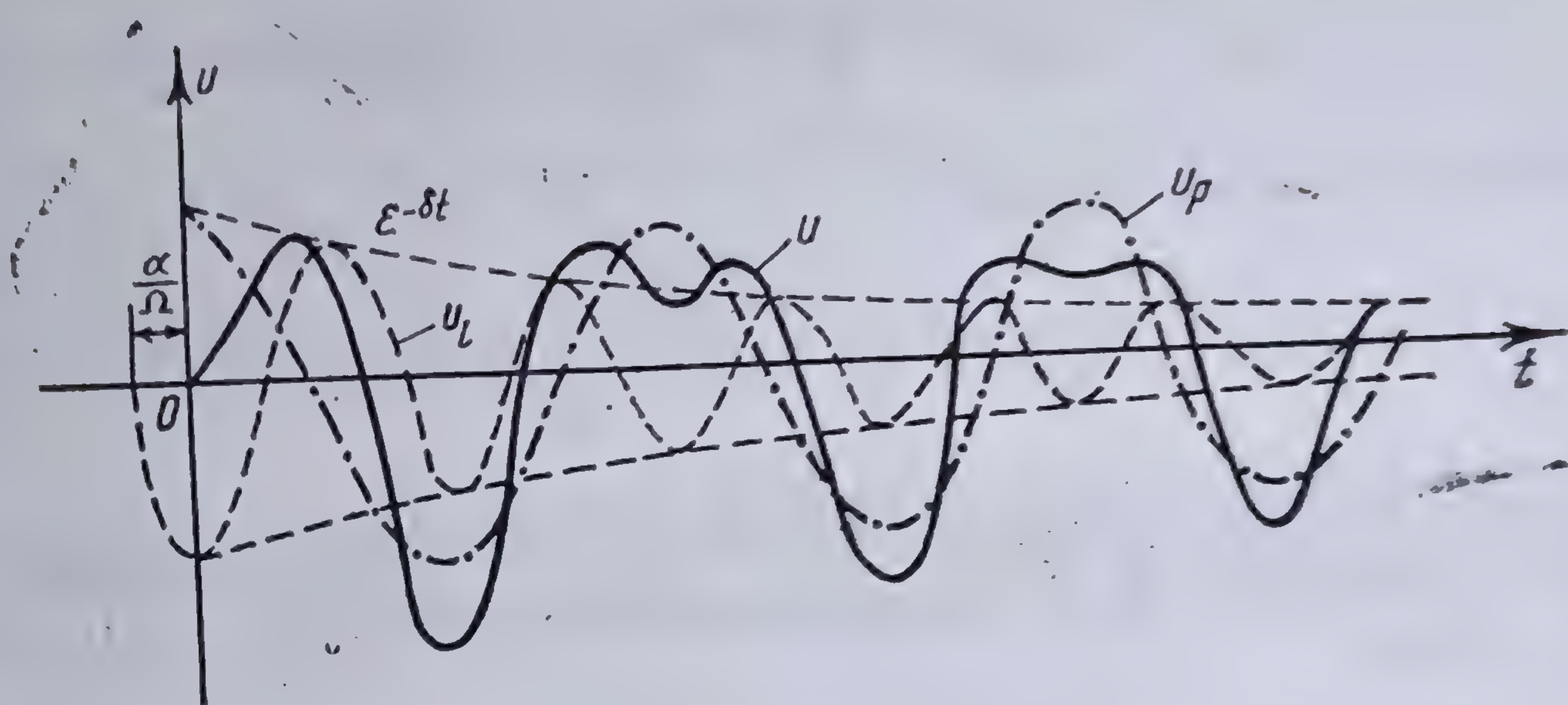


Fig. 7.8. Curba tensiunii la bornele condensatorului.

Acest termen se construiește ușor, observînd că el trece prin zero pentru valorile

$$t_0 = \frac{k\pi}{\Omega} - \frac{\alpha}{\Omega}$$

că valorile maxime sînt pentru

$$t_M = \frac{k\pi}{\Omega}$$

și că amplitudinile scad exponențial.

Făcînd suma acestor curbe, se obține curba rezultantă care poate avea o formă oarecare regimul tranzitoriu putînd crea și un regim deformant.

c) Se examinează acum un caz în care circuitul oscilant este în rezonanță pentru frecvența tensiunii alternative aplicată circuitului. În acest caz

$$CL \omega^2 = 1$$

și rezultă

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{CL\omega^2 - 1}{RC\omega} = 0; \text{ rezultă } \varphi = 0.$$

Admițînd că în acest caz  $\frac{R^2}{4L^2}$  este foarte mic și că deci poate fi neglijat rezultă

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}} \cong \omega.$$



De asemenea,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Omega}{\delta} \cong \frac{\omega}{\frac{R}{2L}} = \infty; \text{ rezultă } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Cu aceste elemente, ecuația care dă expresia curentului tranzitoriu se poate scrie

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{R} \left\{ \cos(\omega t + \psi) + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\omega} \left[ \omega \cos \psi \sin(\omega t - \alpha) + \frac{\sin \psi}{CL\omega} \sin \omega t \right] \right\} =$$

$$= \frac{E\sqrt{2}}{R} \cos(\omega t + \psi) (1 - \varepsilon^{-\delta t}).$$

Reprezentarea grafică a acestei curbe se face imediat, ea fiind compusă din două curbe care se sumează ușor.

În figura 7.9 a fost reprezentată această curbă pentru cazul când  $\psi = 0$ , adică pentru cazul când închiderea întrerupătorului se face în momentul în care tensiunea trece printr-un maximum. Construcția este mult simplificată dacă se observă că această curbă este o cosinusoidă la care amplitudinile cresc după funcția  $(1 - \varepsilon^{-\delta t})$ .

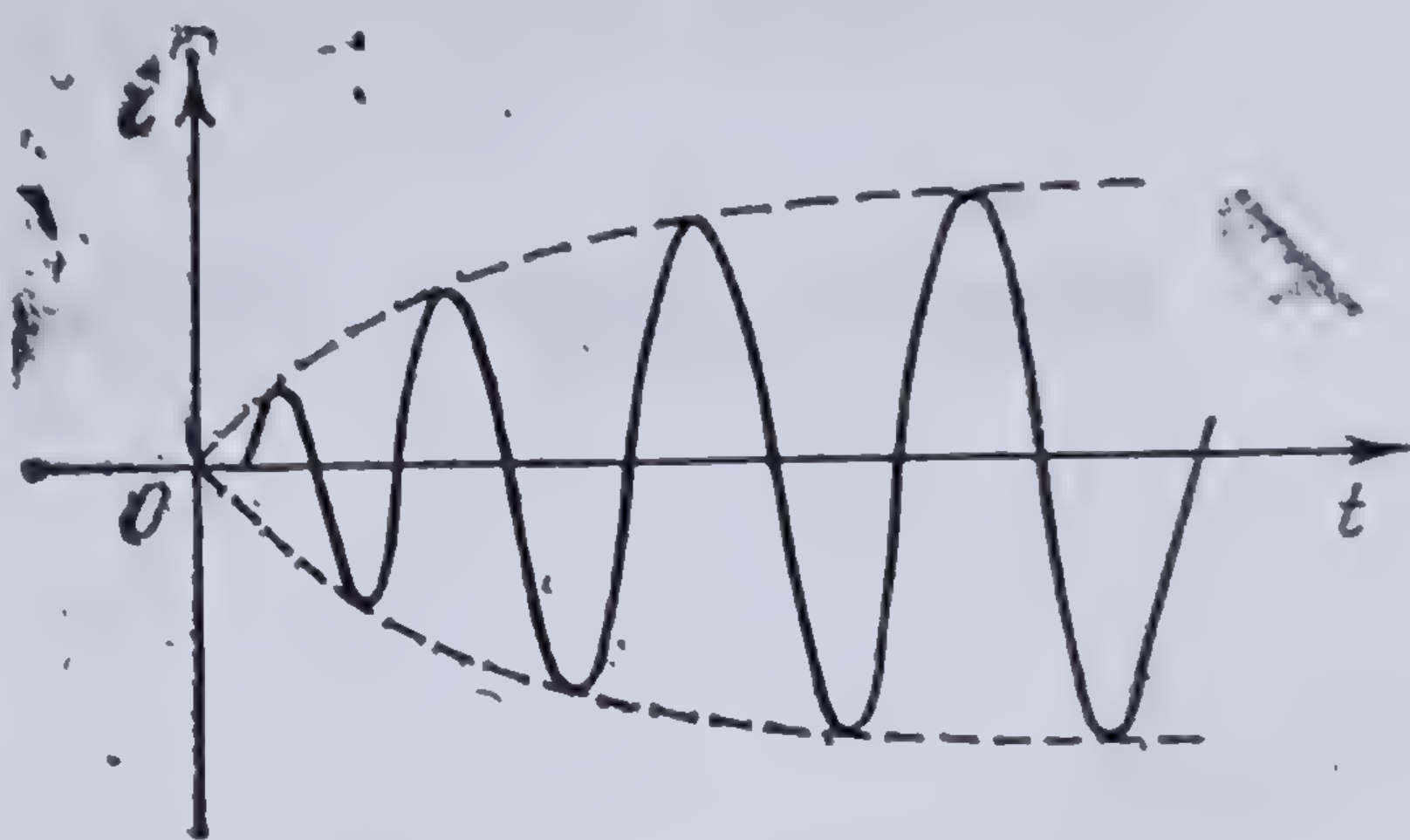


Fig. 7.9. Curba curentului, în cazul rezonanței.

**7.3.1.3. Deschiderea unui circuit electric inductiv cu un condensator la bornele întrerupătorului.** Fie un circuit electric inductiv, a cărui rezistență poate fi neglijată față de reactanță, alimentat de o sursă cu forța electromotoare alternativă sinusoidală

$$e = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \psi).$$

Deschizând întrerupătorul, cele două contacte ale acestuia formează armăturile unui condensator, șuntat la bornele întrerupătorului (fig. 7.10). Să determinăm tensiunea  $u$  la bornele acestui condensator.

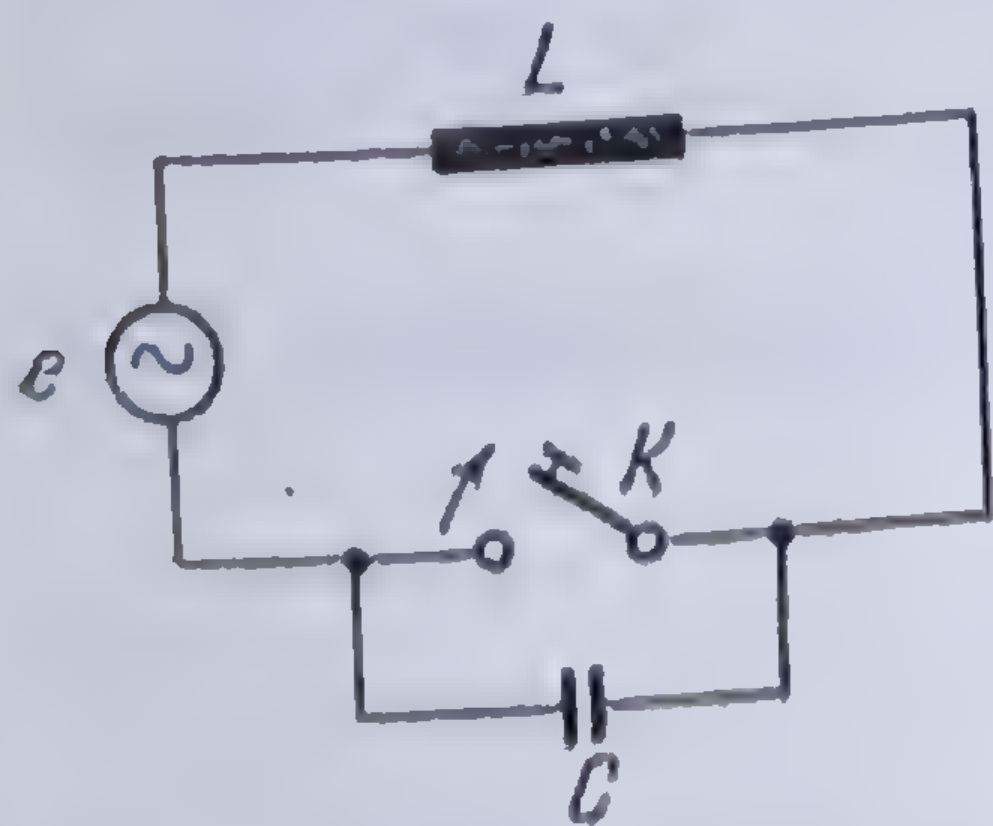


Fig. 7.10. Deschiderea unui circuit electric inductiv, la care contactele întrerupătorului formează armăturile unui condensator.

Pentru rezolvarea problemei, se pornește tot de la relațiile generale. Se observă că, deoarece rezistența  $R$  este neglijabilă,  $\Omega'^2 < 0$  și deci circuitul este oscilant. Pe de altă parte, luând  $R = 0$ , rezultă

$$\delta = 0; \operatorname{tg} \alpha = \infty, \text{ deci } \alpha = \frac{\pi}{2}; \Omega = \frac{1}{\sqrt{CL}},$$

astfel, încât relația (3.223), corespunzătoare unui sistem oscilant, se poate scrie

$$u = u_p + (u_0 - u_{p0}) \cos \Omega t + (i_0 - i_{p0}) \sqrt{\frac{L}{C}} \sin \Omega t. \quad (7.9)$$



Înainte de deschiderea întrerupătorului, curentul din circuit este

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \cos(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}) = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin(\omega t + \psi),$$

deoarece,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} = \infty.$$

Este ușor de văzut, că la timpul  $t = 0_-$ , înainte de deschiderea întrerupătorului,

$$u_0 = 0 \quad \text{și} \quad i_0 = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin \psi.$$

După deschiderea întrerupătorului și stabilirea regimului forțat,

$$i_p = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin(\omega t + \psi),$$

în care

$$Z = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

și

$$u_p = \frac{q_p}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t i_p dt = -\frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \cos(\omega t + \psi)$$

și deci, la timpul  $t = 0_+$ , rezultă

$$i_{p0} = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \sin \psi \quad \text{și} \quad u_{p0} = \frac{-E\sqrt{2}}{ZC\omega} \cos \psi,$$

astfel, încît relația (7.9) poate fi scrisă

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{C\omega Z} \left\{ \left[ -\cos(\omega t + \psi) + \cos \psi \cos \Omega t \right] + \frac{\sin \psi}{\omega\sqrt{CL}} \sin \Omega t \right\} \quad (7.10)$$

Să examinăm valoarea acestei tensiuni pentru diverse cazuri de întrerupere, corespunzătoare formei curbei de curent din circuit.

a) Dacă întreruperea curentului se face în momentul cînd acesta trece prin zero (la timpul  $t = 0$  și  $\psi = 0$ ), relația (7.10) devine

$$u = \frac{E\sqrt{2}}{ZC\omega} (-\cos \omega t + \cos \Omega t),$$

de unde, rezultă că tensiunea la bornele condensatorului poate fi cel mult dublată din cauza regimului tranzitoriu și aceasta deoarece în general  $\Omega \gg \omega$ . La această concluzie, se ajunge ușor construind cele două cosinusoide.



b) Dacă însă întreruperea curentului se face într-un moment oarecare, diferit de zero, termenul al doilea ia o valoare foarte mare, cu atât mai mare cu cât coeficientul

$$\frac{1}{\omega \sqrt{CL}} = \frac{\Omega}{\omega}$$

este mai mare, adică cu cât pulsația proprie a circuitului este mai mare față de pulsația forței electromotoare aplicate.

Amplitudinea acestui termen poate fi scrisă

$$u_M = \frac{E\sqrt{2}}{ZC\omega} \frac{\sin \psi}{\omega \sqrt{CL}} = \frac{E}{ZC\omega} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\sin \psi}{\omega L} = \frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \frac{\sin \psi}{(CL\omega^2 - 1)} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dar,

$$\frac{E\sqrt{2}}{L\omega} \sin \psi = i_0$$

este valoarea curentului întrerupt, de unde

$$u_M = \frac{i_0}{CL\omega^2 - 1} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Dacă se presupune că  $CL\omega^2$  este neglijabil față de unitate, atunci se poate scrie

$$u_M = -i_0 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La această relație se poate ajunge și direct, pornind de la bilanțul energiei și scriind că energia înmagazinată în inductanță în momentul întreruperii, se transformă în energie electrostatică

$$\frac{1}{2} Li_0^2 = \frac{1}{2} Cu_M^2.$$

Ca o consecință practică a acestei teorii, construcția întrerupătoarelor folosite în rețelele de curent alternativ este astfel făcută încît, arcul de ruptură care se produce între cele două contacte, să nu fie suflat mai înainte de a se stinge singur în momentul în care curentul trece prin zero. În acest fel, se evită să se producă la contactele întrerupătorului supratensiuni periculoase în momentul întreruperii unui scurtcircuit.

#### 7.4. UTILIZAREA MĂRIMILOR COMPLEXE LA STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU

##### 7.4.1. GENERALITAȚI ȘI DEFINIȚII

Studiul unui regim tranzitoriu constă din :

1. Determinarea regimului liber al sistemului; acest regim comportă o serie de termeni amortizați, periodici sau aperiodici, avînd anumiți coeficienți arbitrari. Problema constă în determinarea amortizării și a frecvenței proprii a circuitului.



2. Determinarea regimului forțat.

3. Suprapunerea acestor regimuri, determinându-se apoi diverși coeficienți prin condiții la limită.

Aceasta este calea care a fost urmată de altfel și în cazul problemelor ce apar în circuitele de curent continuu\* cât și în cele de curent alternativ\*\*.

Dacă studiul regimului forțat se poate face ușor, oricât de complicat ar fi circuitul, datorită formei algebrice liniare a ecuațiilor care se obțin, studiul regimului liber este în general mai dificil, aici apărînd ecuații diferențiale de diverse ordine. S-a căutat, în consecință, să se găsească metode simple și pentru studiul regimului liber al unui circuit.

Pentru studiul regimului liber mărimile variabile se pot reprezenta prin mărimi complexe, metodă care, ca și în cazul regimului forțat, poate să conducă la soluția problemei mult mai repede decît metoda clasică generală.

Cea mai simplă undă oscilatorie amortizată care poate lua naștere într-un circuit poate fi reprezentată prin expresia

$$y = A \sqrt{2} \varepsilon^{-\delta t} \sin \Omega t$$

în care  $\delta$  este factorul de amortizare al unde,  $\Omega$  pulsația sa proprie și  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  perioada sa proprie, care se mai numește și pseudoperioada, deoarece unda se deosebește de o undă periodică sinusoidală obișnuită.

Raportul a două amplitudini succesive de același sens ale acestei unde, diferind printr-o pseudoperioadă este constant, iar logaritmul natural al acestui raport este decrementul logaritmice al oscilației și este egal cu  $\gamma = \delta T$ .

Forma cea mai simplă a unui regim aperiodic amortizat este  $A\varepsilon^{-\delta t}$ , iar a unei unde aperiodice, care crește de la zero spre un maximum, pentru a descrește apoi iar către zero, este dată de expresia

$$y = A(\varepsilon^{-r_1 t} - \varepsilon^{-r_2 t})$$

cu  $r_2 > r_1$ . Punînd

$$r_1 + r_2 = 2\delta \text{ și } r_2 - r_1 = 2\Omega$$

expresia de mai sus devine

$$2A\varepsilon^{-\delta t} \operatorname{sh} \Omega' t.$$

Panta la origine a unei asemenea unde este  $A(r_2 - r_1)$  și se obține calculînd  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0}$ , iar fruntea sa, adică timpul care se scurge din momentul cînd apare, pînă în momentul maximumului său, este dată de relația

$$T_1 = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{r_2 - r_1}$$

care se obține din ecuația  $\frac{dy}{dt} = 0$ .

\* Vezi 3.6

\*\* Vezi 7.1.1.



Curentul sau tensiunea unui circuit electric, căruia i se pot aplica legile lui OHM și KIRCHHOFF, poate fi întotdeauna exprimat printr-un termen exponențial, sau printr-o sumă de asemenea termeni, cu exponent real sau imaginar și deci printr-o funcție sau o sumă de funcții de forma

$$i = I \sqrt{2} \varepsilon^{-\delta t} \cos (\Omega t + \psi), \quad (7.11)$$

în care  $I$  și  $\psi$  sînt constante care urmează a fi determinate din condițiile de funcționare ale circuitului.

Dacă  $\delta$  și  $\Omega$  sînt amîndoi nuli, expresia (7.11) reprezintă un curent continuu  $i = \sqrt{2} \cos \psi$ . Dacă  $\Omega = 0$  dar  $\delta \neq 0$ , expresia reprezintă un curent aperiodic a cărui amplitudine crește sau descrește, după cum  $\delta$  este negativ sau pozitiv. Dacă  $\Omega \neq 0$  și  $\delta = 0$ , expresia reprezintă un curent permanent periodic sinusoidal. Dacă atît  $\delta$  cît și  $\Omega$  sînt diferiți de zero, curentul respectiv este un curent periodic sinusoidal amortizat\*.

Funcției (7.11) i se poate asocia un fazor plan avînd modulul egal cu produsul dintre valoarea efectivă a funcției periodice sinusoidale și factorul amortizant și ca argument unghiul acelei funcții, expresia acestui fazor fiind\*\*

$$\underline{I} = I \varepsilon^{-\delta t} \varepsilon^{j(\Omega t + \psi)} = I \varepsilon^{\underline{p}t + j\psi}, \quad (7.12)$$

în care s-a pus

$$\underline{p} = -\delta + j\Omega, \quad (7.13)$$

$\delta$  și  $\Omega$  fiind mărimi reale.

#### 7.4.2. METODA GENERALĂ DE CALCUL A REGIMURILOR TRANZITORII CU AJUTORUL MĂRIMILOR COMPLEXE

Rezolvarea unei probleme de regim tranzitoriu constă în a determina parametrii caracteristici ai mărimii căutate. Fie, în general,

$$y = Y \sqrt{2} \varepsilon^{\delta t} \cos (\Omega t + \psi), \quad (7.14)$$

expresia matematică ce definește mărimea căutăată. Această mărime este caracterizată prin parametrii  $\delta$ ,  $\Omega$ ,  $Y$  și  $\psi$ . Dintre aceștia, primii doi,  $\delta$  și  $\psi$ , se determină în condițiile de funcționare ale sistemului în regim liber; următorii doi parametri se determină în condițiile de funcționare limită ale regimului complet (regim liber plus regim forțat).

Calculul parametrilor se face pornind de la ecuația de funcționare a sistemului scrisă în mărimi complexe generalizate. Pentru determinarea parametrilor  $\delta$  și  $\Omega$ , se anulează membrul al doilea și se înlocuiește în ecuație  $\underline{p}$  prin valoarea sa (7.13); se identifică apoi părțile reale și părțile complexe, obținîndu-se astfel un sistem de două ecuații cu două necunoscute, suficient pentru determinarea celor doi parametri necunoscuți. Se observă că soluția este univoc determinată deoarece  $\delta$  și  $\Omega$  sînt mărimi *reale*, conform ipotezei făcute. Problema se reduce astfel, la o problemă de algebră. Introducînd valorile obținute în

\* Vezi 4.3.6.1

\*\* Vezi 4.2.5.



relația (7.14) se obține expresia regimului liber căutat. Regimul permanent se calculează apoi prin metodele cunoscute și se adaugă regimului liber obținându-se astfel regimul tranzitoriu căutat, dar la care mai sînt de determinat ceilalți doi parametri  $Y$  și  $\psi$ . Pentru aceasta se scriu două condiții de funcționare la limită, care vor furniza astfel ecuațiile necesare determinării acestor doi parametri.

Fie, pentru exemplificare, să rezolvăm următorul exemplu simplu : Funcționarea unui sistem oarecare este definită de ecuația diferențială

$$M \frac{dy}{dt} + Ny = f$$

și dorim să găsim ecuația care caracterizează fenomenul corespunzător.

Transformînd ecuația diferențială dată, se obține

$$Mp \underline{Y} + N\underline{Y} = \underline{F}.$$

Pentru determinarea regimului liber, scriem ecuația fără membrul doi

$$\underline{Y}(Mp + N) = 0$$

Cum  $\underline{Y} \neq 0$ , rezultă că  $Mp + N = 0$ , de unde se deduce

$$\underline{p} = \delta + j\Omega = -\frac{N}{M}.$$

Rezultă

$$\delta = -\frac{N}{M} \text{ și } \Omega = 0$$

și expresia (7.14) devine

$$y = Y \sqrt{2} e^{-\frac{N}{M}t} \cos \psi = A e^{-\frac{N}{M}t}$$

Fie  $y_p$  soluția corespunzătoare regimului permanent, dedusă prin mijloace obișnuite și care depinde de forma funcției de constrîngere  $f$ . Regimul tranzitoriu corespunzător va fi

$$y = y_p + y_t = y_p + A e^{-\frac{N}{M}t}.$$

Pentru a determina constanta  $A$ , să presupunem că la timpul  $t = 0_-$ , valoarea regimului corespunzător este  $y_0$  iar la  $t = 0_+$ , aceea a regimului permanent,  $y_{p0}$ . Impunînd aceste condiții de limită se obține

$$y_0 = y_p + A$$

de unde rezultă

$$A = y_0 - y_{p0}.$$



Regimul tranzitoriu căutat, va fi deci,

$$y = y_p + (y_0 - y_{p0}) e^{-\frac{N}{M}t},$$

relație analoagă cu aceea determinată pe altă cale în paragraful 3.6.2.1.

Din cele ce preced rezultă că metoda mărimilor complexe generalizate determină **numai** regimul de funcționare *liber* al sistemului; regimul permanent sau forțat de funcționare a sistemului se determină pe căile obișnuite, specifice fiecărui sistem. Suprapunerea acestor sisteme și impunerea condițiilor la limită determină ceilalți parametri ai ecuației de funcționare a sistemului.

#### 7.4.3. FENOMENE TRANZITORII ÎN ELECTROTEHNICĂ

Pentru punerea în ecuație a problemelor de regim tranzitoriu în electrotehnică se folosește de obicei metoda directă a teoremelor lui KIRCHHOFF, obținându-se astfel, direct ecuația diferențială a problemei. Calea este însă mai grea și conduce de multe ori la calcule foarte laborioase. Se ajunge mai ușor la rezultat dacă se procedează ca și în cazul regimului forțat când se utilizează mărimile complexe: se întocmește o schemă echivalentă în care inductanțele  $L$  sînt înlocuite cu reactanțele inductive complexe generalizate  $pL$ , capacitățile  $C$  prin reactanțele capacitive complexe generalizate  $\frac{1}{pC}$  și valorile instantanee prin vectorul complex generalizat asociat. La schema astfel obținută, se aplică toate metodele de calcul din curent continuu, obținându-se un sistem de ecuații algebrice în  $p$  care se rezolvă în raport cu necunoscutele căutate, în general curenții și anume, curenții liberi, prin fazorii lor asociați. Din aceste relații se deduc apoi parametrii valorilor instantanee ale acestor curenți. Adăugînd regimul permanent corespunzător și, după determinarea celorlalți parametri, prin condițiile la limită, se obține regimul tranzitoriu căutat.

Ecuația generală a unui circuit serie, stabilită cu ajutorul teoremei a doua a lui KIRCHHOFF, este

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u. \quad (7.15)$$

Înlocuind mărimile instantanee prin fazorii asociați, relația (7.15) devine

$$\left( R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) \underline{I} = \underline{U} \quad (7.16)$$

Notînd

$$\underline{Z}(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp} \quad (7.17)$$

impedanța complexă generalizată a circuitului, relația (7.16) devine

$$\underline{Z}(p)\underline{I} = \underline{U}$$

și reprezintă o formă generalizată a legii lui OHM.



Reluând relația (7.17) a impedanței complexe generalizate, modulul ei este

$$Z(p) = \sqrt{\left[ R + \delta L + \frac{\delta}{(\delta^2 + \Omega^2) C} \right]^2 + \left[ \Omega L - \frac{\Omega}{(\delta^2 + \Omega^2) C} \right]^2},$$

iar argumentul său

$$\psi = \arctg \frac{\Omega (\delta^2 + \Omega^2) LC - \Omega}{(R + \delta L) (\delta^2 + \Omega^2) C + \delta}.$$

În cazul când circuitul nu are capacitate, expresia (7.17) a impedanței se simplifică și devine

$$\underline{Z}(p) = R + \underline{p}L$$

cu modulul

$$Z(p) = \sqrt{(R + \delta L)^2 + \Omega^2 L^2}$$

și argumentul

$$\gamma = \arctg \frac{\Omega L}{R + \delta L}.$$

În cazul când circuitul nu are inductanță, expresia impedanței (7.17) devine

$$\underline{Z}(p) = R + \frac{1}{\underline{p}C}$$

cu modulul

$$Z(p) = \sqrt{\left[ R + \frac{\delta}{(\delta^2 + \Omega^2) C} \right]^2 + \frac{\Omega^2}{(\delta^2 + \Omega^2) C^2}}$$

și argumentul

$$\zeta = \arctg \frac{\Omega}{(\delta^2 + \Omega^2) RC + \delta}.$$

Se poate defini o impedanță mutuală generalizată, pornind de la ecuația

$$e = M \frac{di}{dt}$$

sau în mărimi complexe

$$\underline{E} = M \underline{p} \underline{I}.$$

Impedanța mutuală generalizată este  $M\underline{p}$  și are modulul

$$Z_M = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2} M$$



și argumentul

$$\mu = \arctg \left( -\frac{\Omega}{\delta} \right).$$

În cazul unui circuit format dintr-un condensator de capacitate  $C$ , șun-  
tat cu o conductanță  $G$  și străbătut de curentul tranzitoriu  $\underline{I}$ , tensiunea la  
bornele sale este dată de relația

$$\underline{Y}(p) \underline{U} = \underline{I}$$

în care

$$\underline{Y}(p) = G + pC$$

este *admitanța* generalizată a circuitului, avînd modulul

$$Y(p) = \sqrt{(G - \delta C)^2 + C^2 \Omega^2}$$

și defazajul față de originea de faze

$$\xi = \arctg \frac{C \Omega}{G - \delta C}.$$

#### 7.4.4. APLICAȚII LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE CU CONSTANTE LOCALIZATE

7.4.4.1. **Exemplul 1.** Fie un circuit electric simplu format dintr-un rezis-  
tor de rezistență  $R$ , legat în serie cu o bobină de inductanță  $L$ , căruia urmează  
a i se studia regimul liber. Curentul tranzitoriu care ia naștere în circuit  
este de forma

$$i = I \sqrt{2} \varepsilon^{-\delta t} \cos (\Omega t + \psi), \quad (7.11)$$

iar ecuația căderilor de tensiune este

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

Înlocuind în această ecuație pe  $i$  cu  $\underline{I}$  și  $\frac{d}{dt}$  cu  $\underline{p}$ , se obține

$$(L\underline{p} + R)\underline{I} = 0$$

Cum  $\underline{I} \neq 0$ , rezultă

$$L\underline{p} + R = 0$$

și deci,

$$\underline{p} = -\frac{R}{L};$$



cum

$$\underline{p} = -\delta + j\Omega$$

rezultă

$$\delta = \frac{R}{L} \quad \text{și} \quad \Omega = 0,$$

astfel, încît expresia curentului liber este

$$i_l = I \sqrt{2} \cos \psi \varepsilon^{-\frac{R}{L}t} = A \varepsilon^{-\frac{R}{L}t},$$

expresie cunoscută.

Dacă tensiunea aplicată circuitului este

$$e = E \sqrt{2} \sin (\omega t + \psi),$$

curentul permanent în circuit este

$$i_p = \frac{E \sqrt{2}}{Z} \sin (\omega t + \psi - \varphi),$$

în care

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R},$$

astfel că regimul tranzitoriu în circuit este

$$i = i_p + i_l = \frac{E \sqrt{2}}{Z} \sin (\omega t + \psi - \varphi) + A \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}. \quad (7.18)$$

Punînd condiția ca la timpul  $t = 0_-$  curentul tranzitoriu din circuit să fie nul

$$i = 0,$$

din relația (7.18) se deduce imediat

$$A = \frac{E \sqrt{2}}{Z} \sin (\psi - \varphi),$$

regăsindu-se astfel, pentru regimul tranzitor, relația 7.1.

**7.4.4.2. Exemplul 2.** Fie circuitul electric format dintr-un rezistor de rezistență  $R$  legat în serie cu o bobină de inductanță  $L$  și cu un condensator de capacitate  $C$ , acesta din urmă șuntat cu un rezistor de conductanță  $G$



(fig. 7.11). Ecuația sistemului de poate scrie imediat în mărimi complexe, aplicând legea lui OIM generalizată. Se va găsi astfel,

$$\underline{I}(R + \underline{p}L) + \frac{\underline{I}}{G + \underline{p}C} = 0.$$

Cum  $\underline{I} \neq 0$ , se obține

$$(R + \underline{p}L)(G + \underline{p}C) + 1 = 0$$

sau

$$\underline{p}^2 LC + \underline{p}(RC + GL) + RG + 1 = 0. \quad (7.19)$$

Înlocuind pe  $\underline{p}$  cu valoarea sa și identificând părțile reale și părțile complexe, se obține sistemul de ecuații

$$\left. \begin{aligned} \Omega(IG + RC - 2\delta CL) &= 0 \\ LC\Omega^2 - LC\delta^2 - GR + \delta(CR + GL) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

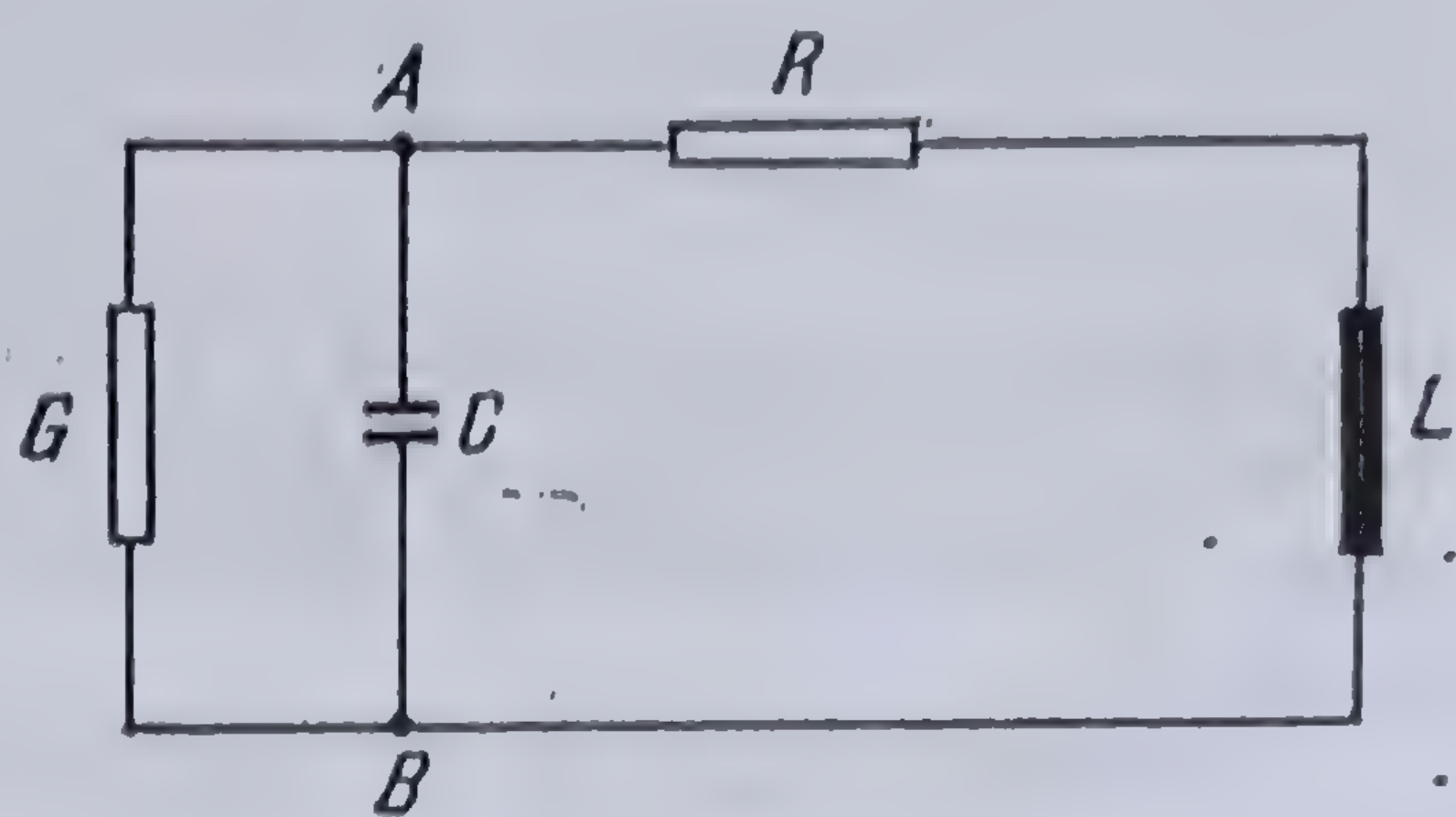


Fig. 7.11. Circuit electric complex.

de unde se găsește factorul de amortizare

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$$

și pulsația proprie a circuitului

$$\Omega = \sqrt{\frac{1 + GR}{CL} - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2}.$$

Pseudoperioada oscilațiilor libere este

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

Dacă

$$\left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 > \frac{4}{CL},$$

atunci  $\Omega$  devine imaginar și din relația (7.13) rezultă că  $\underline{p}$  devine real; problema nu mai este posibilă, deoarece contrazice ipoteza și atunci se caută a doua soluție ( $\Omega = 0$ ) și circuitul devine aperiodic.

Dacă  $R$  și  $G$  sînt foarte mici, astfel încît să se poată neglija  $\delta^2$  față de  $\omega^2$ , atunci se obține

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$



iar decrementul logaritmic al oscilațiilor este

$$\gamma = \delta T = \pi \frac{RC + LG}{\sqrt{CL}} = \pi \frac{R + \frac{L}{C}}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \pi \frac{R + GZ^2}{Z}$$

în care s-a notat cu

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

impedanța caracteristică a circuitului. Ultima relație arată că, din punct de vedere al amortizării oscilațiilor libere, o conductanță  $G$  așezată la bornele condensatorului este echivalentă cu o rezistență  $R' = GZ^2$  legată în serie cu rezistența  $R$ .

**OBSERVAȚII:** 1. Se puteau găsi aceste elemente și dacă se pornea de la ecuația diferențială a căderilor de tensiune în circuit, care se stabilește după cum urmează: fie  $u$  valoarea instantanee a diferenței de potențial dintre punctele  $A$  și  $B$  (fig. 7.11). Între punctele  $A$  și  $B$  ale circuitului se pot scrie ecuațiile:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u = 0,$$

$$i = C \frac{du}{dt} + Gu,$$

sau, eliminând pe  $i$  între aceste ecuații

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + (RC + LG) \frac{du}{dt} + (RG + 1)u = 0.$$

Înlocuind pe  $u$  cu mărimea complexă iar simbolurile de derivare prin  $\underline{p}$ , respectiv  $\underline{p}^2$ , se obține

$$\underline{U}[\underline{p}^2 LC + \underline{p}(RC + LG) + RG + 1] = 0$$

adică tocmai relația (7.19), deoarece  $\underline{U} \neq 0$ .

2. Prima ecuația a sistemului (7.20) poate da și  $\Omega = 0$ . În acest caz

$$\delta = \frac{-1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 - \frac{1}{LC}};$$

cum radicalul este întotdeauna mai mic decât primul termen al sumei, rezultă că este întotdeauna pozitiv și deci pentru un același circuit se obțin două con-



stante de timp. Problema este deci nedeterminată; nedeterminarea este numai aparentă. Într-adevăr, notînd

$$\delta_1 = \frac{-1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta + \Omega',$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta - \Omega',$$

forma curentului liber va fi

$$i_e = \varepsilon^{-\delta t} (C_1 \varepsilon^{\Omega' t} + C_2 \varepsilon^{-\Omega' t}),$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sînt două constante. Ținînd seama de relațiile

$$\varepsilon^{\Omega' t} = \operatorname{ch} \Omega' t + \operatorname{sh} \Omega' t \text{ și } \varepsilon^{-\Omega' t} = \operatorname{ch} \Omega' t - \operatorname{sh} \Omega' t$$

punînd

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \operatorname{tg} h \psi' \text{ și } 2 \sqrt{C_1 C_2} = I'$$

și cum

$$\operatorname{ch} \psi' = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 h \psi'}},$$

relația de mai sus devine

$$i_e = I' \varepsilon^{-\delta t} \operatorname{ch}(\Omega' t + \psi'), \quad (7.21)$$

o relație asemănătoare cu relația (7.11). În această relație sînt de determinat, ca și în analoaga ei, valorile lui  $I'$  și  $\psi'$  și care se determină prin condițiile la limită. Rezultă dar, că atunci cînd  $\Omega$  este pur complex, sistemul considerat este aperiodic.

În concluzie, sistemul (7.12) se rezolvă întotdeauna luînd  $\Omega \neq 0$  și găsind, din cele două ecuații, pe  $\delta$  și pe  $\Omega$ ;  $\delta$  este întotdeauna real; el poate fi pozitiv sau negativ;  $\Omega$  poate fi real sau pur complex; dacă este real, atunci regimul liber este pseudoperiodic și expresia lui este dată de relația (7.12); dacă  $\Omega$  este pur complex, regimul liber este aperiodic și expresia lui este dată de relația (7.21).

În ambele cazuri cei doi parametri rămași se determină prin condițiile la limită.

**7.4.4.3. Exemplul 3.** Un circuit electric format din rezistoarele de rezistențe  $R_1$  și  $R_2$  legate în serie este alimentat de o sursă cu tensiunea constantă  $U$ . La un moment dat, se leagă în paralel pe rezistorul de rezistență  $R_2$ , un circuit  $K$  format dintr-o bobină de inductanță  $L$  legată în serie cu un condensa-



tor neîncărcat de capacitate  $C$  (fig. 7.12). Se cere să se determine forma curentului ce se stabilește în circuitul  $K$ . Aplicație numerică în ipotezele : a)  $R_1 = R_2 = 40 \Omega$ ; b)  $R_1 = R_2 = 400 \Omega$ ; în ambele cazuri  $U = 600 \text{ V}$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$  și  $C = 100 \mu\text{F}$ .

Sistemul dat fiind alimentat de o sursă de curent constantă, în circuitul  $K$ , în regim forțat curentul este nul, astfel încât problema se reduce numai la stabilirea regimului liber în acest circuit.

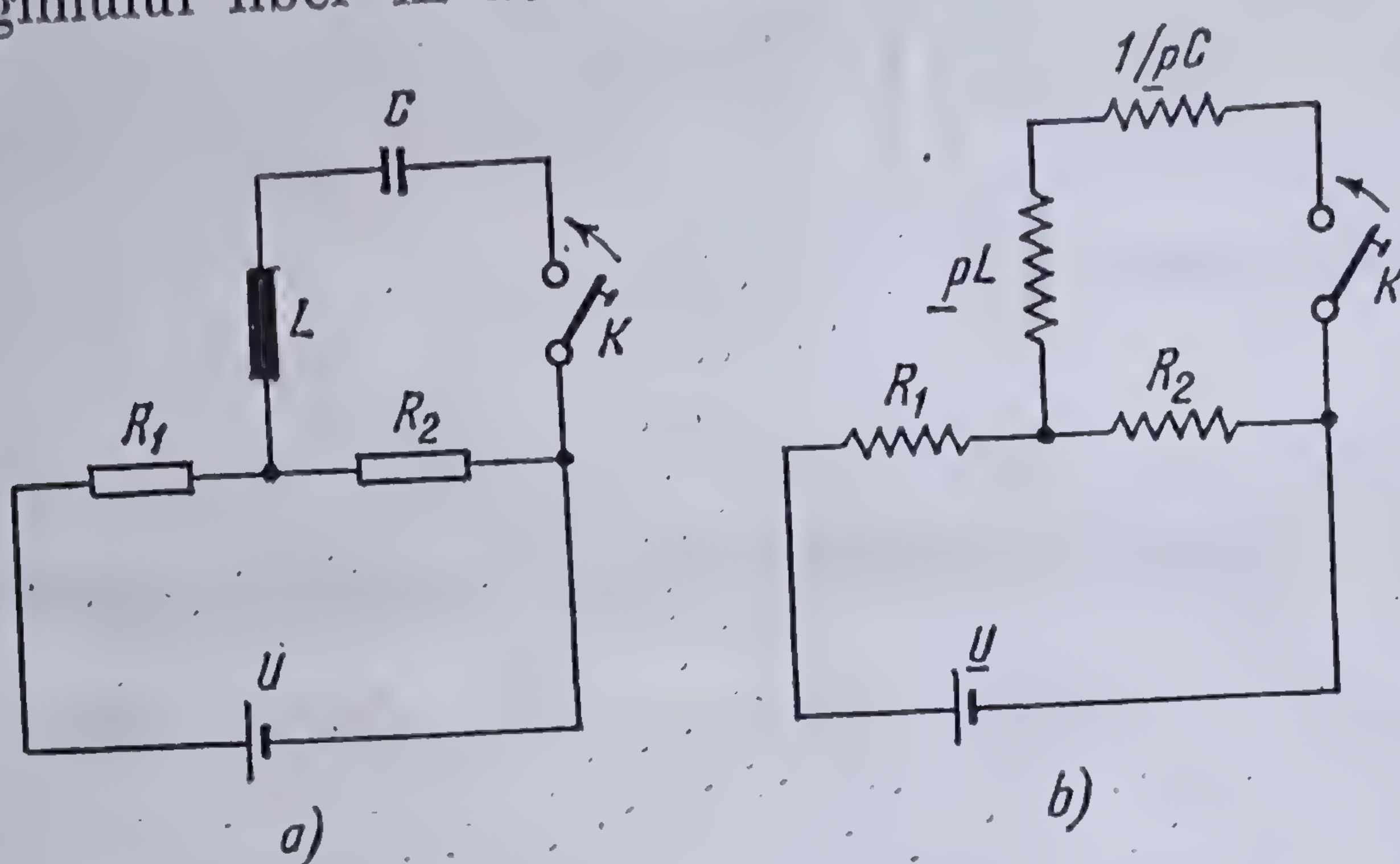


Fig. 7.12. Circuit electric ;  
a) schema reală ; b) schema echivalentă.

Fie  $i_1$  curentul care circulă în rezistorul de rezistență  $R_1$ ,  $i_2$  curentul care circulă în rezistorul de rezistență  $R_2$  și  $i_3$  curentul care circulă în circuitul  $K$ . Aplicând teoremele lui KIRCHHOFF, ecuațiile circuitului sînt

$$\begin{array}{l|l} U = R_1 i_1 + R_2 i_2, & U = R_1 I_2 + R_2 I_2, \\ R_2 i_2 = L \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{C} \int i_3^* dt & R_2 I_2 = p L I_3 + \frac{1}{pC} I_3 \\ i_1 = i_2 + i_3, & I_1 = I_2 + I_3. \end{array}$$

Ținînd seama că, în cazul regimului liber  $U = 0$  și eliminînd pe  $I_1$  și  $I_2$  între aceste ecuații, se obține

$$p^2 L I_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} p I_3 + \frac{1}{C} I_3 = 0.$$

Punînd pentru simplificare

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ și cum } I_3 \neq 0 \text{ se obține}$$

$$CL p^2 + CR p + 1 = 0.$$

Înlocuind în această ecuație  $p = \delta + j\Omega$ , dezvoltînd și separînd părțile reale de cele complexe, se obține sistemul de ecuații

$$\left. \begin{array}{l} CL(\delta^2 - \Omega^2) + CR\delta + 1 = 0 \\ 2CL\delta\Omega + CR\Omega = 0, \end{array} \right\}$$



care rezolvat, dă

$$\delta = -\frac{R}{2L} \quad \text{și} \quad \Omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \delta^2}.$$

Expresia curentului căutat este de forma

$$i_3 = I_3 \sqrt{2} \varepsilon^{\delta t} \cos (\Omega t + \psi),$$

la care mai trebuie determinate  $I_3$  și  $\psi$ . Scriind că la  $t = 0_-$ ,  $i_3 = 0$ , rezultă  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ , astfel că ecuația dată devine

$$i_3 = I_3 \sqrt{2} \varepsilon^{\delta t} \sin \Omega t.$$

Punînd apoi condiția, că în momentul închiderii întrerupătorului care leagă circuitul  $K$ , la timpul  $t = 0_+$ , condensatorul nu este încărcat, deci  $U_c = \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0$ , rezultă

$$(R_2 i_2)_{t=0} = \left( L \frac{di_3}{dt} \right)_{t=0},$$

sau ținînd seama de expresia curentului  $i_3$  găsită mai sus și de faptul că în acel moment

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2},$$

se obține

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{L\Omega} \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$

și deci expresia curentului căutat este

$$i_3 = \frac{1}{L\Omega} \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \varepsilon^{\delta t} \sin \Omega t. \quad (7.22)$$

În cazul cînd  $\Omega$  este pur complex se aplică același raționament asupra unui curent de forma

$$i_3 = I'_3 \sqrt{2} \varepsilon^{\delta t} \operatorname{ch} (\Omega' t + \psi').$$

Problema se simplifică însă în cazul de față, căci punînd

$$\Omega = j\Omega'$$

expresia (7.22) a curentului devine

$$i_3 = \frac{1}{L\Omega'} \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \varepsilon^{\delta t} \operatorname{sh} \Omega' t$$

circuitul  $K$  fiind aperiodic.



Cunoscînd pe  $i_3$ , se deduce imediat  $i_1$  și  $i_2$ , găsindu-se

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} \left( 1 + \frac{R_2}{L\Omega} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon^{\delta t} \sin \Omega t \right) \text{ sau}$$

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} \left( 1 + \frac{R_2}{L\Omega'} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon^{\delta t} \operatorname{sh} \Omega t \right);$$

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \left( 1 - \frac{R_2}{L\Omega} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon^{\delta t} \sin \Omega t \right) \text{ sau}$$

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \left( 1 - \frac{R_2}{L\Omega'} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon^{\delta t} \operatorname{sh} \Omega t \right).$$

Pentru datele numerice se găsește:

cazul a)  $\delta = -100$  și  $\Omega = 300$ ,

$$i_1 = 7,5 (1 + 0,67 \varepsilon^{-100t} \sin 300 t) \text{ A},$$

$$i_2 = 7,5 (1 - 0,67 \varepsilon^{-100t} \sin 300 t) \text{ A},$$

$$i_3 = 10 \varepsilon^{-100t} \sin 300 t \text{ A};$$

cazul b)  $\delta = -1000$ ,  $\Omega = j 449$ ,

$$i_1 = 0,75 (1 + 4,5 \varepsilon^{-1000t} \operatorname{sh} 499 t) \text{ A},$$

$$i_2 = 0,75 (1 - 4,5 \varepsilon^{-1000t} \operatorname{sh} 499 t) \text{ A},$$

$$i_3 = 6,69 \varepsilon^{-1000t} \operatorname{sh} 499 t \text{ A}.$$

## 7.5. REGIMUL TRANZITORIU AL UNUI CÎMP MAGNETIC ÎNVÎRTITOR

### 7.5.1. SCURTCIRCUITAREA ALIMENTĂRII UNEI ARMĂTURI TRIFAZATE PRODUCÎND UN CÎMP MAGNETIC ÎNVÎRTITOR

Fie o armătură a unei mașini electrice trifazate cu  $2p$  poli ale cărei înfășurări sînt alimentate cu curenții trifazați (5.38), în care s-a făcut  $m' = 1$ ,

$$i_1 = I \cos (\omega t - \beta),$$

$$i_2 = I \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} - \beta \right),$$

$$i_3 = I \cos \left( \omega t + \frac{2}{3} - \beta \right).$$



Acești curenți produc în cele trei înfășurări cîmpurile de inducție magnetică (5.35) care dau în întrefier un cîmp magnetic învîrtitor (5.39)

$$b = \frac{3}{2} AI \cos (p\theta - \omega t + \beta).$$

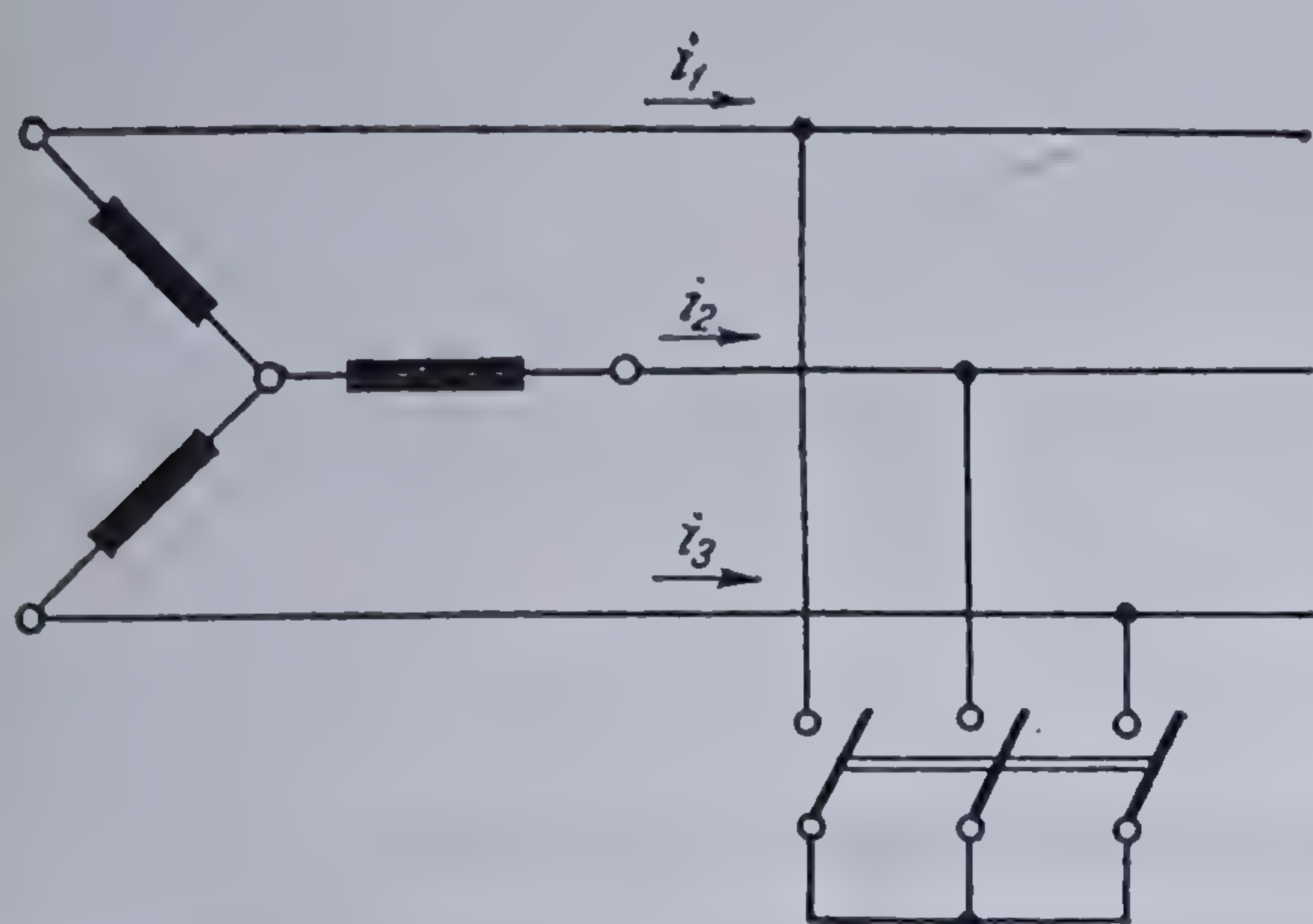


Fig. 7.13. Scurtcircuitarea înfășurărilor unei armături trifazate.

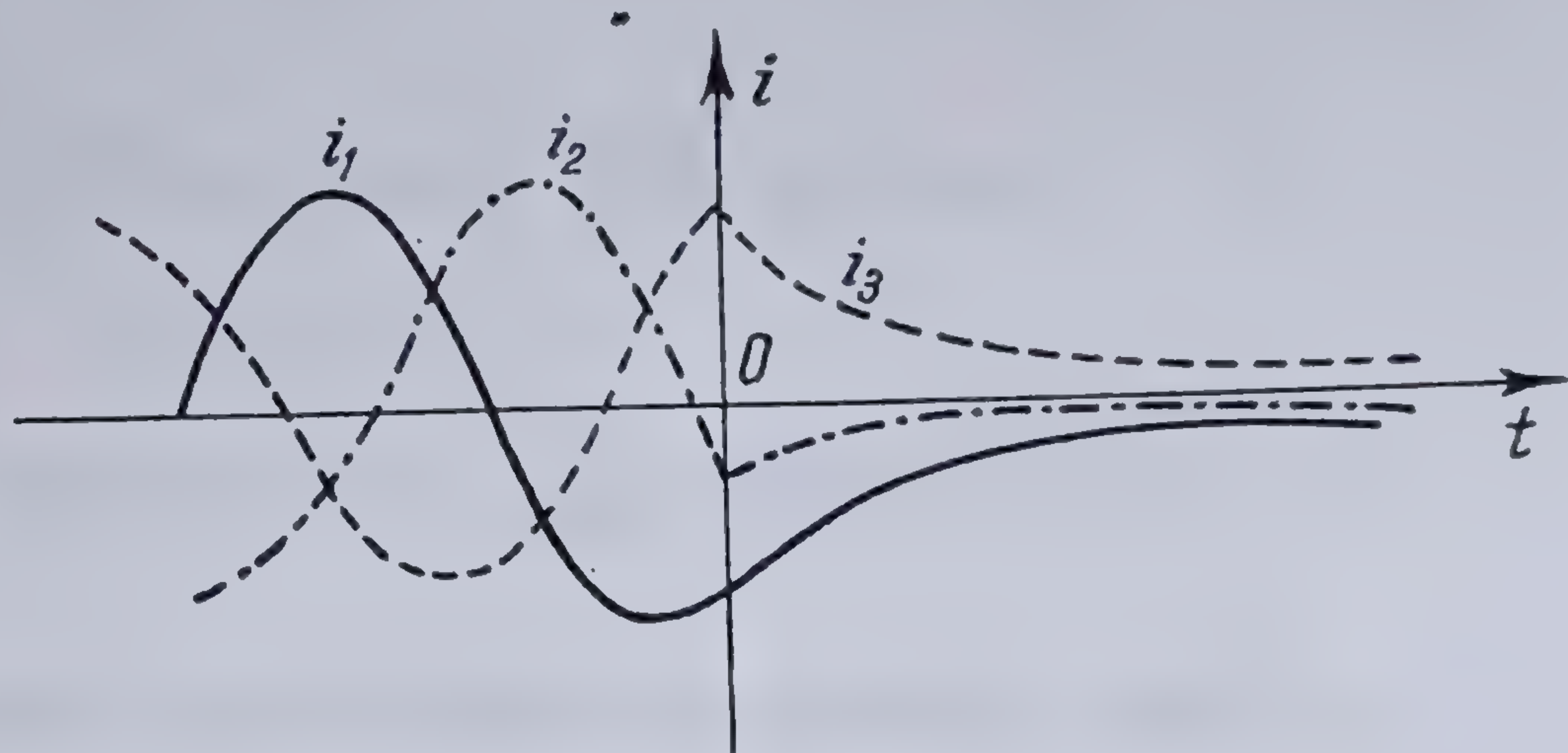


Fig. 7.14. Anularea curenților în armătura trifazată scurtcircuitată.

Să presupunem că la momentul  $t = 0_+$ , se închid cele trei înfășurări în scurtcircuit (fig. 7.13). În acest moment, curenții în diversele faze sînt

$$i_{01} = I \cos (-\beta), \quad i_{02} = I \cos \left( -\beta - \frac{2\pi}{3} \right), \quad i_{03} = I \cos \left( -\beta + \frac{2\pi}{3} \right),$$

iar cîmpul magnetic rezultat

$$b_0 = \frac{3}{2} AI \cos (p\theta + \beta).$$

Dacă  $R$  este rezistența fiecărei faze și  $\mathcal{L}$  inductanța ciclică corespunzătoare, atunci cei trei curenți se vor anula după legea (fig. 7.14).

$$\left. \begin{aligned} i_{1t} &= I \cos \beta e^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t}, \\ i_{2t} &= I \cos \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) e^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t}, \\ i_{3t} &= I \cos \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) e^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t}. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Cîmpurile magnetice produse de acești curenți, la o distanță  $\theta$  de axa primei faze, vor fi

$$b_{1t} = AI \cos p\theta \cos \beta e^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t} = \frac{AI}{2} [\cos (p\theta - \beta) + \cos (p\theta + \beta)] e^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t},$$



$$\begin{aligned}
b_{21} &= AI \cos \left( p\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right) e^{-\frac{R}{2}t} = \\
&= \frac{AI}{2} \left[ \cos \left( p\theta - \frac{4\pi}{3} - \beta \right) + \cos (p\theta + \beta) \right] e^{-\frac{R}{2}t}, \\
b_{31} &= AI \cos \left( p\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \cos \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right) e^{-\frac{R}{2}t} = \\
&= \frac{AI}{2} \left[ \cos \left( p\theta + \frac{4\pi}{3} - \beta \right) + \cos (p\theta + \beta) \right] e^{-\frac{R}{2}t}.
\end{aligned}$$

Cîmpul magnetic rezultat într-un punct al spațiului va fi deci,

$$b_t = \frac{3}{2} AI \cos (p\theta + \beta) e^{-\frac{R}{2}t} = + B_0 e^{-\frac{R}{2}t}. \quad (7.24)$$

Rezultă deci, că în punctul

$$\theta = \frac{\beta}{p}$$

din întrefier, cîmpul magnetic este în permanență fix în spațiu. Acest cîmp se anulează după legea exponențială  $e^{-\frac{R}{2}t}$ . Valoarea lui inițială este independentă de momentul în care începe regimul tranzitoriu.

Din cele ce preced, rezultă că în cazul unei armături trifazate, alimentată de la o rețea electrică trifazată simetrică, care produce în întrefierul acestei armături un cîmp magnetic învîrtitor, dacă la un moment dat se întrerupe brusc această alimentare, atunci cîmpul magnetic învîrtitor se oprește brusc în raport cu armătura și se anulează apoi după o lege exponențială. Acestui cîmp fix tranzitoriu îi corespunde un sistem de curenți aperiodici care străbat înfășurările celor trei faze ale armăturii, a căror sumă algebrică este nulă în orice moment și a căror valoare relativă depinde de momentul în care se produce întreruperea circuitului. Aceste valori se pot deduce ușor din relația (7.23).

#### 7.5.2. EXPRESIA GENERALĂ A REGIMULUI TRANZITORIU AL UNUI CÎMP MAGNETIC INVIRTITOR

Să reluăm expresia (5.38) a curenților trifazați, care alimentînd o armătură trifazată cu  $2p$  poli, produce, într-un punct situat la o distanță  $\theta$  de axa fazei 1. cîmpul învîrtitor (5.44)

$$b = \frac{3}{2} AI_0 \cos (p\theta - \omega t + \beta).$$



La timpul  $t = 0_-$ , curenții în diferitele faze sînt :

$$i_{10} = I_0 \cos \beta,$$

$$i_{20} = I_0 \cos \left( \beta + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$i_{30} = I_0 \cos \left( \beta - \frac{2\pi}{3} \right),$$

iar cîmpul magnetic produs de acești curenți este

$$b_0 = \frac{3}{2} AI_0 \cos (p\theta + \beta).$$

La un moment dat, se schimbă brusc condițiile de alimentare ale armăturii (forță electromotoare, frecvență etc.) în vederea modificării valorii cîmpului magnetic. Dacă noul regim constituie regimul forțat al sistemului, valoarea curenților permanenți care vor produce noul cîmp magnetic învîrtitor permanent, corespunzător situației finale căutate

$$b_p = \frac{3}{2} AI_p \cos [p\theta - (\omega t - \gamma)],$$

vor fi

$$i_{p1} = I_p \cos (\omega t - \gamma),$$

$$i_{p2} = I_p \cos \left( \omega t - \gamma - \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$i_{p3} = I_p \cos \left( \omega t - \gamma + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Curentul nu atinge, însă, această valoare instantaneu ci trecerea de la valoarea  $i_0$  la valoarea  $i_p$ , se face după legea (3.199)

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0}) e^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t},$$

în care  $R$  este rezistența înfășurării unei faze și  $\mathcal{L}$  inductanța sa efectivă, sau ciclică, iar  $i_{p0}$  valoarea curentului permanent  $i_p$  la timpul  $t = 0_+$ . În cazul considerat rezultă

$$i_{p01} = I_p \cos \gamma,$$

$$i_{p02} = I_p \cos \left( \gamma + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$i_{p03} = I_p \cos \left( \gamma - \frac{2\pi}{3} \right).$$



Într-un punct  $N$  al întrefierului, situat la distanța  $\theta$  de axa primei faze, cîmpurile magnetice pe care le vor produce fiecare fază se obțin introducînd în expresiile (5.35) valorile curenților dați de relațiile (3.199). Înlocuind apoi produsele respective de cosinus prin sumele corespunzătoare și adunînd, se obține expresia cîmpului rezultat

$$b = \frac{3}{2} A I_p \cos [p\theta - (\omega t - \gamma)] + \frac{3}{2} A I_0 \left[ \cos (p\theta + \beta) - \frac{3}{2} A I_p \cos (p\theta + \gamma) \right] \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t}$$

adică

$$\bar{b} = \bar{B}_p + (\bar{B}_0 - \bar{B}_{p0}) \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t} \quad (7.25)$$

Cîmpul magnetic astfel obținut provine deci, din suprapunerea peste cîmpul magnetic învîrtitor al noului regim,  $B_p$ , care se rotește cu viteza  $\frac{\omega}{p}$ , a unui *cîmp magnetic tranzitoriu*

$$\bar{B}_t = (\bar{B}_0 - \bar{B}_{p0}) \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t}$$

care, în funcție de elementele circuitului poate fi pus sub forma

$$B_t = \frac{3}{2} A I_t \cos (p\theta + \xi) \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t} \quad (7.26)$$

în care

$$I_t = \sqrt{I_0^2 + I_p^2 - I_0 I_p \cos (\beta - \gamma)},$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{I_0 \sin \beta - I_p \sin \gamma}{I_0 \cos \beta - I_p \cos \gamma}.$$

Acest cîmp magnetic tranzitoriu este maximum într-un punct al spațiului

$$\theta = -\frac{\xi}{p},$$

independent de timp. În consecință, *cîmpul magnetic tranzitoriu este un cîmp fix în raport cu armătura care îl produce*. De asemenea, se observă, că în general, amplitudinea acestui cîmp magnetic tranzitoriu este independentă de momentul în care se produce schimbarea regimului.

### 7.5.3. APLICAȚII

7.5.3.1. **Oprirea unui cîmp magnetic învîrtitor.** În cazul opririi unui cîmp magnetic învîrtitor, în regimul forțat  $I_p = 0$  și deci  $B_p = 0$ , rezultă  $B_{p0} = 0$ , astfel încît relația (7.25) devine

$$b = B_0 \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t},$$

adică se regăsește relația (7.24) stabilită direct mai înainte.



7.5.3.2. Stabilirea unui cîmp magnetic învîrtitor. În cazul stabilirii unui cîmp magnetic învîrtitor, de exemplu la pornirea unui motor electric asincron,  $B_0 = 0$  și regimul tranzitoriu este dat de ecuația

$$b = B_p - B_{p0} \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t}.$$

Cîmpul magnetic permanent poate fi reprezentat printr-un vector de lungime constantă,  $OA$ , care se rotește cu viteza de sincronism  $\frac{\omega}{p}$ ; extremitatea lui va descrie deci un cerc. Cîmpul magnetic liber,

$\bar{B}_0 \varepsilon^{-\frac{R}{\mathcal{L}} t}$ , va fi reprezentat printr-un vector fix, care, la momentul inițial este egal și opus vectorului  $\bar{B}_p$ , aceasta deoarece în acel moment cîmpul magnetic rezultat este nul. Rezultă deci  $|\bar{B}_{p0}| = |\bar{B}_p|$ . În timp ce vectorul  $\bar{B}_p$  se rotește și extremitatea sa descrie un cerc, vectorul  $\bar{B}_{p0}$  rămîne fix, păstrîndu-și direcția, amplitudinea lui scăzînd însă după o lege exponențială. Rezultanta va fi reprezentată de un vector a cărei extremitate pleacă din centrul cercului și descrie o curbă, la început excentrică, dar care tinde progresiv către cerc (fig. 7.15).

Pentru un observator care s-ar deplasa de-a lungul armăturii cu viteza  $\frac{\omega}{p}$ , plecînd

din punctul  $A$ , cîmpul magnetic rezultat apare ca suprapunerea unui cîmp magnetic alternativ de pulsație  $\omega$  și cu amplitudinea scăzînd exponențial, peste un cîmp magnetic constant de amplitudine  $OA = B_p$  (fig. 7.16). În figura 7.17 este dată oscilograma pornirii unui motor electric de inducție (motor asincron), variația vitezei de rotație a acestuia coincidînd cu variația vitezei cîmpului magnetic învîrtitor care se stabilește la pornirea motorului.

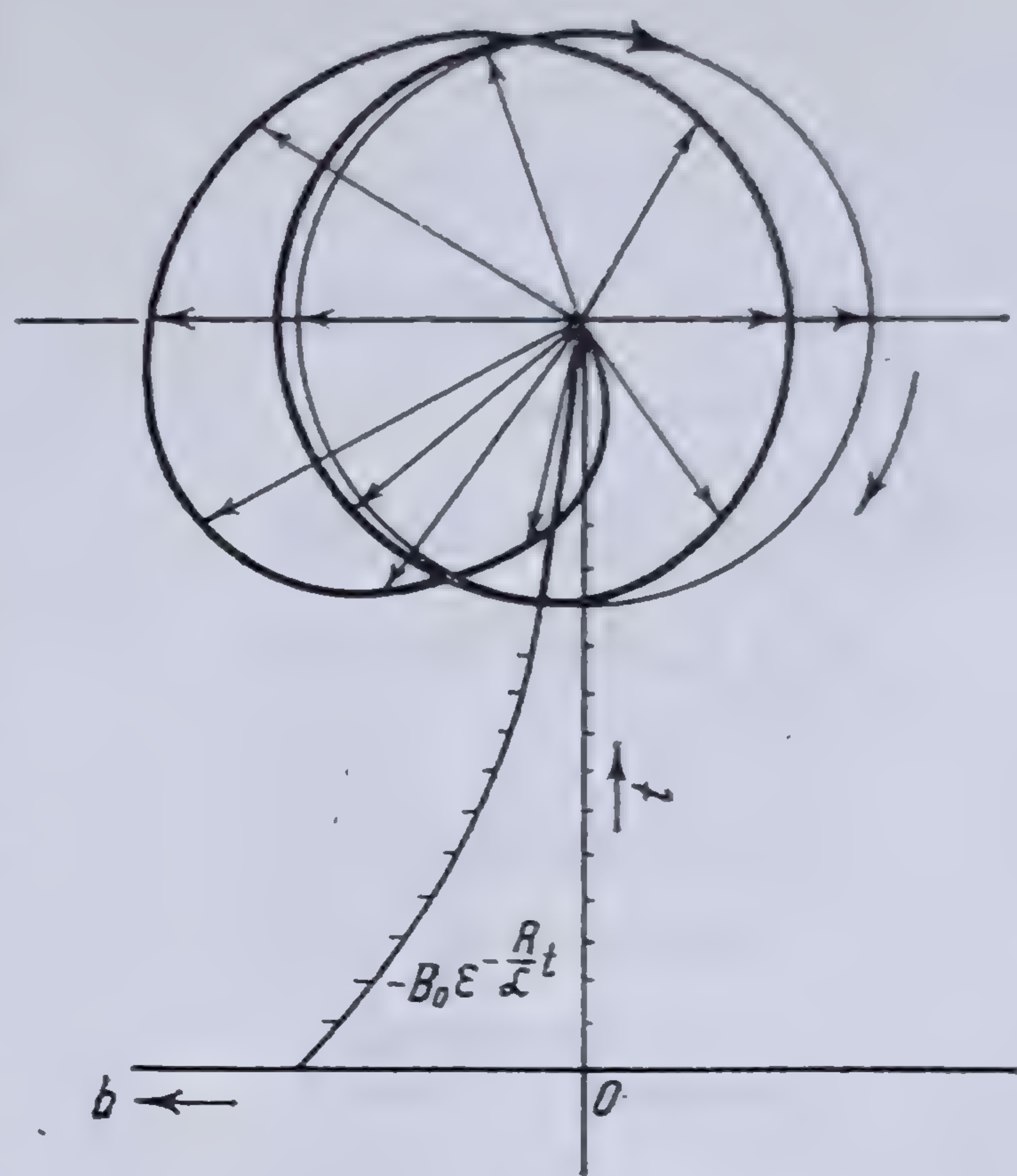


Fig. 7.15. Hodograful unui cîmp învîrtitor la pornire.

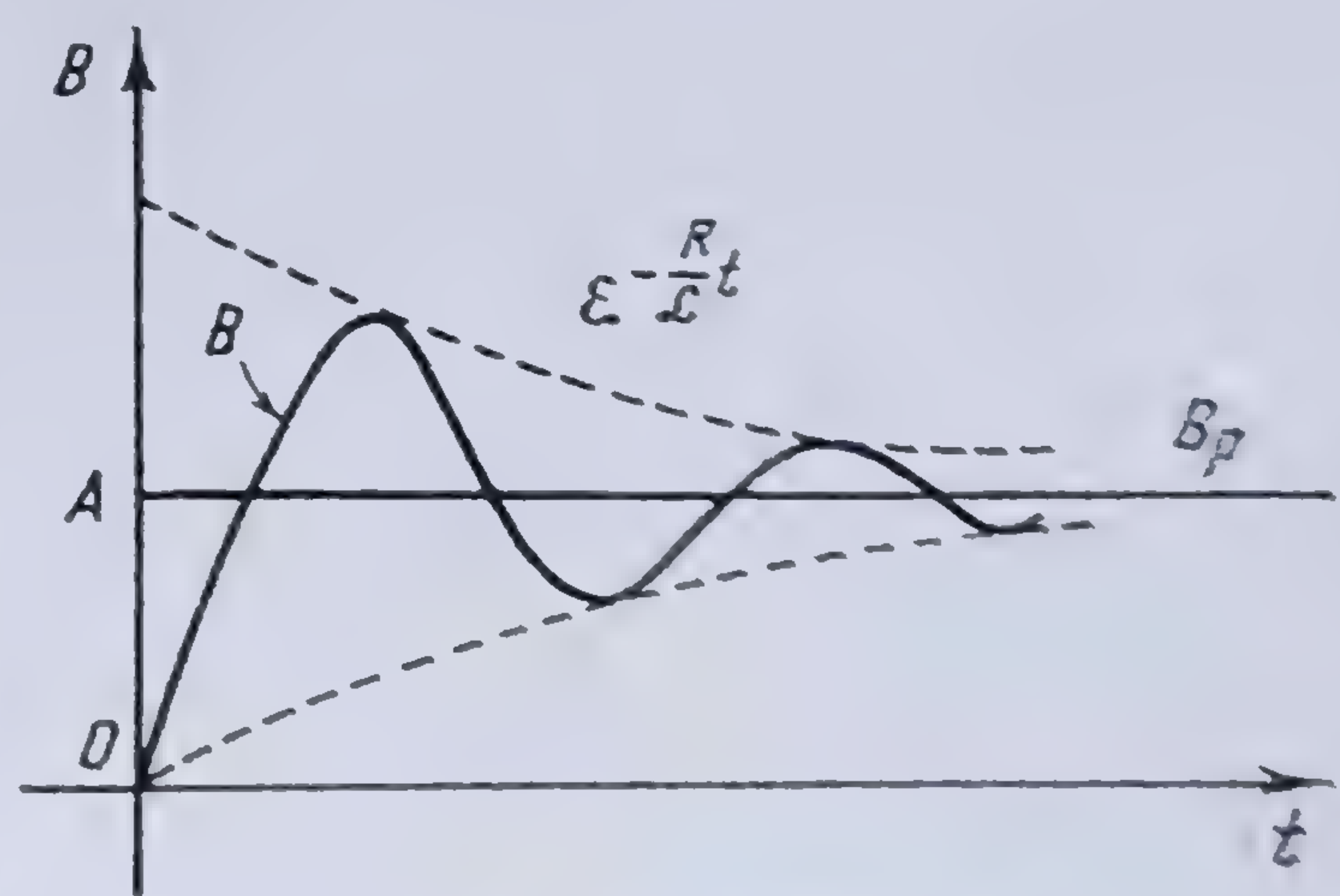


Fig. 7.16. Curba de variație a unui cîmp învîrtitor la pornire.

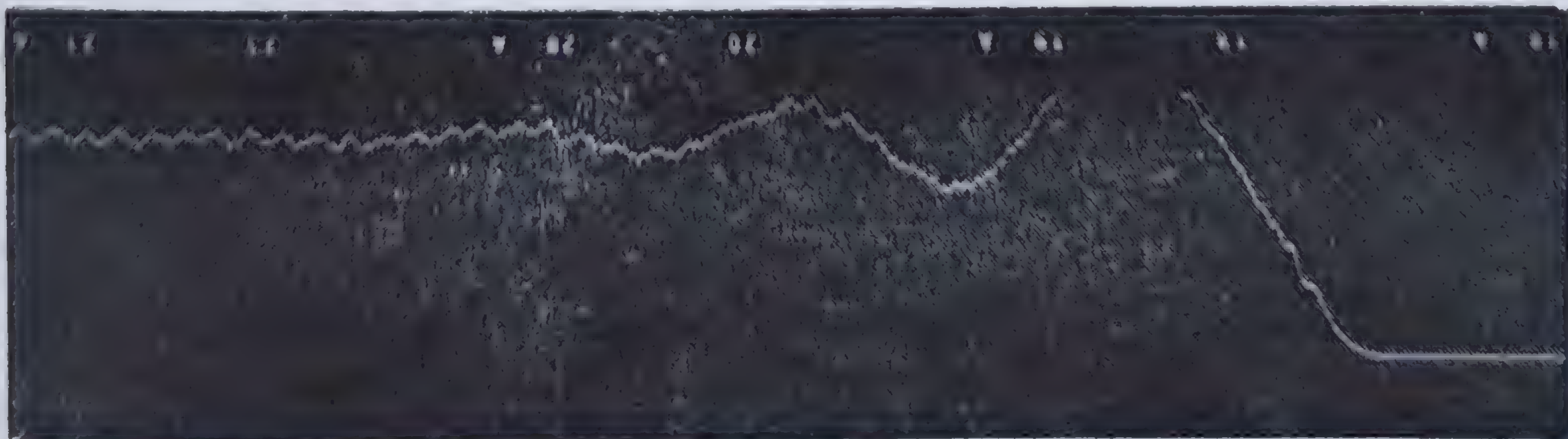


Fig. 7.17. Oscilograma vitezei unui motor electric de inducție la pornire.



PARTEA A III-a

---

**FUNCTIONAREA  
SISTEMELOR  
DE CURENT  
ALTERNATIV  
ÎN REGIM  
ANORMAL**



## Capitolul VIII

### CURENTUL ALTERNATIV POLIFAZAT NESIMETRIC. REGIMUL DEZECHILIBRAT

#### 8.1. GENERALITĂȚI

Un sistem energetic polifazat se spune că este *simetric și echilibrat*, atunci când fazele sale sînt egal și simetric încărcate, iar sistemul tensiunilor de alimentare este simetric.

Prin încărcare egală, se înțelege încărcarea cu sarcini egale, adică cu sarcini, care reprezentate prin impedanțe, au același modul și același argument față de o origine comună arbitrar aleasă.

Prin încărcare simetrică se înțelege repartizarea și așezarea sarcinilor în același mod pe toate fazele sistemului.

Într-un sistem echilibrat, alimentat cu un sistem de tensiuni simetrice, curenții care iau naștere în diversele elemente, precum și căderile de tensiune corespunzătoare, formează sisteme polifazate simetrice.

Prin sistem polifazat simetric se înțelege acel sistem la care modulele diversilor fazori reprezentativi ai sistemului (de tensiune sau de curent) sînt egale și acești fazori sînt depărtați unul de altul printr-un unghi egal cu  $2\pi/m$ ,  $m$  fiind numărul de faze ale sistemului. Rezultanta unui asemenea sistem este întotdeauna nulă.

De asemenea, în sistemele echilibrate, diversele faze nu au o influență reciprocă una asupra celeilalte.

În cazul cînd într-un sistem energetic polifazat, cel puțin una din condițiile de mai sus nu este îndeplinită, sistemul corespunzător devine un sistem nesimetric sau *dezechilibrat* \*. Astfel, un sistem energetic, polifazat, egal și simetric încărcat, devine un sistem dezechilibrat dacă tensiunile de alimentare sînt diferite fie ca modul, fie ca argument; de asemenea, sistemul energetic polifazat, alimentat cu un sistem de tensiuni simetrice, este un sistem dezechilibrat dacă diversele sale faze sînt încărcate cu sarcini diferind fie ca modul, fie ca argument.

Cauzele care produc un dezechilibru într-o rețea sînt de două feluri: unele temporare, altele permanente.

*Dezechilibrul temporar* se datorează influenței asupra sistemului a defectelor care pot fi de natură foarte diferită. Studiul regimurilor dezechilibrate temporare este în special important pentru teoria și concepția dispozitivelor de protecție, precum și pentru studiul stabilității rețelelor electrice.

\*În literatura tehnică, se obișnuiește a se folosi fie denumirea de sistem nesimetric, fie denumirea de sistem dezechilibrat. O hotărîre internațională sau națională în această chestiune nu a fost luată încă.



O rețea electrică trifazată, care normal este echilibrată și simetrică, va prezenta un dezechilibru temporar de îndată ce se va produce un defect. Aceste defecte se pot produce între două sau mai multe conductoare ale rețelei, cu sau fără punerea la pământ a vreunuia din aceste conductoare. În general, asemenea dezechilibrări se caracterizează prin apariția în rețea a unor *curenți de succesiune inversă sau nulă* și prin perturbații în simetria tensiunilor.

Dezechilibrul temporar dispăre odată cu dispariția cauzei care îl produce și este folosit în dispozitivele de protecție a rețelei tocmai împotriva defectelor care dau naștere acestui regim.

*Dezechilibrul permanent* se produce atunci când o rețea este încărcată disimetric din cauza unei repartiții defectuoase a sarcinii pe cele trei faze. În acest caz, gradul de dezechilibru este destul de mic. Se poate întâmpla totuși ca acest dezechilibru să fie destul de important atunci când este necesar să se alimenteze un aparat monofazat dintr-o rețea electrică trifazată, cum ar fi, de exemplu, un cuptor electric monofazat sau aparatele de sudură electrică.

Studiul regimului dezechilibrat nu se mai poate face considerînd sistemul polifazat format dintr-un număr de sisteme monofazate egal cu numărul fazelor sistemului dat, formate fiecare în parte din cîteo fază și un conductor de întoarcere, real sau fictiv, *neutrul sistemului*, studiu ce se face de obicei pe o singură fază, faza de referință și concluziile obținute extinzîndu-se și asupra celorlalte faze, prin rotirea curențului obținut cu argumentul tensiunii corespunzătoare \*.

Pentru rezolvarea sistemelor dezechilibrate se folosesc metode speciale, care pot fi împărțite în două categorii: *metode directe* și *metode prin utilizarea coordonatelor simetrice*. Aceste metode vor fi examinate în paragrafele următoare.

## 8.2. METODA DIRECTĂ DE CALCUL A SISTEMELOR NESIMETRICE ȘI DEZECHILIBRATE

### 8.2.1. REPREZENTAREA TOPOGRAFICĂ A TENSIUNILOR \*\*

Forțele electromotoare ale unui alternator trifazat pot fi reprezentate grafic prin trei fazori concurenți, egali ca mărime și defazați succesiv unul față de altul cu un unghi egal cu  $\frac{2\pi}{3}$ , aceasta dacă se presupune că sistemul este echilibrat și simetric. În caz contrar, cei trei fazori concurenți pot fi oricum, atît ca defazaj, cît și ca mărime. Punctul de concurență se consideră drept potențial de origine al sistemului — potențialul de referință. El este luat, în general, egal cu zero. Această reprezentare se numește *reprezentarea topografică a tensiunilor* sau *diagrama tensiunilor* (fig. 8.1). Pe această diagramă, tensiunile între faze se măsoară prin fazorii  $E_{II}E_I$ ,  $E_I E_{III}$ ,  $E_{III}E_{II}$ .

Să presupunem că aceste trei forțe electromotoare sînt produse de trei alternatoare monofazate, ale căror rotoare sînt montate pe același ax și deca-late unul față de altul cu  $1/3$  din perioadă. Fazele vor fi astfel fără inducție mutuală între ele și problema poate fi tratată ca problemele de curent alternativ monofazat.

\* Vezi Capitolul V.

\*\* Fără a micșora cu nimic generalitatea problemelor, expunerea acestora se va face pentru sistemele trifazate, ele fiind aproape unicele folosite în sistemele energetice moderne. Pentru un sistem cu  $m$  faze, problema se generalizează imediat, însă interesul practic este minim.



Să presupunem de asemenea că cele trei forțe electromotoare, legate în stea, alimentează un receptor trifazat montat și el în stea. Fie  $\underline{Z}_A$  impedanța fiecărei faze a alternatorului,  $\underline{Z}_L$  impedanța fiecărei faze a liniei electrice și  $\underline{Z}_R$  impedanța fiecărei faze a receptorului. Curentul la receptor, presupus egal încărcat, este dat de relația

$$\underline{I}_1 = \frac{\overline{OE_1}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R}.$$

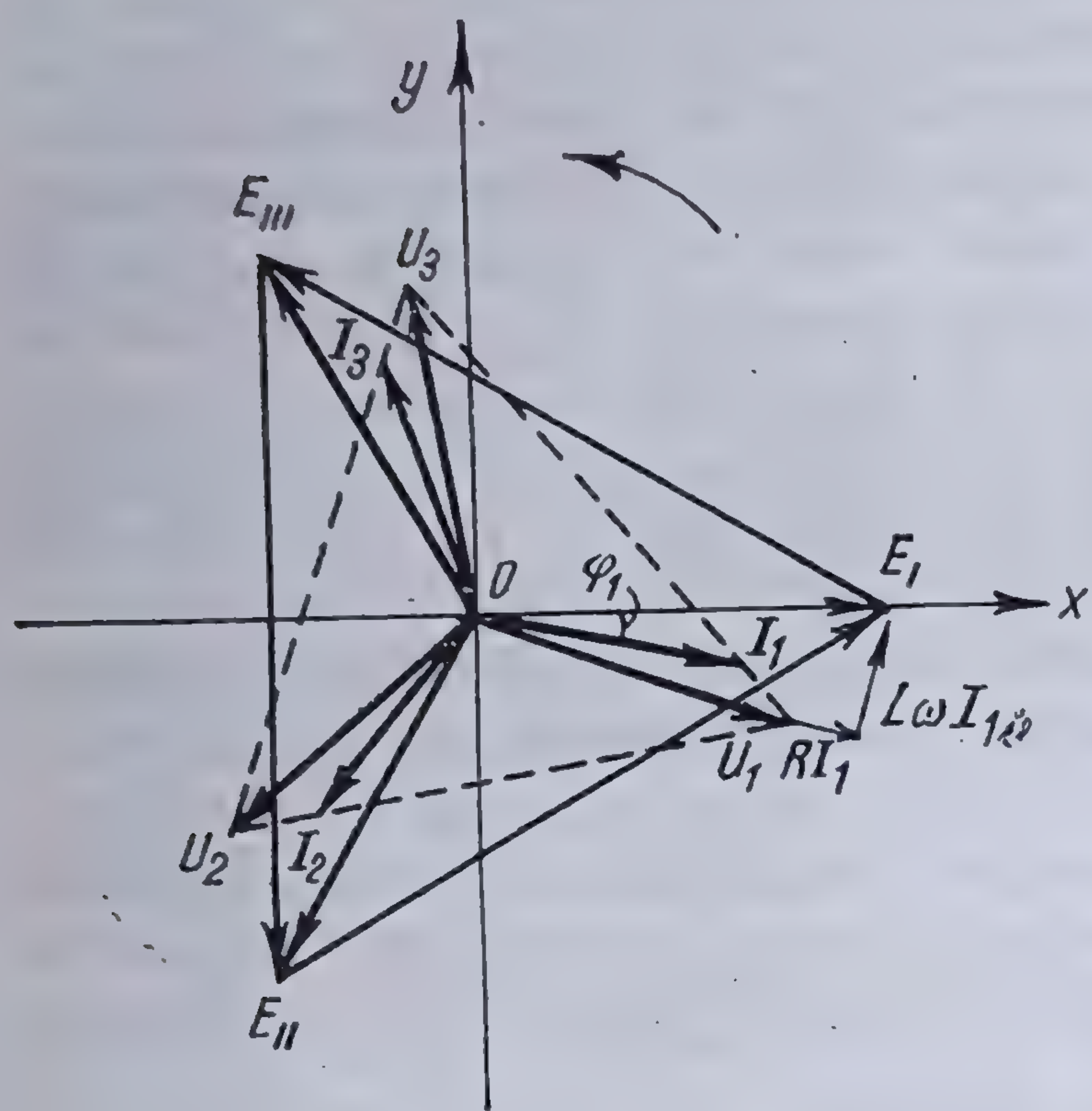


Fig. 8.1. Topograma tensiunilor unui sistem trifazat.

Curentul pe fiecare fază poate fi reprezentat în diagrama tensiunilor, prin trei fazori egali și defazați față de fazorii reprezentativi ai forțelor electromotoare corespunzătoare, cu unghiul  $\varphi$ .

Cunoscând curentul și defazajul său față de forțele electromotoare ale alternatorului, precum și impedanțele respective (ale alternatorului, liniei electrice și ale receptorului), se poate găsi imediat tensiunea pe fază și la bornele alternatorului. Pentru aceasta, se va scădea pe fiecare fază căderea de tensiune respectivă, obținându-se iarăși trei fazori simetrici  $\overline{OU_1}$ ,  $\overline{OU_2}$ ,  $\overline{OU_3}$ , care vor fi defazați față de fazorii care reprezintă forța electromotoare cu unghiul  $\theta$ , reprezentînd defazajul propriu al sistemului. Tensiunea la borne

va forma de asemenea un triunghi echilateral, rotit față de triunghiul echilateral al forțelor electromotoare cu același unghi  $\theta$ .

În cazul unei sarcini dezechilibrate, triunghiul tensiunilor este deformat. Fie de exemplu același sistem trifazat simetric și echilibrat, la care se presupune că una din faze este întreruptă (fig. 8.2).

Cele două impedanțe sînt acum în serie și sistemul sarcinii se prezintă ca și cum ar exista o sarcină monofazată căreia i se aplică tensiunea

$$|\underline{E}_{L,II}| = |\underline{E}_I - \underline{E}_{II}| = E_I \sqrt{3}.$$

Prin urmare, curentul în circuit, deci curentul produs de alternator, va fi

$$|\underline{I}_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{E_I}{Z}$$

ce se deduce aplicînd a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitului  $I, I', N, II', II, O, I$ .

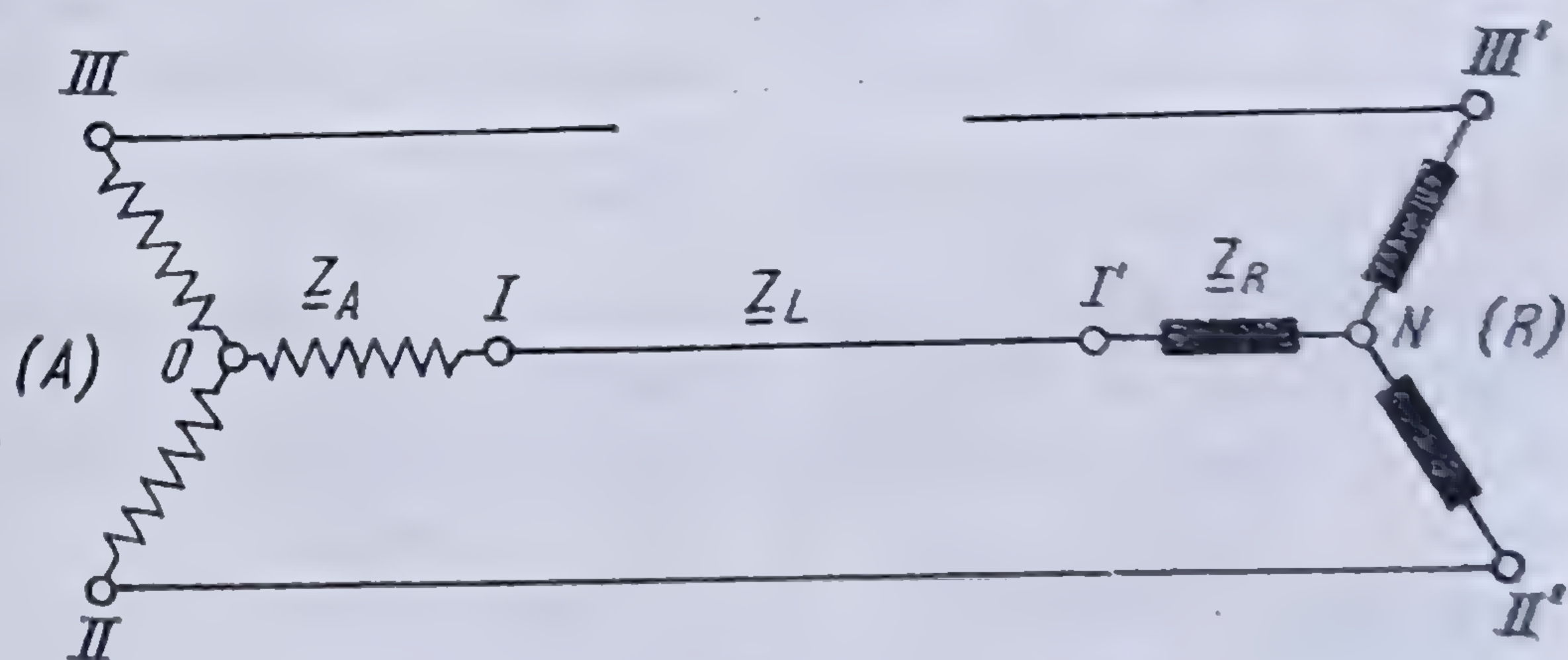


Fig. 8.2. Sistem trifazat simetric cu o fază întreruptă.



Forța electromotoare  $E_{I,II}$  între fazele alternatorului se repartizează în două părți egale pe cele două impedanțe identice ale sarcinii; fie  $E_{N'} = E_{NII}$  aceste forțe electromotoare. Din diagrama tensiunilor se vede imediat, că între punctul neutru al alternatorului și punctul neutru al sarcinii, există o diferență de potențial  $U_{ON}$  iar tensiunea dintre faza întreruptă și punctul neutru al sarcinii este  $E_{IIN'}$ , și este mai mare decât tensiunea corespunzătoare pe faza alternatorului. Diagrama completă a tensiunilor se construiește acum ușor.

Dacă  $I_1$  și  $I_2$  sînt cei doi curenți produși de alternator, conform primei teoreme a lui KIRCHHOFF, aceștia sînt egali și de sens contrar și sînt defazați cu unghiul  $\varphi$  față de forța electromotoare  $E_{I,II}$  care i-a produs. Scăzînd căderile de tensiune corespunzătoare din forța electromotoare aplicată, se găsește tensiunea la bornele alternatorului, precum și tensiunile pe fază în acest caz (fig. 8.3). Triunghiul tensiunilor la borne, în acest caz, nu mai este echilateral.

Ceea ce s-a spus pentru cazul cînd una din faze este complet întreruptă, se poate spune și pentru cazul general cînd cele trei faze sînt inegal încărcate. În acest caz, triunghiul tensiunilor la borne va fi oarecare.

Diagrama tensiunilor poate fi construită și experimental, măsurîndu-se diversele tensiuni între faze și față de punctul neutru și construindu-se fazorii respectivi.

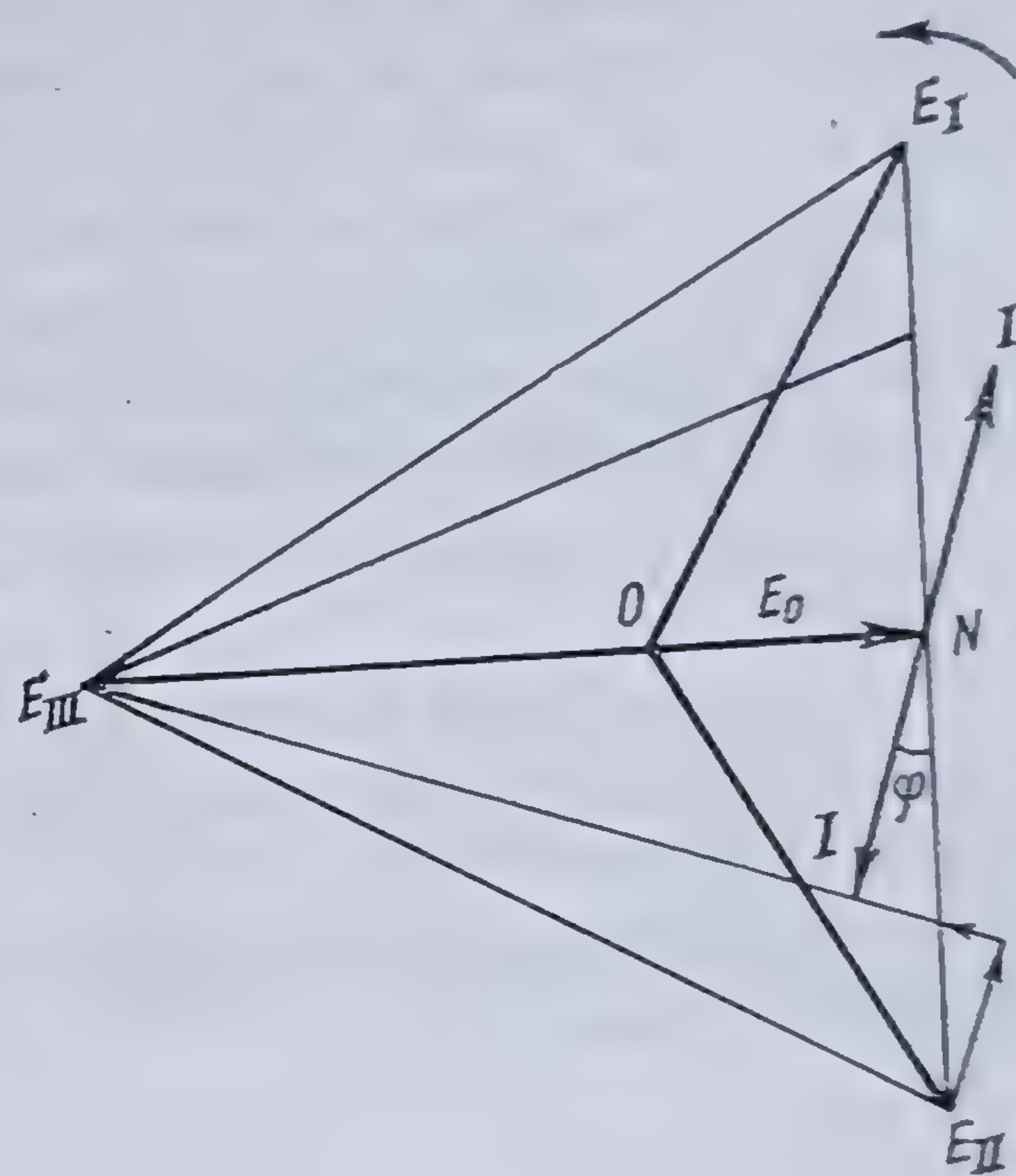


Fig. 8.3. Topograma tensiunilor sistemului trifazat cu fază întreruptă.

## 8.2.2. CALCULUL CURENȚILOR LA O ÎNCĂRCARE NESIMETRICĂ ȘI DEZECHILIBRATĂ

8.2.2.1. Generalități. Problema generală care trebuie să fie rezolvată în sistemele energetice trifazate este următoarea: fiind date forțele electromotoare induse în fazele alternatorului și impedanțele pe fază ale generatorului, liniei electrice și sarcinii, se cere să se determine curenții pe fază.

Problema se rezolvă diferit, după cum sistemul energetic trifazat are fazele, atît ale generatorului cît și ale receptorului legate în triunghi sau stea, sau unele în triunghi și celelalte în stea.

Pentru determinarea curenților se aplică metodele de calcul cele mai potrivite problemei respective, sistemul trifazat fiind tratat ca un circuit oarecare.

Astfel, în cazul cînd fazele sistemului trifazat sînt legate în triunghi atît la sursă cît și la receptor, determinarea curenților în diversele elemente ale circuitului se face prin metoda obișnuită a buclelor\*.

În cazul cînd fazele sistemului trifazat sînt legate în stea atît la sursă cît și la receptor, determinarea curenților în diversele elemente ale circuitului se poate face aplicînd direct fie metoda buclelor, fie metoda perechilor de noduri\*\*.

\* Vezi 4.2.5.

\*\* Vezi 4.2.7.



Se admite că potențialul punctului neutru al generatorului este egal cu zero. În aceste condiții, la mersul în gol, potențialul la bornele fiecărei faze este egal cu forța electromotoare indusă în fază, care are un anumit modul și un anumit argument.

Dacă se presupune acum că se cunoaște potențialul punctului neutru al sarcinii, rezultă că se va cunoaște și diferența de potențial la bornele fiecărei faze. Într-adevăr, acestea sînt egale cu diferența între tensiunea pe fază la bornele generatorului la mersul în gol și tensiunea punctului neutru al sarcinii.

Cunoscînd diferența de potențial la bornele fiecărei faze precum și impedanța sa totală, se găsește imediat curentul căutat, în mărime și în fază; cu ajutorul acestuia se poate construi în orice punct al sistemului, potențialul respectiv. Se poate determina astfel și căderea de tensiune, de la mersul în gol la plină sarcină, a fiecărei faze.

În consecință, rezolvarea problemei generale a unei distribuții, într-un sistem trifazat dezechilibrat, avînd fazele legate în stea, constă în determinarea potențialului punctului neutru al sarcinii.

Determinarea punctului neutru al sarcinii se poate face atît analitic, cît și grafic.

În cazul cînd în sistemul trifazat o parte din elemente sînt legate în stea și altele în triunghi, problema se rezolvă prin aplicarea metodelor de calcul cele mai potrivite.

Se vor examina pe rînd cazurile cele mai frecvente de probleme ce pot apărea în practică.

**8.2.2.2. Calculul sistemelor trifazate dezechilibrate avînd generatorul și receptorul cu fazele conectate în triunghi.** Să considerăm cazul cel mai

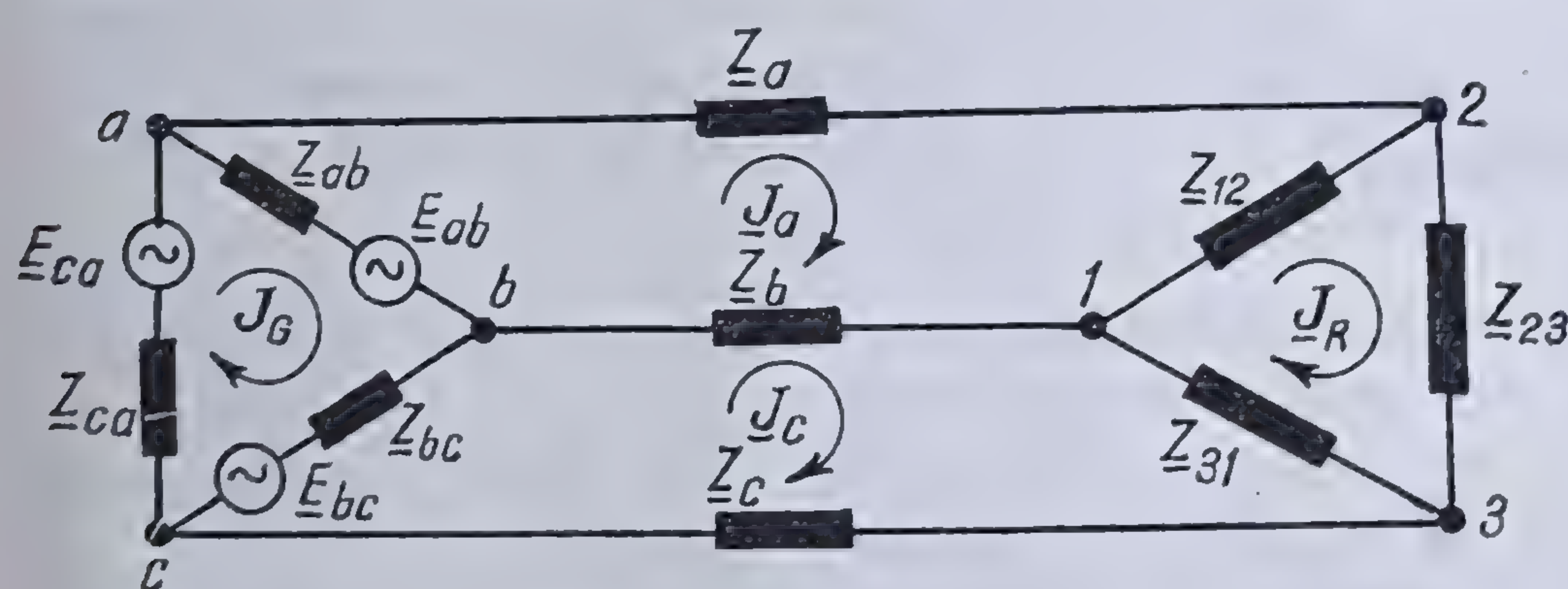


Fig. 8.4. Sistem trifazat complet cu conectare în triunghi.

general cînd generatorul este nesimetric, avînd forțele electromotoare pe cele trei faze inegale, și dezechilibrat, avînd impedanțele pe fază inegale; presupunem de asemenea că linia electrică trifazată este nesimetrică și sarcina este dezechilibrată (fig. 8.4).

Aplicînd metoda buclelor, vor fi de determinat patru curenți dați de ecuațiile

$$\begin{aligned}
 (Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca})J_G & - Z_{ab}J_a & - Z_{bc}J_c & = E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} \\
 -Z_{ab}J_G + (Z_a + Z_b + Z_{ab} + Z_{12})J_a & - Z_bJ_c & - Z_{12}J_R & = -E_{ab} \\
 -Z_{bc}J_G & - Z_bJ_a + (Z_b + Z_c + Z_{bc} + Z_{31})J_c & - Z_{31}J_R & = -E_{bc} \\
 & - Z_{12}J_a & - Z_{31}J_c + (Z_{12} + Z_{23} + Z_{31})J_R & = 0,
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

cu care se determină apoi curenții necunoscuți din sistemul trifazat. Se vor găsi astfel:



— curenții din bobinajele generatorului

$$\underline{I}_{ab} = \underline{J}_G - \underline{J}_a; \quad \underline{I}_{bc} = \underline{J}_G - \underline{J}_c; \quad \underline{I}_{ca} = \underline{J}_G;$$

— curenții din linia electrică

$$\underline{I}_b = -\underline{J}_a + \underline{J}_c; \quad \underline{I}_a = \underline{J}_a; \quad \underline{I}_c = -\underline{J}_c;$$

— curenții din receptor

$$\underline{I}_{12} = \underline{J}_R - \underline{J}_a; \quad \underline{I}_{23} = \underline{J}_R; \quad \underline{I}_{31} = \underline{J}_R - \underline{J}_c.$$

Ecuatiile (8.1) se simplifică în anumite cazuri particulare. Astfel, dacă puterea generatorului este foarte mare în raport cu puterea absorbită de sarcină, atunci căderile de tensiune în generator sînt neglijabile și deci se poate lua

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = 0$$

și deci  $\underline{J}_G = 0$ .

Dacă în loc să se dea forțele electromotoare ale alternatorului se dau tensiunile la bornele acestuia, sau, ceea ce este totuna, se dau tensiunile la bornele rețelei într-un punct oarecare al acesteia, atunci  $\underline{J}_G = 0$ ; situația este analogă cu aceea din cazul precedent.

8.2.2.3. Calculul sistemelor trifazate dezechilibrate avînd generatorul și receptorul conectate în stea. Fie sistemul trifazat reprezentat în figura 8.5, presupus complet dezechilibrat și ca tensiuni și ca impedanțe. Între punctul neutru  $O$  al alternatorului și punctul neutru  $N$  al sarcinii există o diferență

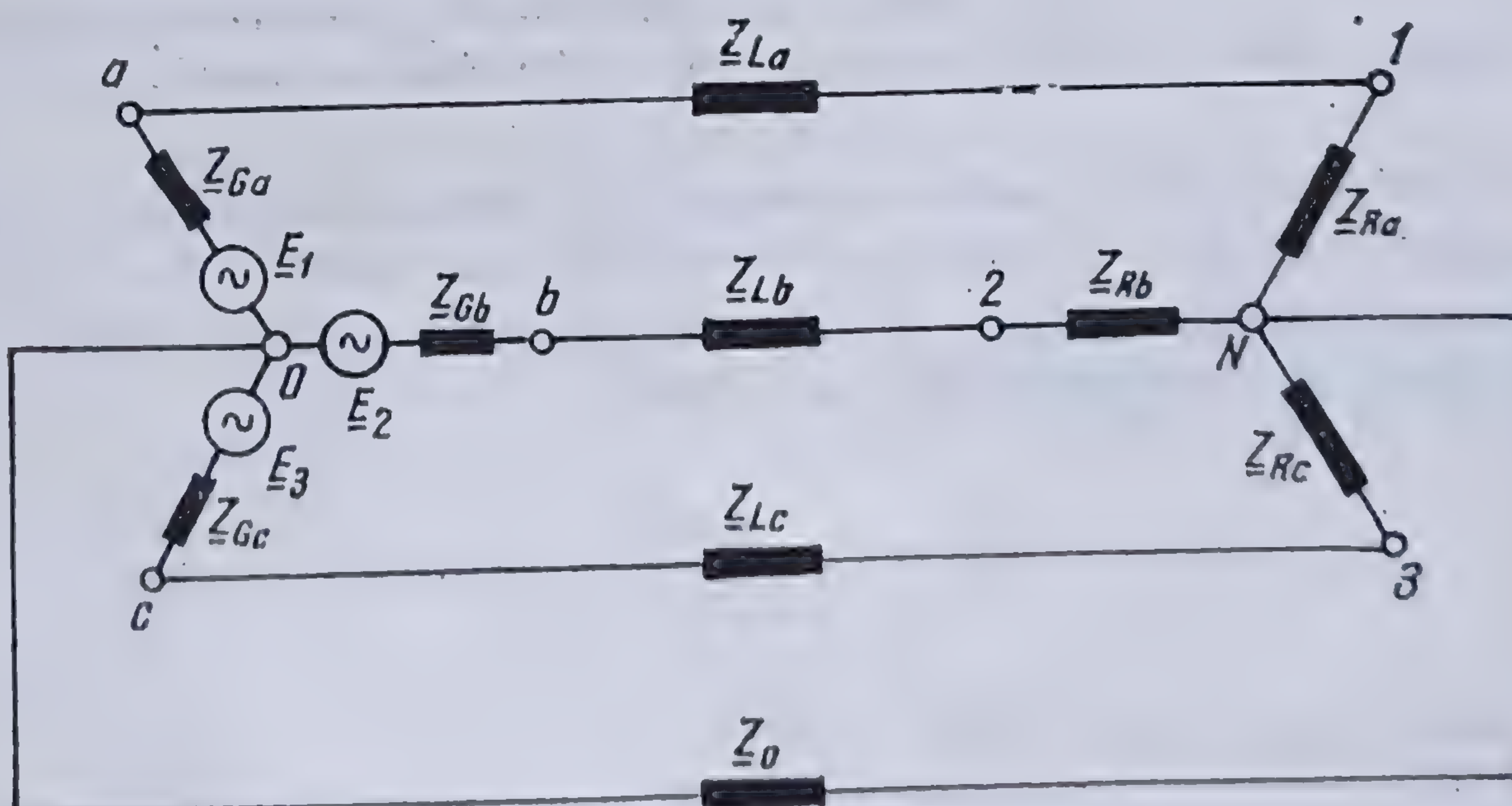


Fig. 8.5. Sistem trifazat complet cu conectare în stea.

de potențial  $E_0$ ; în cazul cînd aceste două puncte neutre sînt legate printr-un conductor, prin acesta va curge un curent și căderea de tensiune în conductorul respectiv va fi egală tocmăi cu această diferență de potențial. Pe de altă parte,



cunoscând această diferență de potențial, se poate determina tensiunea la bornele sarcinii pe fiecare fază și deci se pot determina curenții căutați.

Fie  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_3$  impedanța totală a fiecărei faze, de la punctul neutru al generatorului la punctul neutru al receptorului, adică

$$\underline{Z} = \underline{Z}_G + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R$$

și  $\underline{Z}_0$  impedanța conductorului neutru.

Pentru a găsi valoarea diferenței de potențial între cele două puncte, neutre, numită *deplasarea punctului neutru* al sarcinii față de punctul neutru al alternatorului, se aplică metoda perechilor de noduri. Se găsește

$$\underline{E}_0(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0) = \underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \underline{E}_3 \underline{Y}_3,$$

de unde rezultă

$$\underline{E}_0 = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \underline{E}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0}, \quad (8.2)$$

$\underline{Y}_i$  fiind admitanțele totale ale diverselor faze și ale conductorului neutru.

Cunoscând deplasarea punctului neutru al sarcinii față de punctul neutru al alternatorului, diverșii curenți pe fază se determină cu ajutorul relațiilor evidente

$$\underline{I}_k = (\underline{E}_k - \underline{E}_0) \underline{Y}_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (8.3)$$

iar curentul circulând prin conductorul neutru cu relația

$$\underline{I}_0 = - \underline{E}_0 \underline{Y}_0.$$

Determinarea deplasării punctului neutru  $\underline{E}_0$  precum și a curenților respectivi se poate face analitic — utilizând metodele respective de calcul — sau grafic.

Pentru determinarea grafică a deplasării punctului neutru au fost elaborate numeroase metode; în cele ce urmează sînt rediate cele mai utilizate.

a) *Prima metodă. Metoda directă.* Împărțind relația (8.2) cu tensiunea pe una din faze, de exemplu  $\underline{E}_1$ , se obține

$$\frac{\underline{E}_0}{\underline{E}_1} = \frac{\Sigma \underline{E}_i \underline{Y}_i}{\underline{E}_1 (\Sigma \underline{Y}_i + \underline{Y}_0)}. \quad (8.4)$$

Se construiesc fazorii (fig. 8.6)

$$\overline{OA} = \underline{E}_1 \underline{Y}_1; \quad \overline{OB} = \underline{E}_2 \underline{Y}_2; \quad \overline{OC} = \underline{E}_3 \underline{Y}_3$$

și se deduce fazorul

$$\overline{OD} = \Sigma \underline{E}_i \underline{Y}_i.$$



Se construiesc apoi fazorii

$$\overline{OA} = \underline{E}_1 \underline{Y}_1, \quad \overline{OB'} = \underline{E}_1 \underline{Y}_2, \quad \overline{OC'} = \underline{E}_1 \underline{Y}_3, \quad \overline{OD'} = \underline{E}_1 \underline{Y}_0$$

și se deduce fazorul

$$\overline{OF} = \underline{E}_1 (\Sigma \underline{Y}_1 + \underline{Y}_0).$$

Relația (8.3) se poate scrie

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OF}},$$

ceea ce arată că triunghiul  $OE_1F$  este asemenea cu triunghiul  $OE_0D$ . Se poate determina acum în direcție și mărime fazorul  $E_0$ . Pentru aceasta, se construiește pe vectorul  $\overline{OD}$ , în punctul  $O$ , un unghi egal cu unghiul  $E_1OF$  și în punctul  $D$  un unghi egal cu unghiul  $E_1FO$ . Punctul de intersecție  $E_0$  al acestor două direcții dă vârful fazorului  $\underline{E}_0$ , care se obține astfel în mărime și în direcție. Aceasta este evident, triunghiurile  $OE_0D$  și  $OE_1F$  fiind asemenea, având unghiurile egale.

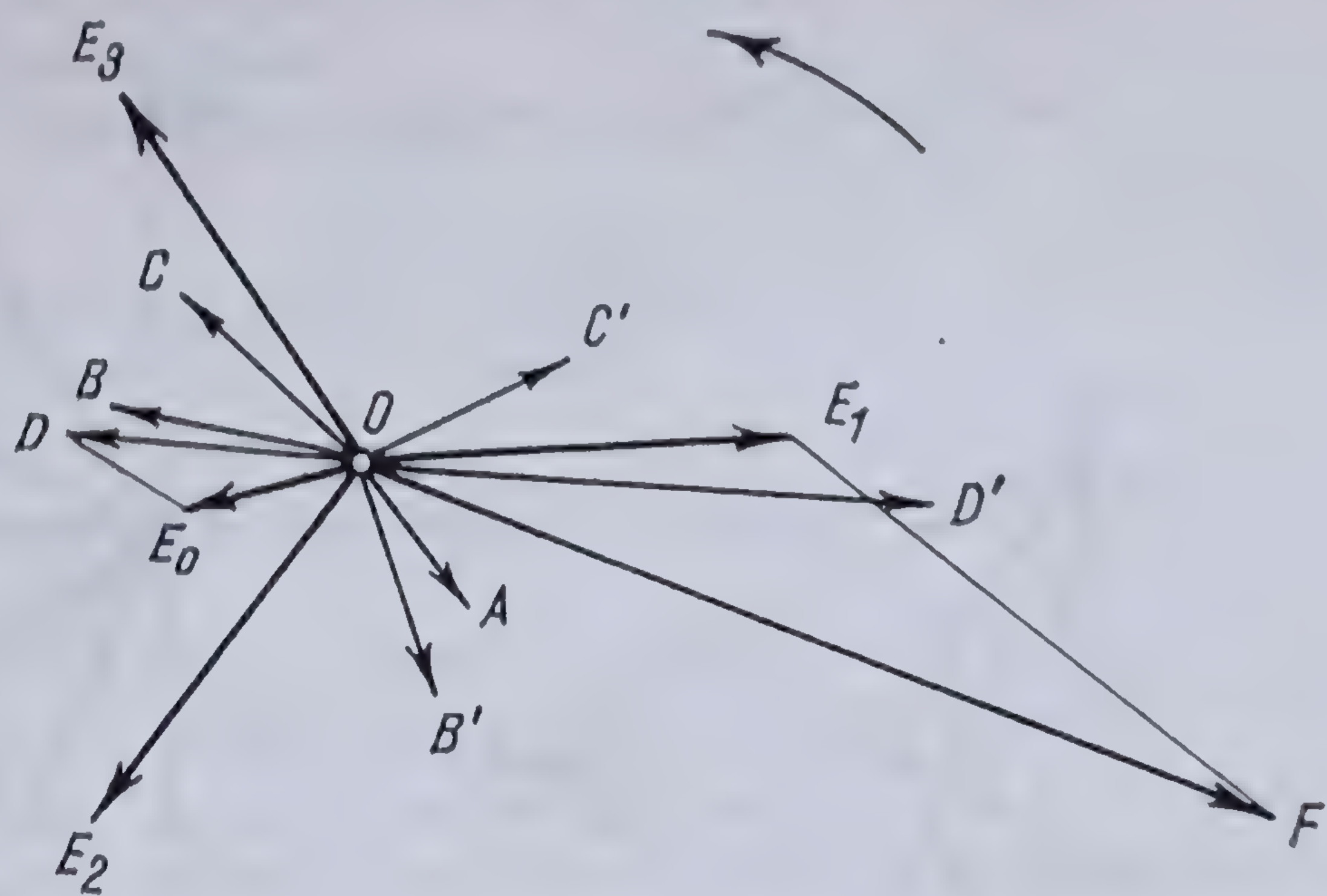


Fig. 8.6. Construirea grafică a fazorului  $\underline{E}_0$  prin metoda directă.

Problema admite două soluții din care numai una este valabilă și anume, aceea în care sensul de rotire al fazorilor este același. Spre exemplu, în figura 8.6, dacă în triunghiul  $OE_1F$  vectorul  $\overline{OF}$  este în urma vectorului  $\overline{OE}_1$ , atunci în triunghiul asemenea  $OE_0D$  vectorul  $\overline{OD}$ , ca și omologul său  $\overline{OF}$ , trebuie să fie în urma vectorului  $\overline{OE}_0$ , ca și omologul său  $\overline{OE}_1$ .

Calculul grafic al curenților se face construind relațiile (8.3).

b) A doua metodă. Metoda punctelor neutre succesive. Fie un sistem trifazat fără conductor neutru. Se presupune la început că una din faze este întreruptă, de exemplu faza 3. În acest caz, cele două impedanțe  $\underline{Z}_1$  și  $\underline{Z}_2$  se găsesc legate în serie cu tensiunea  $\underline{U}_{12}$  între faze. Curentul fiind același în cele două impedanțe, raportul căderilor de tensiune în aceste impedanțe este egal cu raportul impedanțelor sau cu raportul invers al admitanțelor. Rezultă deci,  $N'$  fiind punctul de legătură al celor două impedanțe,

$$\frac{E_{2N'}}{E_{N'1}} = \frac{Z_2 I}{Z_1 I} = \frac{Y_1}{Y_2}$$

unde  $E_{2N'}$ , reprezintă căderea de tensiune în impedanța  $\underline{Z}_2$  și  $E_{N'1}$  aceea în impedanța  $\underline{Z}_1$ .

Aplicând acestei relații o proprietate a proporțiilor, rezultă

$$\frac{E_{2N'}}{E_{2N'} + E_{N'1}} = \frac{E_{2N'}}{E_{12}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}, \quad (8.5)$$



căci, în virtutea celei de a II-a teoreme a lui KIRCHHOFF,

$$\underline{E}_{2N'} + \underline{E}_{N'1} = \underline{E}_{12}$$

Relația (8.5) arată că triunghiul  $\underline{E}_1 N' \underline{E}_2$ , format din fazorii reprezentând căderile de tensiune în cele două impedanțe și de tensiunea la bornele lor, este asemenea cu triunghiul  $OAB$  format din admitanțele corespunzătoare și

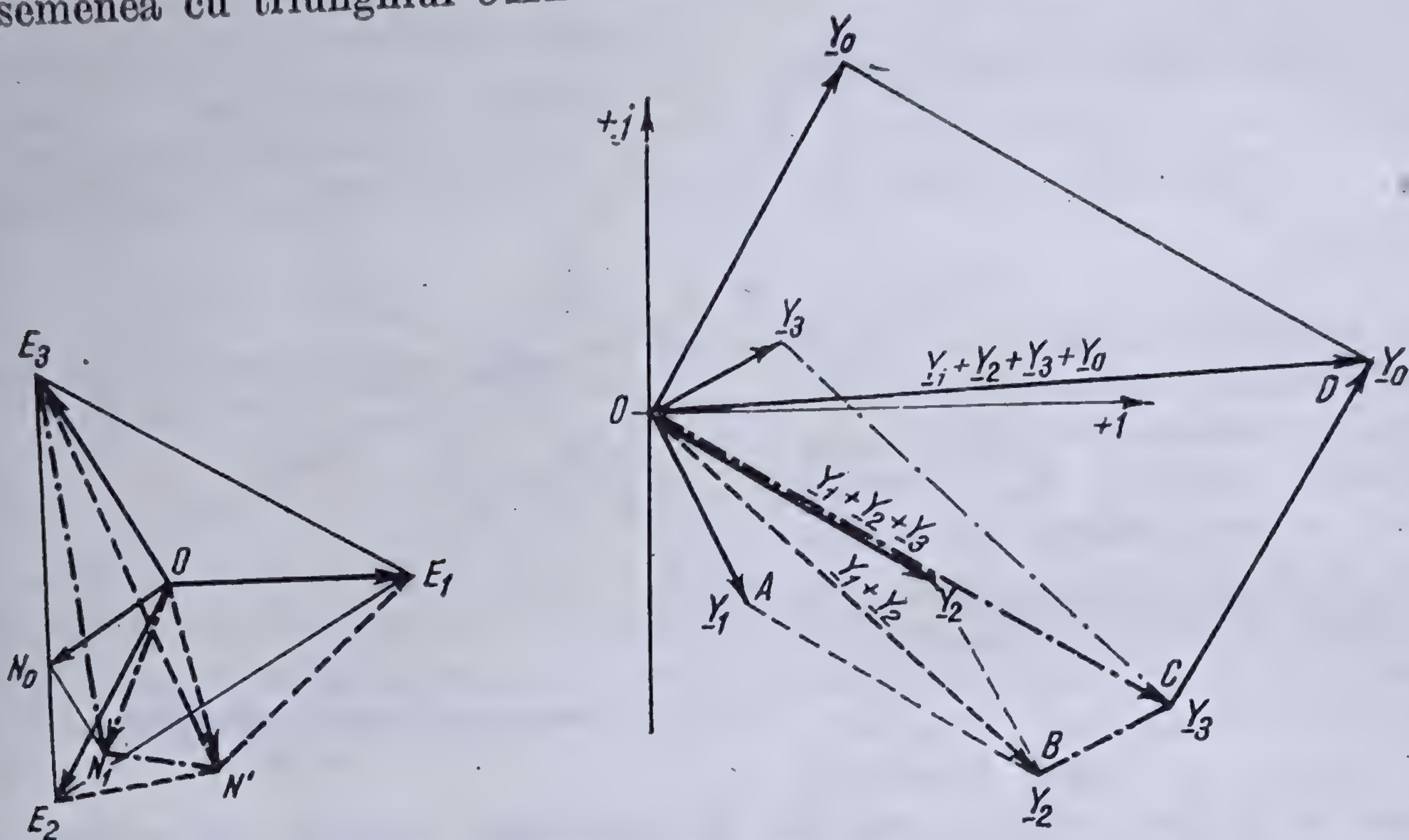


Fig. 8.7. Construirea grafică a fazorului  $\underline{E}_0$  prin metoda punctelor neutre succesive.

suma lor (fig. 8.7). Construind deci triunghiul  $\underline{E}_1 N' \underline{E}_2$  în diagrama tensiunilor se găsește poziția punctului  $N'$  și deci fazorul  $\overline{ON'} = \underline{E}_{N'}$ , care reprezintă deplasarea punctului neutru al sarcinii față de punctul neutru al sursei în această situație de funcționare a sistemului\*.

Valoarea acestei tensiuni se obține din relația (8.2) în care se face  $\underline{Y}_0 = 0$  și  $\underline{Y}_3 = 0$  se găsește

$$\underline{E}_{N'} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}.$$

Diferența de potențial între punctul neutru  $N'$  al sarcinii și faza întreruptă este

$$\overline{N'E_2} = \underline{E}_3 - \underline{E}_{N'} = \underline{E}_3 - \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{\underline{E}_3(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) - (\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}. \quad (8.6)$$

Să presupunem acum că faza 3 nu este întreruptă; în acest caz deplasarea punctului neutru al sarcinii este dată de relația (8.2) în care  $\underline{Y}_0 = 0$  și diferența de potențial între punctul neutru al sarcinii și această fază 3 este:

$$\overline{N_1 E_3} = \underline{E}_3 - \underline{E}_{N1} = \underline{E}_3 - \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2 + \underline{E}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\underline{E}_3(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) - (\underline{E}_1 \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \underline{Y}_2)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

\* Construcția se face luând  $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$  în direcția  $\underline{E}_2 \underline{E}_1$ .



Împărțind această relație prin relația (8.6) se obține

$$\frac{\underline{E}_3 - \underline{E}_{N_1}}{\underline{E}_3 - \underline{E}_{N'}} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{OB}{OC} = \frac{\overline{N_1 E_3}}{\overline{N' E_3}}$$

care arată că triunghiul  $E_3 N_1 N'$  este asemenea cu triunghiul  $OBC$ . Construind această relație se găsește poziția punctului neutru  $N_1$  în diagrama tensiunilor și fazorul  $\overline{ON_1} = \underline{E}_{N_1}$  va reprezenta în direcție și mărime deplasarea punctului neutru al sarcinii în acest caz de funcționare\*.

Dacă sistemul trifazat are un conductor neutru, atunci se obține

$$\frac{\underline{E}_{N_0}}{\underline{E}_{N_1}} = \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0} = \frac{OC}{OD} = \frac{\overline{ON_0}}{\overline{ON_1}}, \quad (8.7)$$

unde  $\underline{E}_{N_0}$  este deplasarea punctului neutru al sarcinii în acest caz de funcționare, valoarea lui fiind dată de relația (8.2).

În acest caz, vom avea asemănarea triunghiurilor  $ON_0 N_1$  și  $OCD$ ; construind deci relația (8.7) se determină poziția punctului neutru  $N_0$  în diagrama tensiunilor. Fazorul  $\overline{ON_0} = \underline{E}_0$  reprezintă deci deplasarea punctului neutru al sarcinii, în direcție și mărime, în situația de funcționare a sistemului trifazat cu conductor neutru.

**OBSERVAȚIE:** Construcția diversilor fazori (sume, fazori omologi) trebuie să se facă ținându-se seama de ordinea indicată în formule și de succesiunea lor în diagramă. Nerespectarea acestor reguli conduce la rezultate eronate. Astfel, de exemplu, construcția relației (8.5) trebuie făcută în același sens cu triunghiul  $OAB$ , luând fazorul  $\overline{E_2 E_1}$  omolog fazorului  $\overline{OB}$ , iar relația (8.7) în același sens cu triunghiul  $OBC$ , luând fazorul  $\overline{E_3 N'}$  omolog cu fazorul  $\overline{OC}$  etc.

c) *A treia metodă grafică. Metoda centrului de greutate* (KENNELLY). Fără a se dauna cu nimic generalității problemei, fie un sistem trifazat oarecare, fără conductor neutru.

Se construiește diagrama fazorială a celor trei forțe electromotoare (fig. 8.8); ele vor fi reprezentate prin fazorii  $\overline{OE_{10}}$ ,  $\overline{OE_{20}}$  și  $\overline{OE_{30}}$ .

Punctele  $E_{10}$ ,  $E_{20}$  și  $E_{30}$  dau tensiunea la bornele generatorului la mersul în gol.

Fie  $G_1, B_1, G_2, B_2$  și  $G_3, B_3$  conductanțele și susceptanțele totale ale fiecărei faze, cuprinzând deci conductanțele și susceptanțele generatorului, liniei și sarcinii. Se construiesc la extremitățile fazorilor, reprezentând tensiunile pe cele trei faze, drepte a căror direcții au argumente egale cu argumentele impedanțelor corespunzătoare fiecărei faze și pe aceste drepte se ia modulul admitanțelor respective, care se descompun în cele două componente ale lor,  $G$  și  $B$  (fig. 8.8). În triunghiul admitanței, unghiul dintre ipotenuza  $Y$  și susceptanța  $B$  reprezintă defazajul dintre curent și tensiune pe faza respectivă. Într-adevăr, acest defazaj este definit prin relația (4.63), circuitul fiecărei faze fiind un circuit serie; se poate scrie deci,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{G}{B}.$$

\* Construcția se face luând suma  $\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$  în direcția  $\overline{E_3 N}$ .



Să presupunem acum, problema rezolvată (fig. 8.8), fie deci  $N$  punctul neutru al sarcinii, căutat. Tensiunile pe fază vor fi reprezentate, în acest caz, prin fazorii  $\overline{NE}_{10}$ ,  $\overline{NE}_{20}$  și  $\overline{NE}_{30}$ ; curenții respectivi vor fi defazați față de tensiunile corespunzătoare cu unghiurile  $\varphi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

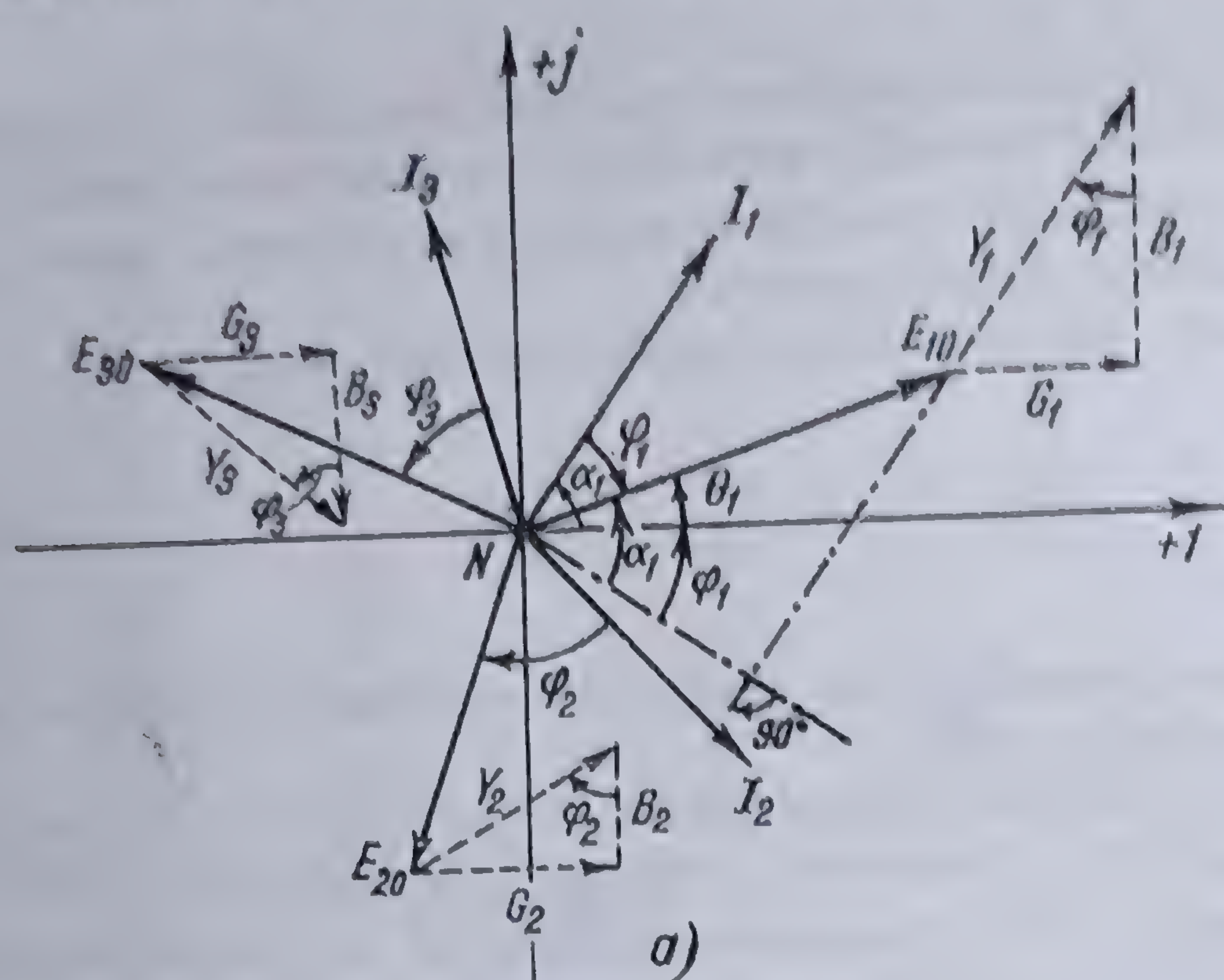
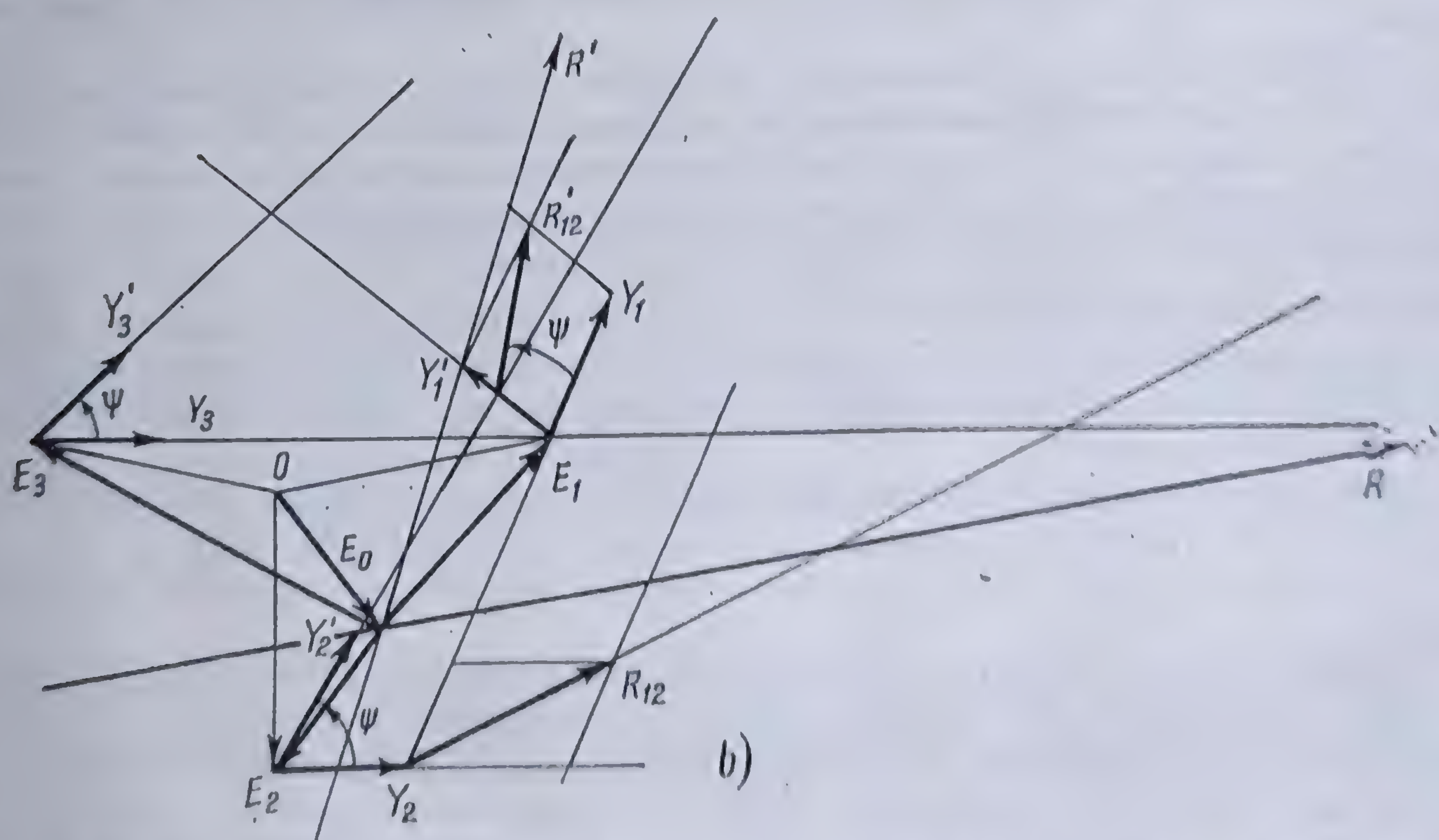


Fig. 8.8. Construirea grafică a fazorului  $E_0$  prin metoda centrului de greutate.

a) Diagrama fazorială a tensiunilor, admitanțelor și curenților;  
b) Construirea grafică a fazorului  $E_0$ .



Sistemul dat fiind presupus fără conductor neutru, în conformitate cu teorema I a lui Kirchhoff, în punctul neutru al sarcinilor, suma curenților de pe cele trei faze este nulă.

Să examinăm, de exemplu, situația de pe faza 1. Tensiunea acestei faze este  $\underline{U}_1$ , iar curențul corespunzător  $\underline{I}_1$  este defazat cu unghiul  $\varphi_1$  față de tensiune. Valoarea instantanee a acestui curent este

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \cos \alpha_1 = \sqrt{2} Y_1 E_1 \cos \alpha_1, \quad (8.8)$$

$Y_1$  fiind modulul admitanței fazei respective.



Ducind normala din  $N$  pe  $Y_1$ , aceasta va face cu fazorul  $\overline{NE}_{10}$ , același unghi  $\alpha_1$ . Într-adevăr, este ușor de văzut pe figura 8.8,a că\*

$$\angle (\overline{NE}_{10}, \overline{NA}) = \varphi_1 + \theta_1 = \alpha_1.$$

Distanța  $\overline{NA}$ , de la punctul  $N$  la direcția pe care a fost construită admitanța  $Y_1$  (direcția impedanței  $Z_1$ ) va fi deci  $\overline{NE}_{10} \cos \alpha_1$ . Dacă am asemui vectorul  $Y_1$ , avînd modulul egal cu *modulul admitanței fazei respective* și argumentul egal cu *argumentul impedanței aceleiași faze*, cu o forță, atunci momentul acestei forțe în raport cu punctul  $N$ , cu aproximația factorului constant  $\sqrt{2}$ , este dat chiar de expresia (8.8) a valorii instantanee  $i$  a curentului  $I_1$ .

Condiția ca suma curenților în punctul  $N$  să fie în orice moment nulă poate fi enunțată astfel: *Suma momentelor forțelor  $\underline{Y}$  în raport cu punctul  $N$  trebuie să fie nulă.* Această condiție este satisfăcută dacă punctul  $N$  se găsește pe rezultanta forțelor  $\underline{Y}$ .

Dacă se presupune că sistemul  $OE_{10}E_{20}E_{30}$  este un sistem rigid, nedeformabil, atunci rotind forțele  $\underline{Y}$ , toate cu același unghi și în același sens și rezultanta lor se va roti cu același unghi. Punctul de rotire al rezultantei este punctul neutru căutat, deoarece pentru acest punct suma momentelor va fi nulă.

De aici rezultă următoarea metodă grafică de determinare a punctului neutru al sistemului (fig. 8.8,b).

Se construiesc cele trei forțe electromotoare ale sursei, corespunzătoare mersului în gol. În vîrfurile acestora se construiesc, pe *direcții avînd argumente egale cu cele ale impedanțelor*, admitanțele totale ale circuitului, corespunzătoare fiecărei faze. Considerîndu-se aceste admitanțe ca niște forțe, se face rezultanta lor. Se rotesc apoi admitanțele, toate în același sens și cu același unghi  $\psi$  și se face din nou rezultanta. Punctul de întîlnire a celor două rezultate dă punctul neutru  $N$  căutat.

Unind punctul  $N$  cu cele trei vîrfuri ale fazorilor de tensiune la mersul în gol, se găsesc tensiunile pe cele trei faze, în mărime și în direcție și se pot calcula astfel curenții căutați.

**8.2.2.4. Calculul curenților într-un sistem trifazat în cazul cînd se cunosc tensiunile de linie la bornele receptoarelor legate în stea.** În practică nu se cunosc forțele electromotoare ale generatorului care alimentează rețeaua trifazată, ci numai tensiunile de linie la bornele receptorului.

Cele trei tensiuni între faze formează un triunghi oarecare. Suma lor este întotdeauna nulă.

Pentru a putea determina curenții absorbiți de cele trei impedanțe care reprezintă sarcina receptorului, este necesar să se cunoască tensiunea pe fază la bornele fiecărei impedanțe.

Pentru a determina aceste tensiuni, să presupunem mai întîi că cele trei sarcini sînt egale. Fie  $\underline{V}_1$ ,  $\underline{V}_2$  și  $\underline{V}_3$  cele trei tensiuni pe fază la bornele sarcinii; în acest caz suma curenților în punctul neutru al sarcinii este nulă, adică

$$\frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}} + \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}} + \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}} = 0$$

\* Demonstrația este aceeași și dacă curentul  $\underline{I}_1$  ar fi defazat în urma tensiunii  $\overline{NE}_{10}$ . În acest caz am avea:

$$\angle (\overline{NE}_{10}, \overline{NA}) = \varphi_1 - \theta_1 = \alpha_1$$



de unde rezultă

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0$$

ceea ce înseamnă că, în acest caz, punctul neutru al sarcinilor se găsește în centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze (fig. 8.9). Se obține astfel,

$$\underline{V}_1 = \underline{U}_3 + \underline{V}_2 \text{ și } \underline{V}_1 = -\underline{U}_2 + \underline{V}_3$$

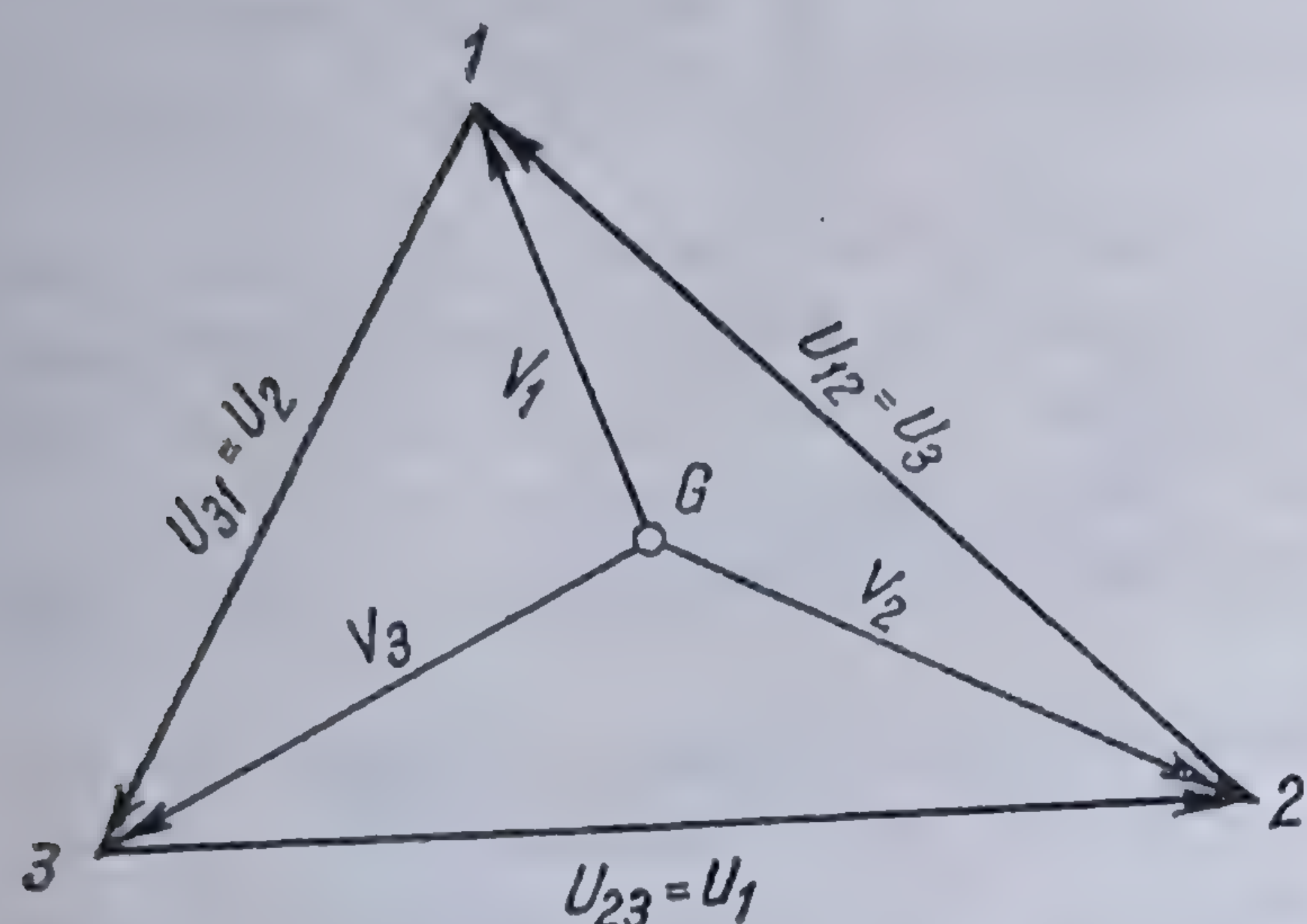


Fig. 8.9. Diagrama tensiunilor în cazul unei sarcini trifazate simetrice.

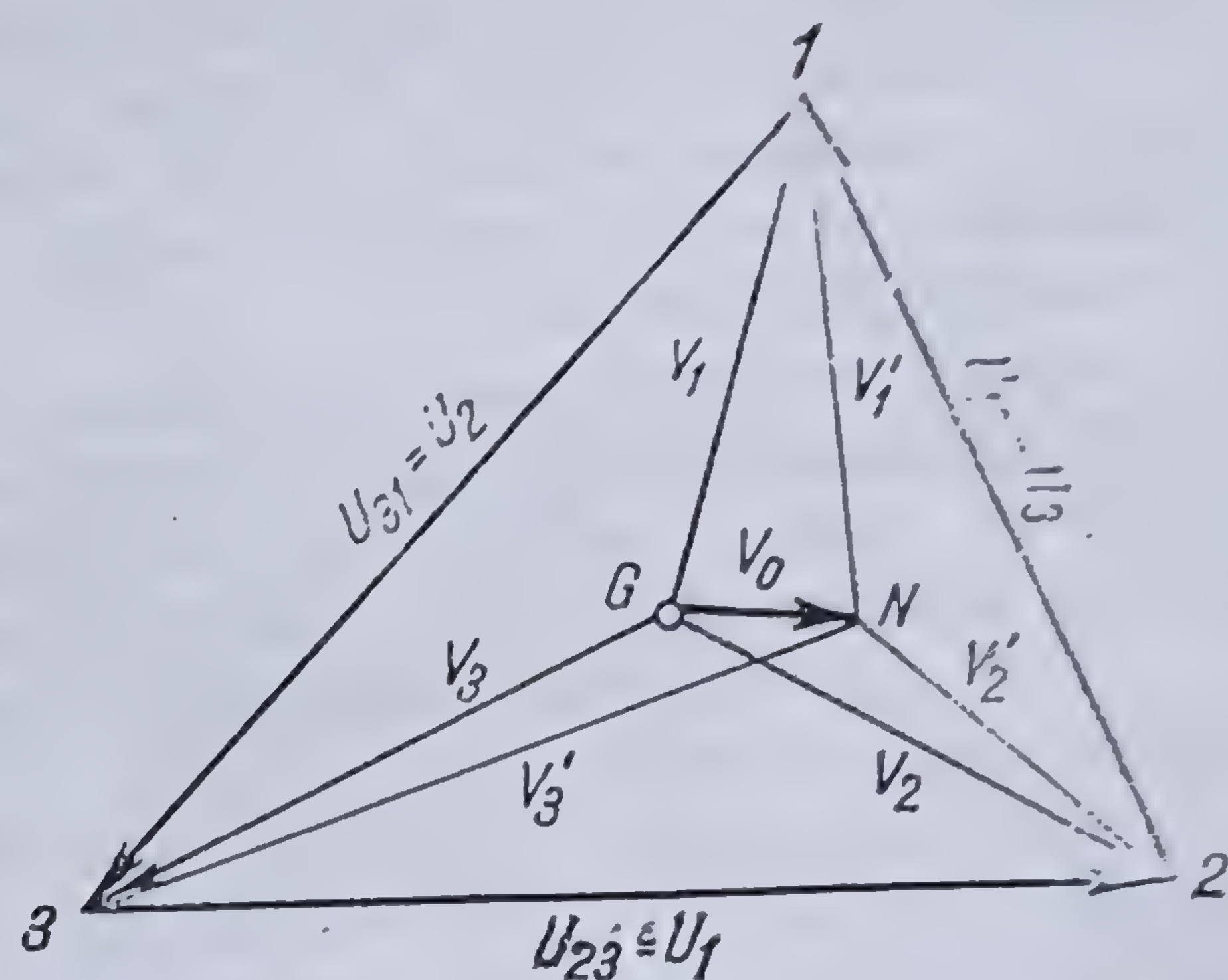


Fig. 8.10. Diagrama tensiunilor în cazul unei sarcini trifazate nesimetrice.

de unde rezultă

$$\underline{V}_1 = \frac{1}{3} (\underline{U}_3 - \underline{U}_2).$$

Analog se găsește

$$\underline{V}_2 = \frac{1}{3} (\underline{U}_1 - \underline{U}_3);$$

$$\underline{V}_3 = \frac{1}{3} (\underline{U}_2 - \underline{U}_1).$$

Se presupune acum că cele trei sarcini nu mai sînt egale. În acest caz punctul neutru  $N$  al sarcinii nu mai coincide cu centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze și va fi într-un punct oarecare din planul acestui triunghi. Rezultă dar, că între punctul neutru  $N$  al sarcinii simetrice și dezechilibrate și punctul neutru  $G$  al unei sarcini simetrice și echilibrate există o anumită diferență de potențial  $\underline{V}_0 = \overline{GN}$ . Fie  $\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3$  tensiunile pe fază necunoscute ale sistemului cu încărcare nesimetrică și dezechilibrată și  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$  tensiunile pe fază existente în cazul unei încărcări simetrice și echilibrate. Din figura 8.10 rezultă:

$$\underline{V}'_1 = \underline{V}_1 - \underline{V}_0; \underline{V}'_2 = \underline{V}_2 - \underline{V}_0; \underline{V}'_3 = \underline{V}_3 - \underline{V}_0.$$



Dacă se înmulțește fiecare din aceste tensiuni cu admitanța respectivă  $\underline{Y}$ , se obțin cei trei curenți din fazele respective :

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{V}'_1 \underline{Y}_1 = (\underline{V}_1 - \underline{V}_0) \underline{Y}_1; \\ \underline{I}_2 &= \underline{V}'_2 \underline{Y}_2 = (\underline{V}_2 - \underline{V}_0) \underline{Y}_2; \\ \underline{I}_3 &= \underline{V}'_3 \underline{Y}_3 = (\underline{V}_3 - \underline{V}_0) \underline{Y}_3.\end{aligned}\quad (8.9)$$

Adunînd aceste trei ecuații și ținînd seama că  $\Sigma \underline{I} = 0$ , se obține

$$\underline{V}_0 (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) = \underline{V}_1 \underline{Y}_1 + \underline{V}_2 \underline{Y}_2 + \underline{V}_3 \underline{Y}_3$$

de unde, rezultă

$$\underline{V}_0 = \frac{\underline{V}_1 \underline{Y}_1 + \underline{V}_2 \underline{Y}_2 + \underline{V}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.$$

Înlocuind această valoare în ecuațiile (8.9), se găsesc curenții căutați. Calculul se poate face fie analitic, fie grafic, așa cum s-a arătat mai înainte.

**8.2.2.6. Exemplu de aplicație a metodei.** O linie electrică trifazată, simetrică și echilibrată, are capacitatea între fiecare fază și pămînt egală cu  $3,18 \mu F$ . La un moment dat, faza 3 se pune la pămînt printr-o rezistență de  $1000 \Omega$ . Știînd că tensiunea fiecărei faze față de pămînt, la funcționarea normală, este de  $17,3 \text{ kV}$ ,  $50 \text{ Hz}$ , se cere :

- tensiunea fiecărei faze față de pămînt, după punerea fazei 3 la pămînt;
- curentul ce se scurge prin rezistența de punere la pămînt;
- inductanța pe care trebuie să o aibă o bobină de stingere, astfel încît curentul de punere la pămînt să fie egal cu zero.

Admitanțele sistemului sînt

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = jC\omega \text{ și } \underline{Y}_3 = G + jC\omega$$

în care  $G = 1/R$ . Calculînd deplasarea punctului neutru, ținînd seama că  $\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0$ , se găsește :

$$\underline{V}_0 = \frac{\Sigma \underline{Y}_i \underline{V}_i}{\Sigma \underline{Y}_i} = \frac{G}{G + j3C\omega} \underline{V}_3 = 3,64 + j4,1 \text{ kV};$$

tensiunea fiecărei faze, după punerea la pămînt a fazei 3, este :

$$\underline{V}'_1 = \underline{V}_1 - \underline{V}_0 = 13,66 - j4,1 = 14,3 \angle 343^\circ 18' \text{ kV}$$

$$\underline{V}'_2 = \underline{V}_2 - \underline{V}_0 = -12,3 - j19,1 = 22,7 \angle 237^\circ 10' \text{ kV},$$

$$\underline{V}'_3 = \underline{V}_3 - \underline{V}_0 = 12,3 + j10,9 = 16,4 \angle 138^\circ 28' \text{ kV}.$$



Curentul în rezistența de punere la pământ este :

$$\underline{I}_g = G \underline{V}_3' = \frac{j 3 C \omega G}{G + j 3 C \omega} \underline{V}_3 = -12,3 + j 10,9 = 16,4 \angle 138^\circ 28' \text{ A.}$$

Bobina de stingere echivalează cu un conductor neutru de admitanță  $\underline{Y}_0 = -j/L \omega$ . În acest caz,

$$\underline{V}_0'' = \frac{\Sigma \underline{Y}_1 \underline{V}_1}{\underline{Y}_0 + \Sigma \underline{Y}_1} = \frac{G}{G + j \left( 3 C \omega - \frac{1}{L \omega} \right)} \underline{V}_3$$

și deci,

$$\underline{V}_3'' = \underline{V}_3 - \underline{V}_0'' = \frac{j \left( 3 C \omega - \frac{1}{L \omega} \right)}{G + j \left( 3 C \omega - \frac{1}{L \omega} \right)} \underline{V}_3.$$

Cum  $\underline{I}_g = G \underline{V}_3''$ , pentru ca  $\underline{I}_g = 0$ , rezultă că

$$3 C \omega - \frac{1}{L \omega} = 0$$

de unde se deduce valoarea inductanței bobinei de stingere :

$$L = \frac{1}{3 C \omega^2} = 1,06 \text{ H.}$$

### 8.3. SISTEME POLIFAZATE DEZECHILIBRATE. CALCULUL CU AJUTORUL TEORIEI COORDONATELOR SIMETRICE

#### 8.3.1. GENERALITĂȚI

Într-un sistem polifazat dezechilibrat, curenții, tensiunile, impedanțele, admitanțele etc. fiecărei faze pot fi reprezentate prin fazori. Totalitatea fazorilor reprezentând mărimile de aceeași natură ale diferitelor faze formează un sistem de fazori nesimetrice.

Astfel, într-un circuit polifazat dezechilibrat cu  $q$  faze, curenții din diferitele faze nu vor avea aceeași intensitate și unghiul de defazaj între ei va fi diferit de  $2\pi/q$ ; fazorii reprezentativi ai acestor curenți vor forma un sistem de fazori nesimetric.

Pentru a se putea utiliza în sistemele polifazate dezechilibrate simetria care conduce la efectuarea studiului acestora numai pe o singură fază, luată ca fază de referință, extinzându-se apoi rezultatele la celelalte faze, s-a creat teoria *coordonatelor simetrice*. Conform acestei teorii, un sistem polifazat dezechilibrat poate fi considerat ca rezultanta suprapunerii unor sisteme polifazate simetrice sau echilibrate. De aici, rezultă că orice sistem de fazori polifazat



nesimetric poate fi descompus într-un număr oarecare de sisteme de fazori polifazați, simetrice. Această descompunere trebuie înțeleasă în sensul, că fiecare din fazorii sistemului nesimetric dat este rezultanta fazorilor de același indice, ai sistemelor simetrice componente.

Sistemele de fazori simetrice, în care se poate descompune un sistem nesimetric dat, sînt *coordonatele simetrice* ale acestui sistem.

Fazorii de același indice ai sistemelor simetrice, în care se descompune fazorul principal corespunzător al sistemului nesimetric dat, sînt *componentele simetrice* ale acestui fazor. Componentele simetrice sînt fazorii care formează coordonatele simetrice ale unui sistem nesimetric dat.

Fără a diminua generalitatea problemei, se va trata în cele ce urmează numai sistemul trifazat. Generalizarea nu prezintă nici o dificultate și pentru documentare îndrumăm cititorul către lucrările originale respective\*.

### 8.3.2. DESCOMPUNEREA ÎN COORDONATE SIMETRICE A UNUI SISTEM TRIFAZAT OARECARE. (TEOREMA LUI STOKVIS-FORTESCUE)

*Un sistem trifazat de fazori oarecare poate fi descompus în trei sisteme trifazate, dintre care două sisteme simetrice de succesiune diferită, unul direct și altul invers și unul homopolar.*

Această descompunere trebuie să fie înțeleasă în sensul că un fazor oarecare  $\underline{V}_n$  al sistemului dat este rezultanta fazorilor de indice  $n$  ai sistemelor simetrice componente.

Fie

$$S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$$

sistemul de fazori dat. Dacă se notează cu  $\underline{V}_d$  primul fazor (fazorul principal) al sistemului direct  $S_d$ , cu  $\underline{V}_i$  primul fazor (fazorul principal) al sistemului invers  $S_i$  și cu  $\underline{V}_h$  fazorii sistemului homopolar, atunci

$$S_d(\underline{V}_d) = (\underline{V}_d, a^2\underline{V}_d, a\underline{V}_d)$$

$$S_i(\underline{V}_i) = (\underline{V}_i, a\underline{V}_i, a^2\underline{V}_i)$$

$$S_h(\underline{V}_h) = (\underline{V}_h, \underline{V}_h, \underline{V}_h)$$

și, în virtutea teoremei de mai sus, trebuie ca

$$S = S_h + S_d + S_i$$

și pentru fiecare fazor în parte

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i$$

$$\underline{V}_2 = \underline{V}_h + a^2\underline{V}_d + a\underline{V}_i \quad (8.10)$$

$$\underline{V}_3 = \underline{V}_h + a\underline{V}_d + a^2\underline{V}_i$$

a fiind operatorul de rotație cu  $120^\circ$ .

\* Vezi [140, 256].



Sistemele de fazori  $S_h$ ,  $S_d$  și  $S_i$  se numesc *coordonatele simetrice* ale sistemului  $S$  dat, iar fazorii  $\underline{V}_h$ ,  $\underline{V}_d$  și  $\underline{V}_i$ , care formează aceste sisteme, se numesc *componentele simetrice ale fazorilor dați*.

Pentru a demonstra teorema lui STOKVIS-FORTESCUE este suficient a observa că sistemul de ecuații (8.10) este un sistem de ecuații liniare care conține trei ecuații cu trei necunoscute, ale cărei soluții sînt unice și bine definite.

Pentru a obține componenta  $\underline{V}_h$ , se adună cele trei ecuații. Ținînd seama de relație

$$1 + a + a^2 = 0$$

se obține

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 3 \underline{V}_h$$

de unde rezultă

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3). \quad (8.11)$$

Pentru a se obține componenta directă  $\underline{V}_d$ , se înmulțește a doua ecuație a sistemului (8.10) cu  $a$  și a treia ecuație cu  $a^2$  și se adună. Se găsește

$$\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3 = 3 \underline{V}_d$$

și rezultă

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3). \quad (8.12)$$

În sfîrșit, pentru a se obține componenta inversă  $\underline{V}_i$ , se înmulțește a doua ecuație a sistemului (8.12) cu  $a^2$  și a treia ecuație cu  $a$  și se adună. Se găsește

$$\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3 = 3 \underline{V}_i$$

de unde rezultă

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3). \quad (8.13)$$

Sistemul de ecuații (8.10) fiind liniar și neputînd da decît o singură valoare pentru fazorii  $\underline{V}_h$ ,  $\underline{V}_d$ ,  $\underline{V}_i$ , rădăcinile acestui sistem, rezultă că *descompunerea unui sistem de fazori trifazat oarecare în coordonatele sale simetrice nu poate fi făcută decît într-un singur mod*.

**OBSERVAȚII:** 1. În această descompunere se poate întîmpla ca una din componentele simetrice să fie nulă, ceea ce înseamnă că numărul de componente simetrice poate să fie inferior numărului de fazori al sistemului. În particular, componenta homopolară poate fi nulă, ceea ce se întîmplă atunci cînd rezultanta sistemului de fazori dat este nulă, după cum se poate vedea ușor din relația (8.11). Aceasta corespunde situației cînd sistemul polifazat nu are conductor neutru.



Un sistem de fazori la care componenta homopolară este nulă se numește un sistem pur, spre deosebire de sistemul de fazori la care această componentă nu este nulă și care se numește impur.

2. Se poate întâmpla de asemenea ca unul din fazorii sistemului de fazori nesimetric dat să fie nul. Rezultă că numărul componentelor simetrice poate fi superior numărului de fazori dați.

### 8.3.3. REALITATEA FIZICĂ A COMPONENTELOR SIMETRICE ALE UNUI SISTEM TRIFAZAT OARECARE

În cazul când un sistem polifazat oarecare reprezintă un sistem de curenți sau tensiuni, descompunerea în componentele simetrice *nu este numai un artificiu de calcul, ci corespunde unei realități fizice bine definite*. Componentele simetrice ale unui sistem dezechilibrat de curent sau de tensiune pot fi măsurate direct și independent unele de altele; fiecare din ele se comportă în mod diferit decât celelalte în raport cu constituția rețelei electrice și în raport cu natura aparatelor care intră în considerație; de exemplu, componenta directă este aceea care produce în armăturile motoarelor cîmpuri învîrtitoare în sensul direct și deci cuplul util; componenta inversă produce numai cîmpuri care dau naștere la cupluri de frînare; în sfîrșit, componenta homopolară este aceea care intervine în toate cazurile de interferență între liniile de transmitere a energiei electrice și cele de telecomunicații. Componentelor simetrice de același fel de curent și de tensiune le corespund componente simetrice de putere, care sînt direct măsurabile și care se manifestă în moduri diferite. În particular, *componenta directă de putere* își are sursa chiar în alternatorul sincron sau asincron, pe cînd *componentele inversă și homopolară* sînt produse la locul de dezechilibru și se îndreaptă către elementele echilibrate ale rețelei, fie că sînt generatoare, fie că sînt receptoare de putere normală.

### 8.3.4. TEOREME PRIVIND COORDONATELE SIMETRICE

8.3.4.1. **Sisteme de fazori cu vîrfuri comune.** În problemele ce apar în sistemele trifazate, sînt numeroase cazurile cînd sistemele de fazori reprezentativi au vîrfuri comune, originile putînd fi oarecare. Astfel, tensiunea la bornele generatorului și tensiunea la bornele receptorului, alimentată de acest generator, pot fi reprezentate prin sisteme avînd aceleași vîrfuri. Componentele simetrice ale acestor sisteme de fazori se bucură de anumite proprietăți foarte utile în rezolvarea problemelor corespunzătoare. Una dintre aceste proprietăți este redată în următoarea

**Teoremă:** Două sisteme de fazori trifazați oarecare, care au vîrfuri comune și origini diferite, au aceleași componente directă și inversă iar componentele homopolare diferă prin vectorul care unește cele două origini.

Fie sistemele de fazori (fig. 8.11)

$$S_0(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$$

$$S_0(\underline{V}') = (\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3)$$

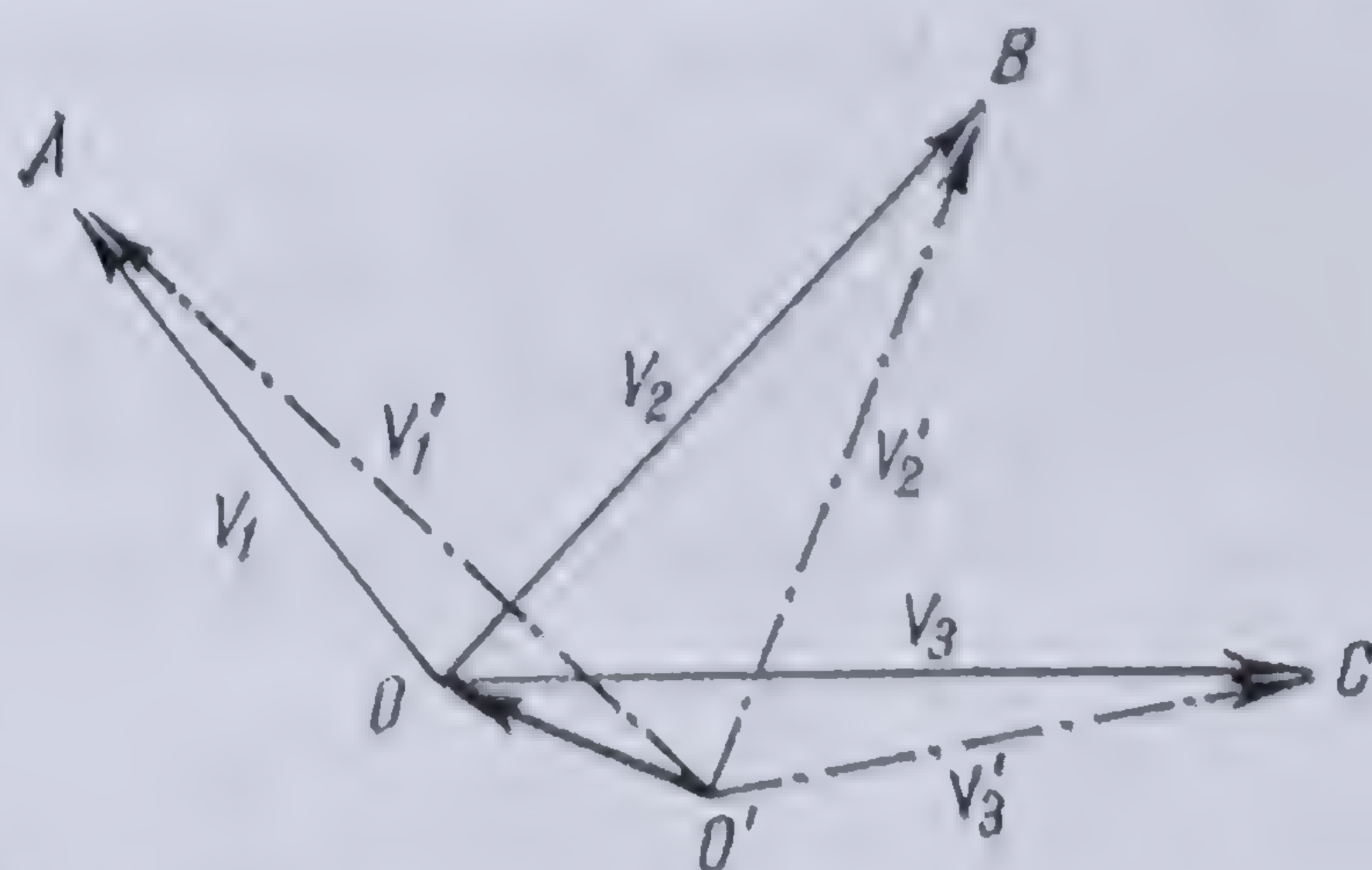


Fig. 8.11. Sisteme de fazori cu aceleași vîrfuri.



Componentele simetrice ale acestor sisteme sînt:

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3); \quad \underline{V}'_h = \frac{1}{3}(\underline{V}'_1 + \underline{V}'_2 + \underline{V}'_3);$$

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3); \quad \text{și} \quad \underline{V}'_d = \frac{1}{3}(\underline{V}'_1 + a\underline{V}'_2 + a^2\underline{V}'_3);$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3), \quad \underline{V}'_i = \frac{1}{3}(\underline{V}'_1 + a^2\underline{V}'_2 + a\underline{V}'_3).$$

Din figura 8.11 rezultă:

$$\underline{V}'_1 = \underline{V}_1 + \overline{OO'}, \quad \underline{V}'_2 = \underline{V}_2 + \overline{OO'} \quad \text{și} \quad \underline{V}'_3 = \underline{V}_3 + \overline{OO'}$$

și deci

$$\underline{V}'_d = \frac{1}{3}[\underline{V}_1 + \overline{OO'} + a(\underline{V}_2 + \overline{OO'}) + a^2(\underline{V}_3 + \overline{OO'})] =$$

$$= \frac{1}{3}[(\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3) + \frac{1}{3}(1 + a + a^2)\overline{OO'}] = \underline{V}_d,$$

$$\underline{V}'_i = \frac{1}{3}[\underline{V}_1 + \overline{OO'} + a^2(\underline{V}_2 + \overline{OO'}) + a(\underline{V}_3 + \overline{OO'})] =$$

$$= \frac{1}{3}[(\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2 + a\underline{V}_3) + \frac{1}{3}(1 + a^2 + a)\overline{OO'}] = \underline{V}_i,$$

$$\underline{V}'_h = \frac{1}{3}[\underline{V}_1 + \overline{OO'} + \underline{V}_2 + \overline{OO'} + \underline{V}_3 + \overline{OO'}] =$$

$$= \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) + \overline{OO'} = \underline{V}_h + \overline{OO'},$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

**8.3.4.2. Relația între coordonatele simetrice ale unui sistem de trei faze concurenți și acelea ale sistemului de faze care leagă vîrfurile fazorilor primului sistem.** Fie un sistem de trei faze concurenți  $S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$  și sistemul de faze  $S(\underline{U}) = (\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3)$  obținut prin legarea vîrfurilor primului sistem (fig. 8.12, a). Între fazele acestor două sisteme se pot scrie relațiile:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{V}_2 - \underline{V}_3, \\ \underline{U}_2 &= \underline{V}_3 - \underline{V}_1, \\ \underline{U}_3 &= \underline{V}_1 - \underline{V}_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$



Componentele simetrice, directă și inversă, ale sistemului  $S(\underline{U})$  sînt :

$$\underline{U}_d = \frac{\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 + a^2\underline{U}_3}{3} ; \quad \underline{U}_i = \frac{\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 + a\underline{U}_3}{3} ,$$

sau ținînd seama de relațiile (8.14), se obține

$$\underline{U}_d = \frac{\underline{V}_2 + a\underline{V}_3 + a^2\underline{V}_1}{3} - \frac{\underline{V}_3 + a\underline{V}_1 + a^2\underline{V}_2}{3} = \underline{V}_{d2} - \underline{V}_{d3} .$$

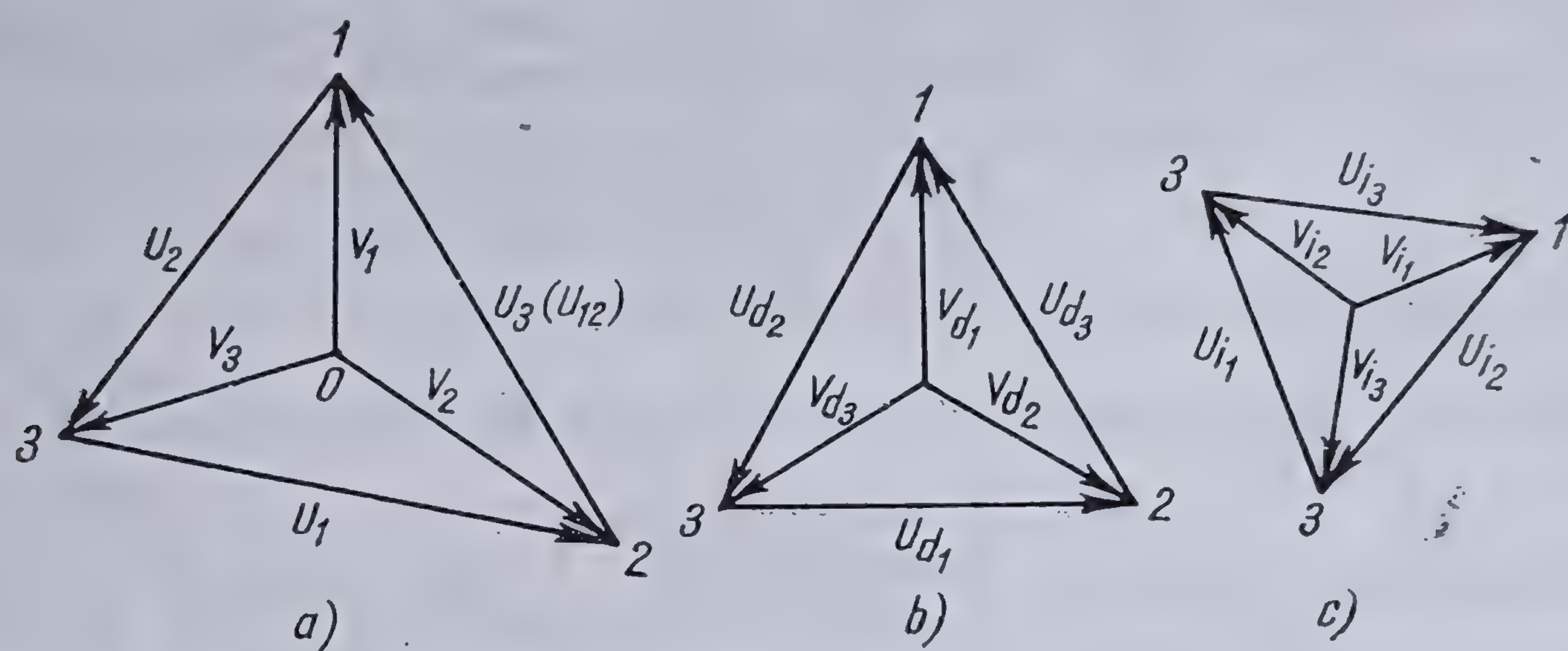


Fig. 8.12. Sisteme de fazori stea și triunghi.

Cum însă

$$\underline{V}_{d2} = a^2\underline{V}_{d1} \quad \text{și} \quad \underline{V}_{d3} = a\underline{V}_{d1} ,$$

rezultă (fig. 8.12,b)

$$\underline{U}_d = (a^2 - a) \underline{V}_d = \sqrt{3} \underline{V}_d \left| -\frac{\pi}{2} \right. . \quad (8.15)$$

Analog se găsește pentru componenta inversă :

$$\begin{aligned} \underline{U}_i &= \frac{\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3 + a\underline{V}_1}{3} - \frac{\underline{V}_3 + a^2\underline{V}_1 + a\underline{V}_2}{3} = \underline{V}_{i2} - \underline{V}_{i3} = \\ &= (a - a^2) \underline{V}_i = \sqrt{3} \underline{V}_i \left| \frac{\pi}{2} \right. . \end{aligned} \quad (8.16)$$

Forma relațiilor (8.15) și (8.16) depinde numai de convenția ce s-a făcut în alegerea fazorilor principali ai celor două sisteme. O altă alegere a acestora conduce la alte expresii. Astfel, de exemplu, fie  $\underline{U}_{12}$  (fig. 8.12,a) fazorul principal al sistemului triunghi. Dacă se păstrează același fazor principal pentru sistemul stea, se găsește în acest caz :

$$\underline{U}'_{d12} = \sqrt{3} \underline{V}_d \left| \frac{\pi}{6} \right. ; \quad \underline{U}'_{i12} = \sqrt{3} \underline{V}_i \left| -\frac{\pi}{6} \right. . \quad (8.17)$$



Relațiile (8.15) și (8.16) au însă mai multă utilizare practică decât relațiile (8.17), fiind mai simple.

În ceea ce privește componenta homopolară, valoarea acesteia este

$$\underline{U}_h = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3}{3} = \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_3 + \underline{V}_3 - \underline{V}_1 + \underline{V}_1 - \underline{V}_2}{3} = 0,$$

ceea ce era de așteptat, sistemul de fazori unind vîrfurile unui sistem de fazori stelat oarecare, fiind un sistem pur.

**8.3.4.3. Caracteristica unui sistem pur de fazori.** În cazul cînd rezultanta celor trei fazori este nulă, sistemul nu are componentă homopolară; aceasta rezultă imediat din relația (8.11).

În acest caz, punctul de concurență al celor trei fazori se găsește în centrul de greutate format de vîrfurile fazorilor. Într-adevăr, din relația (8.11) rezultă

$$-\underline{V}_1 = \underline{V}_2 + \underline{V}_3.$$

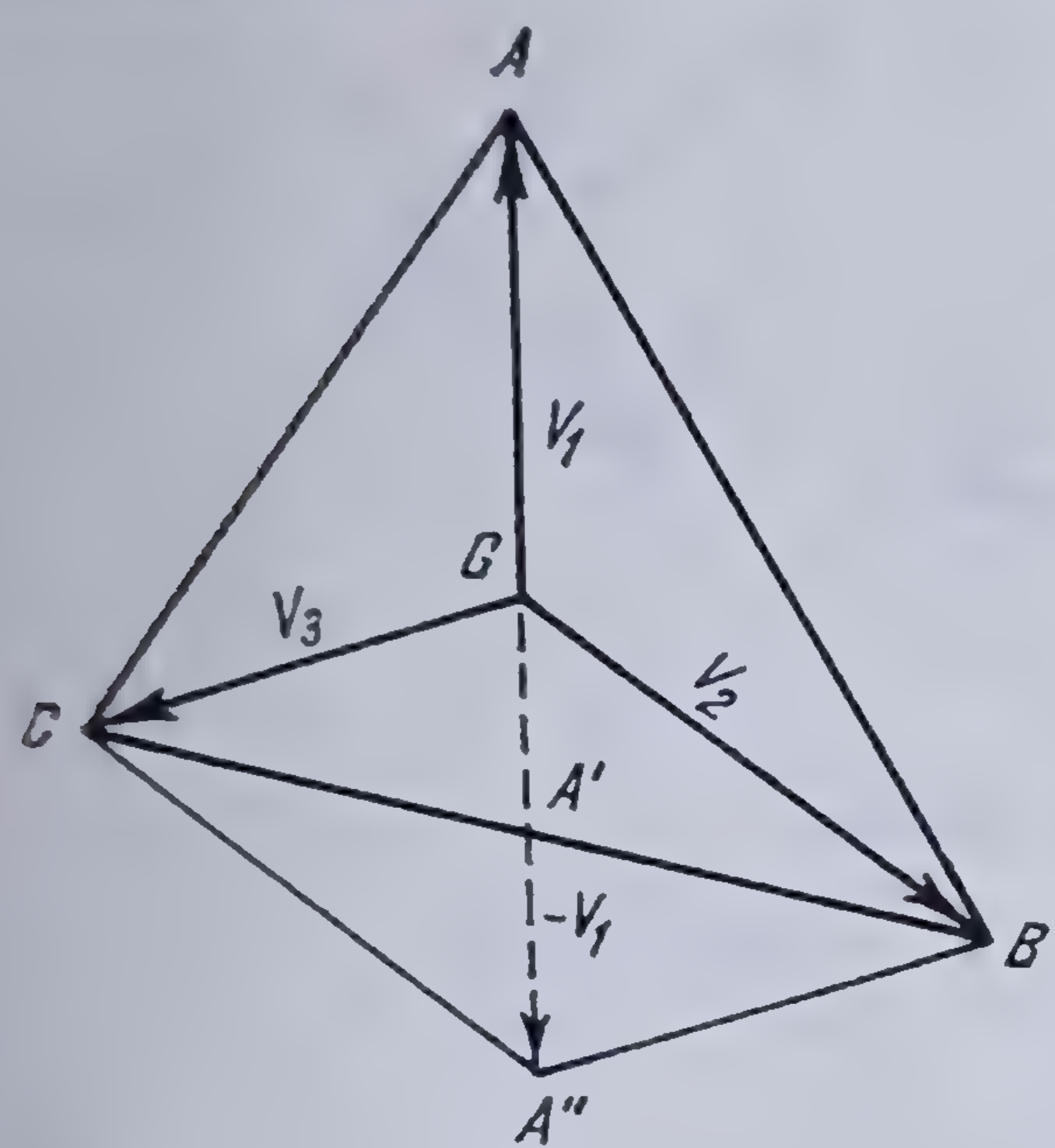


Fig. 8.13. Sistem de fazori pur.

Se construiește fazorul  $-\underline{V}_1$  cu ajutorul paralelogramului  $BGCA''$  (fig. 8.13); în acest paralelogram diagonalele  $\overline{BC}$  și  $\overline{GA}$  se intersectează în părți egale. Rezultă că  $\overline{BA'} = \overline{A'C}$  și deci  $\overline{AA'}$  este mediană în triunghiul  $ABC$ . La fel se demonstrează și pentru ceilalți fazori; rezultă deci că punctul  $G$ , punctul de concurență al acestor fazori, este centrul de greutate al triunghiului construit pe vîrfurile lor.

### 8.3.5. OPERAȚII CU SISTEME TRIFAZATE DE FAZORI

**8.3.5.1. Reguli fundamentale.** Sistemele trifazate de fazori fiind formate din fazori liberi, care pot fi deplasați oricum în plan, cu aceste sisteme se pot defini o serie de operații matematice. O operație matematică constă din formarea unei funcții a mărimilor cu care se operează.

Pentru operațiile cu sisteme trifazate de fazori se stabilesc următoarele reguli fundamentale:

**Regula I:** Orice operație matematică între două sisteme de fazori trifazați  $S_1(\underline{V})$  și  $S_2(\underline{V}')$  conduce la formarea unei funcții

$$f[S_1(\underline{V}), S_2(\underline{V}')],$$

care, la rîndul ei, formează un sistem trifazat de fazori, avînd fazorii compo-

$$\text{pe faza 1: } f(\underline{V}_1, \underline{V}'_1),$$

$$\text{pe faza 2: } f(\underline{V}_2, \underline{V}'_2),$$

$$\text{pe faza 3: } f(\underline{V}_3, \underline{V}'_3).$$



Cu alte cuvinte, operația trebuie efectuată pe fiecare fază în parte, prin combinarea fazorilor de același indice.

**Regula II:** Orice operație matematică efectuată între un sistem trifazat de fazori  $S(\underline{V})$  și un fazor simplu  $\underline{U}$  conduce la formarea unei funcții

$$f[S(\underline{V}), \underline{U}]$$

care este un sistem trifazat de fazori avînd fazorii componenți :

$$\text{pe faza 1 : } f(\underline{V}_1, \underline{U}),$$

$$\text{pe faza 2 : } f(\underline{V}_2, \underline{U}),$$

$$\text{pe faza 3 : } f(\underline{V}_3, \underline{U});$$

în acest caz fazorul monofazat se combină cu fiecare din fazorii sistemului trifazat de fazori.

Regulile de mai sus pot fi extinse la un număr oarecare de sisteme trifazate de fazori.

**8.3.5.2. Sistemul sumă sau diferență.** Fie sistemele trifazate de fazori

$$S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3) \quad \text{și} \quad S(\underline{V}') = (\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3)$$

Sistemul sumă sau diferență este sistemul trifazat ai cărui fazori sînt formați din suma geometrică a fazorilor de același indice în sistemele date.

Rezultă deci

$$S(\underline{V}) \pm S(\underline{V}') = S(\underline{V}_s) = S(\underline{V} \pm \underline{V}') = [(\underline{V}_1 \pm \underline{V}'_1), (\underline{V}_2 \pm \underline{V}'_2), (\underline{V}_3 \pm \underline{V}'_3)].$$

Definiția aceasta poate fi extinsă la oricîte sisteme.

Este ușor de văzut că dacă sistemele de fazori sînt simetrice și de același ordin, sistemul de fazori rezultat este simetric și de același ordin.

Dacă sistemele de fazori sînt simetrice dar de ordine diferite, sistemul de fazori rezultat este nesimetric. De asemenea, dacă sistemele de fazori sînt nesimetrice, sistemul de fazori rezultat este de asemenea nesimetric.

În cazul unui sistem de fazori nesimetric, componenta simetrică de un ordin oarecare a sistemului sumă este egal cu suma componentelor simetrice de același ordin a sistemelor date.

Fie, de exemplu, sistemele de fazori considerate mai sus. Descompunînd atît sistemele date cît și sistemul sumă în componente simetrice, se obțin pentru componenta directă

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3); \quad \underline{V}'_d = \frac{1}{3} (\underline{V}'_1 + a\underline{V}'_2 + a^2\underline{V}'_3);$$

$$\underline{V}_{sd} = \frac{1}{3} [(\underline{V}_1 + \underline{V}'_1) + a(\underline{V}_2 + \underline{V}'_2) + a^2(\underline{V}_3 + \underline{V}'_3)].$$

Se vede imediat că ultima expresie este suma primelor două.

La fel se demonstrează această proprietate și pentru componenta inversă și cea homopolară.



8.3.5.3. Sistemul produs simbolic. Sistemul *produs simbolic* este sistemul ai cărui fazori sînt formați pe fiecare fază din produsul a celor doi fazori de același indice ai sistemelor de fazori date.

Fie

$$\begin{aligned} S(\underline{V}) &= (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3), \\ S(\underline{V}') &= (\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3), \end{aligned} \quad (8.18)$$

două sisteme trifazate de fazori. Conform definiției de mai sus, sistemul produs simbolic va fi sistemul

$$S(\underline{V} \cdot \underline{V}') = S(\underline{V}) \cdot S(\underline{V}') = [(\underline{V}_1 \cdot \underline{V}'_1), (\underline{V}_2 \cdot \underline{V}'_2), (\underline{V}_3 \cdot \underline{V}'_3)].$$

Este evident, că dacă cele două sisteme al căror produs simbolic se face nu sînt simetrice și sistemul produs este un sistem nesimetric.

Dacă cele două sisteme sînt simetrice, sistemul produs este și el simetric iar ordinul său este egal cu suma algebrică a ordinelor celor două sisteme simetrice.

Astfel, în cazul componentelor simetrice, se obține :

deînmulțitul		înmulțitorul		produsul	
direct	(1)	direct	(1)	invers	(2)
invers	(2)	invers	(2)	direct	$(2 + 2 = 4 = 3 + 1)$
homopolar	(0)	homopolar	(0)	homopolar	$(0 + 0 = 0)$
direct	(1)	invers	(2)	homopolar	$(1 + 2 = 3)$
invers	(2)	direct	(1)	homopolar	$(2 + 1 = 3)$
direct	(1)	homopolar	(0)	direct	$(1 + 0)$
invers	(2)	homopolar	(0)	invers	$(2 + 0)$

Aceste rezultate se exprimă simbolic prin relațiile

$$S_d(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}') = S_i(\underline{V} \underline{V}'),$$

$$S_i(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') = S_d(\underline{V} \underline{V}'),$$

$$S_h(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') = S_h(\underline{V} \underline{V}')$$

etc.

În cazul cînd cele două sisteme de fazori  $S(\underline{V})$  și  $S(\underline{V}')$  nu sînt simetrice și dacă  $S_d(\underline{V})$ ,  $S_i(\underline{V})$ ,  $S_h(\underline{V})$  sînt coordonatele simetrice ale primului sistem, iar  $S_d(\underline{V}')$ ,  $S_i(\underline{V}')$  și  $S_h(\underline{V}')$  coordonatele simetrice ale celui de-al doilea sistem, atunci coordonatele simetrice ale sistemului produs simbolic vor fi, ținînd seama de cele arătate mai sus

$$S_h(\underline{V} \underline{V}') = S_h(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') + S_d(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') + S_i(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}')$$

$$S_d(\underline{V} \underline{V}') = S_d(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') + S_i(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') + S_h(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}') \quad (8.19)$$

$$S_i(\underline{V} \underline{V}') = S_i(\underline{V}) \cdot S_h(\underline{V}') + S_h(\underline{V}) \cdot S_i(\underline{V}') + S_d(\underline{V}) \cdot S_d(\underline{V}')$$



Într-adevăr, fie să demonstrăm prima relație de mai sus. Să considerăm sistemele (8.18) și sistemele corespunzătoare de coordonate simetrice

$$\begin{aligned} S_h(\underline{V}) &= (\underline{V}_h, \underline{V}_h, \underline{V}_h), & S_h(\underline{V}') &= (\underline{V}'_h, \underline{V}'_h, \underline{V}'_h); \\ S_d(\underline{V}) &= (\underline{V}_d, a^2 \underline{V}_d, a \underline{V}_d); & \text{și } S_d(\underline{V}') &= (\underline{V}'_d, a^2 \underline{V}'_d, a \underline{V}'_d); \\ S_i(\underline{V}) &= (\underline{V}_i, a \underline{V}_i, a^2 \underline{V}_i); & S_i(\underline{V}') &= (\underline{V}'_i, a \underline{V}'_i, a^2 \underline{V}'_i). \end{aligned}$$

Aplicînd regula de definiție a produsului, se obține

$$\begin{aligned} S_h(\underline{V}) S_h(\underline{V}') &= [(\underline{V}_h \underline{V}'_h), (\underline{V}_h \underline{V}'_h), (\underline{V}_h \underline{V}'_h)]; \\ S_d(\underline{V}) S_i(\underline{V}') &= [(\underline{V}_d \underline{V}'_i), (a^2 \underline{V}_d a \underline{V}'_i), (a \underline{V}_d a^2 \underline{V}'_i)] = [(\underline{V}_d \underline{V}'_i), (\underline{V}_d \underline{V}'_i), (\underline{V}_d \underline{V}'_i)]; \\ S_i(\underline{V}) S_d(\underline{V}') &= [(\underline{V}_i \underline{V}'_d), (a \underline{V}_i a^2 \underline{V}'_d), (a^2 \underline{V}_i a \underline{V}'_d)] = [(\underline{V}_i \underline{V}'_d), (\underline{V}_i \underline{V}'_d), (\underline{V}_i \underline{V}'_d)]. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} S_h(\underline{V}) S_h(\underline{V}') + S_d(\underline{V}) S_i(\underline{V}') + S_i(\underline{V}) S_d(\underline{V}') &= [(\underline{V}_h \underline{V}'_h + \underline{V}_d \underline{V}'_i + \underline{V}_i \underline{V}'_d), (\underline{V}_h \underline{V}'_h + \\ &+ \underline{V}_d \underline{V}'_i + \underline{V}_i \underline{V}'_d), (\underline{V}_h \underline{V}'_h + \underline{V}_d \underline{V}'_i + \underline{V}_i \underline{V}'_d)] = S_h(\underline{V} \underline{V}') \end{aligned}$$

căci,

$$\begin{aligned} \underline{V}_h \underline{V}'_h &= \frac{1}{9} (\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) (\underline{V}'_1 + \underline{V}'_2 + \underline{V}'_3) = \frac{1}{9} [(\underline{V}_1 \underline{V}'_1 + \underline{V}_2 \underline{V}'_2 + \underline{V}_3 \underline{V}'_3 + \\ &+ \underline{V}_1 (\underline{V}'_2 + \underline{V}'_3) + \underline{V}_2 (\underline{V}'_1 + \underline{V}'_3) + \underline{V}_3 (\underline{V}'_1 + \underline{V}'_2)] \\ \underline{V}_d \underline{V}'_i &= \frac{1}{9} (\underline{V}_1 + a \underline{V}_2 + a^2 \underline{V}_3) (\underline{V}'_1 + a^2 \underline{V}'_2 + a \underline{V}'_3) = \frac{1}{9} [\underline{V}_1 \underline{V}'_1 + \underline{V}_2 \underline{V}'_2 + \underline{V}_3 \underline{V}'_3 + \\ &+ \underline{V}_1 (a^2 \underline{V}'_2 + a \underline{V}'_3) + \underline{V}_2 (a \underline{V}'_1 + a^2 \underline{V}'_3) + \underline{V}_3 (a^2 \underline{V}'_1 + a \underline{V}'_2)] \\ \underline{V}_i \underline{V}'_d &= \frac{1}{9} (\underline{V}_1 + a^2 \underline{V}_2 + a \underline{V}_3) (\underline{V}'_1 + a \underline{V}'_2 + a^2 \underline{V}'_3) = \frac{1}{9} [\underline{V}_1 \underline{V}'_1 + \underline{V}_2 \underline{V}'_2 + \underline{V}_3 \underline{V}'_3 + \\ &+ \underline{V}_1 (a \underline{V}'_2 + a^2 \underline{V}'_3) + \underline{V}_2 (a^2 \underline{V}'_1 + a \underline{V}'_3) + \underline{V}_3 (a \underline{V}'_1 + a^2 \underline{V}'_2)] \end{aligned}$$

și deci

$$\underline{V}_h \underline{V}'_h + \underline{V}_d \underline{V}'_i + \underline{V}_i \underline{V}'_d = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 \underline{V}'_1 + \underline{V}_2 \underline{V}'_2 + \underline{V}_3 \underline{V}'_3) = (\underline{V} \underline{V}')_h$$

În același mod se demonstrează și celelalte două relații din (8.19).



Rezultă de asemenea, că între componentele simetrice ale sistemului există relațiile :

$$\left. \begin{aligned} (\underline{V} \underline{V}')_h &= \underline{V}_h \underline{V}'_h + \underline{V}_d \underline{V}'_i + \underline{V}_i \underline{V}'_d, \\ (\underline{V} \underline{V}')_d &= \underline{V}_d \underline{V}'_h + \underline{V}_i \underline{V}'_i + \underline{V}_h \underline{V}'_d, \\ (\underline{V} \underline{V}')_i &= \underline{V}_i \underline{V}'_h + \underline{V}_h \underline{V}'_i + \underline{V}_d \underline{V}'_d. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

8.3.5.4. **Sistemul cît simbolic sau sistemul raport.** Sistemul *cît simbolic* este sistemul ai cărui fazori sînt cîtul fazorilor de același indice, ai sistemelor de fazori date.

Fie

$$S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3); \quad S(\underline{V}') = (\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3),$$

cele două sisteme date. Conform definiției rezultă

$$\frac{S(\underline{V})}{S(\underline{V}')} = S\left(\frac{\underline{V}}{\underline{V}'}\right) = \left[\left(\frac{\underline{V}_1}{\underline{V}'_1}\right), \left(\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}'_2}\right), \left(\frac{\underline{V}_3}{\underline{V}'_3}\right)\right]. \quad (8.21)$$

Ordinul sistemului cît este egal cu diferența dintre ordinele celor două sisteme al căror cît se face.

Cazul cel mai important este acela în care cele două sisteme sînt de același ordin; în acest caz sistemul cît este homopolar.

Pentru a stabili relația care există între componentele simetrice ale sistemelor de fazori date și ale sistemului cît, se pornește de la relația (8.21) care se poate scrie

$$S(\underline{V}) = S(\underline{V}') S\left(\frac{\underline{V}}{\underline{V}'}\right)$$

sau

$$S(\underline{V}) = S(\underline{V}') S(\underline{V}'') \quad (8.22)$$

în care s-a pus

$$\underline{V}'' = (\underline{V}/\underline{V}').$$

Relația (8.22) arată că o împărțire simbolică se poate înlocui printr-o înmulțire simbolică, alegînd judicios sistemele de fazori.

Fie  $\underline{V}$  și  $\underline{V}'$  fazorii dați și  $\underline{V}''$  fazorul cît căutat; ținînd seama de relațiile (8.20) și (8.22) se poate scrie

$$\underline{V}_h = \underline{V}_d'' \underline{V}'_i + \underline{V}'_i \underline{V}_d + \underline{V}_h'' \underline{V}_h;$$

$$\underline{V}_d = \underline{V}_d'' \underline{V}'_h + \underline{V}'_i \underline{V}_i + \underline{V}_h'' \underline{V}_d;$$

$$\underline{V}_i = \underline{V}_d'' \underline{V}'_d + \underline{V}'_i \underline{V}_h + \underline{V}_h'' \underline{V}_i.$$



Rezolvând acest sistem în raport cu  $\underline{V}_d''$ ,  $\underline{V}_i''$  și  $\underline{V}_h''$  se obține

$$\underline{V}_d'' = \frac{\underline{\Delta}_d}{\underline{\Delta}}, \quad \underline{V}_i'' = \frac{\underline{\Delta}_i}{\underline{\Delta}}, \quad \underline{V}_h'' = \frac{\underline{\Delta}_h}{\underline{\Delta}},$$

în care

$$\underline{\Delta} = \begin{vmatrix} \underline{V}_i' & \underline{V}_d' & \underline{V}_h' \\ \underline{V}_h' & \underline{V}_i' & \underline{V}_d' \\ \underline{V}_d' & \underline{V}_h' & \underline{V}_i' \end{vmatrix}; \quad \underline{\Delta}_i = \begin{vmatrix} \underline{V}_i' & \underline{V}_h' & \underline{V}_h' \\ \underline{V}_h' & \underline{V}_d' & \underline{V}_d' \\ \underline{V}_d' & \underline{V}_i' & \underline{V}_i' \end{vmatrix};$$

$$\underline{\Delta}_d = \begin{vmatrix} \underline{V}_h' & \underline{V}_d' & \underline{V}_h' \\ \underline{V}_d' & \underline{V}_i' & \underline{V}_d' \\ \underline{V}_i' & \underline{V}_h' & \underline{V}_i' \end{vmatrix}; \quad \underline{\Delta}_h = \begin{vmatrix} \underline{V}_i' & \underline{V}_d' & \underline{V}_h' \\ \underline{V}_h' & \underline{V}_i' & \underline{V}_d' \\ \underline{V}_d' & \underline{V}_h' & \underline{V}_i' \end{vmatrix}.$$

**8.3.5.5. Sistem de fazori conjugați.** Dacă se descompun două sisteme de fazori nesimetrice conjugate în componentele lor simetrice, fiecărui sistem simetric din primul sistem îi corespunde un sistem simetric conjugat din al doilea sistem. Dacă ordinul primului sistem simetric este  $m$ , ordinul sistemului conjugat este  $-m$ . Această din urmă relație rezultă din aceea, că la sistemele conjugate, măsura unghiurilor se face în sens invers.

În cazul sistemelor trifazate, sistemul conjugat al sistemului direct este sistemul invers și reciproc.

#### 8.3.6. DETERMINAREA COMPONENTELOR SIMETRICE ALE UNUI SISTEM TRIFAZAT DE FAZORI DAT

**8.3.6.1. Metoda analitică.** Pentru calculul analitic se folosesc relațiile (8.11), (8.12) și (8.13), ținându-se seama că

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \angle \frac{2\pi}{3}; \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \angle -\frac{2\pi}{3}.$$

Fie, de exemplu, sistemul trifazat de curenți

$$\underline{I}_1 = 8 - j6 \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = -13 - j10 \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = 2 + j10 \text{ A}.$$

Componentele simetrice ale acestui sistem sînt

$$\underline{I}_a = \frac{1}{3}[(8 - j6) + (-13 - j10) + (2 + j10)] = -1 - j2 \text{ A};$$

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3}\left[(8 - j6) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-13 - j10) + \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + j10)\right] =$$

$$= 10,27 - j6,33 \text{ A};$$

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3}\left[(8 - j6) + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-13 - j10) + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + j10)\right] =$$

$$= -1,27 + j2,33 \text{ A}.$$



Ca verificare, se calculează fazorii inițiali cu ajutorul ecuațiilor (8.10). Astfel, pentru primul fazor, se găsește

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = (-1 - j2) + (10,27 - j6,33) + (-1,27 + j2,33) = 8 - j6A.$$

8.3.6.2. Metode grafice. 1. *Metoda directă*. Determinarea grafică se face construindu-se aceleași relații (fig. 8.14). Astfel, pentru a se găsi componenta homopolară, se face rezultanta celor trei fazori și se ia  $1/3$  din ea. Se găsește astfel componenta simetrică respectivă, în direcție și mărime.

Pentru a găsi componenta directă, se construiește la vârful fazorului  $\underline{V}_1$ , fazorul  $\underline{V}_2$  rotit înainte cu  $120^\circ$ ; la vârful acestui fazor, astfel rotit, se constru-

iește fazorul  $\underline{V}_3$  rotit în urmă cu  $120^\circ$ . Unind originea cu vârful acestui fazor, astfel rotit, se obține fazorul  $\underline{V}_d$  în direcție; pentru a-i obține și mărimea, trebuie împărțit prin 3.

Pentru a se obține componenta inversă, se construiește la vârful fazorului  $\underline{V}_1$  fazorul  $\underline{V}_2$  rotit în urmă cu  $120^\circ$ ; la vârful acestui fazor, astfel rotit, se construiește fazorul  $\underline{V}_3$  rotit înainte cu  $120^\circ$ . Unind originea cu vârful acestui fazor, astfel rotit, se obține fazorul  $\underline{V}_i$  în direcție; pentru a-i obține și mărimea, trebuie împărțit prin 3.

2. *Metoda triunghiurilor echilaterale*. Se unesc vîrfurile celor trei fazori, obținîndu-se triunghiul  $ABC$ , căruia i se construiește centrul de greutate  $G$  (fig. 8.15). Pe latura  $CB$  se construiește în urmă triunghiul echilateral  $BB''C$  căruia i se determină de asemenea centrul de greutate  $O_d$ , și înainte triunghiul echilateral  $BC''C$ , căruia i se determină centrul de greutate  $O_i$ . Unind  $O_d$  cu  $G$ ,  $O_i$  cu  $G$  și  $O$  cu  $G$  se obține:

$$\overline{O_d G} = \underline{V}_d; \quad \overline{O_i G} = \underline{V}_i; \\ \overline{OG} = \underline{V}_h.$$

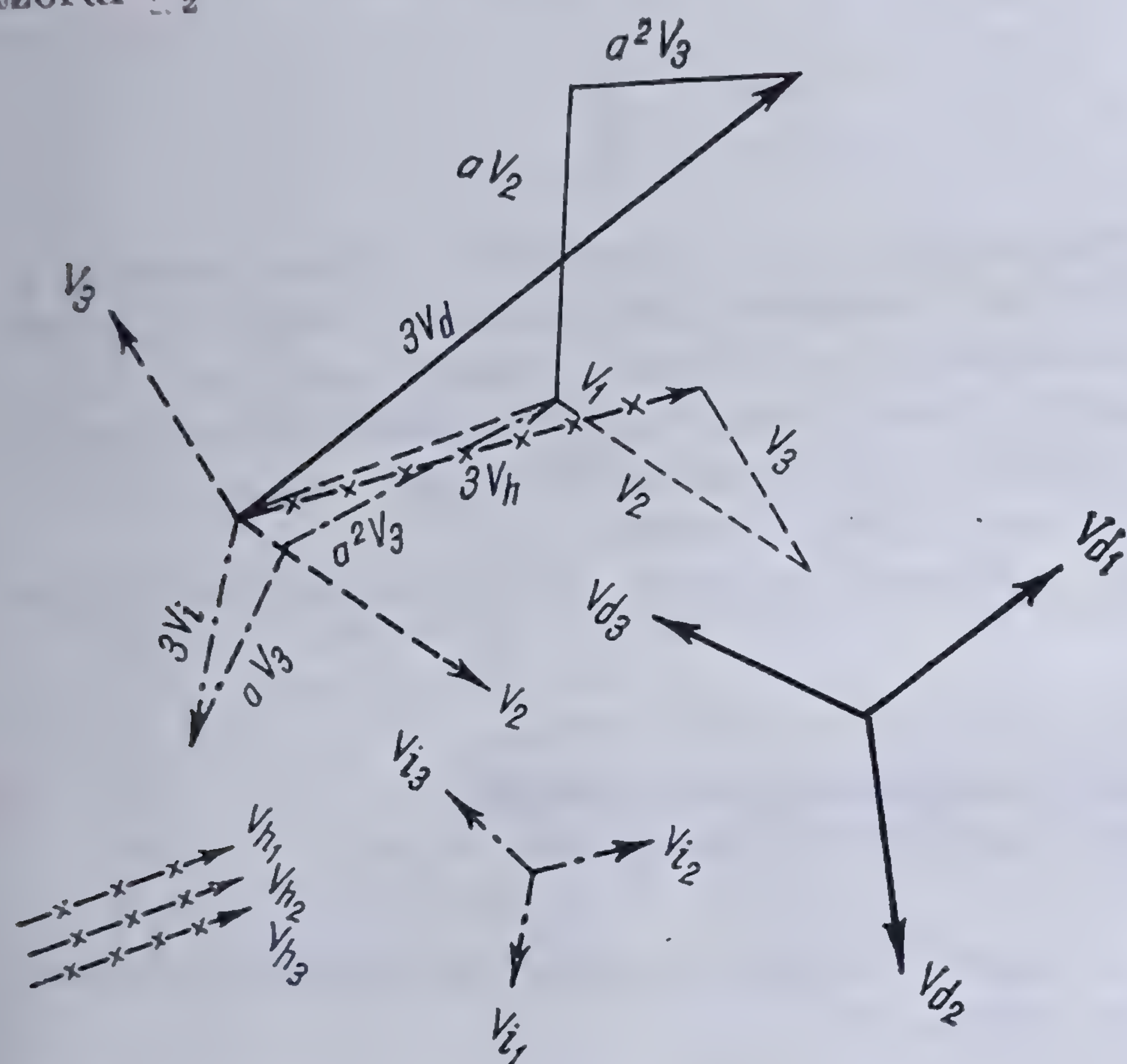


Fig. 8.14. Metoda directă de găsire a componentelor simetrice.

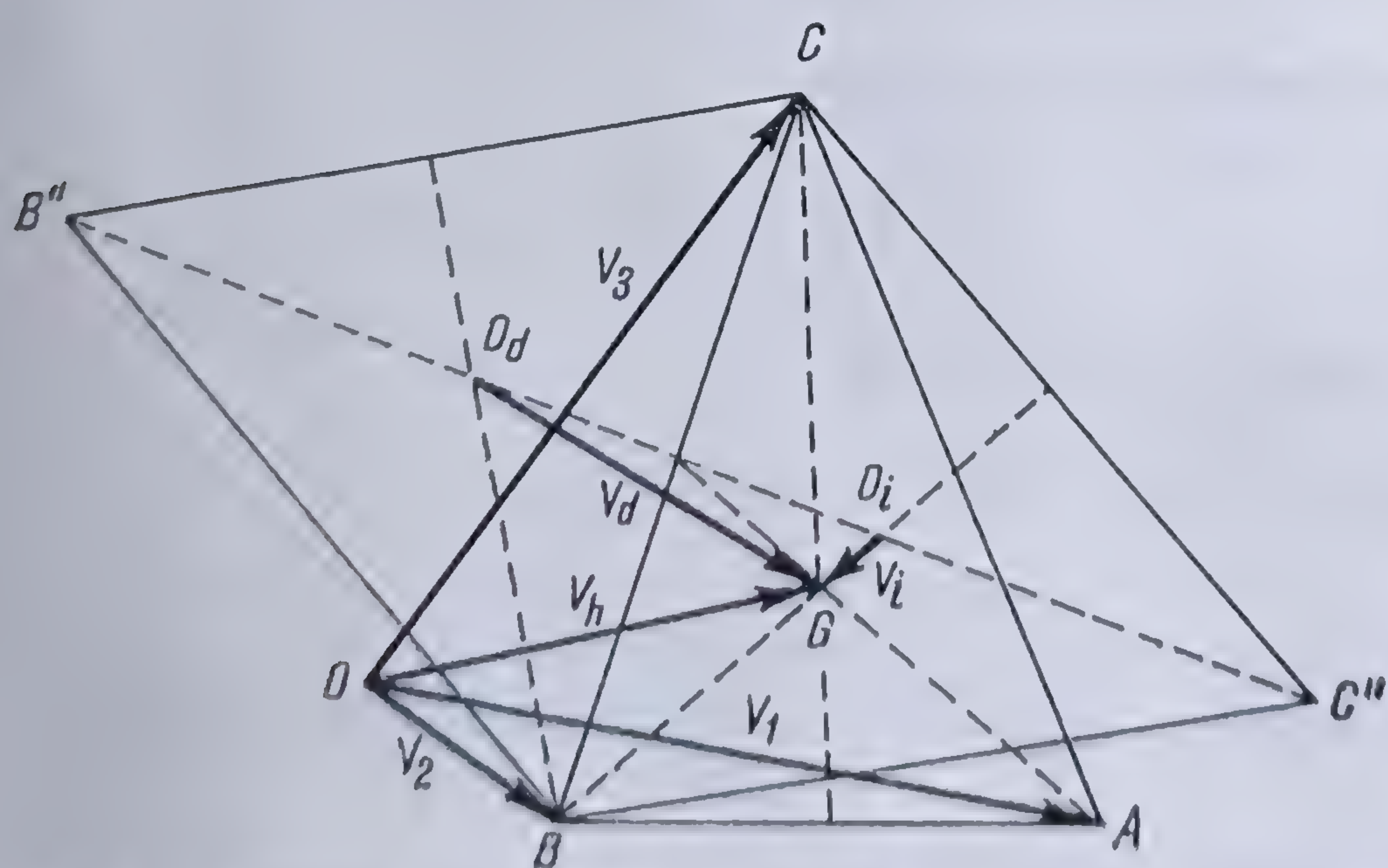


Fig. 8.15. Metoda triunghiurilor echilaterale pentru determinarea componentelor simetrice.

Justificarea acestei construcții este următoarea. Fie

$$S_0(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$$



sistemul de faze dat, cu originea în punctul  $O$  și cu vîrfurile în punctele  $A, B, C$ .  
Fie un al doilea sistem de faze

$$S_c(\underline{V}') = (\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3),$$

avînd vîrfurile comune cu ale precedentului, însă cu originea în vîrfurile  $C$  al fazorului  $\underline{V}_3$  (fig. 8.16). În virtutea teoremei demonstrate \*

$$\underline{V}_a = \frac{1}{3} (\overline{OA} + a \overline{OB} + a^2 \overline{OC}) = \frac{1}{3} (\overline{CA} + a \overline{CB}),$$

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3} (\overline{OA} + a^2 \overline{OB} + a \overline{OC}) = \frac{1}{3} (\overline{CA} + a^2 \overline{CB}).$$

Pentru a determina componentele simetrice căutate, se construiesc aceste relații. Astfel, pentru a se determina fazorul  $\underline{V}_a$ , se așază fazorul  $\overline{CB}$  în vîrfurile fazorului  $\overline{CA}$  și se rotește înainte cu  $120^\circ$ . Unind  $C$  cu  $B'_1$  se obține fazorul  $3 \underline{V}_a$ .

Se poate proceda și astfel: se rotește fazorul  $\overline{CB}$  înainte cu  $120^\circ$  în jurul vîrfurilor  $C$ , apoi se construiesc în punctul  $B'$  astfel obținut, fazorul  $\overline{CA}$ . Suma acestor doi faze este tot  $3 \underline{V}_a$ .

Luînd simetricul lui  $B'$  față de vîrfurile  $C$ , se obține punctul  $B''$ . Punctele  $C, B''$  și  $B$  sînt vîrfurile unui triunghi echilateral, ceea ce se poate arăta ușor. Fie  $O_a$  centrul de greutate al acestui triunghi. Dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  format de vîrfurile vectorilor dați, atunci

$$\overline{O_a G} = \underline{V}_a$$

în direcție și mărime. Într-adevăr,  $M$  fiind mijlocul laturii  $CB$ , triunghiurile  $AMB''$  și  $GMO_a$  sînt asemenea, avînd unghiurile la vîrf comune și laturile adiacente proporționale prin construcție (construcția centrelor de greutate). Rezultă

$$\frac{\overline{MO_a}}{\overline{MB''}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{O_a G}}{\overline{B''A}};$$

cum și

$$\overline{MO_a} = \frac{1}{3} \overline{MB''} \quad \text{și} \quad \overline{MG} = \frac{1}{3} \overline{MA}.$$

\* Vezi 8.3.4.1.

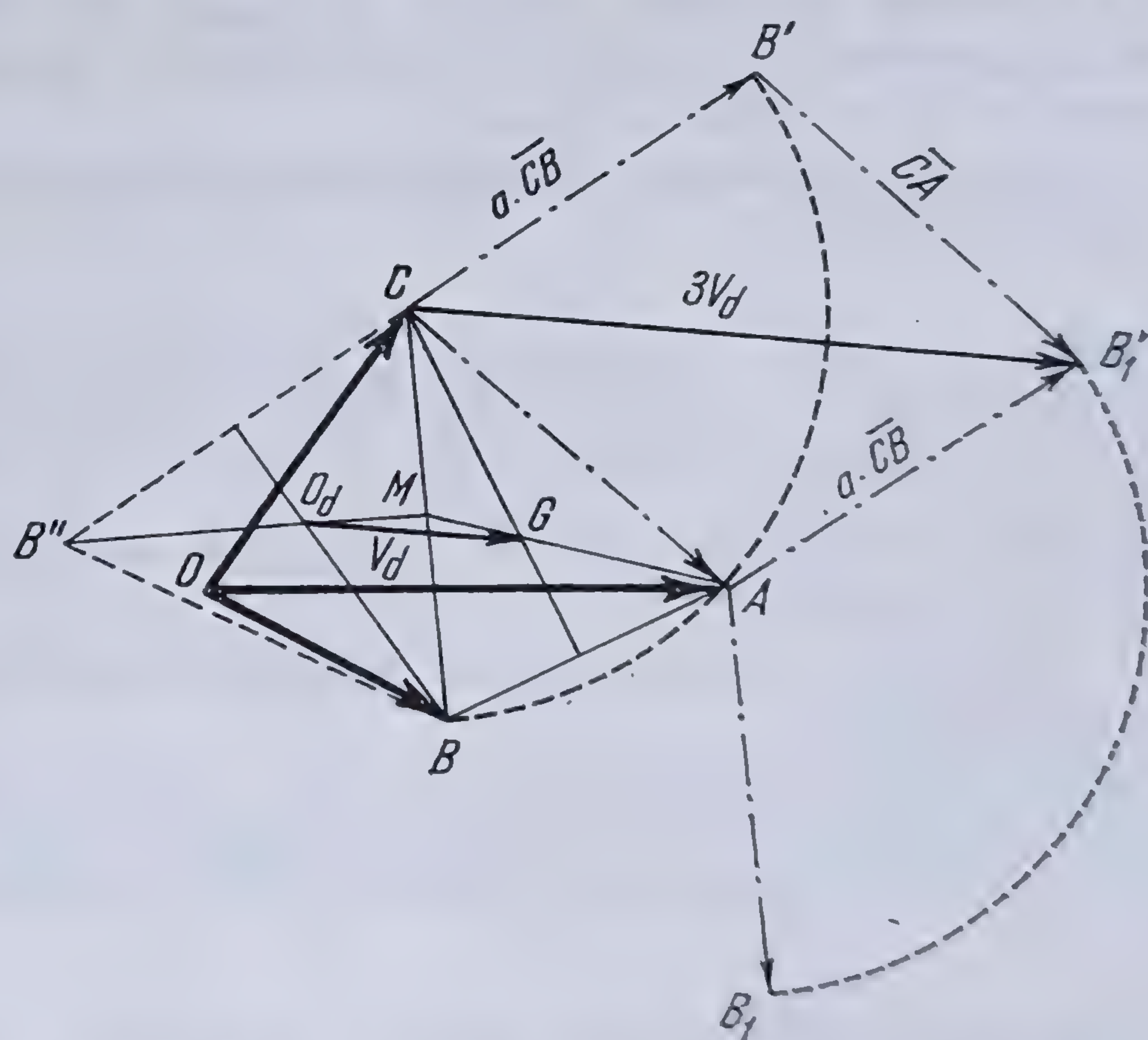


Fig. 8.16. Justificarea metodei triunghiurilor echilaterale.



rezultă

$$\overline{O_d G} = \frac{1}{3} \overline{B'' A} = \frac{1}{3} \overline{C B_1'} = \underline{V}_d$$

deoarece  $\overline{B'' A}$ ,  $\overline{C B_1'}$  sînt egale și paralele, ca segmente cuprinse între două segmente paralele și egale.

La fel se demonstrează, că

$$\overline{O_i G} = \underline{V}_i.$$

Componenta homopolară este dată de relația

$$\overline{OG} = \underline{V}_h,$$

întrucît sistemul de fazori  $(G, ABC)$  este un sistem pur.

**OBSERVAȚIE:** Construcția poate fi făcută luîndu-se ca origine, oricare din vîrfurile sistemului trifazat de fazori dat. Trebuie observat numai, sensul de construire a triunghiurilor echilaterale. Următoarea regulă dă posibilitatea construirii corecte a figurii:

a) Dacă se ia ca origine vîrfurile  $C$ , atunci expresia componentei directe a sistemului este

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3} (\overline{CA} + a \overline{CB})$$

din care lipsește termenul  $a^2$ : triunghiul echilateral se construiește pe vectorul  $\overline{CA}$  și în urmă.

b) Dacă se ia ca origine vîrfurile  $B$ , atunci expresia componentei directe a sistemului este

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3} (\overline{BA} + a^2 \overline{BC}),$$

din care lipsește termenul  $a$ : triunghiul echilateral se construiește pe vectorul  $\overline{BC}$  și înainte.

c) Dacă se ia ca origine vîrfurile  $A$ , atunci expresia componentei directe a sistemului este

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3} (a \overline{AB} + a^2 \overline{AC}) = \frac{1}{3} a (\overline{AB} + a \overline{AC}),$$

din care lipsește, la expresia din paranteză, termenul  $a^2$ : triunghiul echilateral se construiește pe vectorul  $\overline{AC}$  și în urmă, apoi întreaga figură se rotește cu  $a$ .

Se recomandă a se folosi în special primele două construcții.

3. *Metodă pentru sistemele de fazori în triunghi.* În cazul sistemelor de fazori în triunghi, componentele simetrice, directă și inversă, se determină simplu, printr-o construcție grafică, aplicîndu-se relațiile (8.12) și (8.13). Fie



triunghiul  $ABC$  al sistemului de tensiuni  $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$  (fig. 8.17). Pentru a construi componenta directă, se rotește fazorul  $\underline{U}_2$  în jurul vârfului  $C$  cu  $120^\circ$  înainte și fazorul  $\underline{U}_3$  în jurul vârfului  $B$  cu  $120^\circ$  în urmă. Unind extremitățile libere ale fazorilor  $\underline{U}_2$  și  $\underline{U}_3$  astfel roțiți se obține în direcție fazorul  $3\underline{U}_d$ , de unde se deduce componenta directă  $\underline{U}_d$  căutată.

În mod analog se găsește și componenta inversă  $\underline{U}_i$ , rotindu-se fazorii respectiv în sens invers.

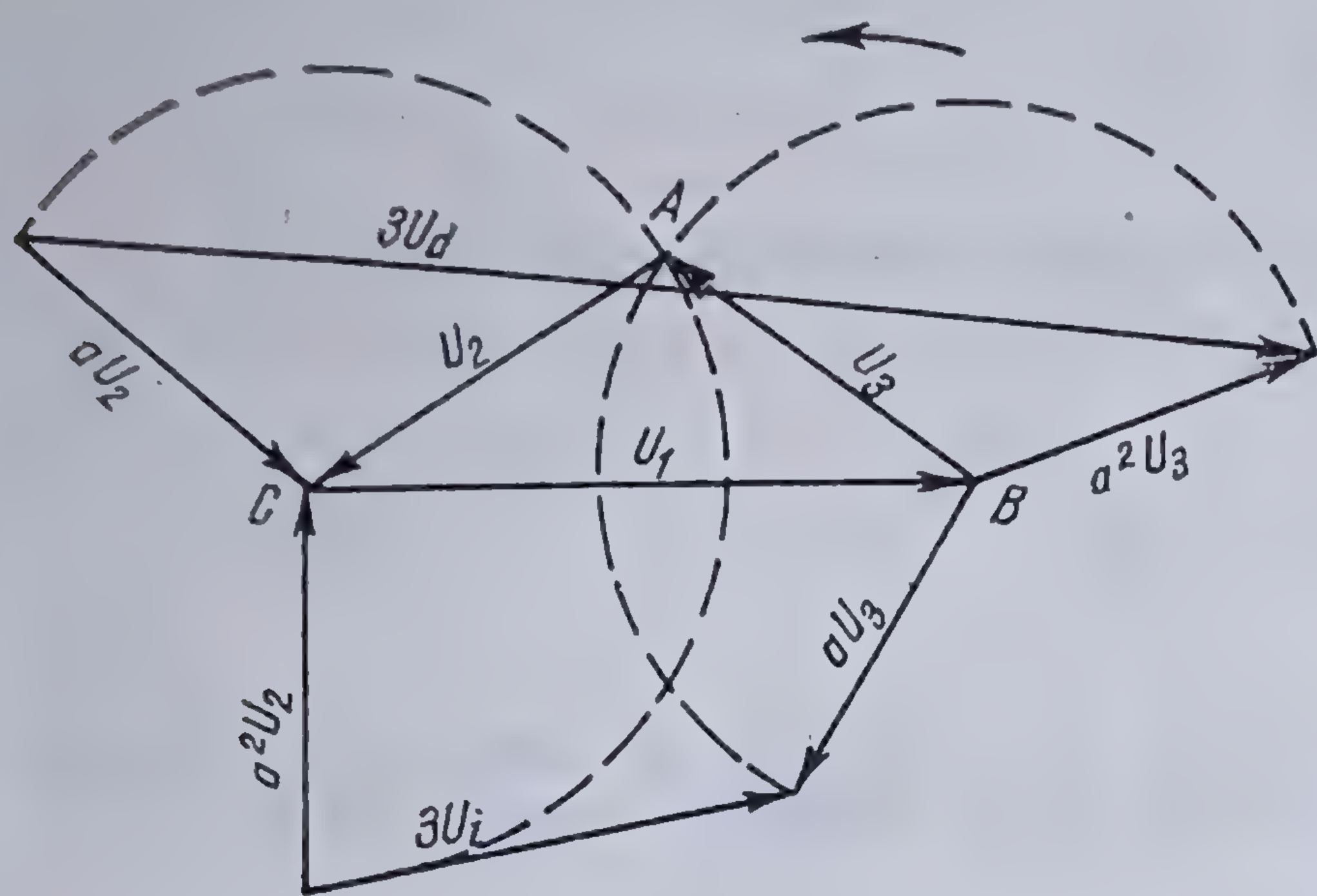


Fig. 8.17. Metoda de determinare a componentelor simetrice pentru sisteme în triunghi.

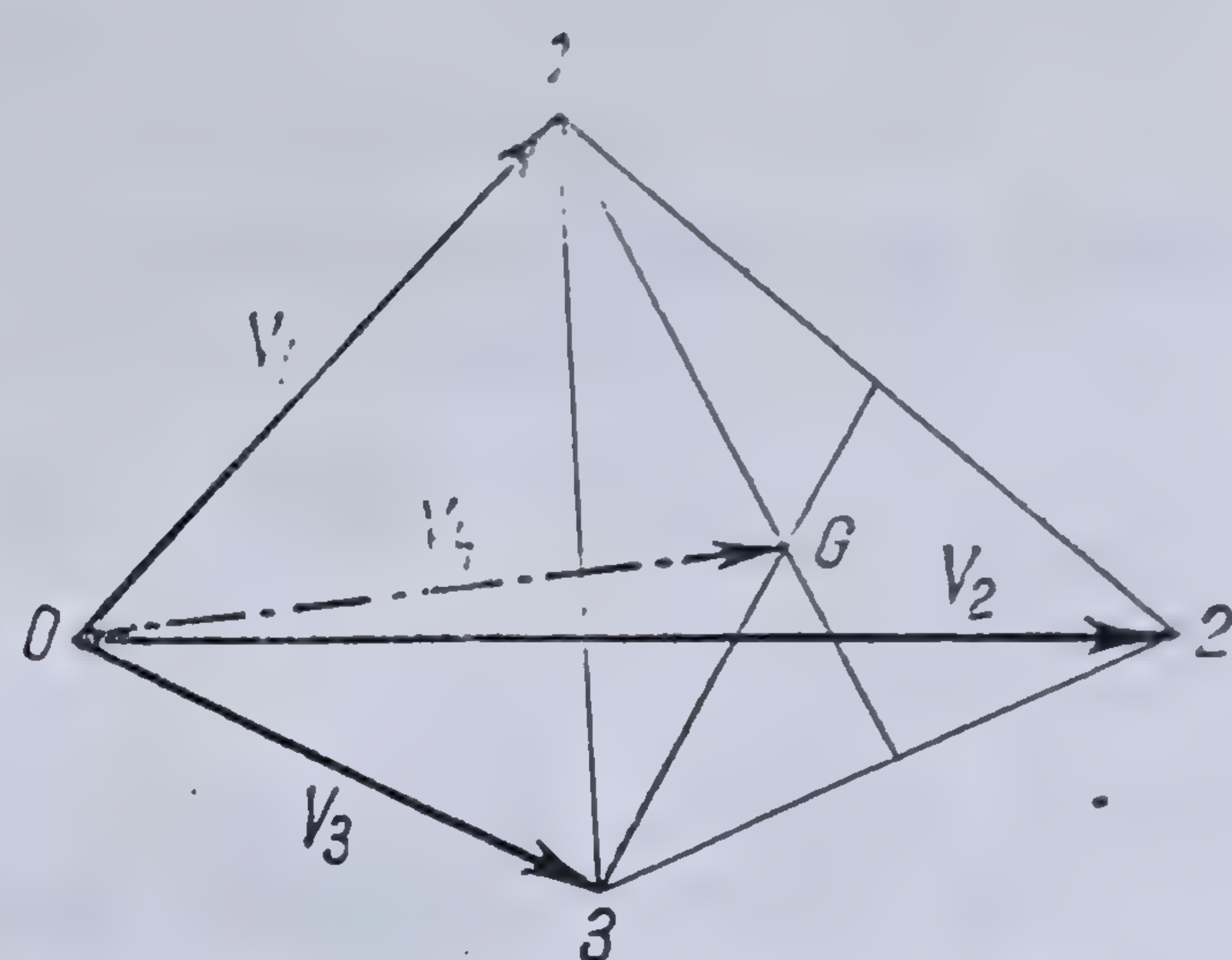


Fig. 8.18. Determinarea componentei homopolare.

4. *Metodă pentru construirea componentei homopolare.* Utilizând proprietatea sistemelor de fazoni cu aceleași vârfuri și origini diferite, rezultă o metodă de determinare a componentei homopolare a unui sistem oarecare de fazoni. Fie sistemul de fazoni (fig. 8.18)

$$S(\underline{V}) = (\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3).$$

Se construiește triunghiul format din vârfurile fazorilor acestui sistem. Fie  $G$  centrul de greutate al acestui triunghi; el este în același timp originea unui sistem pur,  $S(\underline{V}')$ , având aceleași vârfuri comune cu ale sistemului  $S(\underline{V})$ . Din cele ce preced rezultă

$$\underline{V}_h = OG + \underline{V}'_h$$

Dar sistemul  $S(\underline{V}')$  fiind pur,  $\underline{V}'_h = 0$  și deci,

$$\underline{V}_h = \overline{OG}.$$

Metoda este deci următoarea: Se construiește centrul de greutate al triunghiului format de vârfurile fazorilor sistemului dat. Componenta homopolară este dată în direcție și în mărime de vectorul  $\overline{OG}$ .

**OBSERVAȚIE:** Există și alte metode grafice de descompunere a unui sistem de vectori în componentele sale simetrice; aceste metode se bazează fie direct pe relațiile de definiție ale componentelor simetrice, fie pe unele proprietăți ale sistemelor trifazate.



### 8.3.7. GRADUL DE DEZECHILIBRARE AL UNUI SISTEM TRIFAZAT DE FAZORI

Gradul de dezechilibrare al unui sistem de fazori se definește cu ajutorul raportului dintre diversele componente simetrice ale sistemului.  
Se definește *gradul de disimetrie* al unui sistem de fazori, raportul

$$\varepsilon_i = \frac{V_i}{V_d}$$

dintre modulul componentei inverse și modulul componentei directe.  
Se definește *gradul de asimetrie* al unui sistem de fazori, raportul

$$\varepsilon_h = \frac{V_h}{V_d}$$

dintre modulul componentei homopolare și modulul componentei directe.  
În practică, un sistem poate fi socotit încă simetric, atunci când

$$\varepsilon_i \leq 5 \% \quad \text{și} \quad \varepsilon_h \leq 5 \%$$

### 8.3.8. MĂSURAREA COMPONENTELOR SIMETRICE

8.3.8.1 Măsurarea componentei homopolare de curent și de tensiune.  
Componenta homopolară a unui sistem trifazat oarecare este dată de relația (8.11)

$$\underline{V}_h = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3).$$

Deci, pentru a măsura componenta homopolară de curent sau de tensiune a unui sistem trifazat oarecare, trebuie făcută suma acestor curenți sau tensiuni. Aceasta se poate face prin mai multe metode :

a) Legînd în paralel bobinajele secundare a trei transformatoare de curent (fig. 8.19) se obține suma celor trei curenți, deci triplul componentei homopolare de curent.

b) De asemenea, se poate obține această componentă alimentînd direct (fig. 8.20, a), sau prin intermediul unor transformatoare de măsură (fig. 8.20, b), un aparat de inducție.

c) În cazul unui transformator sau al unui alternator cu conexiunea în stea, se poate măsura componenta homopolară montînd un ampermetru direct (fig. 8.21, a), sau prin intermediul unui transformator (fig. 8.21, b), între neutrul mașinii și pămînt.

d) Pentru măsurarea componentei homopolare de tensiune se utilizează montaje constituite pe aceleași principii (fig. 8.22, a, b, c).

Aparatajul necesar pentru măsurarea componentelor homopolare de curent și de tensiune este format din transformatoare de măsură, de curent sau de tensiune și din ampermetre sau voltmetre de curent alternativ etalonate direct în mărimea de măsurat.



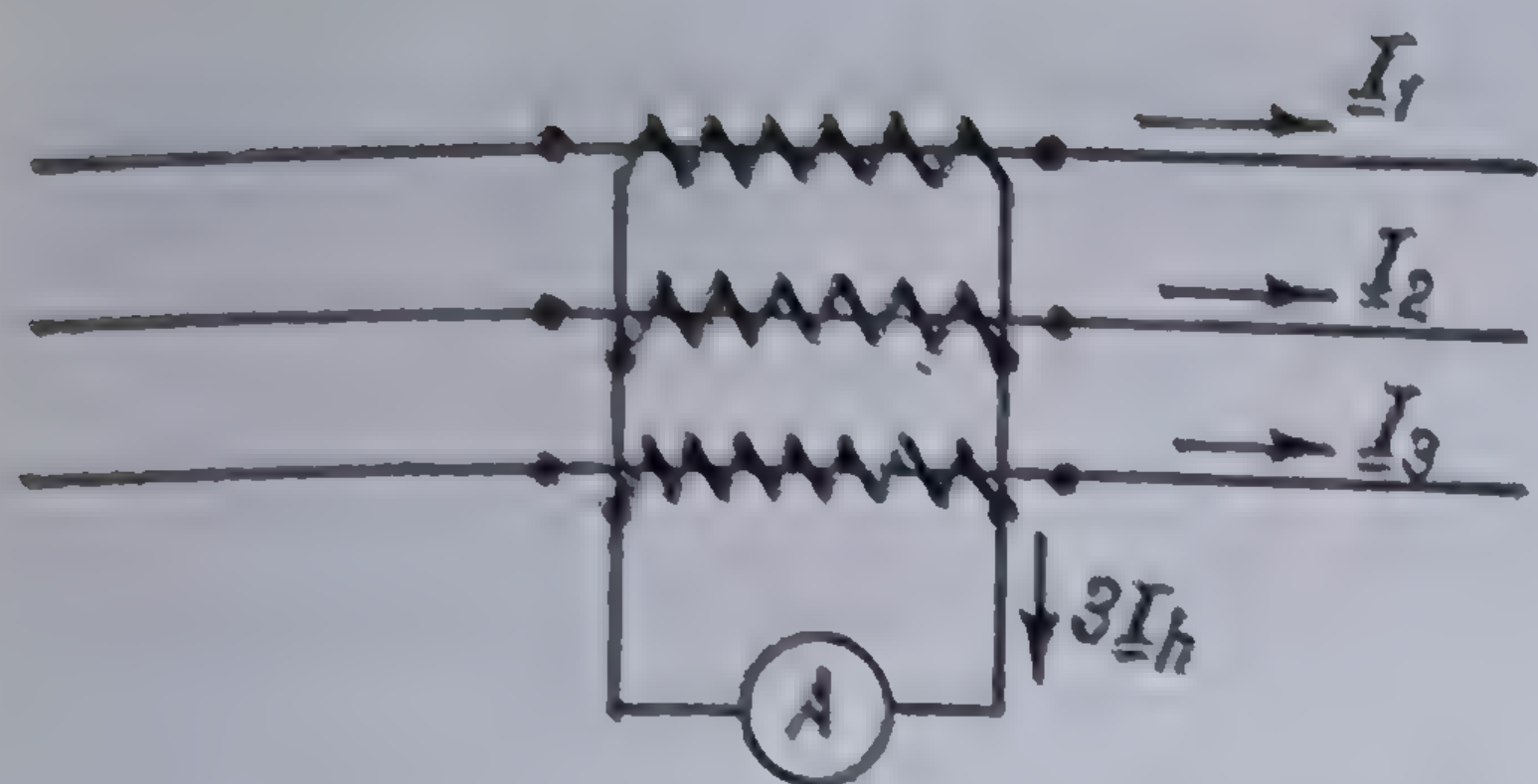


Fig. 8.19. Măsurarea componentei homopolare de curent.

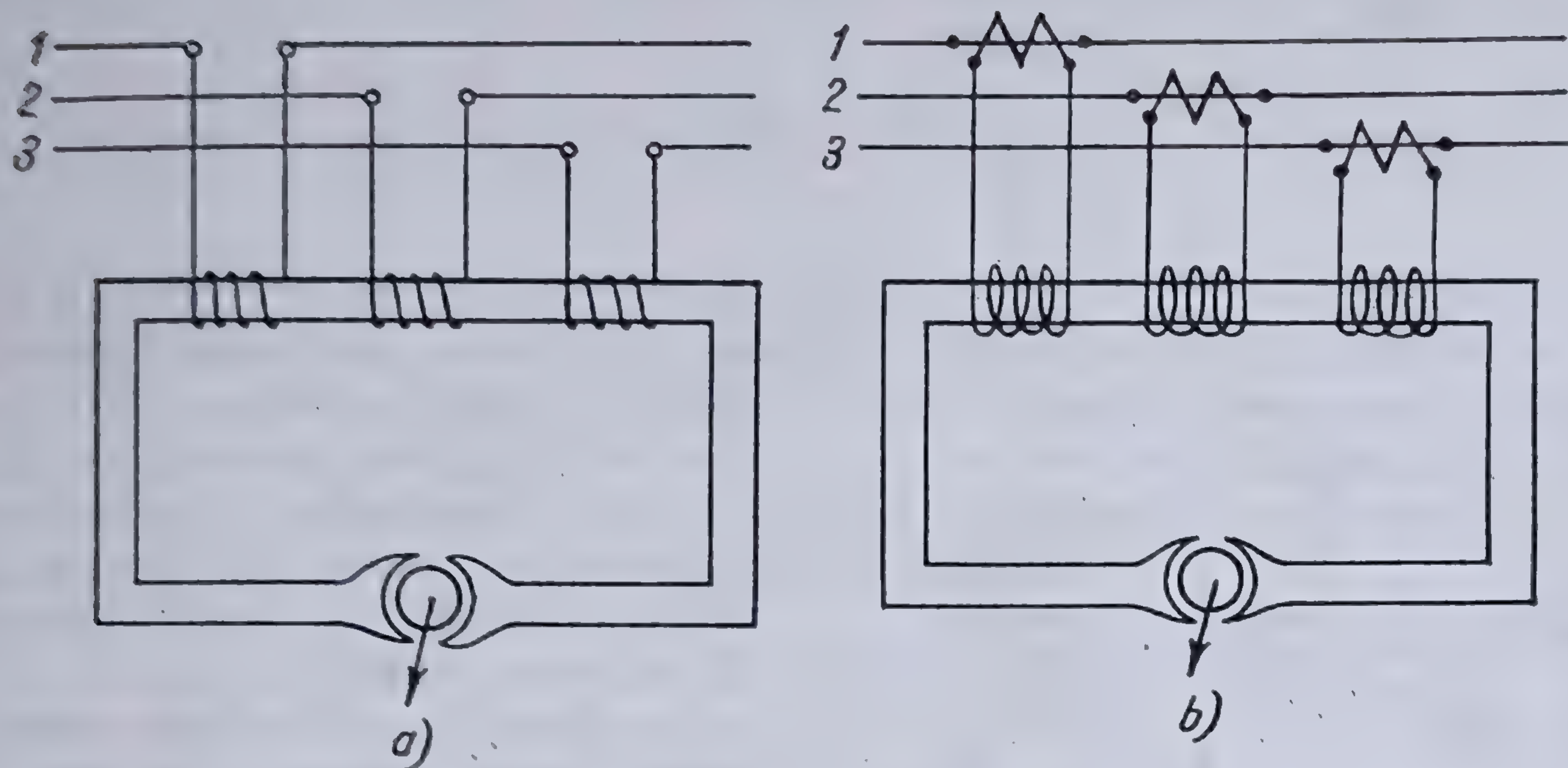


Fig. 8.20. Măsurarea componentei homopolare de curent cu ajutorul aparatelor de inducție.

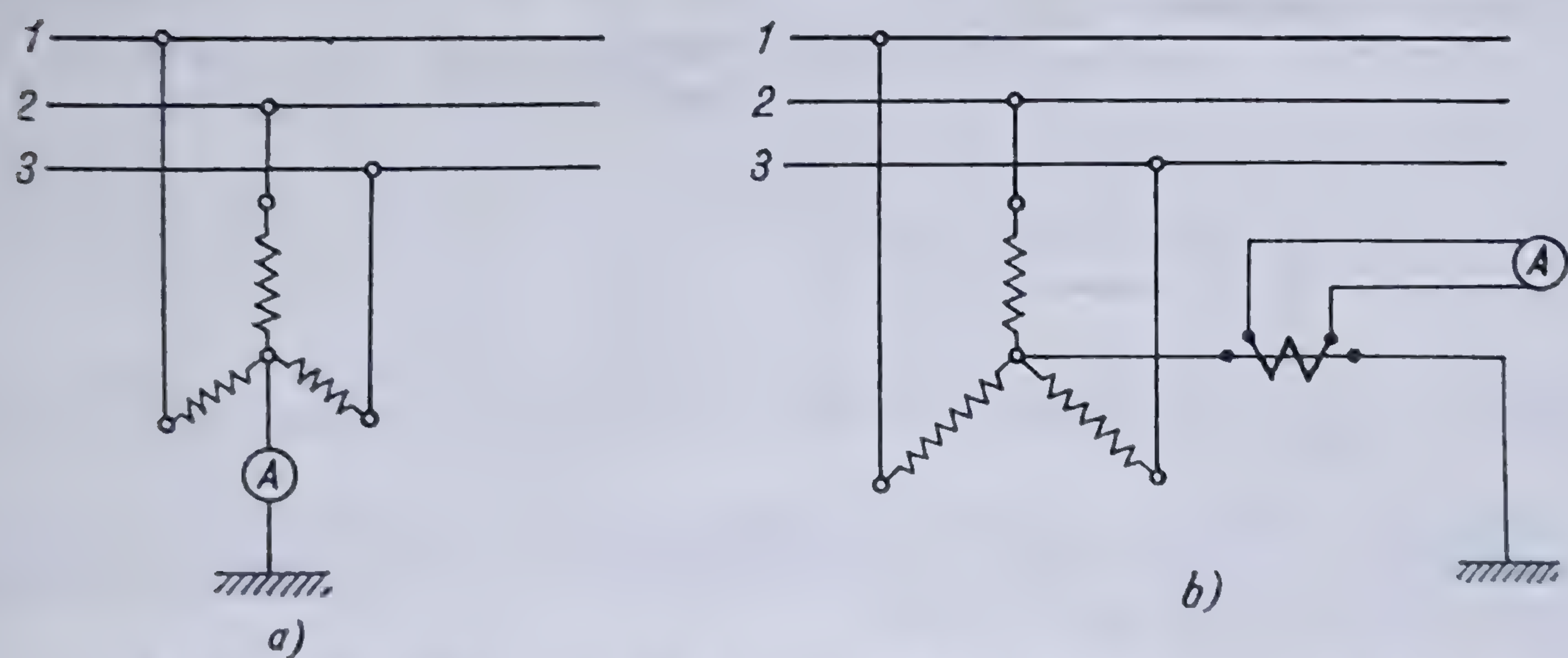


Fig. 8.21. Măsurarea componentei homopolare pe neutru al unui alternator sau transformator.

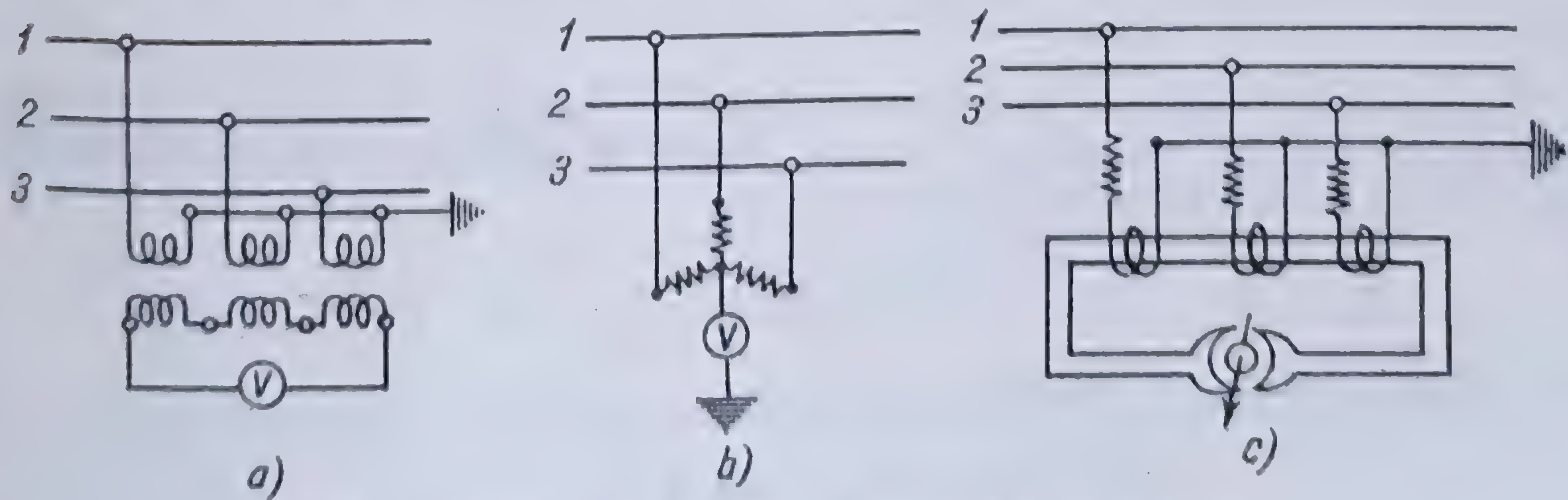


Fig. 8.22. Măsurarea componentei homopolare de tensiune.



8.3.8.2. Măsurarea componentelor directă și inversă de curent. Componenta directă de curent poate fi determinată din curenții de linie prin relația (8.12)

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + a^2 \underline{I}_3).$$

De asemenea, componenta inversă poate fi determinată în același mod prin relația (8.13)

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + a \underline{I}_3).$$

Din relația (8.12) se vede că aparatul de măsură va fi străbătut de totalitatea curentului circulând în liniile rețelei electrice, însă acești curenți sînt defazați cu  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  și  $240^\circ$  față de curentul  $\underline{I}_1$  luat ca origine de fază. Aceeași observație se poate face și cu privire la relația (8.13), cu singura deosebire că sensul unghiurilor de defazaj este negativ.

Pentru măsurarea componentelor directă și inversă de curent există mai multe montaje.

a) Un astfel de montaj este cel din figura 8.23. În acest caz curentul, trecînd prin aparatul de măsură, este dat de relația

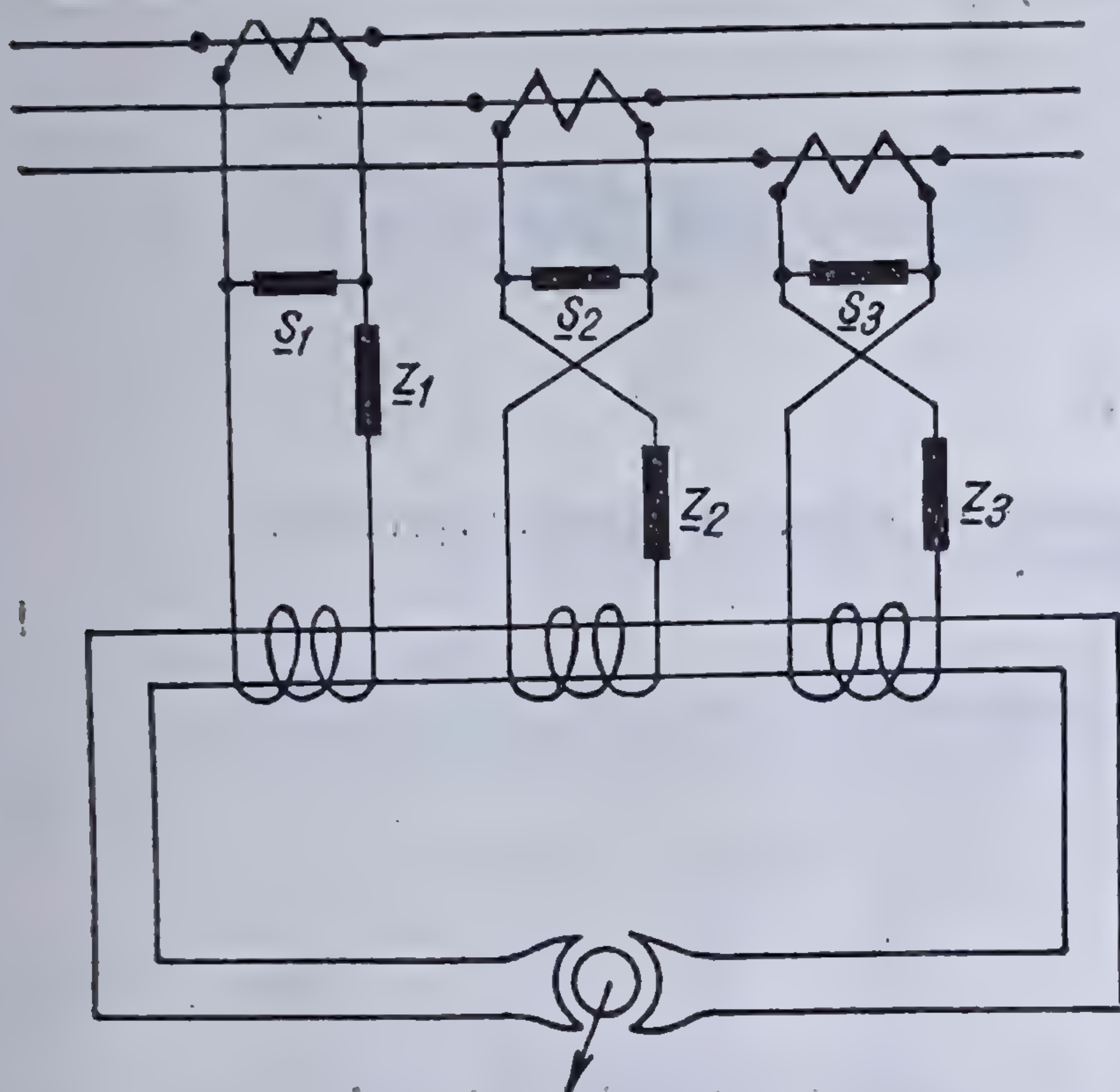


Fig. 8.23. Măsurarea componentelor directă și inversă de curent.

$$\underline{I}_{md} = \frac{\underline{S}_1}{\underline{S}_1 + \underline{Z}_1} \underline{I}_1 - \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_2 + \underline{Z}_2} \underline{I}_2 - \frac{\underline{S}_3}{\underline{S}_3 + \underline{Z}_3} \underline{I}_3.$$

Identificînd această relație cu relația (8.12), se vede că aparatul va măsura componenta directă de curent dacă

$$\frac{\underline{S}_1}{\underline{S}_1 + \underline{Z}_1} = \frac{1}{3}; \quad \frac{\underline{S}_2}{\underline{S}_2 + \underline{Z}_2} = -\frac{1}{3}a; \quad \frac{\underline{S}_3}{\underline{S}_3 + \underline{Z}_3} = -\frac{1}{3}a^2. \quad (8.32)$$

Din aceste relații se pot deduce imediat valorile diverselor elemente ale schemei de măsură respective. Astfel, dacă se fixează valorile rezistențelor  $S_1$ ,  $S_2$  și  $S_3$ , prima din relațiile (8.23) va da

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 2S_1 \text{ și deci } R_1 = 2S_1 \text{ și } X_1 = 0.$$

Din a doua relație, se deduce

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 3S_2 \left( \frac{1}{6} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



și deci

$$R_2 = \frac{1}{2} S_2 \quad \text{și} \quad X_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} S_2.$$

Din a treia relație se deduce

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = 3S_3 \left( \frac{1}{6} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

și deci

$$R_3 = \frac{1}{2} S_3 \quad \text{și} \quad X_3 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} S_3.$$

Se vede dar că, dacă impedanțele  $\underline{S}$  sînt rezistențe pure, atunci impedanța  $\underline{Z}_2$  este *inductivă* iar impedanța  $\underline{Z}_3$  este *capacitivă*.

Pentru a măsura componenta inversă, trebuie schimbate între ele impedanțele  $\underline{S}_2$  și  $\underline{Z}_2$  cu impedanțele  $\underline{S}_3$  și  $\underline{Z}_3$ .

În montajele din figura 8.23 a fost schimbat sensul curentului în circuitele de pe fazele 2 și 3 deoarece, în caz contrar, s-ar fi obținut pentru  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_3$  argumente mai mari de  $90^\circ$ , ceea ce ar fi condus la valori negative pentru rezistențe — lucru nerealizabil în practică.

b) În cazul cînd componenta homopolară de curent este nulă (cînd rețeaua nu are conductor neutru), se folosesc montajele date în figura 8.24. Valoarea curentului  $\underline{I}_A$ , tre-cînd prin ampermetru, este

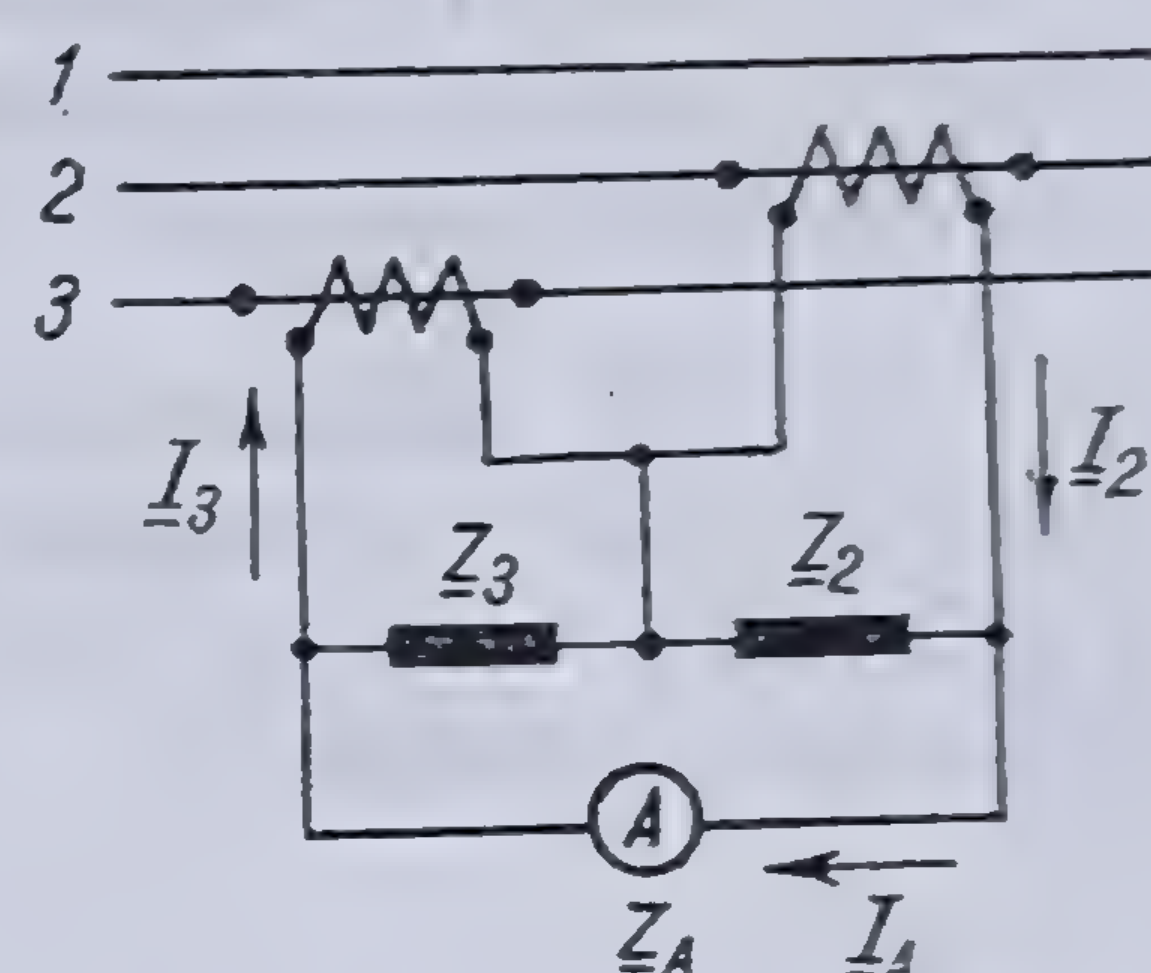


Fig. 8.24. Măsurarea componen-telor directă și inversă de cu-rent într-o rețea trifazată fără conductor neutru.

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_A} \underline{I}_2 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_A} \underline{I}_3. \quad (8.24)$$

Dacă în relațiile (8.10), care dau curenții în funcție de componentele lor simetrice, se face  $\underline{I}_h = 0$ , se obține

$$\underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i$$

$$\underline{I}_3 = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i$$

care, introduse în expresia (8.24), dau

$$\underline{I}_A = \frac{(a\underline{Z}_3 + a^2\underline{Z}_2) \underline{I}_d + (a^2\underline{Z}_3 + a\underline{Z}_2) \underline{I}_i}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_A},$$

Pentru ca aparatul să măsoare numai componenta directă, trebuie ca

$$a^2 \underline{Z}_3 + a \underline{Z}_2 = 0,$$



de unde

$$\underline{Z}_3 = -\frac{1}{a} \underline{Z}_2 = -a^2 \underline{Z}_2 = \underline{Z}_2 \mid 60^\circ . \quad (8.25)$$

Pentru ca aparatul să măsoare numai componenta inversă, trebuie ca

$$a \underline{Z}_3 + a^2 \underline{Z}_2 = 0,$$

de unde

$$\underline{Z}_2 = -a^2 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_3 \mid 60^\circ . \quad (8.26)$$

Relațiile (8.25) și (8.26) dau posibilitatea determinării impedanțelor necesare obținerii uneia sau celeilalte componente simetrice. Practic, se iau pentru impedanțele  $\underline{Z}_2$  din (8.25) și  $\underline{Z}_3$  din (8.26) rezistențe neinductive.

c) Există numeroase alte montaje, printre care unele care permit, ca utilizând aceleași impedanțe, să se obțină simultan, la aparate de măsură diferite, ambele componente simetrice de curent \*.

**8.3.8.3. Măsurarea componentelor directă și inversă de tensiune.** Măsurarea acestor componente se face în mod analog ca și pentru curent, pornind de la relațiile (8.12) și (8.13) care determină mărimea lor în funcție de tensiunile sistemului considerat

$$\underline{V}_d = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a \underline{V}_2 + a^2 \underline{V}_3)$$

și

$$\underline{V}_i = \frac{1}{3} (\underline{V}_1 + a^2 \underline{V}_2 + a \underline{V}_3).$$

Din aceste relații se vede că aparatul de măsură va fi traversat de curenți proporționali cu cele trei tensiuni, însă defazați cu  $0^\circ$ ,  $120^\circ$  și  $240^\circ$ , sensul acestor unghiuri fiind considerat pozitiv sau negativ, după componenta simetrică ce urmează a fi determinată.

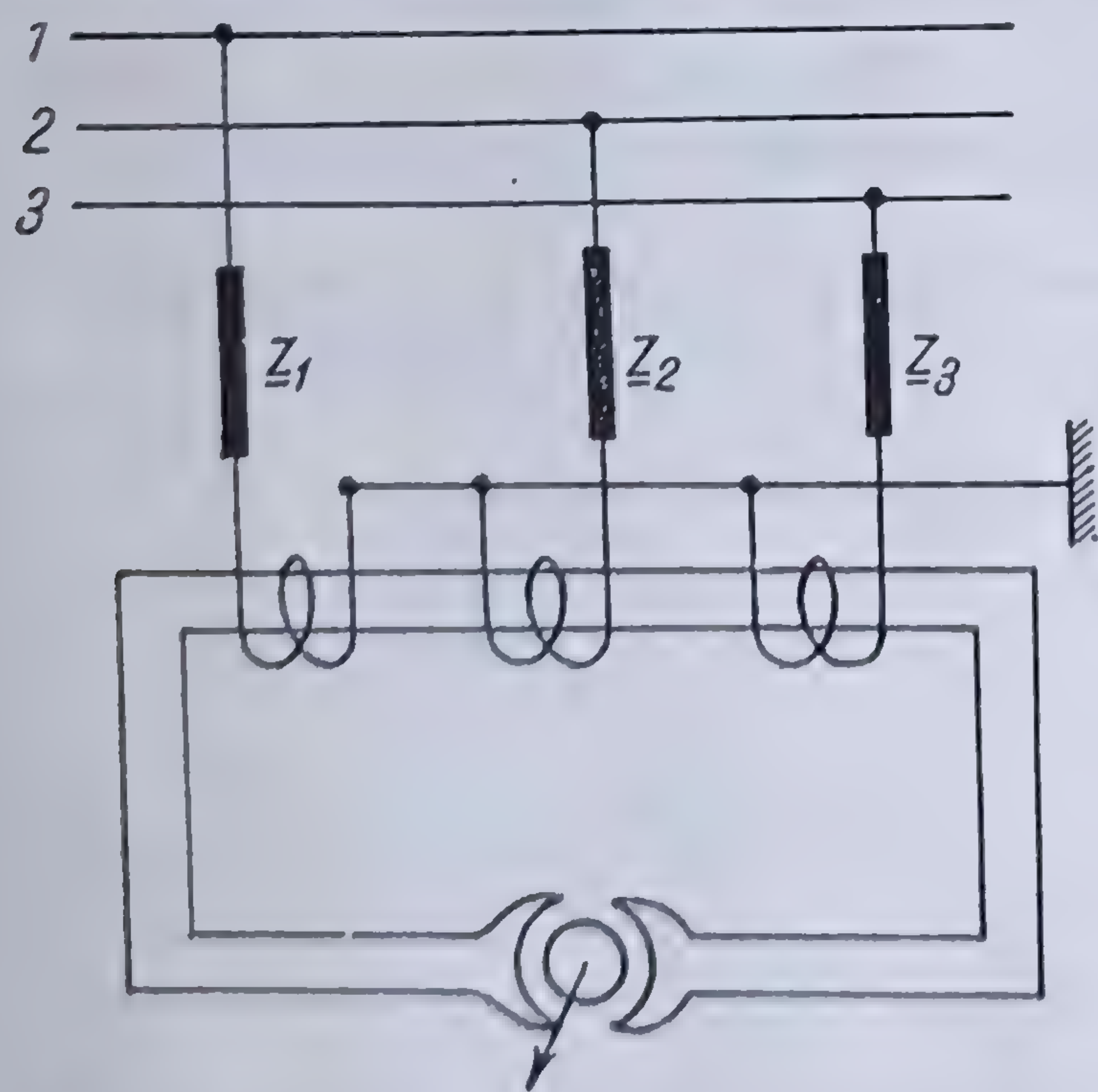


Fig. 8.25. Măsurarea componentelor directă și inversă de tensiune.

Există mai multe montaje pentru măsurarea componentelor simetrice de tensiune.

a) Astfel, în figura 8.25 se folosește un aparat de inducție pentru măsurarea acestor componente. Curentul, străbătând aparatul de măsură, este proporțional cu

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3} . \quad (8.27)$$

Între mărimile diverselor impedanțe ale acestor montaje trebuie să existe următoarele relații:

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \mid 60^\circ ; \quad \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \mid -60^\circ ;$$

\* Vezi [140, 256]



În cazul componentelor directe, și

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \angle -60^\circ ; \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \angle 60^\circ ;$$

în cazul componentelor inverse.

Într-adevăr, componenta directă a tensiunii este dată de relația (8.12); curentul care străbate aparatul este proporțional cu această tensiune. Se poate scrie deci,

$$\underline{I}_A = k \underline{V}_d = \frac{k}{3} (\underline{V}_1 + a\underline{V}_2 + a^2\underline{V}_3). \quad (8.28)$$

Identificînd relațiile (8.27) și (8.28), care trebuie să reprezinte același curent, se obține

$$\frac{k}{3} \underline{V}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1} \quad \text{de unde rezultă} \quad \underline{Z}_1 = \frac{3}{k} ;$$

$$a \frac{k}{3} \underline{V}_2 = - \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2} \quad \text{—} \quad \underline{Z}_2 = - \frac{1}{a} \frac{3}{k} = -a^2 \underline{Z}_1 = \underline{Z}_1 \angle 60^\circ ;$$

$$a^2 \frac{k}{3} \underline{V}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3} \quad \text{—} \quad \underline{Z}_3 = - \frac{1}{a^2} \frac{3}{k} = -a \underline{Z}_1 = \underline{Z}_1 \angle -60^\circ .$$

În mod practic se alege pentru  $\underline{Z}_1$  o rezistență pură.

b) În cazul cînd rețeaua nu are fir neutru, se pot folosi montaje analoage cu acelea folosite în cazul determinării componentelor simetrice de curent. În figura 8.26 este redat un montaj care dă simultan ambele componente.

Aplicînd teorema a II-a a lui KIRCHHOFF circuitului  $T_1 Z'_1 \underline{V}_d Z'_2 T_2$  ( $T_1$  și  $T_2$  fiind cele două transformatoare de măsură), se obține:

$$\underline{U}_{23} = \underline{Z}'_2 \underline{I}'_2 + \underline{Z}'_v \underline{I}'_v ,$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{Z}'_1 \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_v \underline{I}'_v ,$$

$$\underline{I}'_v = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 ,$$

$$\underline{U}'_v = \underline{Z}'_v \underline{I}'_v .$$

Eliminînd curenții  $\underline{I}'_v$ ,  $\underline{I}'_1$ ,  $\underline{I}'_2$  dintre aceste relații, rezultă

$$\underline{U}'_v = \frac{\underline{Z}'_v (\underline{Z}'_1 \underline{U}_{23} + \underline{Z}'_2 \underline{U}_{31})}{\underline{Z}'_1 \underline{Z}'_2 + (\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2) \underline{Z}'_v} .$$

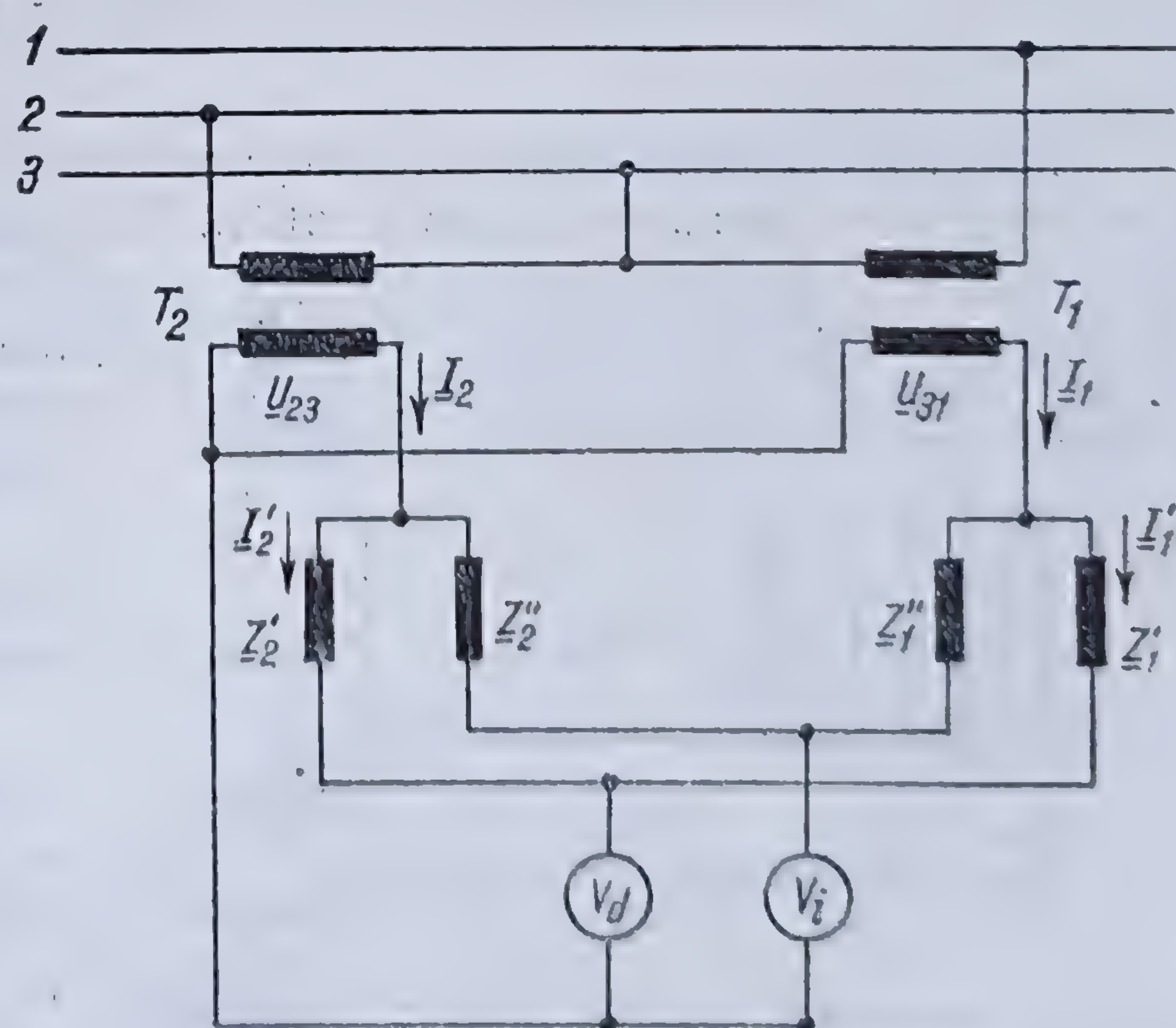


Fig. 8.26. Măsurarea simultană a componentelor directă și inversă de tensiune, într-o rețea trifază fără conductor neutru.



Înlocuind pe  $\underline{U}_{23}$  și pe  $\underline{U}_{31}$  în funcție de componentele lor simetrice, se găsește

$$\underline{U}_v = \frac{\underline{Z}'_v [(a^2 \underline{Z}'_1 + a \underline{Z}'_2) \underline{V}_d + (a \underline{Z}'_1 + a^2 \underline{Z}'_2) \underline{V}_1]}{\underline{Z}'_1 \cdot \underline{Z}'_2 + (\underline{Z}'_1 + \underline{Z}'_2) \underline{Z}'_v}.$$

Pentru ca  $\underline{V}'_v$  să fie proporțional cu  $\underline{V}_d$  trebuie ca

$$a \underline{Z}'_1 + a^2 \underline{Z}'_2 = 0,$$

de unde rezultă

$$\underline{Z}'_2 = -a^2 \underline{Z}'_1.$$

În mod analog se găsește și pentru al doilea circuit de măsură

$$\underline{Z}''_1 = -a^2 \underline{Z}''_2.$$

În general se ia

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}''_2 = R$$

și rezultă

$$\underline{Z}'_2 = \underline{Z}''_1 = R \angle 60^\circ.$$

**8.3.8.4. Măsurarea puterii active și reactive corespunzând componentelor simetrice.** Puterea aparentă într-un sistem trifazat poate fi exprimată prin relația\*

$$\underline{S} = P + jQ = 3\underline{S}_h + 3\underline{S}_d + 3\underline{S}_i.$$

Această relație poate fi pusă sub forma

$$\underline{S} = 3U_h I_h \angle \varphi_h + 3U_d I_d \angle \varphi_d + 3U_i I_i \angle \varphi_i.$$

Primul termen al acestei relații conține componentele simetrice homopolare de curent și de tensiune, care se obțin cu unul din montajele indicate (fig. 8.20

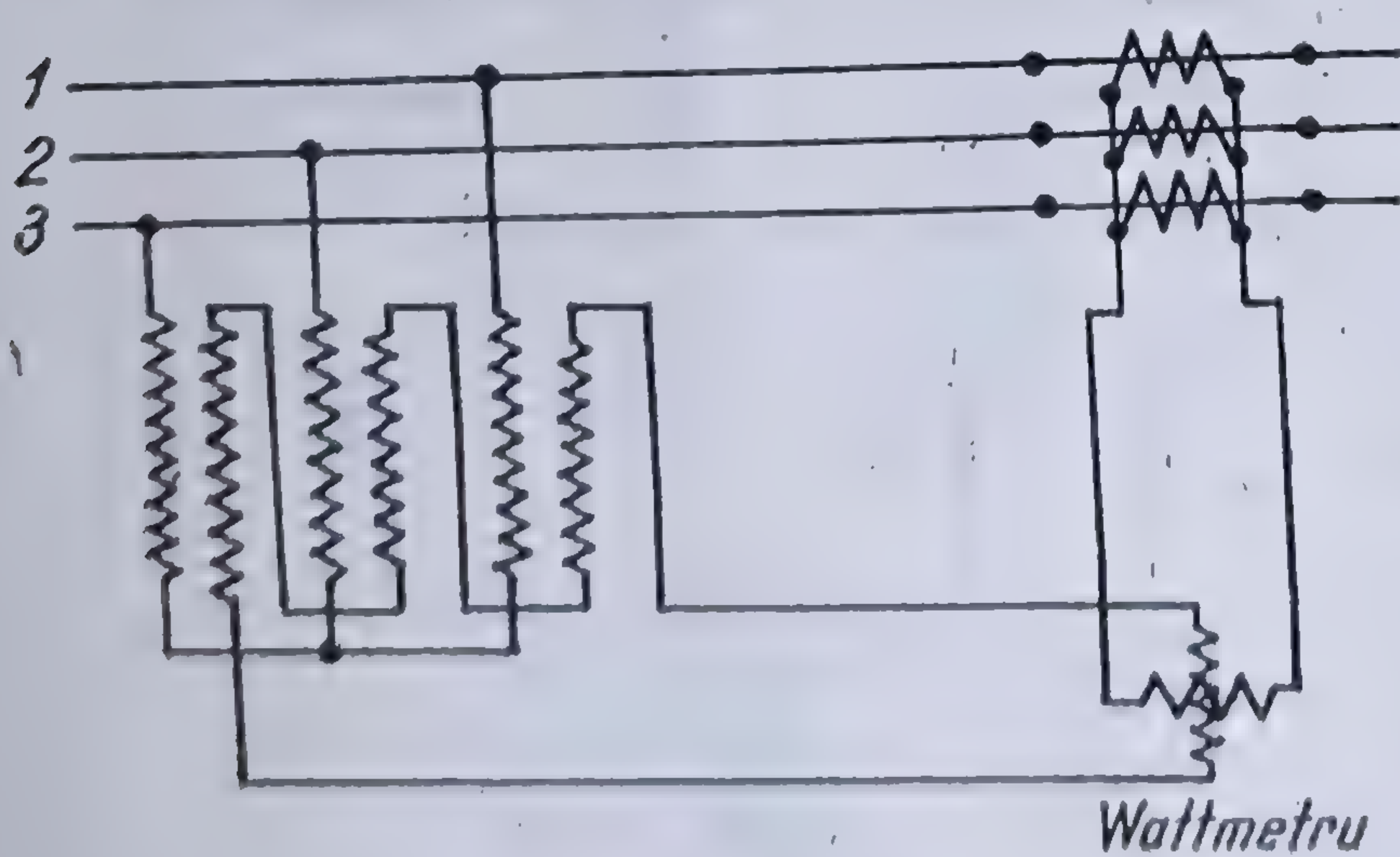


Fig. 8.27. Măsurarea puterii active a sistemului homopolar.

și 8.22). Aplicându-le unui wattmetru sau unui varmetru, se poate măsura puterea activă sau reactivă corespunzătoare termenului  $\underline{S}_h$  (fig. 8.27).

Puterile corespunzătoare termenilor  $\underline{S}_d$  și  $\underline{S}_i$  se măsoară în mod analog.

În general, suma celor trei tensiuni  $\underline{U}_{10}$ ,  $\underline{U}_{20}$  și  $\underline{U}_{30}$  și a celor trei curenți  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  și  $\underline{I}_3$  nu este nulă. Pentru a obține componentele simetrice ale acestora, trebuie să se aplice relațiile (8.12) și (8.13).

\* Vezi 8.4.3.1.



Pentru a simplifica operațiile și pentru a reduce numărul de fazori necesari pentru determinarea acestor componente la doi, este mai comod să se utilizeze diferența fazorilor tensiune

$$\underline{U}_{10} - \underline{U}_{20} = \underline{U}_{12}, \quad \underline{U}_{20} - \underline{U}_{30} = \underline{U}_{23}, \quad \underline{U}_{30} - \underline{U}_{10} = \underline{U}_{31}$$

și diferența fazorilor curent

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2, \quad \underline{I}_2 - \underline{I}_3, \quad \underline{I}_3 - \underline{I}_1$$

în locul fazorilor înșiși. Suma acestor fazori fiind evident nulă, componenta simetrică va fi perfect determinată numai de unul dintre acești fazori.

Ținând seama de montajele date în figurile 8.24 și 8.26 (din care se folosește numai o parte), se obține schema de montaj din figura 8.28 cu ajutorul căreia se poate determina puterea activă sau reactivă din termenii  $\underline{S}_a$  și  $\underline{S}_i$ , după ordinea în care sînt legate impedanțele  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Z}_3$ .

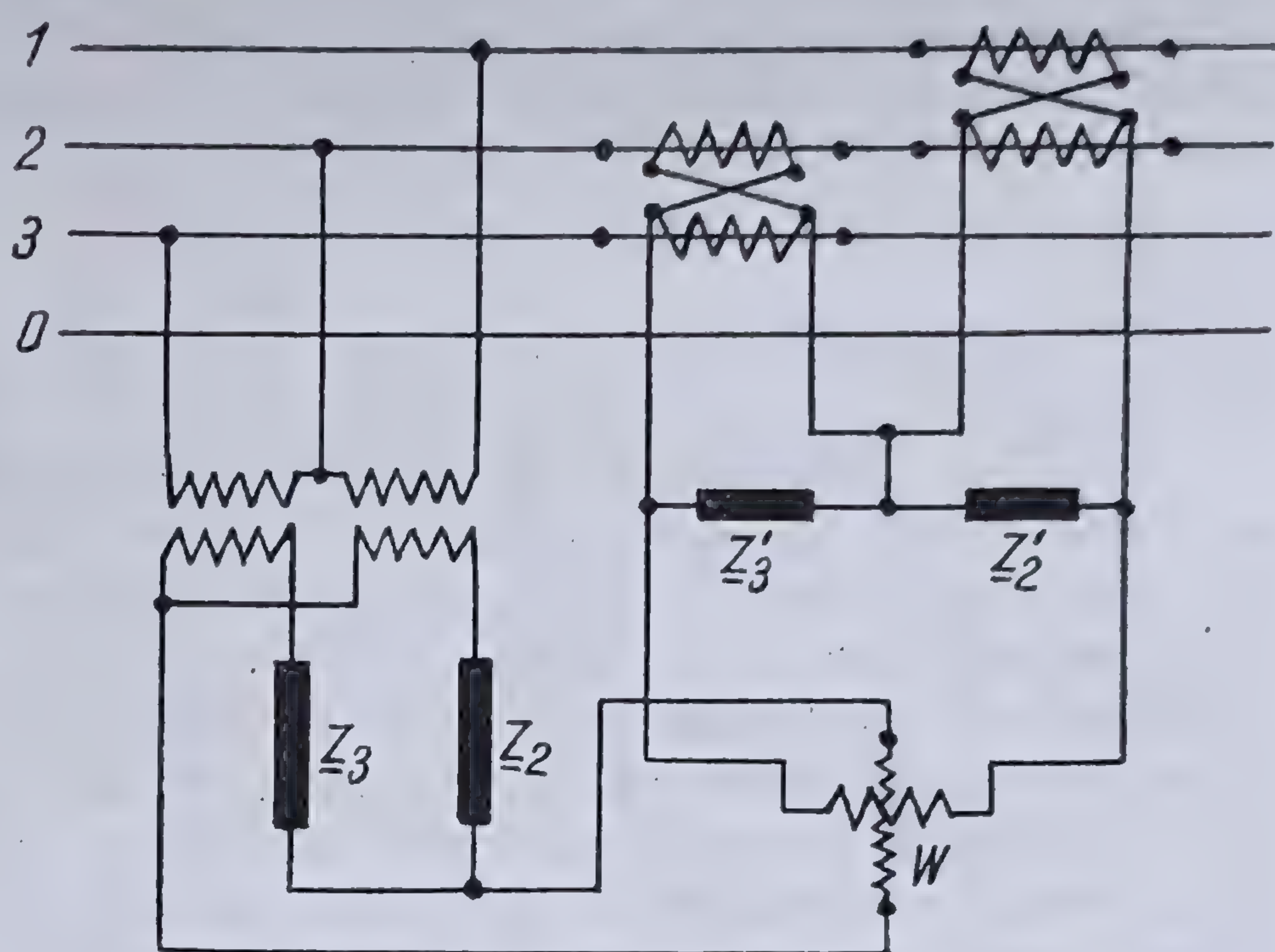


Fig. 8.28. Măsurarea puterii active a sistemului direct sau invers.

### 8.3.9. MĂSURAREA REACTANȚELOR DIRECTĂ, INVERSĂ ȘI HOMOPOLARĂ A UNEI MAȘINI SINCRONE

8.3.9.1. Generalități. În calculele curenților de scurtcircuit din rețelele electrice, este necesar să se cunoască diversele reactanțe ale mașinilor rotative din rețea, în special ale mașinilor sincrone. Determinarea acestor reactanțe se face cu ajutorul caracteristicilor de mers în gol și în scurtcircuit simetric sau disimetric. În acest scop, pentru o mașină sincronă oarecare, se ridică *caracteristicile de mers în scurtcircuit trifazat* (scurtcircuit simetric) și *în scurtcircuit bifazat* și *monofazat* (scurtcircuit disimetric) (fig. 8.29).

8.3.9.2. Măsurarea reactanței directe sau sincronă. Reactanța directă sau sincronă  $X_s$  (sau impedanța directă sau sincronă  $\underline{Z}_s$ , dacă rezistența bobinajului nu este neglijabilă) a unui alternator este reactanța pe care acesta o opune

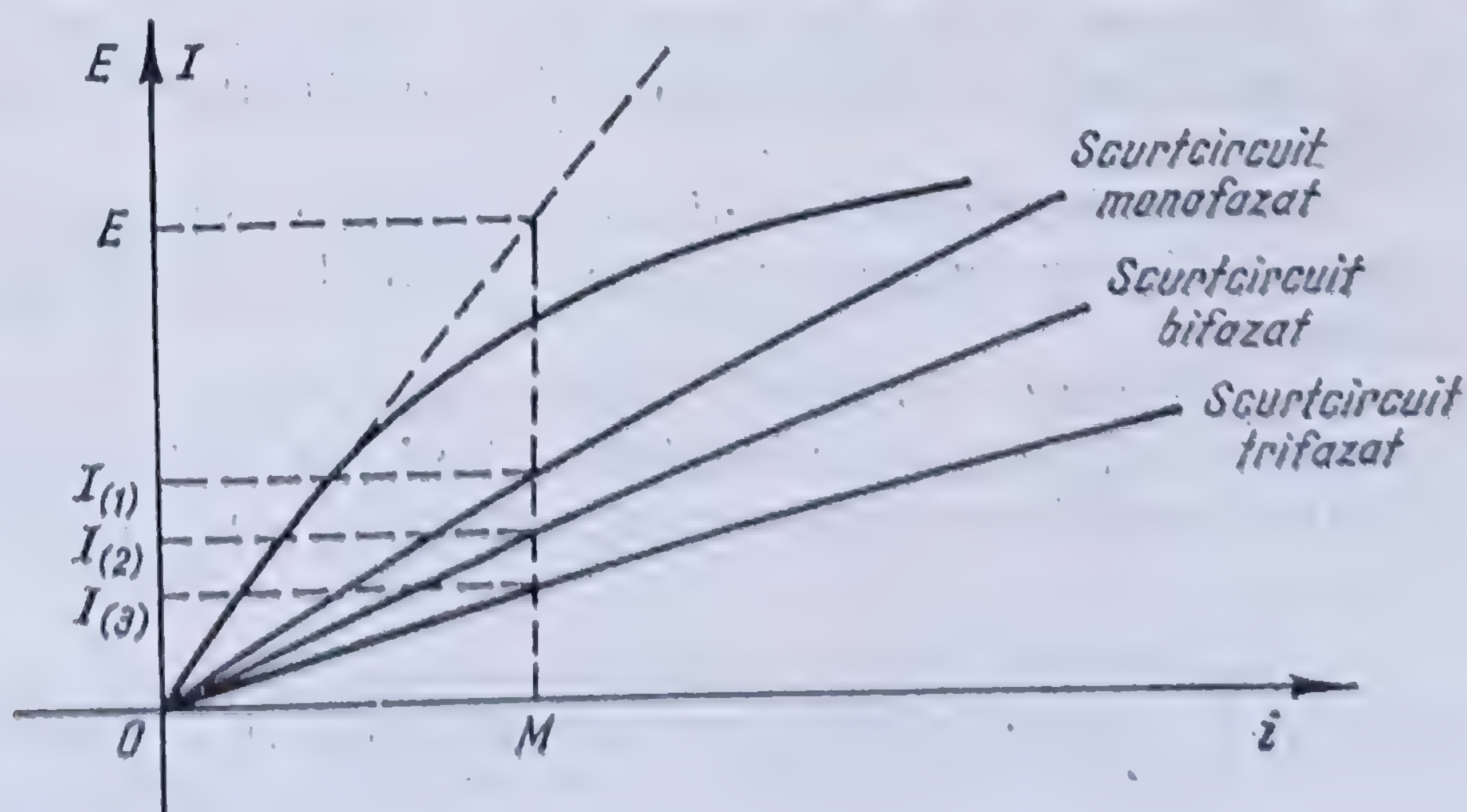


Fig. 8.29. Caracteristicile de scurtcircuit ale unui alternator.



tregerii componentei *directe* a curenților. Prin definiție ea este raportul, la frecvența normală, dintre modulul forței electromotoare a alternatorului pe fază la borne și modulul curentului de scurtcircuit simetric produs la bornele sale, la funcționarea în regim permanent de scurtcircuit\*. Mărimea acestei reactanțe se obține făcând cîțul dintre tensiunea pe fază, determinată pe porțiunea dreaptă a caracteristicii de mers în gol, prin curentul de scurtcircuit simetric corespunzător aceluiași curent de excitație  $OM$  (fig. 8.29). Se obține\*\*

$$X_s = \frac{E}{I_{(3)}} \quad (8.29)$$

**8.3.9.3. Măsurarea reactanței inversă sau asincronă.** Reactanța inversă sau asincronă  $X_a$  (sau impedanța inversă sau asincronă  $Z_a$ ) a unui alternator este reactanța pe care acesta o opune trecerii componentei *inverse* a curenților. Prin definiție ea este raportul, la frecvența normală, dintre modulul fazorului principal al componentei inversă a tensiunii aplicată la bornele mașinii și modulul fazorului principal al componentei de curent produs în indus.

Mărimea acestei reactanțe se obține din curentul de scurtcircuit bifazat (disimetric) și tensiunea de mers în gol corespunzătoare aceleiași excitații, determinată pe porțiunea dreaptă a caracteristicii de mers în gol, cu ajutorul relației

$$I_{(2)} = \frac{E\sqrt{3}}{X_s + X_a} \quad (8.30)$$

Din această relație, ținînd seama de relația (8.29), se obține

$$X_a = E \left( \frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}} - \frac{1}{I_{(3)}} \right).$$

**8.3.9.4. Măsurarea reactanței homopolară.** Reactanța homopolară sau de nul  $X_0$  (sau impedanța homopolară sau de nul  $Z_0$ ) a unui alternator este reactanța pe care acesta o opune trecerii componentei homopolare a curenților. Reactanța homopolară a unei mașini sincrone și, în general, a unui sistem de înfășurări așezate simetric într-o armătură și destinate a produce un cîmp învîrtitor, este o mărime foarte mică în raport cu reactanța directă și chiar cu aceea inversă.

Mărimea ei depinde mult de natura înfășurării; ea este independentă de constituția înfășurării rotorului și în particular de prezența sau de lipsa amortizorilor.

Determinarea reactanței homopolare se poate face fie indirect, prin metoda caracteristicilor de mers în scurtcircuit, fie direct prin metoda tensiunii fazelor libere.

*a) Metoda indirectă.* Mărimea acestei reactanțe se obține cu ajutorul caracteristicii de mers în scurtcircuit monofazat, a caracteristicii de mers în scurtcircuit a unei faze la punctul neutru și a caracteristicii de mers în gol. Pentru

\* Această mărime diferă de impedanța directă  $X_d'$ , care corespunde curentului inițial de scurtcircuit și a cărei determinare lese din cadrul lucrării de față.

\*\* Justificarea acestei relații și a următoarelor se va vedea în 8.4.5.6.



un anumit curent de excitație se determină valorile curenților de scurtcircuit corespunzători și tensiunea de mers în gol pe porțiunea dreaptă a caracteristicii. Utilizând relația\*

$$I_{(1)} = \frac{3E}{X_s + X_a + X_0} \quad (8.31)$$

și relația (8.30), rezultă

$$X_0 = E \left( \frac{3}{I_{(1)}} - \frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}} \right).$$

b) *Metoda directă.* Se realizează montajul din figura 8.30 legându-se faza 1 în scurtcircuit cu neutrul mașinii sincrone prin intermediul unui ampermetru; între bornele 2, 3 și neutrul mașinii sincrone se leagă două transformatoare de tensiune, avînd secundarele legate în serie cu un voltmetru.

Dacă  $I_{(1)}$  este curentul măsurat de ampermetru,  $V_1$  și  $V_2$  sînt respectiv tensiunile măsurate pe fazele 2 și 3, reactanța homopolară este dată de relația

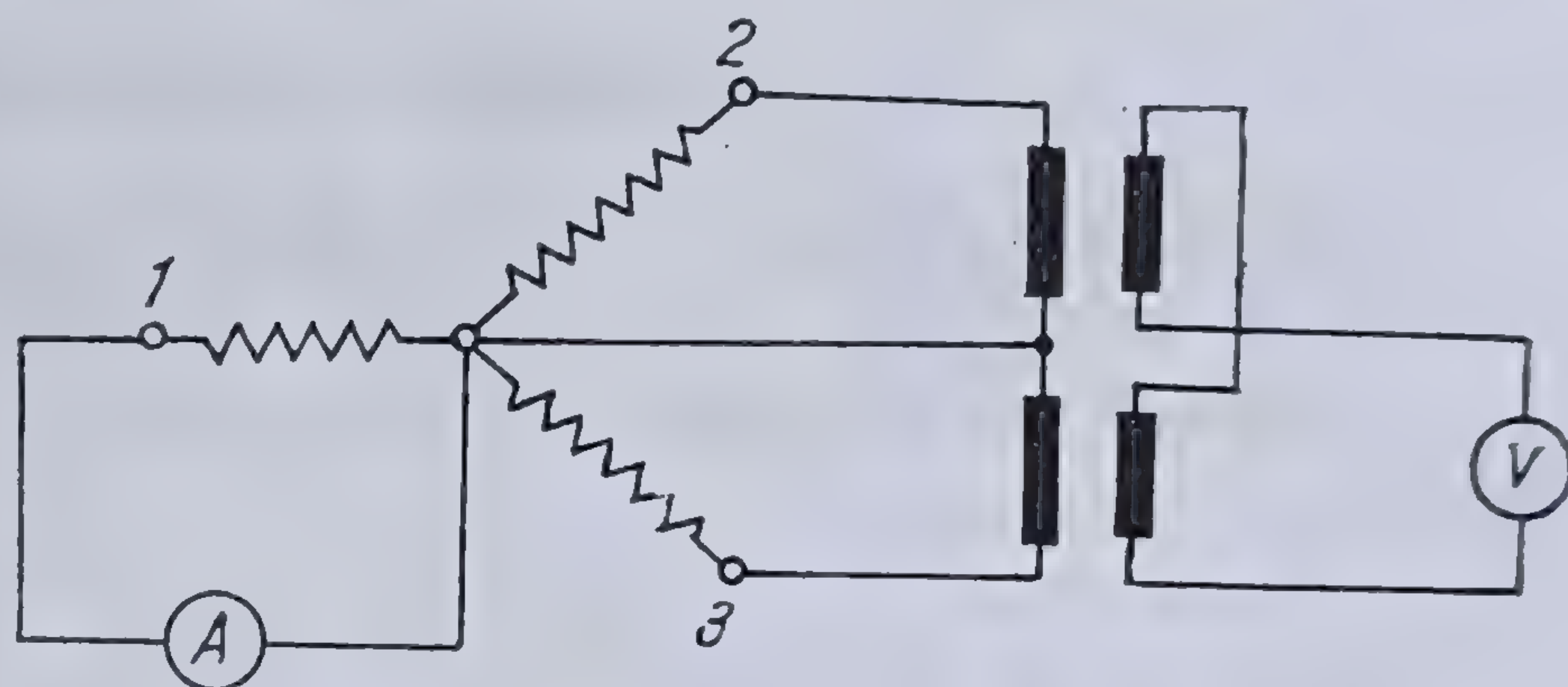


Fig. 8.30. Măsurarea reactanței homopolare.

$$X_0 = \frac{V_2 + V_3}{I_{(1)}}. \quad (8.32)$$

Într-adevăr, curentul  $I_{(1)}$  este dat de relația (8.31). Pe de altă parte, în cazul unui scurtcircuit al unei faze față de neutru, componentele simetrice ale curentului sînt\*

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{E}}{jX_s + jX_a + jX_0}.$$

Scriind tensiunile de pe fazele 2 și 3 în funcție de componentele simetrice, se găsește succesiv

$$\begin{aligned} \underline{V}_2 &= \underline{V}_h + a^2 \underline{V}_d + a \underline{V}_i = a^2 \underline{E} - (a^2 jX_s \underline{I}_d + a jX_a \underline{I}_i + jX_0 \underline{I}_h) = a^2 \underline{E} - \\ &- \underline{I}_d (a^2 jX_s + a jX_a + jX_0) = a^2 \underline{E} - \underline{E} \frac{a^2 jX_s + a jX_a + jX_0}{jX_s + jX_a + jX_0} = a(a-1) \frac{X_a - aX_0}{X_0 + X_s + X_a} \underline{E}, \end{aligned}$$

deoarece\*\*

$$\underline{V}_d = \underline{E} - jX_s \underline{I}_d, \quad \underline{V}_i = -jX_0 \underline{I}_i, \quad \underline{V}_h = -jX_0 \underline{I}_h.$$

Analog, se găsește

$$\underline{V}_3 = (a-1) \frac{X_0 - aX_a}{X_0 + X_s + X_a} \underline{E}$$

\* Vezi 8.4.5.4.

\*\* Vezi relațiile (8.44).



Făcînd suma și ținînd seama de modul de legare al transformatoarelor de tensiune, rezultă :

$$\underline{V}_2 + \underline{V}_3 = \frac{(a-1)(a^2-1)jX_0E}{jX_0 + jX_s + jX_a} = \frac{3X_0E}{X_0 + X_s + X_a}$$

de unde, împărțind prin curentul  $\underline{I}_{(1)}$ , dat de relația (8.31), se obține tocmai expresia (8.32).

#### 8.4. CALCULUL SISTEMELOR DEZECHILIBRATE PRIN UTILIZAREA COORDONATELOR SIMETRICE

##### 8.4.1. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF ÎN REGIMUL DEZECHILIBRAT

Să considerăm o rețea trifazată complexă, care are pe fiecare fază un număr  $N$  de noduri și un număr  $B$  de bucle distincte (fig. 8.31).

Pentru fiecare nod în parte se poate aplica teorema I a lui KIRCHHOFF sub forma :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \underline{I}_1 &= 0 \text{ pentru faza 1,} \\ \Sigma \underline{I}_2 &= 0 \text{ pentru faza 2,} \\ \Sigma \underline{I}_3 &= 0 \text{ pentru faza 3.} \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Acești curenți făcînd parte dintr-un sistem trifazat pot fi descompuși în componentele simetrice corespunzătoare, utilizînd în acest scop relațiile (8.11), (8.12) și (8.13). Vom avea, deci, pentru toți curenții care intră într-un nod

$$\Sigma \underline{I}_h = \Sigma \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = \frac{1}{3} (\Sigma \underline{I}_1 + \Sigma \underline{I}_2 + \Sigma \underline{I}_3),$$

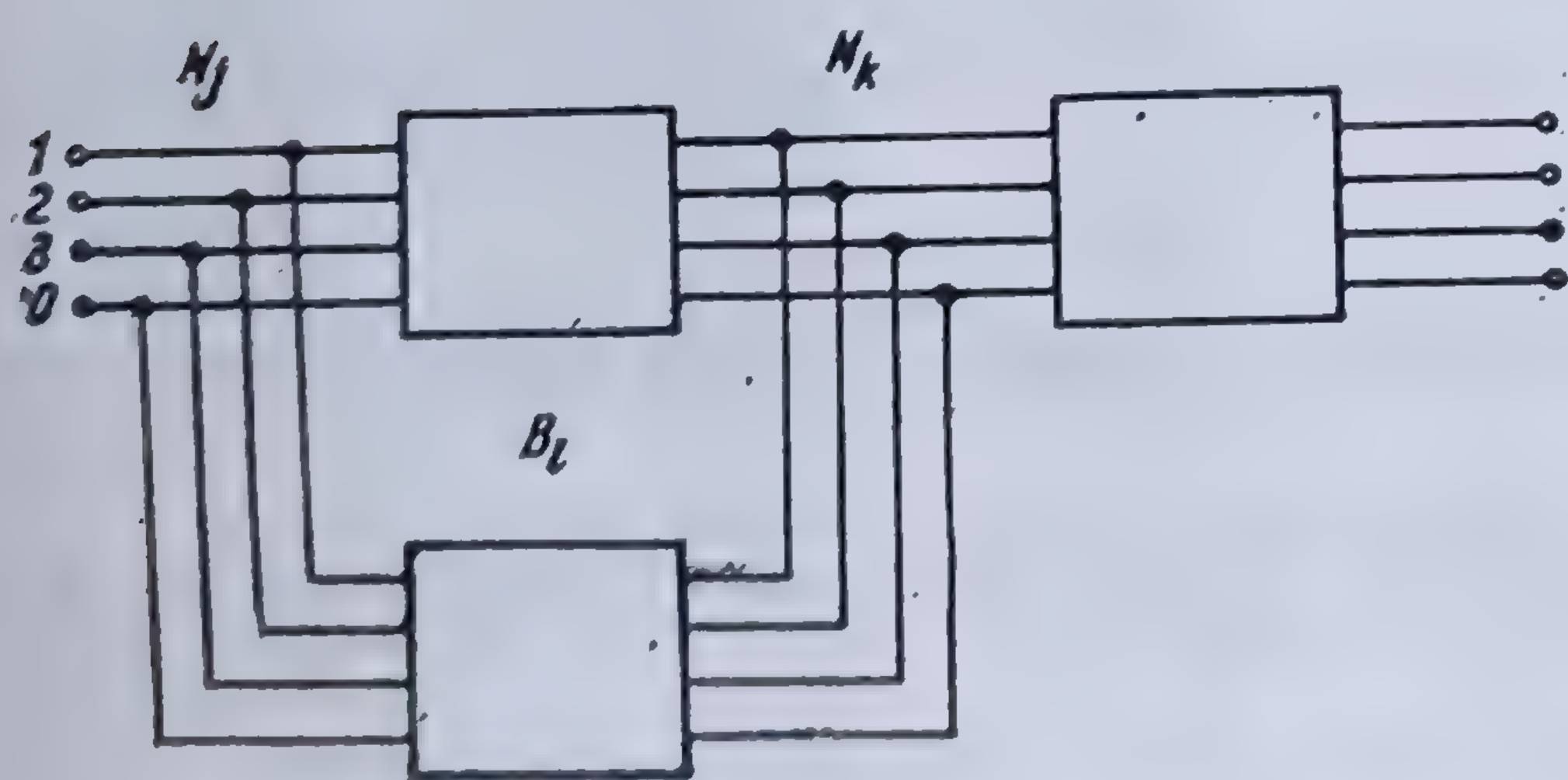


Fig. 8.31. Rețea trifazată complexă.

sau, ținînd seama de relațiile (8.33), rezultă

$$\Sigma \underline{I}_h = 0.$$

De asemenea, pentru componenta directă

$$\begin{aligned} \Sigma \underline{I}_d &= \Sigma \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 + a^2\underline{I}_3) = \\ &= \frac{1}{3} (\Sigma \underline{I}_1 + a\Sigma \underline{I}_2 + a^2\Sigma \underline{I}_3) \end{aligned}$$

și deci,

$$\Sigma \underline{I}_d = 0.$$

În același mod se arată și că

$$\Sigma \underline{I}_1 = 0.$$



Rezultă dar, că teorema I a lui KIRCHHOFF se aplică întocmai și în componente simetrice fiecărui nod al rețelei.

O demonstrație analoagă, aplicată buclelor din rețeaua trifazată, ne va conduce și la valabilitatea teoremei a II-a a lui KIRCHHOFF în componente simetrice sub forma

$$\Sigma \underline{U}_h = 0, \Sigma \underline{U}_a = 0 \text{ și } \Sigma \underline{U}_i = 0,$$

care se aplică pentru orice buclă a rețelei trifazate.

#### 8.4.2. IMPEDANȚELE UNEI REȚELE TRIFAZATE ÎN REGIMUL DE COORDONATE SIMETRICE

Într-o rețea electrică formată numai din impedanțe constante, în virtutea principiului suprapunerii efectelor, regimul de curenți dintr-o latură oarecare poate fi socotit ca suma diferiților curenți produși de diferitele forțe electromotoare aplicate sistemului și considerate ca lucrând independent.

Dacă la bornele unei rețele electrice geometric echilibrate se aplică un sistem de forțe electromotoare de o anumită succesiune, va rezulta o circulație de curenți polifazați de aceeași succesiune și căderile de tensiune de-a lungul rețelei vor constitui, de asemenea, un sistem trifazat simetric și echilibrat de aceeași succesiune.

Astfel, într-un sistem trifazat geometric echilibrat, componentele simetrice directe, inverse și homopolare constituie sisteme *independente*: fiecareia din acestea, în mod independent, li se pot aplica teoremele lui KIRCHHOFF, considerându-se pentru fiecare în parte numai circuitul simplu format dintr-o fază și conductorul neutru.

Se numește *impedanța directă a rețelei*, impedanța efectivă pe fază opusă trecerii curenților sistemului *direct*.

În același mod se definește *impedanța inversă* și *impedanța homopolară*.

Rezultă dar, că între diversele elemente ale unui circuit electric în raport cu componentele simetrice corespunzătoare se pot scrie relațiile

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_h &= \underline{V}_h + \underline{Z}_h \underline{I}_h, \\ \underline{E}_a &= \underline{V}_a + \underline{Z}_a \underline{I}_a, \\ \underline{E}_i &= \underline{V}_i + \underline{Z}_i \underline{I}_i, \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

în care  $\underline{E}$  este forța electromotoare aplicată circuitului,  $\underline{Z}$  impedanța lui,  $\underline{I}$  curentul ce străbate această impedanță și  $\underline{V}$  căderea de tensiune într-o porțiune din circuit, sau tensiunea la bornele acestui circuit, corespunzătoare secvenței respective.

Dacă sistemul are conductor neutru, atunci în ecuația referitoare la componenta homopolară trebuie adăugată căderea de tensiune  $\underline{V}_N$  în acest conductor; prima ecuație (8.34) trebuie scrisă în acest caz

$$\underline{E}_h = \underline{V}_h + \underline{Z}_h \underline{I}_h + \underline{V}_N.$$

În ceea ce privește impedanțele  $\underline{Z}_h$ ,  $\underline{Z}_a$  și  $\underline{Z}_i$ , se observă următoarele:

a) Toate elementele care nu comportă părți rotative și ale căror faze sînt geometric echilibrate prezintă trecerii curentului o impedanță, care nu depinde



de succesiunea fazelor tensiunilor aplicate la borne ; pentru toate aceste elemente (transformatoare, linii, circuite receptoare pasive etc.) impedanța directă  $\underline{Z}_d$  este identică cu impedanța inversă  $\underline{Z}_i$ .

b) Mașinile rotative prezintă treceri curenților din sistemul direct o impedanță, care în general, diferă de impedanța ce intervine în sistemul invers.

c) La calculul puterii de rupere a întreruptoarelor nu se ține seama de reactanța capacitivă a rețelei, și în consecință, impedanța homopolară nu are o valoare finită decât dacă punctul neutru este accesibil și legat la pământ sau dacă sistemul are un conductor neutru ; în caz contrar, impedanța homopolară are o valoare infinită pentru curenții care constituie sistemul homopolar.

d) Conductorul neutru fiind străbătut de toți curenții care formează sistemul homopolar (trei în cazul sistemului trifazat), dacă se ține seama de căderea de tensiune care se produce în acest conductor, impedanța sa poate fi înlocuită cu  $n$  impedanțe legate în serie și egale cu impedanța proprie a acestui conductor,  $n$  fiind numărul de faze al sistemului.

e) Totalitatea circuitelor receptoare pasive (iluminat, încălzit etc.), absorbind în mod normal o putere  $\underline{S}$  la tensiunea pe fază  $\underline{V}$ , cu un factor de putere  $\cos \varphi$ , poate fi asimilată cu o impedanță egală cu\*

$$\underline{Z}_d = \frac{3V^2}{S} (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Să considerăm acum cazul general al unei rețele electrice constituită din impedanțe disimetrice.

Fie un receptor trifazat, ale cărui circuite pe fază au respectiv impedanțele  $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{22}, \underline{Z}_{33}$ , cuplate într-un mod oarecare cu fazele vecine ; fie  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  curenții circulând în cele trei circuite și  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$  tensiunile la bornele fiecăreia. Între aceste mărimi se pot scrie relațiile

$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{13}\underline{I}_3,$$

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{23}\underline{I}_3,$$

$$\underline{V}_3 = \underline{Z}_{31}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{32}\underline{I}_2 + \underline{Z}_{33}\underline{I}_3.$$

Dacă se înlocuiesc  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$  și  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  prin componentele lor simetrice se obține, după ce s-au făcut toate calculele

$$3\underline{V}_h = \underline{I}_h[(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}) + 2(\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12})] + \underline{I}_d[(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12})] + \underline{I}_t[(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{22} + a^2\underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12})];$$

\* Această relație se deduce ușor, într-adevăr, din

$$\underline{S} = S (\cos \varphi + j \sin \varphi) = 3 \underline{V} \underline{I}^*.$$

Cum  $\underline{Z}_d \cdot \underline{I} = \underline{V}$ , rezultă

$$\underline{Z}_d = \frac{3 V^2}{S (\cos \varphi + j \sin \varphi)} = \frac{3 V^2}{S} (\cos \varphi - j \sin \varphi)$$

de unde se obține relația dată.



$$\begin{aligned}
3\underline{V}_d &= \underline{I}_h [(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{12} + a^2\underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12})] + \underline{I}_d [(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}) - \\
&- (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12})] + \underline{I}_i [(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}) + 2(\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12})]; \\
3\underline{V}_i &= \underline{I}_h [(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12})] + \underline{I}_d [(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{22} + a^2\underline{Z}_{33}) + \\
&+ 2(\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12})] + \underline{I}_i [(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}) - (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12})].
\end{aligned}$$

Notînd

$$\begin{aligned}
\underline{\xi}_h &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{33}), & \underline{\mu}_h &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12}), \\
\underline{\xi}_d &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_{11} + a\underline{Z}_{22} + a^2\underline{Z}_{33}), & \text{și} & \quad \underline{\mu}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{23} + a\underline{Z}_{31} + a^2\underline{Z}_{12}), \\
\underline{\xi}_i &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_{11} + a^2\underline{Z}_{22} + a\underline{Z}_{33}), & \underline{\mu}_i &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_{23} + a^2\underline{Z}_{31} + a\underline{Z}_{12});
\end{aligned}$$

aceste expresii definesc *componentele simetrice de calcul* ale impedanțelor și impedanțelor mutuale. Introducîndu-le în relațiile de mai sus se obține

$$\begin{aligned}
\underline{V}_h &= (\underline{\xi}_h + 2\underline{\mu}_h)\underline{I}_h + (\underline{\xi}_i - \underline{\mu}_i)\underline{I}_d + (\underline{\xi}_d - \underline{\mu}_d)\underline{I}_i \\
\underline{V}_d &= (\underline{\xi}_d - \underline{\mu}_d)\underline{I}_h + (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_d + (\underline{\xi}_i + 2\underline{\mu}_i)\underline{I}_i, \\
\underline{V}_i &= (\underline{\xi}_i - \underline{\mu}_i)\underline{I}_h + (\underline{\xi}_d + 2\underline{\mu}_d)\underline{I}_d + (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_i.
\end{aligned} \tag{8.35}$$

În acest caz deci, componentele simetrice, directe sau inverse, de curent și de tensiune, nu mai constituie sisteme independente.

Dacă sistemul este de constituție simetrică, adică dacă

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{33} \text{ și } \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31}$$

atunci,

$$\underline{\xi}_d = \underline{\xi}_i = \underline{\mu}_d = \underline{\mu}_i = 0$$

și sistemul (8.35) devine

$$\begin{aligned}
\underline{V}_h &= (\underline{\xi}_h + 2\underline{\mu}_h)\underline{I}_h, \\
\underline{V}_d &= (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_d, \\
\underline{V}_i &= (\underline{\xi}_h - \underline{\mu}_h)\underline{I}_i.
\end{aligned} \tag{8.36}$$



În cazul când curenții din rețea sînt echilibrați,  $I_h = I_i = 0$ , atunci și tensiunile la bornele circuitului sînt echilibrate, deoarece din relațiile (8.36) rezultă și  $V_h = V_i = 0$ .

Fie un circuit constituit din trei admitanțe proprii oarecare  $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{22}, \underline{Y}_{33}$ ; cuplate între ele prin admitanțele mutuale  $\underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{23}, \underline{Y}_{31}$ ; între curenții reali  $I_1, I_2, I_3$ , care străbat circuitul și tensiunile  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$  se pot scrie relațiile

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + \underline{Y}_{13}(\underline{V}_1 - \underline{V}_3),$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{22}\underline{V}_2 + \underline{Y}_{12}(\underline{V}_2 - \underline{V}_1) + \underline{Y}_{23}(\underline{V}_2 - \underline{V}_3),$$

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_{33}\underline{V}_3 + \underline{Y}_{13}(\underline{V}_3 - \underline{V}_1) + \underline{Y}_{23}(\underline{V}_3 - \underline{V}_2).$$

Înlocuind curenții și tensiunile prin componentele lor simetrice, făcînd calculul și definind *admitanțele de calcul* proprii și mutuale prin expresiile

$$\zeta_h = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{33}), \quad \underline{v}_h = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{23} + \underline{Y}_{13} + \underline{Y}_{12}),$$

$$\zeta_d = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{11} + a\underline{Y}_{22} + a^2\underline{Y}_{33}), \quad \text{și} \quad \underline{v}_d = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{23} + a\underline{Y}_{13} + a^2\underline{Y}_{12}),$$

$$\zeta_i = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{11} + a^2\underline{Y}_{22} + a\underline{Y}_{33}), \quad \underline{v}_i = \frac{1}{3}(\underline{Y}_{23} + a^2\underline{Y}_{13} + a\underline{Y}_{12})$$

se găsesc, între componentele simetrice de tensiune și curent, relațiile

$$\underline{I}_h = \zeta_h \underline{V}_h + \zeta_i \underline{V}_d + \zeta_d \underline{V}_i,$$

$$\underline{I}_d = \zeta_d \underline{V}_h + (\zeta_h + 3\underline{v}_h) \underline{V}_d + (\zeta_i - 3\underline{v}_i) \underline{V}_i,$$

$$\underline{I}_i = \zeta_i \underline{V}_h + (\zeta_d - 3\underline{v}_d) \underline{V}_d + (\zeta_h + 3\underline{v}_h) \underline{V}_i.$$

#### 8.4.3. EXPRESIA PUTERII ÎN REGIMUL DEZECHILIBRAT

8.4.3.1. **Puterea aparentă.** În calculul cu mărimi complexe, puterea aparentă se obține cu ajutorul relației

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ.$$

În sistemul trifazat, va exista pentru fiecare fază o expresie analogă, iar puterea aparentă a sistemului complet va fi egală cu suma puterilor aparente ale fiecărei faze în parte. Rezultă dar,

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = (P_1 + P_2 + P_3) + j(Q_1 + Q_2 + Q_3). \quad (8.37)$$



Scriind fazorii de tensiune și de curent, în funcție de coordonatele lor simetrice, se obține :

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_h + a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i,$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_h + a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i,$$

pentru tensiuni și

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i,$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_h + a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i,$$

pentru curenți.

Valoarea conjugată a lui  $a$  este  $a^2$  și valoarea conjugată a lui  $a^2$  este  $a$ ; în consecință, valorile conjugate ale vectorilor  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{I}_3$  vor fi :

$$\underline{I}_1^* = \underline{I}_h^* + \underline{I}_d^* + \underline{I}_i^*,$$

$$\underline{I}_2^* = \underline{I}_h^* + a \underline{I}_d^* + a^2 \underline{I}_i^*,$$

$$\underline{I}_3^* = \underline{I}_h^* + a^2 \underline{I}_d^* + a \underline{I}_i^*.$$

Introducînd aceste valori în relația (8.37) de mai sus și efectuînd calculul, se găsește

— pentru faza 1 :

$$\underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{U}_h \underline{I}_h^* + \underline{U}_d \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \underline{I}_i^* + \underline{U}_h (\underline{I}_d^* + \underline{I}_i^*) + \underline{U}_d (\underline{I}_h^* + \underline{I}_i^*) + \underline{U}_i (\underline{I}_h^* + \underline{I}_d^*);$$

— pentru faza 2 :

$$\underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \underline{U}_h \underline{I}_h^* + \underline{U}_d \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \underline{I}_i^* + \underline{U}_h (a \underline{I}_d^* + a^2 \underline{I}_i^*) + \underline{U}_d (a^2 \underline{I}_h^* + a \underline{I}_i^*) + \underline{U}_i (a \underline{I}_h^* + a^2 \underline{I}_d^*);$$

— pentru faza 3 :

$$\underline{U}_3 \underline{I}_3^* = \underline{U}_h \underline{I}_h^* + \underline{U}_d \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \underline{I}_i^* + \underline{U}_h (a^2 \underline{I}_d^* + a \underline{I}_i^*) + \underline{U}_d (a \underline{I}_h^* + a^2 \underline{I}_i^*) + \underline{U}_i (a^2 \underline{I}_h^* + a \underline{I}_d^*).$$

Adunînd aceste expresii, membru cu membru, se obține

$$S = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^* = 3 \underline{U}_h \underline{I}_h^* + 3 \underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3 \underline{U}_i \underline{I}_i^*, \quad (8.38)$$

ceilalți termeni dispărînd ca fiind factori comuni pe lângă suma

$$1 + a + a^2 = 0.$$



Punînd în evidență puterile active și reactive, se obține

$$\underline{S} = P + jQ = 3U_h I_h \cos \varphi_h + 3U_d I_d \cos \varphi_d + 3U_i I_i \cos \varphi_i + \\ + j(3U_h I_h \sin \varphi_h + 3U_d I_d \sin \varphi_d + 3U_i I_i \sin \varphi_i),$$

în care  $\varphi$  este defazajul dintre tensiune și curent pentru fiecare componentă simetrică. Rezultă dar, că în cazul unui sistem dezechilibrat, puterile activă și reactivă sînt date de relațiile

$$P = 3U_h I_h \cos \varphi_h + 3U_d I_d \cos \varphi_d + 3U_i I_i \cos \varphi_i$$

și

$$Q = 3U_h I_h \sin \varphi_h + 3U_d I_d \sin \varphi_d + 3U_i I_i \sin \varphi_i.$$

8.4.3.2. Puterea fluctuantă. Într-un sistem trifazat puterea fluctuantă este dată de relația, scrisă în mărimi complexe,

$$\underline{P}_f = \underline{U}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_3 \underline{I}_3, \quad (8.39)$$

în care cei trei termeni ai sumei reprezintă puterea fluctuantă de pe fazele respective.

Scriînd relația (8.39) în funcție de componentele simetrice și făcînd calculele se obține

— pentru faza 1

$$\underline{U}_1 \underline{I}_1 = \underline{U}_h \underline{I}_h + \underline{U}_d \underline{I}_d + \underline{U}_i \underline{I}_i + \underline{U}_h (\underline{I}_d + \underline{I}_i) + \underline{U}_d (\underline{I}_h + \underline{I}_i) + \underline{U}_i (\underline{I}_h + \underline{I}_d);$$

— pentru faza 2

$$\underline{U}_2 \underline{I}_2 = \underline{U}_h \underline{I}_h + a \underline{U}_d \underline{I}_d + a^2 \underline{U}_i \underline{I}_i + \underline{U}_h (a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i) + a^2 \underline{U}_d (\underline{I}_h + a \underline{I}_i) + \\ + a \underline{U}_i (\underline{I}_h + a^2 \underline{I}_d);$$

— pentru faza 3

$$\underline{U}_3 \underline{I}_3 = \underline{U}_h \underline{I}_h + a^2 \underline{U}_d \underline{I}_d + a \underline{U}_i \underline{I}_i + \underline{U}_h (a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i) + a \underline{U}_d (\underline{I}_h + a^2 \underline{I}_i) + \\ + a^2 \underline{U}_i (\underline{I}_h + a \underline{I}_d).$$

Adunînd aceste expresii membru cu membru se obține

$$\underline{P}_f = \underline{U}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_3 \underline{I}_3 = 3\underline{U}_h \underline{I}_h + 3\underline{U}_d \underline{I}_d + 3\underline{U}_i \underline{I}_d,$$

ceilalți termeni dispărînd ca fiind factori comuni pe lângă suma

$$1 + a + a^2 = 0.$$



#### 8.4.4. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE TRIFAZATE DEZECHILIBRATE

8.4.4.1. Problema generală. Fie un sistem energetic trifazat, pe care îl presupunem reprezentat printr-un circuit echivalent trifazat (fig. 8.32) format dintr-un generator avînd forțele electromotoare pe faze  $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$  și impedențele proprii, exprimate în coordonate simetrice,  $\underline{Z}_a, \underline{Z}_a, \underline{Z}_0$ , și dintr-un receptor avînd impedențele pe fază  $\underline{Z}_{R1}, \underline{Z}_{R2}, \underline{Z}_{R3}$  și tensiunile la borne, de asemenea pe fază,  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ ; linia de legătură are impedențele pe fază  $\underline{Z}_{L1}, \underline{Z}_{L2}, \underline{Z}_{L3}$ , iar conductorul neutru impedanța  $\underline{Z}_N$ .

Se presupune că între diversele faze nu există impedențe mutuale, acesta fiind cazul cel mai răspîndit în practică\*.

Fie  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  curenții care circulă prin diversele faze.

Problema de rezolvat constă în determinarea curenților din rețea și a tensiunilor la bornele receptorului.

Rezolvarea acestei probleme se face foarte comod cu ajutorul coordonatelor simetrice. Pentru aceasta este necesar să se găsească o serie de relații de legătură între diversele mărimi.

Fie  $\underline{I}_h, \underline{I}_a, \underline{I}_i$  componentele simetrice ale curenților și

$\underline{V}_h, \underline{V}_a, \underline{V}_i$  componentele simetrice ale tensiunilor la bornele receptorului.

Dacă înglobăm impedanța liniei în impedanța receptorului scriind

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + \underline{Z}_R,$$

aplicînd legea lui OHM fiecărui circuit în parte, se obține :

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_1 &= \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = \underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_a + \underline{I}_i), \\ \underline{V}_2 &= \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = \underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2 \underline{I}_a + a \underline{I}_i), \\ \underline{V}_3 &= \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3 = \underline{Z}_3(\underline{I}_h + a \underline{I}_a + a^2 \underline{I}_i). \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

Calculînd componentele simetrice ale tensiunii pe fază și ținînd seama de relațiile (8.40) se obține :

$$\begin{aligned} \underline{V}_h &= \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) = \frac{1}{3}[\underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_a + \underline{I}_i) + \underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2 \underline{I}_a + a \underline{I}_i) + \underline{Z}_3(\underline{I}_h + a \underline{I}_a + a^2 \underline{I}_i) \\ &+ a^2 \underline{I}_i)] = \frac{1}{3}[(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + a^2 \underline{Z}_2 + a \underline{Z}_3)\underline{I}_a + (\underline{Z}_1 + a \underline{Z}_2 + a^2 \underline{Z}_3)\underline{I}_i] \end{aligned}$$

\* În cazul cînd impedențele mutuale nu pot fi neglijate față de impedențele proprii ale diverselor faze, pentru calculul circuitelor trifazate se utilizează relațiile (8.35) stabilite în paragraful 8.4.2.

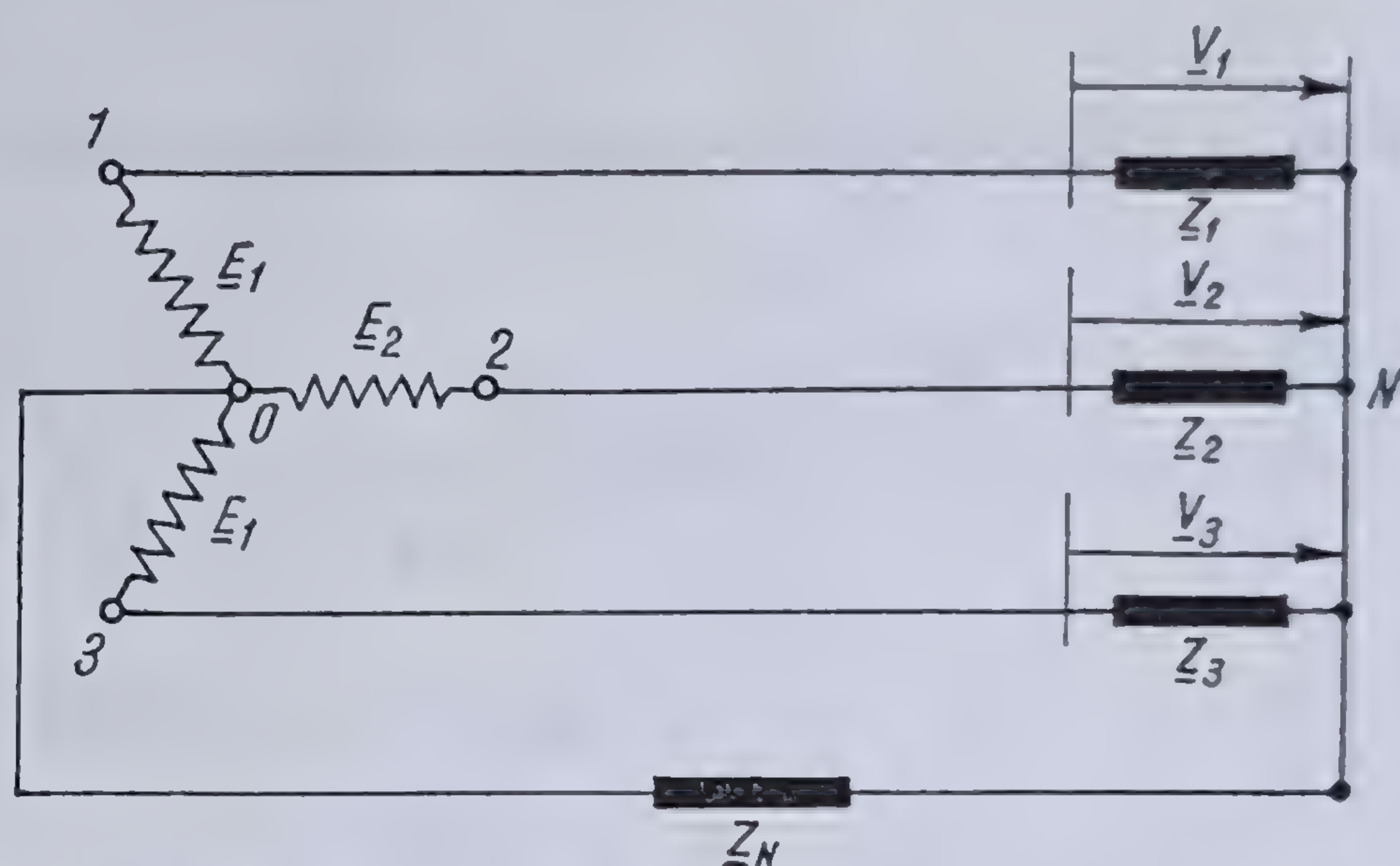


Fig. 8.32. Circuitul echivalent al unui sistem energetic trifazat.



$$V_d = \frac{1}{3}(V_1 + aV_2 + a^2V_3) = \frac{1}{3}[Z_1(I_h + I_d + I_i) + aZ_2(I_h + a^2I_d + aI_i) + a^2Z_3(I_h + aI_d + a^2I_i)] = \frac{1}{3}[(Z_1 + aZ_2 + a^2Z_3)I_h + (Z_1 + Z_2 + Z_3)I_d + (Z_1 + a^2Z_2 + aZ_3)I_i] \quad (8.41)$$

$$V_i = \frac{1}{3}(V_1 + a^2V_2 + aV_3) = \frac{1}{3}[Z_1(I_h + I_d + I_i) + a^2Z_2(I_h + a^2I_d + aI_i) + aZ_3(I_h + aI_d + a^2I_i)] = \frac{1}{3}[(Z_1 + a^2Z_2 + aZ_3)I_h + (Z_1 + aZ_2 + a^2Z_3)I_d + (Z_1 + Z_2 + Z_3)I_i]$$

Dacă se notează

$$\left. \begin{aligned} \underline{\tilde{Z}}_h &= \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_3), \\ \underline{\tilde{Z}}_d &= \frac{1}{3}(Z_1 + aZ_2 + a^2Z_3), \\ \underline{\tilde{Z}}_i &= \frac{1}{3}(Z_1 + a^2Z_2 + aZ_3), \end{aligned} \right\} \quad (8.42)$$

atunci relațiile (8.41) devin \*

$$\left. \begin{aligned} V_h &= \underline{\tilde{Z}}_h I_h + \underline{\tilde{Z}}_i I_d + \underline{\tilde{Z}}_d I_i, \\ V_d &= \underline{\tilde{Z}}_d I_h + \underline{\tilde{Z}}_h I_d + \underline{\tilde{Z}}_i I_i, \\ V_i &= \underline{\tilde{Z}}_i I_h + \underline{\tilde{Z}}_d I_d + \underline{\tilde{Z}}_h I_i. \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

Relațiile (8.42) se numesc *impedanțele de calcul* ale sistemului trifazat dat \*\*.

Curenții  $I_h$ ,  $I_d$  și  $I_i$  străbătînd și bobinajele generatorului, vor produce căderi de tensiune în acestea; componentele simetrice ale tensiunilor la bornele generatorului vor fi

$$\left. \begin{aligned} U_h &= E_h - Z_0 I_h, \\ U_d &= E_d - Z_s I_d, \\ U_i &= E_i - Z_a I_i, \end{aligned} \right\} \quad (8.44)$$

\* Aceste ecuații se puteau obține direct din ecuațiile (8.35) în care se face, conform ipotezei adoptate,  $\mu_h = \mu_d = \mu_i = 0$ .

\*\* Ele sînt identice cu impedanțele  $\xi_h$ ,  $\xi_d$  și  $\xi_i$  stabilite în paragraful 8.4.2. Li s-a dat acest nume, deoarece ele nu corespund nici unei realități fizice. Într-adevăr un vector impedanță nu poate fi reprezentat decît în semiplanul pozitiv (cadranele I și IV); sistemele de impedanțe de calcul însă, din cauza operatorului  $a$  care intră în structura lor, pot ocupa orice poziție în plan. Această descompunere este deci numai formală, foarte comodă pentru calcule.



$\underline{E}_h$ ,  $\underline{E}_d$  și  $\underline{E}_i$  fiind componentele simetrice ale forțelor electromotoare ale generatorului.

Sistemele de tensiuni  $S(\underline{U})$  de la bornele generatorului și  $S(\underline{V})$  de la bornele receptorului formează două sisteme de fazori care au aceleași virfuri și origini diferite. Se poate scrie deci

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_h &= \underline{V}_h + \underline{V}_N, \\ \underline{U}_d &= \underline{V}_d, \\ \underline{U}_i &= \underline{V}_i, \end{aligned} \right\} \quad (8.45)$$

unde  $\underline{V}_N$  este căderea de tensiune în conductorul neutru și care se poate scrie

$$\underline{V}_N = \underline{Z}_N \underline{I}_N = \underline{Z}_N (\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = 3 \underline{Z}_N \underline{I}_h. \quad (8.46)$$

Ținând seama de relațiile (8.43), (8.44), (8.46) și ordonând în raport cu componentele simetrice ale curenților din circuit, relațiile (8.45) pot fi scrise

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_0 + 3 \underline{Z}_N) \underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_d \underline{I}_i, \\ \underline{E}_d &= \underline{\mathcal{Z}}_d \underline{I}_h + (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_s) \underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_i, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_d \underline{I}_d + (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_a) \underline{I}_i. \end{aligned} \quad (8.47)$$

Sistemul de ecuații (8.47) este sistemul de ecuații cel mai general ce se poate scrie între componentele simetrice ale unei rețele electrice trifazate serie. El corespunde unui generator de *putere finită*\*.

Sistemul de ecuații (8.47) permite găsirea componentelor simetrice ale curenților din rețea și apoi, cu ajutorul relațiilor (8.43), se pot găsi componentele simetrice ale tensiunilor la bornele receptorului.

Folosind relațiile (8.10) se vor găsi, în sfârșit, valorile reale ale curenților care circulă în rețea și în consecință, ale tensiunilor în orice punct al rețelei.

**OBSERVAȚIE:** Relațiile (8.43) se pot scrie fără nici o dificultate folosind regula produsului simbolic, între două sisteme trifazate simetrice\*\*.

**8.4.4.2. Cazuri particulare.** Particularizând ecuațiile (8.47) se poate rezolva orice problemă ce apare în practică, după cum urmează:

1. Rețea electrică trifazată, cu conductor neutru, alimentată de o sursă de putere infinită. În acest caz

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_s = \underline{Z}_a = 0$$

și ecuațiile (8.47) devin

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= (\underline{\mathcal{Z}}_h + 3 \underline{Z}_N) \underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_d \underline{I}_i = \underline{V}_h + \underline{V}_N, \\ \underline{E}_d &= \underline{Z}_d \underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_h \underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_i = \underline{V}_d, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_h + \underline{\mathcal{Z}}_d \underline{I}_d + \underline{\mathcal{Z}}_h \underline{I}_i = \underline{V}_i. \end{aligned}$$

\* S-a dat această denumire deoarece curenții ce străbat bobinajele sale influențează tensiunea la borne, spre deosebire de generatorul de *putere infinită*, când această influență este nulă. În practică, primul caz corespunde situației când puterea generatorului este de același ordin de mărime cu puterea receptorului și al doilea caz, când puterea generatorului este foarte mare față de aceea a receptorului.

\*\* Vezi 8.3.5.3



2. Rețea electrică trifazată, fără conductor neutru, cu sursă de putere infinită. În acest caz

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_s = \underline{Z}_a = 0, \quad \underline{Z}_N = \infty \quad \text{și} \quad \underline{I}_h = 0.$$

Ecuatiile (8.47) devin

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_a + \underline{\mathcal{Z}}_a \underline{I}_i = \underline{V}_h, \\ \underline{E}_a &= \underline{\mathcal{Z}}_h \underline{I}_a + \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_i = \underline{V}_a, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathcal{Z}}_a \underline{I}_a + \underline{\mathcal{Z}}_h \underline{I}_i = \underline{V}_i. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Din acest sistem de ecuații, ultimele două servesc pentru determinarea celor două componente simetrice ale curentului, iar prima, pentru determinarea componentei homopolare a tensiunii, în ipoteza că nu se cunoaște componenta homopolară a forței electromotoare a generatorului.

3. Rețea electrică trifazată, fără conductor neutru, cu sursă de putere finită. În acest caz

$$\underline{Z}_n = \infty \quad \text{și} \quad \underline{I}_h = 0$$

și ultimele două ecuații ale sistemului (8.48) se vor scrie

$$\begin{aligned} \underline{E}_a &= (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_s) \underline{I}_a + \underline{\mathcal{Z}}_i \underline{I}_i = \underline{V}_a, \\ \underline{E}_i &= \underline{\mathcal{Z}}_a \underline{I}_a + (\underline{\mathcal{Z}}_h + \underline{Z}_a) \underline{I}_i = \underline{V}_i. \end{aligned} \quad (8.49)$$

4. Dacă generatorul care alimentează rețeaua este simetric și echilibrat, așa cum este în gen ral cazul în practică, atunci

$$\underline{E}_h = \underline{E}_i = 0 \quad \text{și} \quad \underline{E}_a = \underline{E}.$$

5. Dacă la un sistem trifazat, fără conductor neutru, se cunosc numai tensiunile de linie  $\underline{U}'_1, \underline{U}'_2, \underline{U}'_3$  la receptor și deci și componentele lor simetrice  $\underline{U}'_a$  și  $\underline{U}'_i$ , utilizând relațiile (8.15) și (8.16) se găsește

$$\underline{V}_a = j \frac{\underline{U}'_a}{\sqrt{3}} \quad \text{și} \quad \underline{V}_i = -j \frac{\underline{U}'_i}{\sqrt{3}}$$

și deci, pentru rezolvarea problemei, pot fi utilizate ecuațiile (4.48).

**8.4.4.3. Exemplu de aplicație a metodei.** Pentru ilustrarea metodei de mai sus, să studiem următoarea problemă :

Un cuplor electric trifazat este alimentat de un transformator de 3500 kVA, 2200/200 V, 50 Hz, cu conectarea în stea pe înaltă tensiune și în triunghi pe joasă tensiune. La un moment dat, caracteristicile cuplorului pot fi înlocuite cu trei rezistențe legate în stea, de 0,010  $\Omega$ , 0,010  $\Omega$  și 0,001  $\Omega$ , respectiv



pe fazele  $R$ ,  $S$  și  $T$ . Dacă reactanța transformatorului este de 30 %, care este intensitatea curentului în cei trei electrozi, neglijându-se rezistențele transformatorului și impedanțele conductoarelor? Care este supraincărcarea transformatorului?

Reactanța transformatorului fiind dată în procente, valoarea ei se calculează cu ajutorul relației\*

$$X = \frac{\epsilon}{100} \cdot \frac{U^2}{S} = \frac{30}{100} \cdot \frac{200^2}{3500 \cdot 10^3} = 3,43 \times 10^{-3} \Omega.$$

Circuitul electric echivalent al problemei devine cel din figura 8.33.

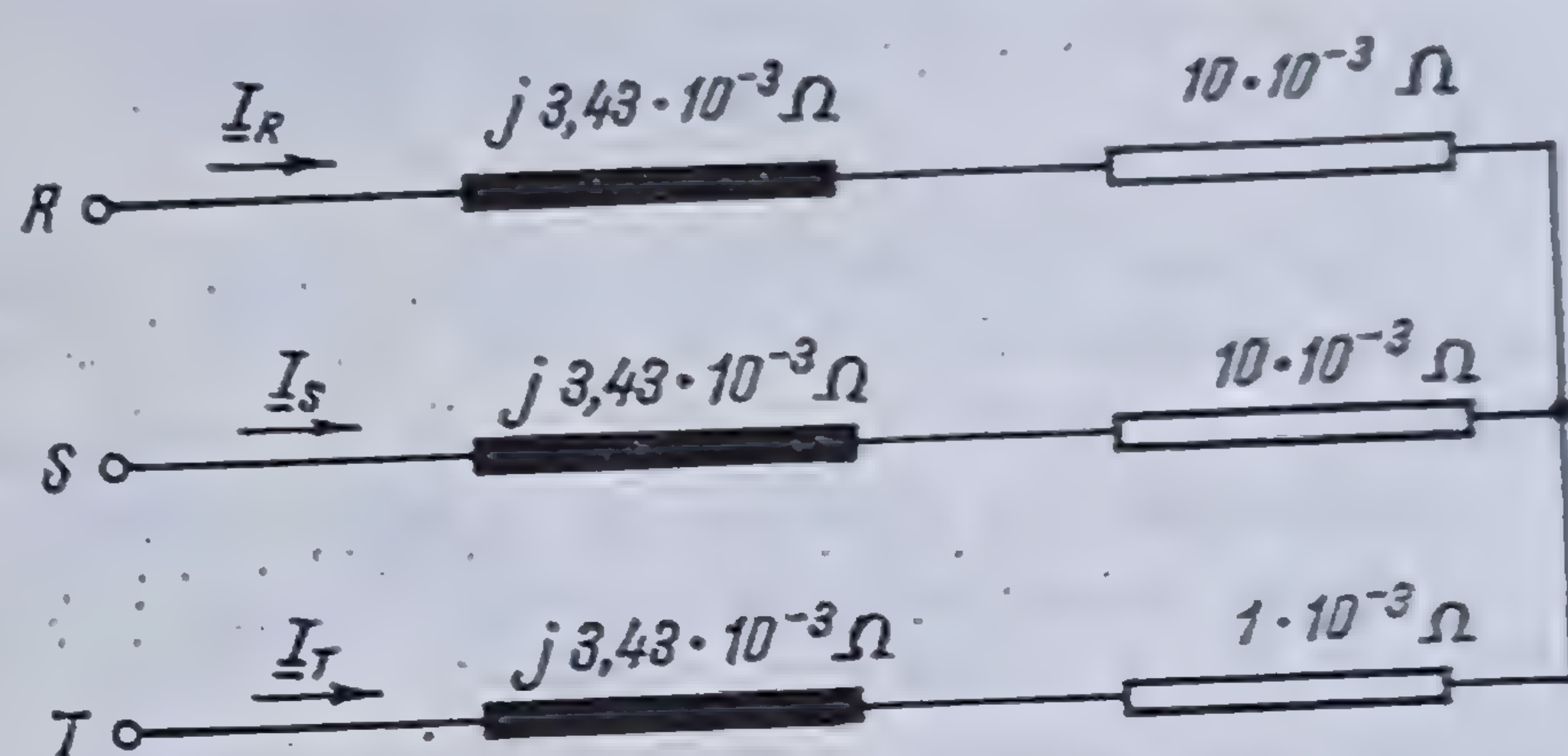
Calculând impedanțele de calcul corespunzătoare rezistențelor utilizării, se găsește :

$$\underline{Z}_R = 7 \cdot 10^{-3} \Omega;$$

$$\underline{Z}_S = (1,5 + j 2,6) 10^{-3} \Omega;$$

$$\underline{Z}_T = (1,5 - j 2,6) 10^{-3} \Omega.$$

Pentru găsirea componentelor simetrice ale curentului se aplică ecuațiile (8.49) ținând seama că pentru transformator



Fiig. 8.33. Circuitul echivalent al grupului transformator-cuptor.

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = jX = j 3,43 \cdot 10^{-3} \Omega.$$

Sistemul tensiunilor de alimentare fiind simetric și echilibrat, rezultă

$$\underline{V}_d = j \frac{U'_d}{\sqrt{3}} = j \frac{200}{\sqrt{3}} = j 115,5 \text{ V}; \quad \underline{V}_i = 0$$

astfel, încît cu datele particulare ale problemei, sistemul de ecuații (8.49) devine

$$\begin{cases} j 115,5 = (7 + j 3,43) 10^{-3} \underline{I}_d + (1,5 - j 2,6) 10^{-3} \underline{I}_i \\ 0 = (1,5 + j 2,6) 10^{-3} \underline{I}_d + (7 + j 3,43) 10^{-3} \underline{I}_i \end{cases}$$

care rezolvat dă

$$\underline{I}_d = 8,94 + j 12,50 \text{ kA}; \quad \underline{I}_i = 5,42 - j 3,07 \text{ kA}.$$

Curenții căutați în cele trei faze vor fi

$$\underline{I}_R = \underline{I}_d + \underline{I}_i = 14,36 + j 9,43 \text{ kA},$$

$$\underline{I}_S = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i = 6,30 - j 7,76 \text{ kA},$$

$$\underline{I}_T = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i = -20,66 - j 1,67 \text{ kA}.$$

\* Vezi 6.3.4.



Puterea absorbită de cuplor în momentul considerat se calculează cu relația

$$P = R_R |\underline{I}_R|^2 + R_S |\underline{I}_S|^2 + R_T |\underline{I}_T|^2 = 4390 \text{ kW},$$

ceea ce corespunde unei supraîncărcări de

$$\frac{4390 - 3500}{3500} \times 100 = 25,43 \%$$

#### 8.4.5. CALCULUL CURENȚILOR DE SCURTCIRCUIT ÎN REȚELELE ELECTRICE TRIFAZATE

**8.4.5.1. Generalități.** Cînd două elemente ale unui circuit electric, care în mod normal sînt izolate din punct de vedere electric, capătă, dintr-o cauză oarecare, o legătură galvanică directă sau prin intermediul unei impedanțe, se spune că s-a produs un scurtcircuit.

Cele două elemente ale circuitului prezentau, înainte de scurtcircuit, o impedanță infinită una față de cealaltă și deci, deși ele se găseau la potențiale diferite, nu exista nici o circulație de curent; în momentul scurtcircuitului această impedanță devine finită sau chiar se anulează; va rezulta astfel o circulație de curent a cărui intensitate poate fi, teoretic, oricît de mare. Practic ea este limitată la anumite valori de către constantele circuitului.

Intensitatea acestui curent, care se numește *curentul de scurtcircuit*, este în general mai mare decît cea a *curentului normal* care exista în circuit înainte de defect și a cărui mărime depinde de sarcina rețelei în acel moment.

Curentul de scurtcircuit se suprapune peste curentul normal.

Rezultă dar, că în timpul defectului, surplusul de curent cerut de defect va fi furnizat tot de sursele de energie care alimentează circuitul și care vor fi astfel suprasolicitate. În același timp poate apărea și o schimbare a circulației curenților în diversele laturi ale circuitului considerat, care rezultă din suprapunerea celor doi curenți.

Determinarea acestor curenți apare deci, ca o problemă de primă importanță, deoarece pe baza cunoașterii mărimii și circulației curenților de scurtcircuit se va putea vedea solicitarea suplimentară la care sînt supuse mașinile electrice și se va putea stabili planul de limitare și localizare a defectelor. Din cunoașterea acestor curenți se vor putea dimensiona atît sursele de producere a energiei electrice, cît mai ales aparatele de separare a elementelor defecte, și deci de întrerupere a lor — întreruptoarele electrice. De asemenea, se vor putea determina efectele, luîndu-se măsurile de siguranță necesare unei bune funcționări a instalațiilor, prevenindu-se efectele mecanice datorite forțelor ce se dezvoltă în diversele părți, din cauza curenților de scurtcircuit.

Calculul curenților de scurtcircuit nu este o operație simplă și el devine destul de laborios, atunci cînd configurația rețelei este mai complicată.

Curentul de scurtcircuit  $\underline{I}$  care, produs de sursa de energie avînd tensiunea pe fază la borne  $\underline{U}$ , se scurge spre defect pe drumul de scurtcircuit de impedanță  $\underline{Z}$ , este dat de relația

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \quad (8.50)$$



în care  $\underline{Z}$  este suma impedanțelor circuitului între generator și locul defectului.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{\text{generator}} + \underline{Z}_{\text{transformator}} + \underline{Z}_{\text{linie}} + \underline{Z}_{\text{arc}} + \dots$$

În realitate, problema nu se prezintă atât de simplu. Într-adevăr, rețelele moderne comportă sisteme de centrale electrice interconectate, cu tensiuni și puteri diferite, linii electrice de transmitere a energiei electrice de construcții diferite, transformatoare cu diverse conectări etc.

Oricare ar fi configurația rețelei, principiul de calcul al curenților de scurtcircuit constă în a reduce rețeaua, prin transformări în circuite echivalente, la o rețea simplă căreia să i se poată aplica relația de calcul (8.50).

Un defect într-o rețea trifazată simetrică face ca aceasta să devină în general dezechilibrată. O problemă de scurtcircuit conduce deci, la studiul unei rețele dezechilibrate, care se poate face cu ajutorul coordonatelor simetrice. Rezultă astfel o metodă de studiu a problemelor de scurtcircuit, cu ajutorul coordonatelor simetrice.

În rezolvarea problemelor de scurtcircuit, se urmărește găsirea curenților de scurtcircuit, independent de curenții normali din rețea. Situația de funcționare a rețelei în timpul scurtcircuitului se obține, suprapunând cele două stări de funcționare a rețelei.

După natura impedanțelor mașinilor electrice din rețea introduse în calcul, se va obține valoarea curenților de scurtcircuit inițiali sau permanenți.

**8.4.5.2. Principiul metodei de calcul a curenților de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice.** Metoda de calcul a curenților de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice se bazează pe descompunerea rețelei reale, în trei rețele elementare fictive, fiecare din acestea fiind străbătută de curenți simetrici și echilibrați, corespunzând componentelor simetrice ale sistemului de curenți dezechilibrat, dat. Aceste rețele vor avea fiecare o anumită impedanță de fază, care depinde de succesiunea de fază a sistemului echilibrat considerat.

Pentru construirea acestor rețele, se utilizează aceleași premise stabilite pentru impedanțele unei rețele trifazate\*.

Se vor obține astfel, în cazul sistemelor trifazate, trei rețele fictive, corespunzătoare celor trei secvențe :

*Rețeaua directă sau de secvență 1*, care este în toate privințele identică cu rețeaua reală considerată; valorile rezistențelor și ale reactanțelor sînt acelea care se obțin prin regulile obișnuite de calcul sau prin determinări experimentale. Orice mașină sincronă trebuie să fie considerată ca o sursă de forță electromotoare care variază în mărime și fază în funcție de repartitia puterilor active și reactive, corespunzătoare momentului imediat înainte de apariția defectului. La locul defectului, va apărea o diferență de potențial a componentei directe, a cărei mărime depinde de natura defectului. Valoarea exactă a acestei diferențe de potențial poate fi calculată și va fi determinată în cele ce urmează.

*Rețeaua inversă sau de secvență 2* este în general identică cu rețeaua de secvență directă, numărul elementelor fiind întotdeauna același. Impedanțele constitutive ale acestei rețele sînt identice cu acelea ale rețelei directe pentru elementele statice și diferite pentru mașinile rotative din rețea. Valorile lor se determină prin calcul sau experimental. Deoarece, generatoarele sinerone simetrice nu produc decît componenta directă a forței electromotoare, această

\* Vezi paragraful 8.4.2.



în care  $Z$  este suma impedanțelor circuitului între generator și locul defectului.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{\text{generator}} + \underline{Z}_{\text{transformator}} + \underline{Z}_{\text{linie}} + \underline{Z}_{\text{afec}} + \dots$$

În realitate, problema nu se prezintă atât de simplu. Într-adevăr, rețelele moderne comportă sisteme de centrale electrice interconectate, cu tensiuni și puteri diferite, linii electrice de transmitere a energiei electrice de construcții diferite, transformatoare cu diverse conectări etc.

Oricare ar fi configurația rețelei, principiul de calcul al curenților de scurt-circuit constă în a reduce rețeaua, prin transformări în circuite echivalente, la o rețea simplă căreia să i se poată aplica relația de calcul (8.50).

Un defect într-o rețea trifazată simetrică face ca aceasta să devină în general dezechilibrată. O problemă de scurtcircuit conduce deci, la studiul unei rețele dezechilibrate, care se poate face cu ajutorul coordonatelor simetrice. Rezultă astfel o metodă de studiu a problemelor de scurtcircuit, cu ajutorul coordonatelor simetrice.

În rezolvarea problemelor de scurtcircuit, se urmărește găsirea curenților de scurtcircuit, independent de curenții normali din rețea. Situația de funcționare a rețelei în timpul scurtcircuitului se obține, suprapunând cele două stări de funcționare a rețelei.

După natura impedanțelor mașinilor electrice din rețea introduse în calcul, se va obține valoarea curenților de scurtcircuit inițiali sau permanenți.

**8.4.5.2. Principiul metodei de calcul a curenților de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice.** Metoda de calcul a curenților de scurtcircuit cu ajutorul coordonatelor simetrice se bazează pe descompunerea rețelei reale, în trei rețele elementare fictive, fiecare din acestea fiind străbătută de curenți simetrici și echilibrați, corespunzând componentelor simetrice ale sistemului de curenți dezechilibrat, dat. Aceste rețele vor avea fiecare o anumită impedanță de fază, care depinde de succesiunea de fază a sistemului echilibrat considerat.

Pentru construirea acestor rețele, se utilizează aceleași premise stabilite pentru impedanțele unei rețele trifazate\*.

Se vor obține astfel, în cazul sistemelor trifazate, trei rețele fictive, corespunzătoare celor trei secvențe :

*Rețeaua directă sau de secvență 1*, care este în toate privințele identică cu rețeaua reală considerată; valorile rezistențelor și ale reactanțelor sînt acelea care se obțin prin regulile obișnuite de calcul sau prin determinări experimentale. Orice mașină sincronă trebuie să fie considerată ca o sursă de forță electromotoare care variază în mărime și fază în funcție de repartitia puterilor active și reactive, corespunzătoare momentului imediat înainte de apariția defectului. La locul defectului, va apărea o diferență de potențial a componentei directe, a cărei mărime depinde de natura defectului. Valoarea exactă a acestei diferențe de potențial poate fi calculată și va fi determinată în cele ce urmează.

*Rețeaua inversă sau de secvență 2* este în general identică cu rețeaua de secvență directă, numărul elementelor fiind întotdeauna același. Impedanțele constitutive ale acestei rețele sînt identice cu acelea ale rețelei directe pentru elementele statice și diferite pentru mașinile rotative din rețea. Valorile lor se determină prin calcul sau experimental. Deoarece, generatoarele sincrone simetrice nu produc decît componenta directă a forței electromotoare, această

\* Vezi paragraful 8.4.2.



rețea nu va conține sursă de forță electromotoare, cu excepția aceleia care apare la locul defectului. Forțe electromotoare reale de secvență inversă pot să existe în această rețea, în cazul când în rețeaua reală sînt instalate compensatoare ale componentelor inverse de tensiune.

Rețeaua homopolară sau de secvență 0 va fi de asemenea lipsită de forță electromotoare internă, circulația curentului rezultînd din diferența de potențial ce apare la locul defectului. Impedanțele acestei rețele sînt fundamental diferite de acelea din rețelele precedente. Ele se determină fie prin calcul, cu ajutorul unor formule bine stabilite, fie experimental.

Prin această descompunere, o rețea dezechilibrată poate fi studiată ca și rețelele simetrice și echilibrate, considerîndu-se numai o fază și un fir neutru real sau fictiv.

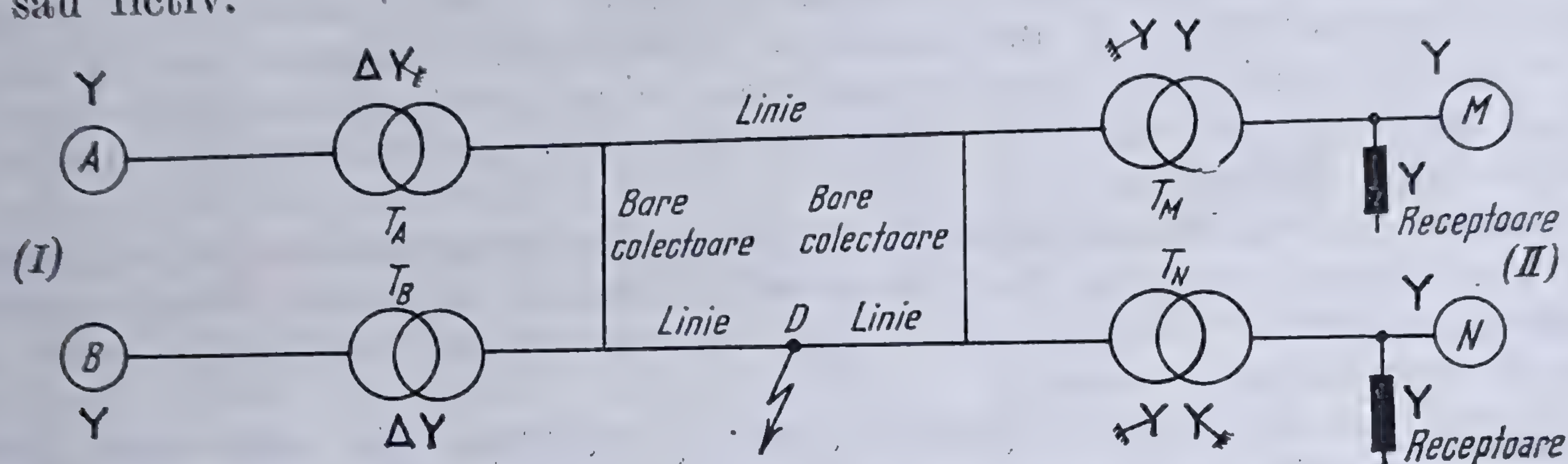


Fig. 8.34. Rețea electrică trifazată complexă.

La fiecare din aceste rețele, diversele impedanțe constituie unul din conductoarele circuitului — faza — conductorul de întoarcere fiind un conductor fictiv — conductorul neutru — de impedanță nulă.

Pentru ilustrarea celor de mai sus și pentru a vedea modul cum se aplică această metodă într-un caz real, fie o rețea complexă alcătuită din două linii de transmisie de energie electrică, funcționînd în paralel, dintr-o serie de alternatoare, diverse transformatoare și la una din extremități, din receptoare (fig. 8.34).

Se presupune că alternatoarele A și B nu au neutrul legat la pămînt, în schimb, unul din transformatoare (ambele cu conexiunea triunghi-stea) are neutrul pus la pămînt. La sosire (extremitatea II) alternatoarele respective au de asemenea neutrul izolat, în schimb transformatoarele (cu conexiunea stea-stea) au ambele neutrul pus la pămînt, pe partea de înaltă tensiune și numai la unul și pe partea de joasă tensiune.

La extremitatea (II) există și o serie de receptoare legate în stea, însă cu neutrul nelegat la pămînt.

Se presupune că în punctul D pe linie se produce un defect oarecare.

Cele trei rețele fictive corespunzătoare uneia din faze vor fi reprezentate după cum se arată în figura 8.35.

Rețeaua de secvență directă (a) cuprinde toate impedanțele existente ale rețelei reale, precum și forțele electromotoare ale alternatoarelor.

Rețeaua de secvență inversă (b) cuprinde aceleași impedanțe, ca și precedenta, pentru linii și transformatoare și impedanțele corespunzătoare pentru mașinile rotative. Nu va cuprinde însă forțe electromotoare.

Rețeaua homopolară (c) va cuprinde numai impedanțele corespunzătoare liniilor și transformatoarelor care au neutrul pus la pămînt; de asemenea nu va cuprinde forțe electromotoare.

În toate aceste rețele fictive, sensul de circulație al curenților este același și este sensul curenților din rețeaua de secvență directă, de la surse către defect.



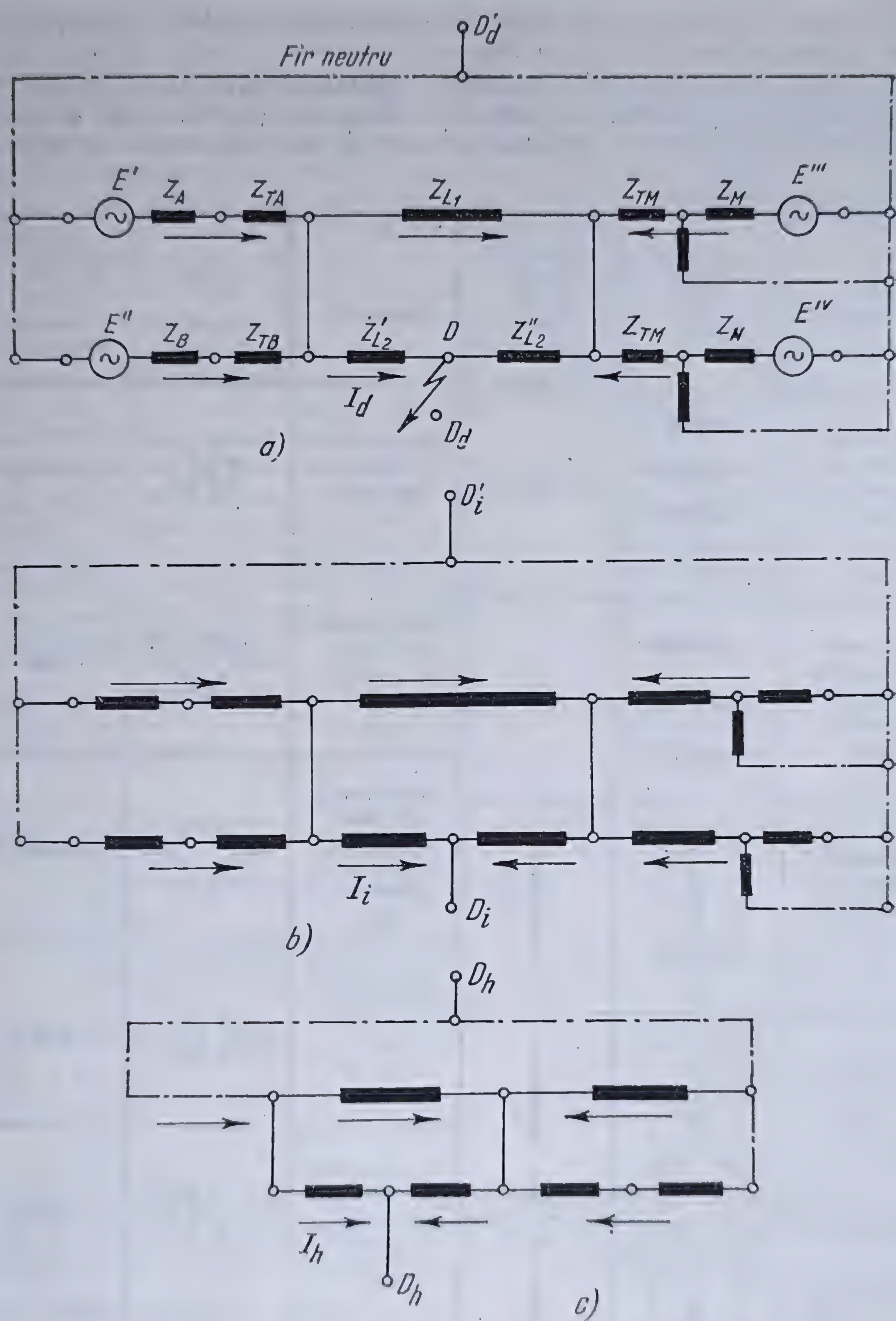


Fig. 8.35. Cele trei rețele fictive ale rețelei electrice date.

Circuitele echivalente ale diverselor tipuri de elemente care intră în componența unei rețele pot fi reprezentate, în general, prin scheme simple (fig. 8.36).

*Impedanțele serie*, legate pe diversele faze, dacă sînt simetrice și dacă există un conductor neutru, au aceeași valoare atît pentru rețeaua directă, cît



și pentru rețelele inversă și homopolară. Rețeaua homopolară este reprezentată printr-o impedanță simplă (fig. 8.36, a).

Dacă nu există conductor neutru, impedanțele directă și inversă rămân mai departe egale; în schimb impedanța homopolară este infinită. Reprezentarea acestora se face printr-o impedanță, care nu este conectată la rețea (fig. 8.36, b).

<i>Felul impedanței</i>	<i>Schema în trifazat</i>	<i>Circuitul echivalent pentru rețeaua homopolară</i>	<i>Felul impedanței</i>	<i>Schema în trifazat</i>	<i>Circuitul echivalent pentru rețeaua homopolară</i>
<i>Impedanțe în serie cu conductor neutru (a)</i>			<i>Transformator triunghi-triunghi (f)</i>		
<i>Impedanțe în serie fără conductor neutru (b)</i>			<i>Transformator stea-stea cu neutrele izolate (g)</i>		
<i>Impedanțe în derivație cu neutrul legat (c)</i>			<i>Transformator stea-stea cu neutrele legate la pământ (h)</i>		
<i>Impedanțe în derivație cu neutrul izolat (d)</i>			<i>Transformator stea-triunghi cu neutrul legat la pământ (i)</i>		
<i>Impedanțe în derivație cu neutrul legat printr-o impedanță (e)</i>			<i>Transformator stea-triunghi cu neutrul izolat (j)</i>		
			<i>Transformator stea-stea cu unul din neutre legate la pământ celălalt izolat (k)</i>		

Fig. 8.36. Circuitele echivalente ale diverselor impedanțe în sistemul homopolar.



Impedanțele derivație, legate pe diversele faze, dacă sînt simetrice și au neutrul legat la pămînt, sau la un conductor de întoarcere, au — ca și în cazul precedent — aceeași valoare pentru cele trei rețele, directă, inversă și homopolară (fig. 8.36, c). În cazul că neutrul nu este legat la pămînt, sau sistemul este în triunghi, atunci impedanța rețelei homopolare este infinită și este reprezentată printr-o impedanță deconectată (fig. 8.36, d).

Dacă însă neutrul este legat la pămînt printr-o impedanță  $Z_N$  în schema echivalentă, ea se ia de trei ori mai mare (fig. 8.36, e).

Transformatoarele cu 2 înfășurări pot fi reprezentate prin cuadripoli în T, în care cele două impedanțe în serie reprezintă impedanțele de dispersii ale transformatorului, iar derivația reprezintă admitanța de excitare a acestuia. În problemele de scurtcircuit, aceasta din urmă poate fi neglijată și circuitul echivalent este reprezentat numai prin impedanțele în serie (un dipol). În figurile 8.36, f — k, sînt arătate circuitele echivalente ale transformatoarelor cu două înfășurări, corespunzînd diverselor situații ce se prezintă în practică. Aceste circuite sînt date pentru sistemul homopolar, el fiind singurul care prezintă situații diferite. Pentru sistemele direct și invers, impedanțele respective sînt egale și există întotdeauna, oricare ar fi conectarea transformatorului.

În ceea ce privește reactanțele diverselor elemente care intră în constituția unei rețele, valoarea acestora depinde de o serie de parametri constructivi (tipul de construcție, frecvența etc.). Dăm cîteva valori pentru cele mai importante elemente de rețea :

#### — generatoare sincrone

Felul generatorului sincron	$x_s \Omega$	$x_d \Omega$	$x_0 \Omega$
turbogenerator	0,95—1,45	0,07—0,17	0,01—0,14
generator cu poli aparenti	0,60—1,45	0,13—0,35	0,02—0,20
hidrogenerator	0,60—1,45	0,30—0,70	0,04—0,22

#### — transformatoare

Felul transformatorului	$x\%$	$r\%$
de distribuție	3—5	0,35—0,50
de rețea	5—7	
pînă la 60 kV	5—7	
de 110 kV	6—9	
de 220 kV	10—14	

**OBSERVAȚIE:** În ceea ce privește reactanța homopolară, aceasta depinde de foarte mulți factori și, în general, nu poate fi determinată decît aproximativ; în calcule se ia egală cu reactanța directă.

#### — linii aeriene

Felul liniei	$\frac{x_h}{x_d}$	$x_d = x_i \Omega/\text{km}$
linie simplă, fără conductor de protecție	3,5	0,4
linie dublă, fără conductor de protecție	5,5	
linie simplă, cu conductor de protecție	2	
linie dublă, cu conductor de protecție	3	



și pentru rețelele inversă și homopolară. Rețeaua homopolară este reprezentată printr-o impedanță simplă (fig. 8.36, a).

Dacă nu există conductor neutru, impedanțele directă și inversă rămân mai departe egale; în schimb impedanța homopolară este infinită. Reprezentarea acestora se face printr-o impedanță, care nu este conectată la rețea (fig. 8.36, b).

Felul impedanței	Schema în trifazat	Circuitul echivalent pentru rețeaua homopolară	Felul impedanței	Schema în trifazat	Circuitul echivalent pentru rețeaua homopolară
Impedanțe în serie cu conductor neutru (a)			Transformator triunghi-triunghi (f)		
Impedanțe în serie fără conductor neutru (b)			Transformator stea-stea cu neutrele izolate (g)		
Impedanțe în derivație cu neutrul legat (c)			Transformator stea-stea cu neutrele legate la pământ (h)		
Impedanțe în derivație cu neutrul izolat (d)			Transformator stea-triunghi cu neutrul legat la pământ (i)		
Impedanțe în derivație cu neutrul legat printr-o impedanță (e)			Transformator stea-triunghi cu neutrul izolat (j)		
			Transformator stea-stea cu cu unul din neutre legate la pământ celălalt izolat (k)		

Fig. 8.36. Circuitele echivalente ale diverselor impedanțe în sistemul homopolar.



*Impedanțele derivație*, legate pe diversele faze, dacă sînt simetrice și au neutrul legat la pămînt, sau la un conductor de întoarcere, au — ca și în cazul precedent — aceeași valoare pentru cele trei rețele, directă, inversă și homopolară (fig. 8.36, c). În cazul că neutrul nu este legat la pămînt, sau sistemul este în triunghi, atunci impedanța rețelei homopolare este infinită și este reprezentată printr-o impedanță deconectată (fig. 8.36, d).

Dacă însă neutrul este legat la pămînt printr-o impedanță  $Z_N$  în schema echivalentă, ea se ia de trei ori mai mare (fig. 8.36, e).

*Transformatoarele cu 2 înfășurări* pot fi reprezentate prin cuadripoli în  $T$ , în care cele două impedanțe în serie reprezintă impedanțele de dispersii ale transformatorului, iar derivația reprezintă admitanța de excitare a acestuia. În problemele de scurtcircuit, aceasta din urmă poate fi neglijată și circuitul echivalent este reprezentat numai prin impedanțele în serie (un dipol). În figurile 8.36, f — k, sînt arătate circuitele echivalente ale transformatoarelor cu două înfășurări, corespunzînd diverselor situații ce se prezintă în practică. Aceste circuite sînt date pentru sistemul homopolar, el fiind singurul care prezintă situații diferite. Pentru sistemele direct și invers, impedanțele respective sînt egale și există întotdeauna, oricare ar fi conectarea transformatorului.

În ceea ce privește reactanțele diverselor elemente care intră în constituția unei rețele, valoarea acestora depinde de o serie de parametri constructivi (tipul de construcție, frecvența etc.). Dăm cîteva valori pentru cele mai importante elemente de rețea :

— generatoare sincrone

Felul generatorului sincron	$x_s \Omega$	$x_d \Omega$	$x_0 \Omega$
turbogenerator	0,95—1,45	0,07—0,17	0,01—0,14
generator cu poli aparenti	0,60—1,45	0,13—0,35	0,02—0,20
hidrogenerator	0,60—1,45	0,30—0,70	0,04—0,22

— transformatoare

Felul transformatorului	$x \%$	$r \%$
de distribuție	3—5	0,35—0,50
de rețea	5—7	
plină la 60 kV	5—7	
de 110 kV	6—9	
de 220 kV	10—14	

**OBSERVAȚIE:** În ceea ce privește reactanța homopolară, aceasta depinde de foarte mulți factori și, în general, nu poate fi determinată decît aproximativ ; în calcule se ia egală cu reactanța directă.

— linii aeriene

Felul liniei	$\frac{x_h}{x_d}$	$x_d = x_i \Omega/\text{km}$
linie simplă, fără conductor de protecție	3,5	0,4
linie dublă, fără conductor de protecție	5,5	
linie simplă, cu conductor de protecție	2	
linie dublă, cu conductor de protecție	3	



8.4.5.3. Metoda generală de calcul a curenților de scurtcircuit. Rezultatul final la care trebuie ajuns într-o problemă de calcul de curenți de scurtcircuit este găsirea distribuției diversilor curenți în rețea, mărimea lor și sarcina ce revine fiecărui alternator în parte. În unele cazuri este necesar să se determine și tensiunea în diverse puncte ale rețelei.

Determinarea curenților și tensiunilor se face prin componentele lor simetrice. Mărimea acestora se obține prin gruparea convenabilă a diverselor rețele fictive și aplicând apoi regulile obișnuite de calculare a circuitelor electrice. Gruparea rețelilor fictive depinde de natura scurtcircuitului apărut în rețeaua reală.

Într-o rețea trifazată, scurtcircuitele simple care pot apărea pot fi grupate în patru categorii distincte și anume:

- scurtcircuit al unei faze la pământ;
- scurtcircuit între două faze și la pământ;
- scurtcircuit între două faze izolat de pământ;
- scurtcircuit între toate trei fazele.

Pentru rezolvarea problemelor de scurtcircuit, se presupune că la locul

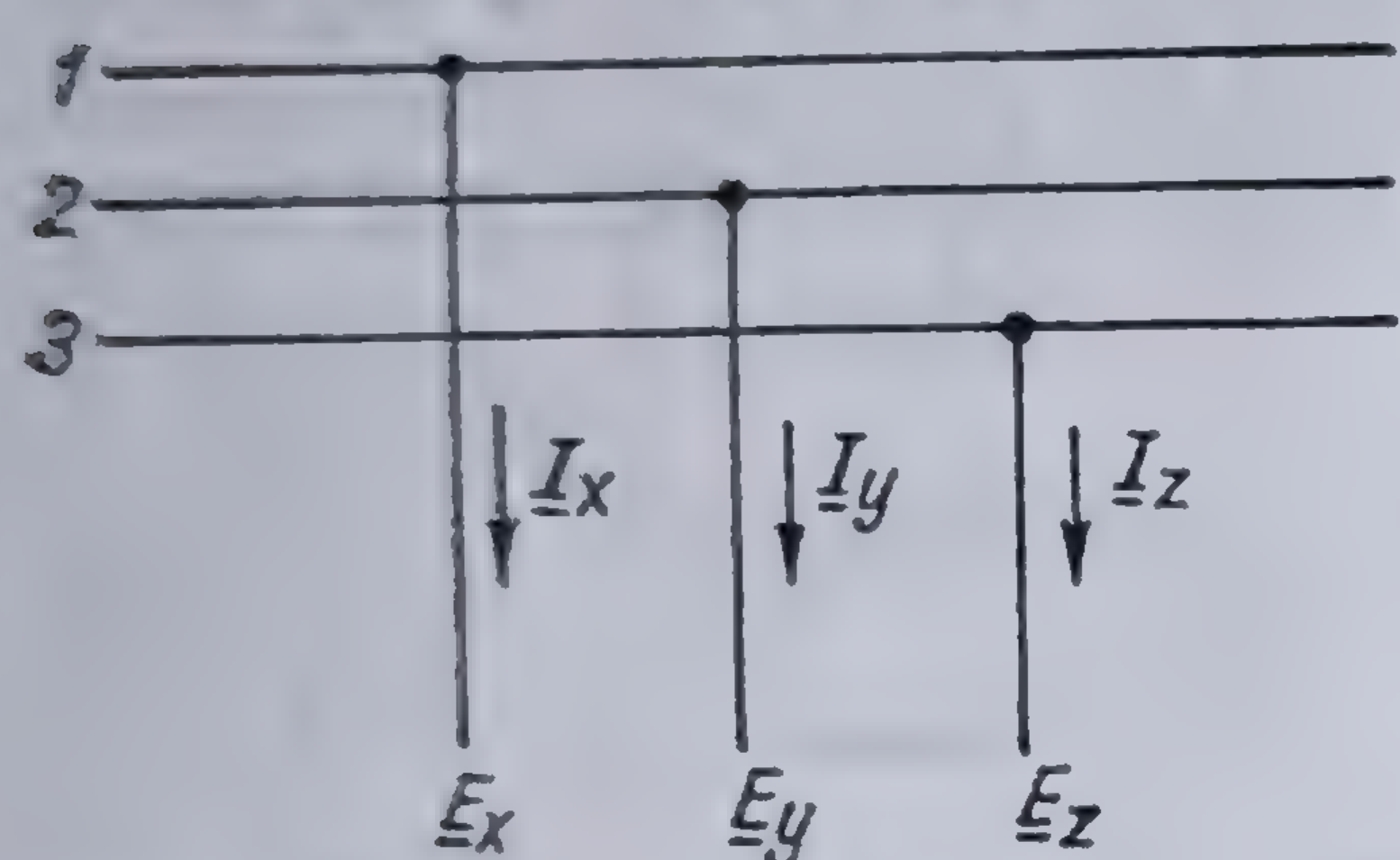


Fig. 8.37. Nodul fictiv al defectului.

defectului din rețeaua dată se ramifică trei conductoare fictive de impedanță nulă (fig. 8.37). Prin aceste conductoare se scurg curenții spre defect; fie  $\underline{I}_x$ ,  $\underline{I}_y$ ,  $\underline{I}_z$  acești curenți care se derivă respectiv din fazele 1, 2 și 3 ale rețelei date. Trebuie observat că valoarea acestor curenți este diferită de valoarea curenților  $\underline{I}_1$ ,  $\underline{I}_2$  și  $\underline{I}_3$  ce circulă prin fazele rețelei.

De asemenea, fiecare din aceste conductoare au un anumit potențial față de pământ,  $\underline{E}_x$ ,  $\underline{E}_y$ ,  $\underline{E}_z$ , care poate fi chiar potențialul fiecărei faze a rețelei față de pământ.

Studiul diverselor scurtcircuite se face stabilind „condițiile de funcționare” ale defectului în acest punct, scriindu-se valorile acestor mărimi și relațiile dintre ele în cazul defectului considerat.

Aplicând acestor sisteme teoria coordonatelor simetrice, se găsește modul de cuplare a diverselor rețele fictive și deci componentele simetrice corespunzătoare.

Cunoașterea componentelor simetrice conduce apoi la cunoașterea mărimilor reale ale curenților și tensiunilor ce există la locul defectului.

Înainte de a se trece la efectuarea calculului, trebuie observat că forțele electromotoare ale diverselor mașini sincrone din rețea sînt, în general, diferite. În aceste condiții, calculul nu se poate face și pentru rezolvarea problemei, se ia o tensiune oarecare arbitrar aleasă, aceeași pentru toate elementele rețelei numită *tensiune de referință*.

Față de această tensiune, diversele impedanțe ale elementelor constitutive ale rețelei se recalculează în raport cu noua tensiune, cu ajutorul relației:

$$\underline{Z}' = k \underline{Z}$$

în care  $k$  este raportul dintre tensiunea aleasă ca tensiune de referință și tensiunea reală a elementului considerat.



După efectuarea calculului, curenții obținuți se recalculează la tensiunea reală a elementului prin relația

$$\underline{I} = k \underline{I}'.$$

**8.4.5.4. Studiul particular al diverselor scurtcircuite simple dintr-o rețea trifazată. 1. Scurtcircuit al unei faze la pământ cu arc electric (fig. 8.38).** Condițiile de funcționare ale defectului sînt

$$\underline{E}_x = \underline{Z} \underline{I}_x, \quad \underline{I}_y = 0, \quad \underline{I}_z = 0,$$

în care  $\underline{Z}$  este impedanța echivalentă a arcului electric.

Scriind relațiile (8.11), (8.12) și (8.13) care dau componentele simetrice ale sistemului de curenți, se obține :

$$\underline{I}_h = \frac{1}{3} (\underline{I}_x + \underline{I}_y + \underline{I}_z) = \frac{1}{3} \underline{I}_x,$$

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3} (\underline{I}_x + a \underline{I}_y + a^2 \underline{I}_z) = \frac{1}{3} \underline{I}_x,$$

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3} (\underline{I}_x + a^2 \underline{I}_y + a \underline{I}_z) = \frac{1}{3} \underline{I}_x,$$

de unde, rezultă

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i. \quad (8.51)$$

apoi

$$\underline{I}_x = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3 \underline{I}_d$$

Pe de altă parte, scriind tensiunea  $\underline{E}_x$  în funcție de coordonatele sale simetrice, se obține

$$\underline{E}_x = \underline{E}_h + \underline{E}_d + \underline{E}_i = \underline{Z} \underline{I}_x = 3 \underline{Z} \underline{I}_d. \quad (8.52)$$

Din relația (8.51) rezultă că cei trei curenți care ies prin punctele  $D_d$ ,  $D_i$  și  $D_h$  (fig. 8.35) sînt egali. În consecință, cele trei rețele vor fi legate în serie, legîndu-se punctul  $D_d$  al rețelei directe la punctul  $D'_i$  al conductorului neutru al rețelei inverse și punctul  $D_i$  al acestei rețele, la punctul  $D'_h$  al rețelei homopolare.

Componentele simetrice ale tensiunilor nu sînt altceva, decît tensiunile aplicate la bornele fiecărei rețele fictive în parte și care produc curentul de secvență corespunzătoare rețelei respective. Ele pot fi asemuite cu forțele electromotoare ale unor generatoare fictive care alimentează rețeaua cu aceste tensiuni chiar în punctul defectului. Pentru a determina valoarea acestor componente se pornește de la punctul corespunzător defectului de pe firul neutru (fig. 8.34) și, parcurgînd rețeaua pe orice drum spre punctul defectului de pe fază, se aplică teorema a II-a a lui KIRCHHOFF. În aceste condiții, notînd cu  $\Sigma \Delta \underline{E}_k$  căderea de tensiune în impedanțele rețelei de secvență  $k$ , se găsește

$$\underline{E} = \underline{E}_d + \Sigma \Delta \underline{E}_d,$$

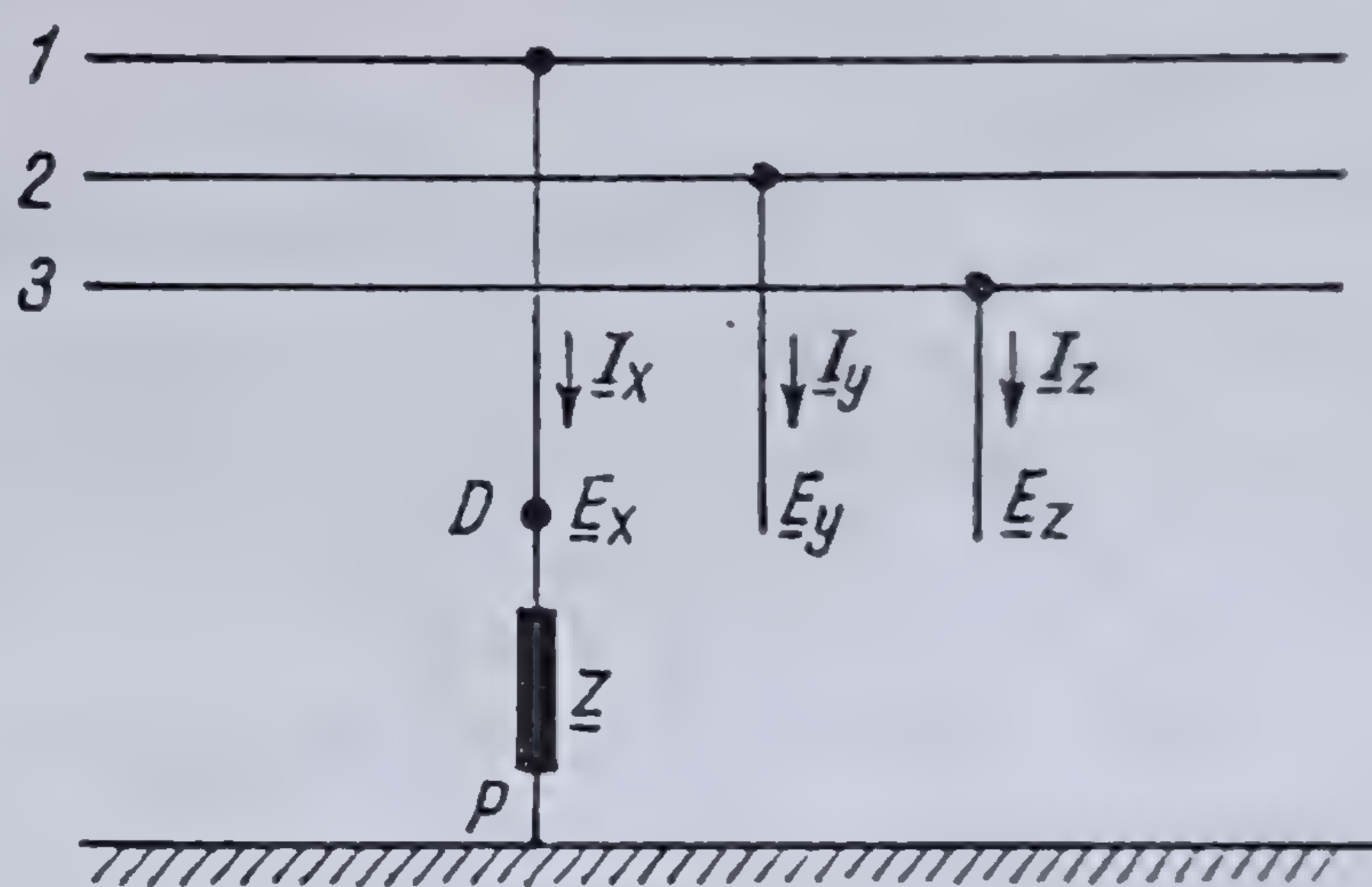


Fig. 8.38. Scurtcircuit al unei faze la pământ cu arc electric.



de unde

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \Sigma \Delta \underline{E}_d,$$

$\underline{E}$  fiind forța electromotoare de referință din sistemul dat.  
În același mod se găsește\*

$$\underline{E}_i = 0 - \Sigma \Delta \underline{E}_i$$

pentru rețeaua de secvență inversă și

$$\underline{E}_h = 0 - \Sigma \Delta \underline{E}_h$$

pentru rețeaua de secvență homopolară.

Adunând aceste trei relații, se obține

$$\underline{E} - \Sigma \Delta \underline{E}_d - \Sigma \Delta \underline{E}_i - \Sigma \Delta \underline{E}_h = \underline{E}_d + \underline{E}_i + \underline{E}_h = 3 \underline{Z} \underline{I}_d$$

de unde,

$$\underline{E} = \Sigma \Delta \underline{E}_d + \Sigma \Delta \underline{E}_i + \Sigma \Delta \underline{E}_h + 3 \underline{Z} \underline{I}_d. \quad (8.53)$$

Această relație și deci relația echivalentă (8.52) este satisfăcută numai în cazul cînd punctul  $D_h$  al rețelei de secvență nulă este legat la punctul  $D'_d$  al rețelei de secvență directă printr-o impedanță egală cu de trei ori impedanța arcului electric (fig. 8.39).

În concluzie, pentru determinarea componentelor simetrice ale curentului de scurtcircuit în cazul unui scurtcircuit ale unei faze la pămînt prin arc electric, se leagă cele trei rețele fictive în serie și în serie cu o impedanță egală cu de trei ori impedanța arcului. Schema din figura 8.39 reprezintă circuitul echivalent al unui asemenea defect.

Acestui circuit i se aplică apoi regulile obișnuite de calcul. Astfel, dacă  $\underline{Z}_d$ ,  $\underline{Z}_i$  și  $\underline{Z}_h$  sînt impedanțele echivalente ale celor trei rețele fictive și  $\underline{E}$  tensiunea de referință, componentele simetrice ale curentului, la locul defectului, sînt date de relația

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3 \underline{Z}},$$

iar componentele simetrice ale tensiunii la locul defectului sînt

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \underline{Z}_d \underline{I}_d,$$

$$\underline{E}_i = -\underline{Z}_i \underline{I}_i,$$

$$\underline{E}_h = -\underline{Z}_h \underline{I}_h.$$

Curenții reali la locul defectului vor fi

$$\underline{I}_\omega = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 3 \underline{I}_h = \frac{3 \underline{E}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3 \underline{Z}} \text{ A},$$

$$\underline{I}_\nu = \underline{I}_h + a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i = (1 + a^2 + a) \underline{I}_h = 0$$

$$\underline{I}_\pi = \underline{I}_h + a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i = (1 + a + a^2) \underline{I}_h = 0$$

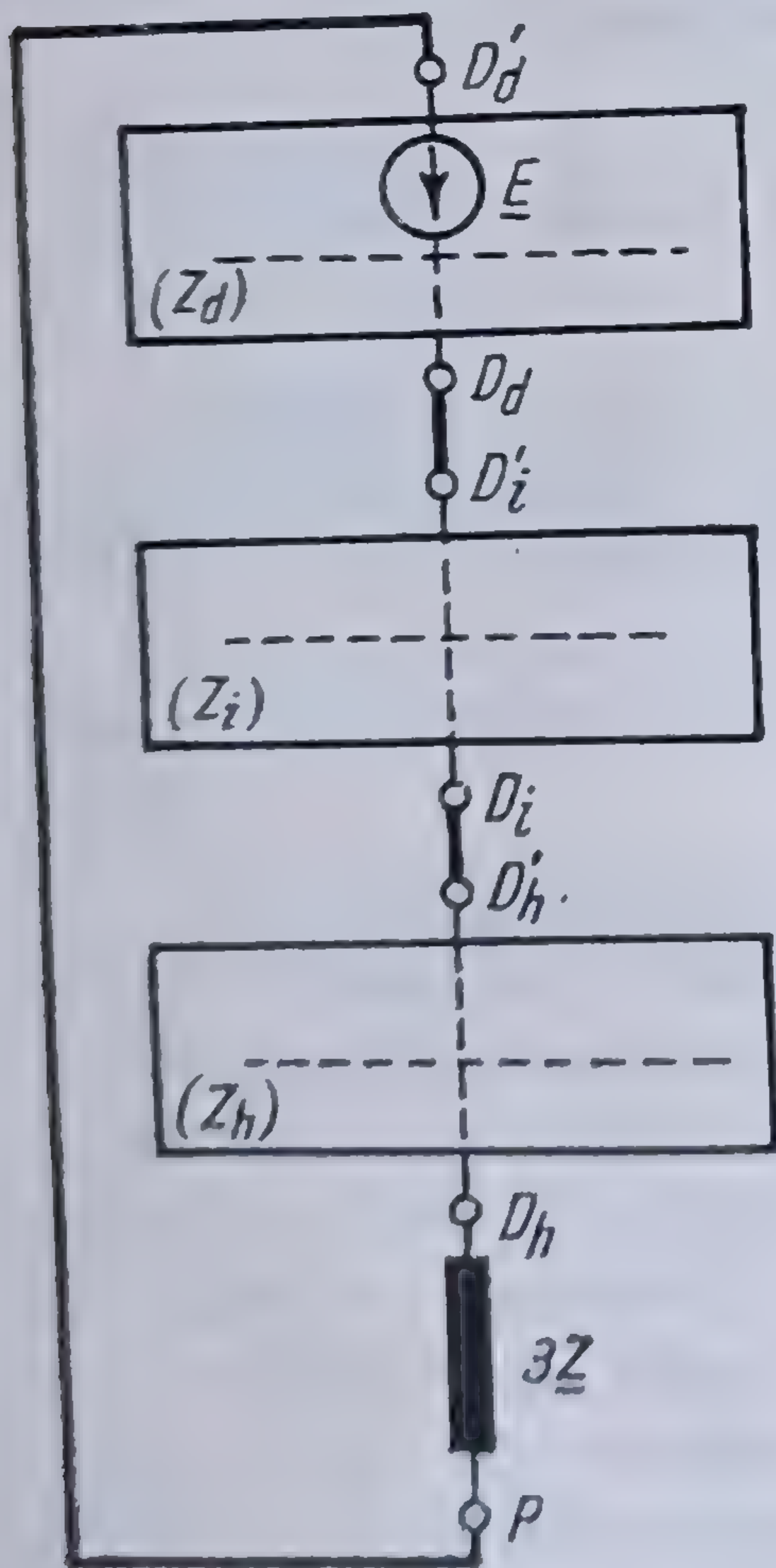


Fig. 8.39. Schema echivalentă a unui scurtcircuit a unei faze la pămînt cu arc electric.

\* În ipoteza că sursa este simetrică și echilibrată.



iar tensiunile la locul defectului

$$\underline{E}_h = \underline{E}_h + \underline{E}_d + \underline{E}_i = \underline{E} - (\underline{Z}_h \underline{I}_h + \underline{Z}_d \underline{I}_d + \underline{Z}_i \underline{I}_i + 3\underline{Z} \underline{I}_h) = \\ = \underline{E} - (\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + 3\underline{Z}) \underline{I}_h = 3\underline{Z} \underline{I}_h$$

$$\underline{E}_v = \underline{E}_h + a^2 \underline{E}_d + a \underline{E}_i = a^2 \underline{E} - (\underline{Z}_h \underline{I}_h + a^2 \underline{Z}_d \underline{I}_d + a \underline{Z}_i \underline{I}_i + 3 \underline{Z} \underline{I}_h) = \\ = \sqrt{3} \frac{\underline{Z}_h + a \underline{Z}_i}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + 3\underline{Z}} \underline{E} \angle -150^\circ \text{ V},$$

$$\underline{E}_s = \underline{E}_h + a \underline{E}_d + a^2 \underline{E}_i = a \underline{E} - (\underline{Z}_h \underline{I}_h + a \underline{Z}_d \underline{I}_d + a^2 \underline{Z}_i \underline{I}_i + 3 \underline{Z} \underline{I}_h) = \\ = \sqrt{3} \frac{\underline{Z}_h - a^2 \underline{Z}_i}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i + 3\underline{Z}} \underline{E} \angle +150^\circ \text{ V}.$$

Cunoscînd componentele simetrice la locul defectului, se poate face acum distribuția de curenți în fiecare rețea fictivă și cunoaște deci, în orice punct al rețelei, componentele simetrice ale curențului. Astfel, la punctul defectului (fig. 8.35) se va găsi că cele trei componente simetrice ale curențului care vin din partea stîngă sînt  $\underline{I}_{mh}$ ,  $\underline{I}_{md}$  și  $\underline{I}_{mi}$ . Curentul real, corespunzător, pe cele trei faze se obține cu ajutorul relațiilor (8.10); se va găsi astfel

$$\underline{I}_{m1} = \underline{I}_{mh} + \underline{I}_{md} + \underline{I}_{mi},$$

$$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{mh} + a^2 \underline{I}_{md} + a \underline{I}_{mi},$$

$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_{mh} + a \underline{I}_{md} + a^2 \underline{I}_{mi}.$$

De asemenea, diferența de potențial între două puncte oarecare ale rețelei se obține din cunoașterea componentelor simetrice ale curenților și ale impedanțelor respective. Astfel, pentru prima bară colectoare, se vor găsi componentele simetrice de tensiune  $\underline{E}_d$ ,  $\underline{E}_i$  și  $\underline{E}_h$  (fig. 8.35), tensiunile respective pe fază fiind

$$\underline{E}'_1 = \underline{E}'_h + \underline{E}'_d + \underline{E}'_i,$$

$$\underline{E}'_2 = \underline{E}'_h + a^2 \underline{E}'_d + a \underline{E}'_i,$$

$$\underline{E}'_3 = \underline{E}'_h + a \underline{E}'_d + a^2 \underline{E}'_i.$$

În cazul cînd punerea la pămînt este directă, atunci în relațiile stabilite mai sus, se face  $\underline{Z} = 0$ . În acest caz, schema defectului se modifică prin suprimarea impedanței echivalente  $\underline{Z}$  (fig. 8.40) iar ecuațiile defectului sînt

$$\underline{E}_a = 0, \quad \underline{I}_v = 0, \quad \underline{I}_s = 0.$$

Restul calculului urmează să se facă la fel ca în cazul precedent.

2. *Scurtcircuit între două faze și la pămînt cu arc electric* (fig. 8.41). Condițiile de funcționare ale defectului sînt :

$$\underline{I}_a = 0 \quad \text{și} \quad \underline{E}_v = \underline{E}_s = \underline{Z} (\underline{I}_v + \underline{I}_s),$$

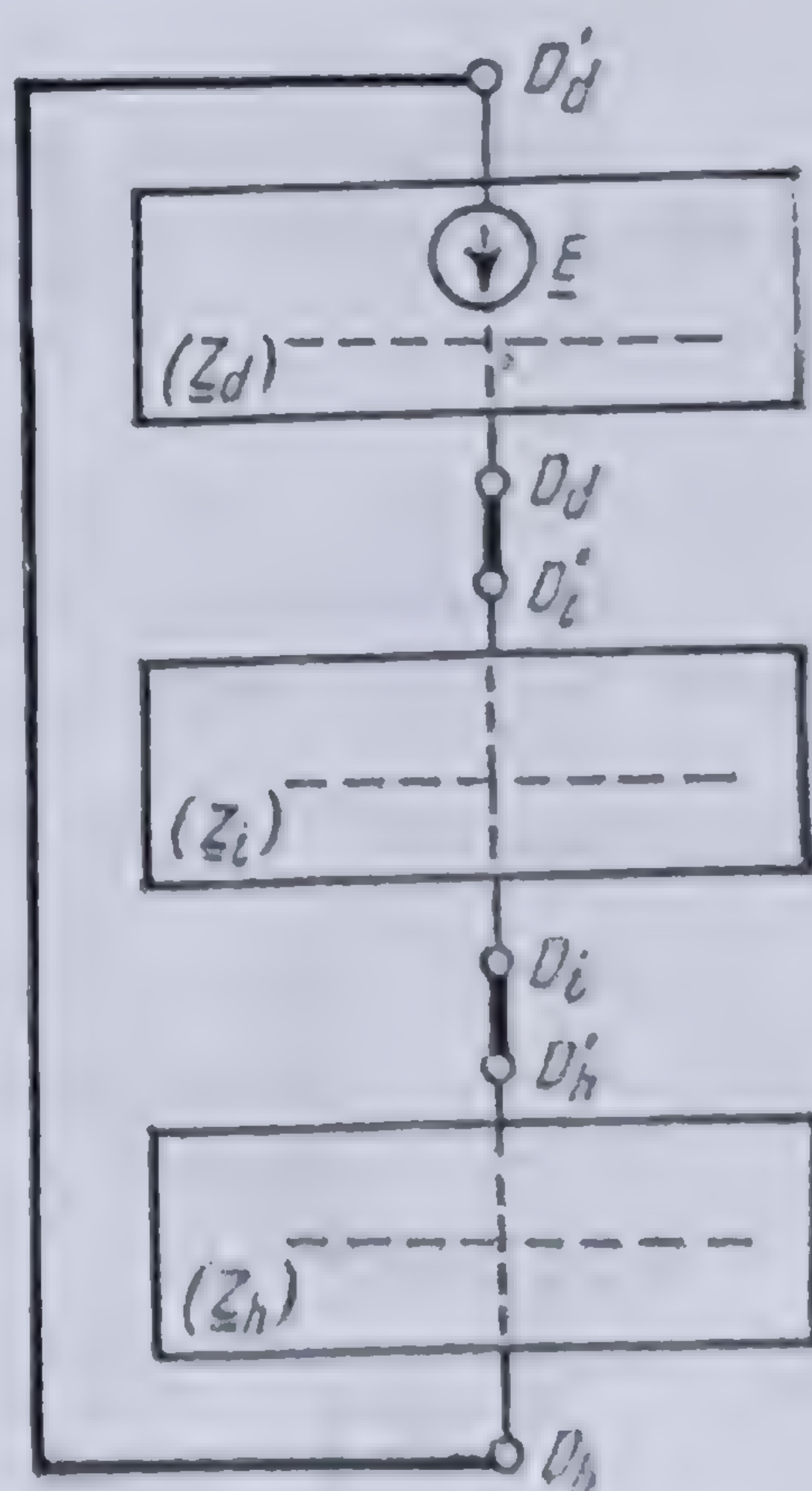


Fig. 8.40. Schema echivalentă a unui scurtcircuit direct a unei faze la pămînt.



$\underline{Z}$  fiind impedanța echivalentă a arcului electric.

Calculînd componentele simetrice ale tensiunilor la locul defectului, se găsește

$$\underline{E}_h = \frac{1}{3} (\underline{E}_x + 2 \underline{E}_y)$$

$$\underline{E}_d = \frac{1}{3} [\underline{E}_y + (a^2 + a) \underline{E}_y] = \frac{1}{3} (\underline{E}_x - \underline{E}_y),$$

$$\underline{E}_i = \frac{1}{3} [\underline{E}_x + (a + a^2) \underline{E}_y] = \frac{1}{3} (\underline{E}_x - \underline{E}_y).$$

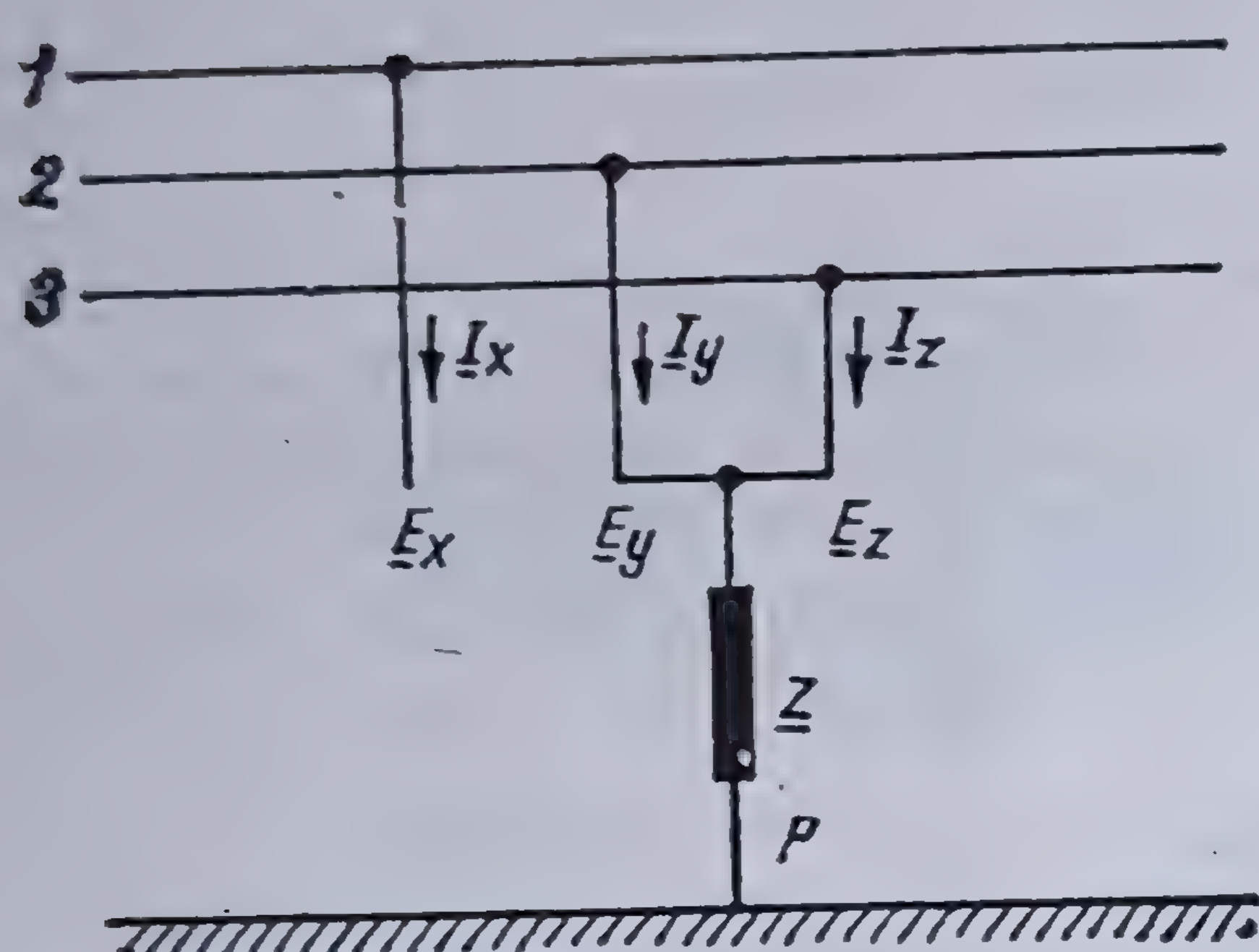


Fig. 8.41. Scurtcircuit între două faze și la pămînt cu arc electric.

Din aceste relații, rezultă

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i \quad (8.54)$$

și

$$\underline{E}_h - \underline{E}_d = \underline{E}_y = \underline{Z}(\underline{I}_y + \underline{I}_z). \quad (8.55)$$

Din expresia (8.11) care dă componenta homopolară și ținînd seama că  $\underline{I}_x = 0$ , rezultă

$$\underline{I}_y + \underline{I}_z = 3 \underline{I}_h,$$

astfel că, relația (8.55) devine

$$\underline{E}_h - \underline{E}_d = 3 \underline{Z} \underline{I}_h. \quad (8.56)$$

Ținînd seama de relațiile (8.54) și (8.56), schema de legătură a celor trei rețele este dată în figura 8.42, care verifică și ecuația de funcționare

$$\underline{I}_x = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i.$$

În cazul cînd punerea la pămînt este directă, atunci în relațiile de mai sus și în schema echivalentă se face

$$\underline{Z} = 0,$$

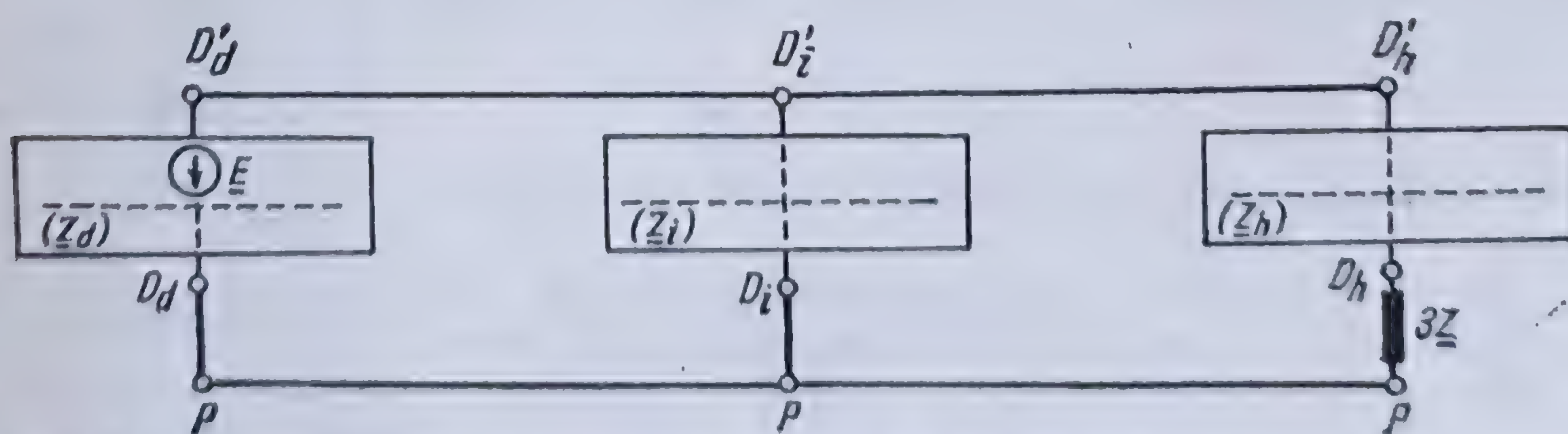


Fig. 8.42. Schema echivalentă a unui scurtcircuit între două faze și la pămînt cu arc electric.



ecuațiile de funcționare fiind

$$\underline{I}_x = 0, \quad \underline{E}_y = \underline{E}_z = 0.$$

Determinarea schemei echivalente se face în același mod și este redată în figura 8.43.

3. Scurtcircuit între două faze cu arc electric, dar izolat față de pământ (fig. 8.44). Condițiile de funcționare ale defectului sînt

$$\underline{I}_x = 0, \quad \underline{I}_y + \underline{I}_z = 0, \quad \underline{E}_z = \underline{E}_y + \underline{Z} \underline{I}_y.$$

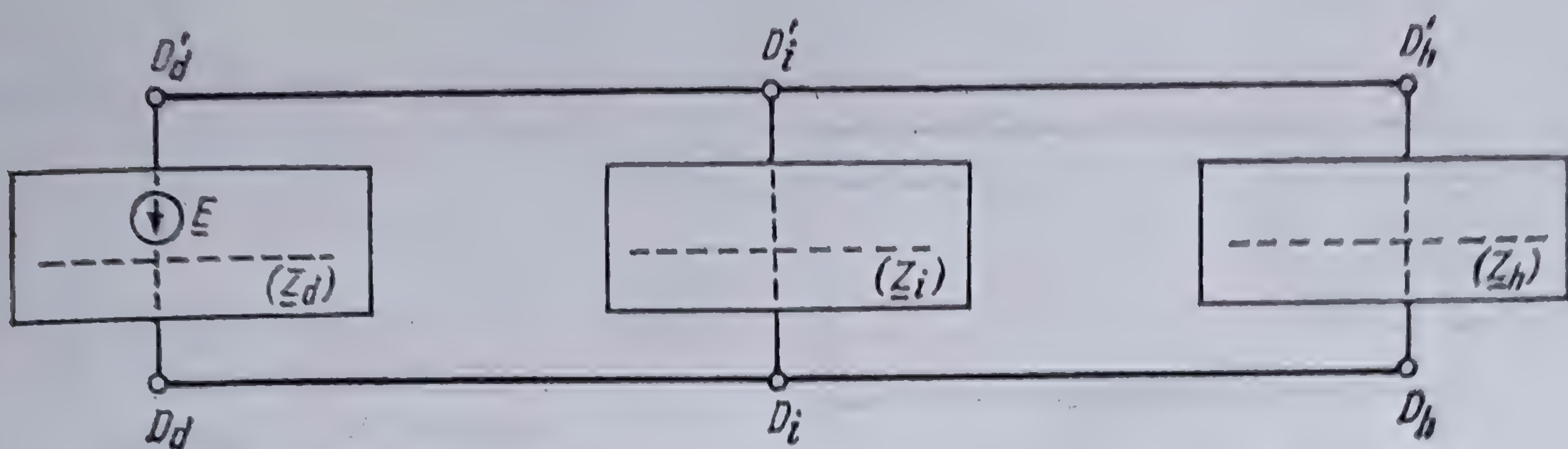


Fig. 8.43. Schema echivalentă a unui scurtcircuit între două faze și direct la pământ.

Componentele simetrice ale curenților sînt

$$\underline{I}_h = \frac{1}{3} (\underline{I}_x + \underline{I}_y + \underline{I}_z) = 0,$$

$$\underline{I}_a = \frac{1}{3} (\underline{I}_x + a \underline{I}_y + a^2 \underline{I}_z) = \frac{-a + a^2}{3} \underline{I}_z, \quad (8.57)$$

$$\underline{I}_i = \frac{1}{3} (\underline{I}_x + a^2 \underline{I}_y + a \underline{I}_z) = \frac{a - a^2}{3} \underline{I}_z$$

de unde rezultă

$$\underline{I}_a + \underline{I}_i = 0.$$

Deoarece  $\underline{I}_h = 0$ , rezultă că și  $\underline{E}_h$  trebuie să fie egal cu zero. Într-adevăr,

$$\underline{E}_h = -\underline{Z}_h \underline{I}_h = 0.$$

Dat fiind că  $\underline{I}_h = 0$  și  $\underline{E}_h = 0$ , rezultă că rețeaua fictivă homopolară nu intră în schema echivalentă a defectului.

Celelalte componente simetrice ale tensiunilor sînt

$$\underline{E}_a = \frac{1}{3} (\underline{E}_x - \underline{E}_z - a \underline{Z} \underline{I}_z)$$

și

$$\underline{E}_i = \frac{1}{3} (\underline{E}_a - \underline{E}_z - a^2 \underline{Z} \underline{I}_z)$$

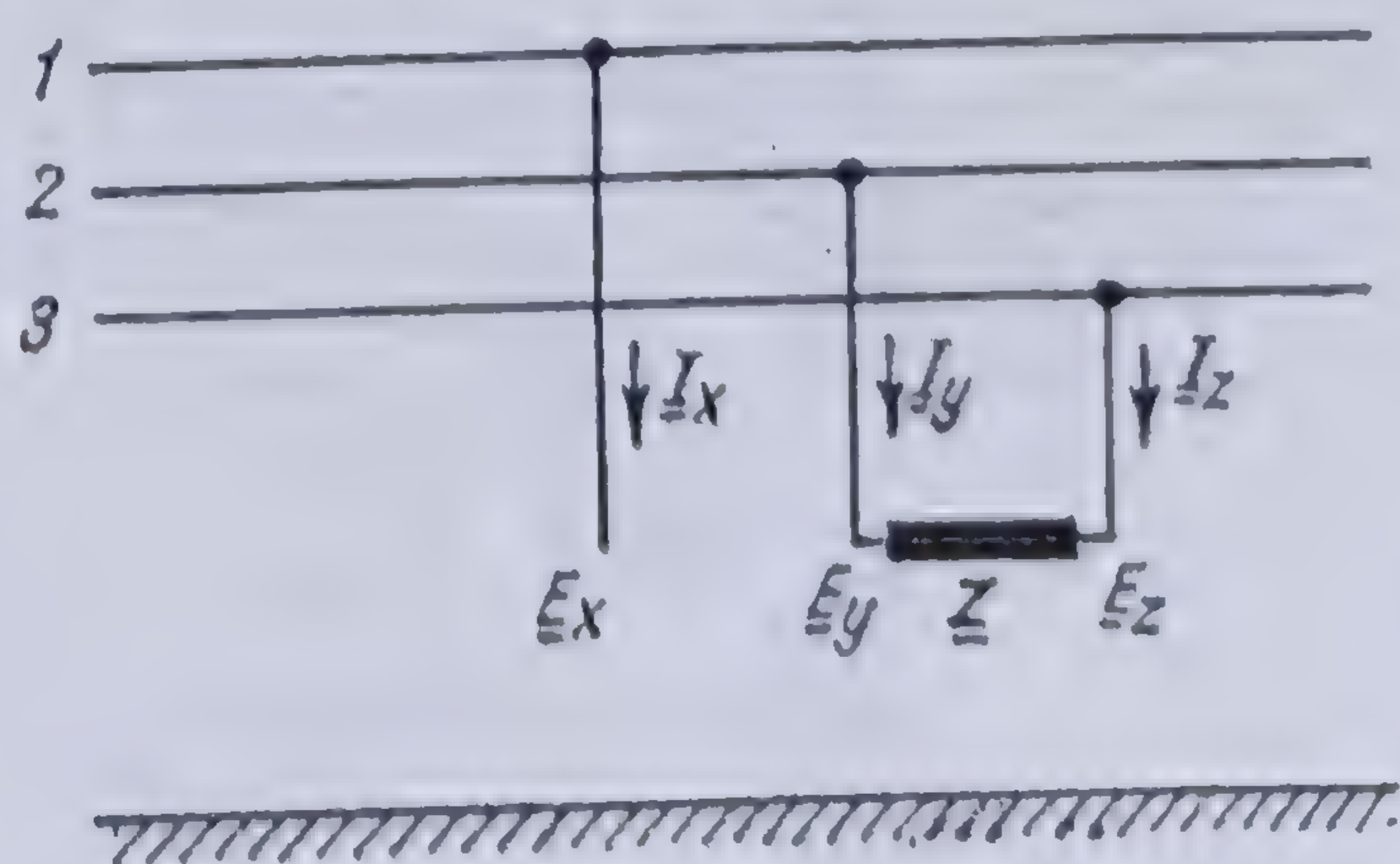


Fig. 8.44. Scurtcircuit între două faze, cu arc electric dar izolat față de pământ



și deci

$$\underline{E}_d \neq \underline{E}_i ;$$

diferența dintre ele este

$$\underline{E}_d - \underline{E}_i = \frac{1}{3} (a^2 - a) \underline{Z} \underline{I}_z . \quad (8.58)$$

Din a doua relație (8.57) se vede că

$$\frac{1}{8} (a^2 - a) \underline{I}_z = \underline{I}_d$$

și deci relația (8.58) se poate scrie

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i + \underline{Z} \underline{I}_d , \quad (8.59)$$

care arată că între cele două rețele fictive se produce o cădere de tensiune datorită impedanței corespunzătoare defectului.

Relațiile (8.57) și (8.59) arată că schema acestui de-

fect trebuie realizată ca în figura 8.45.

Dacă scurtcircuitul este direct, fără arc electric, ecuațiile de funcționare ale defectului sînt

$$\underline{I}_w = 0, \quad \underline{I}_y + \underline{I}_z = 0, \quad \underline{E}_y = \underline{E}_z \quad (8.60)$$

iar schema echivalentă corespunzătoare este dată în figura 8.46.

4. Scurtcircuit între toate trei fazele izolat de pămînt (fig. 8.47). Condițiile de funcționare ale defectului sînt

$$\underline{E}_w = \underline{E}_y = \underline{E}_z = \underline{E} \quad (8.60)$$

și

$$\underline{I}_w + \underline{I}_y + \underline{I}_z = 0 . \quad (8.61)$$

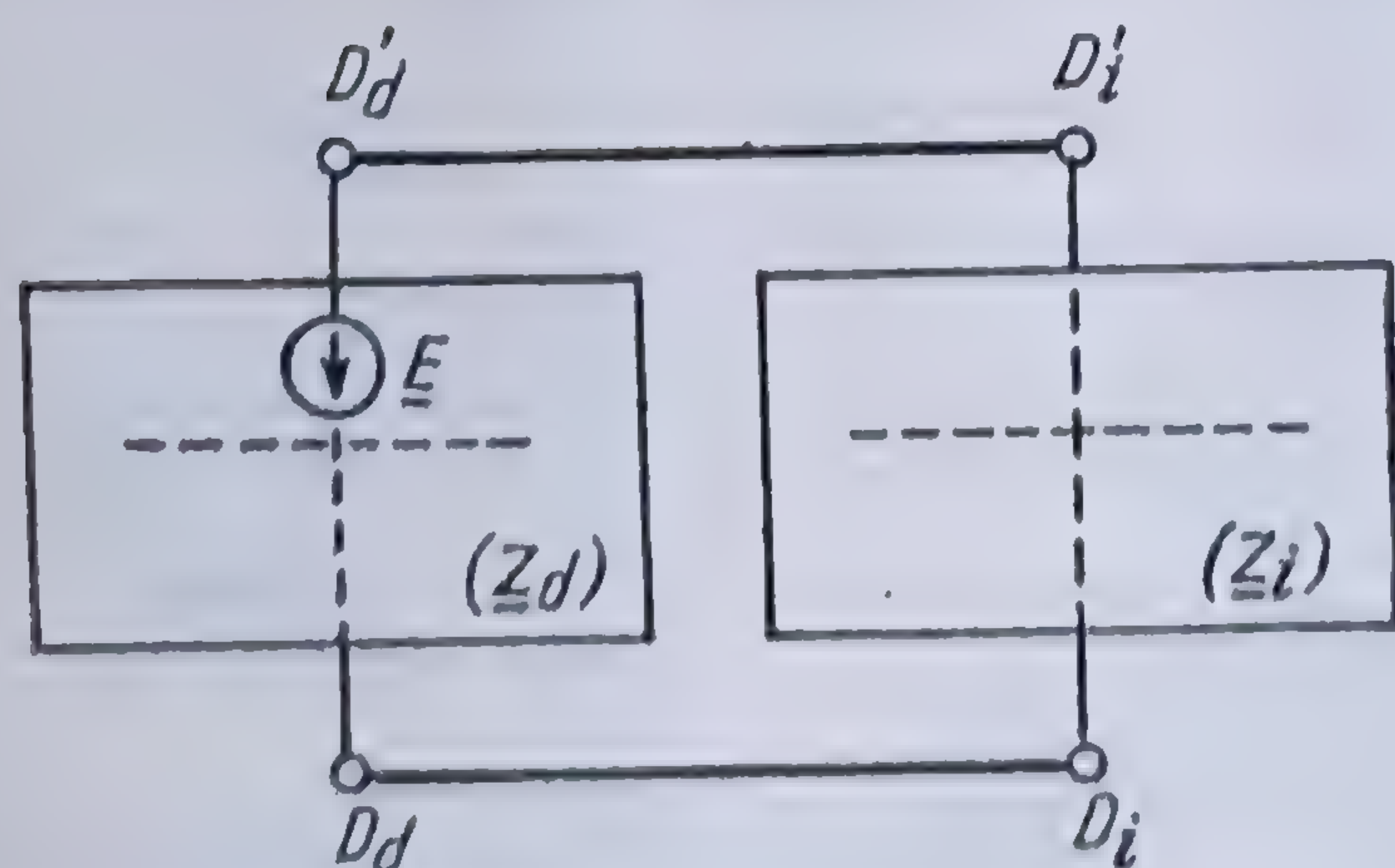


Fig. 8.45. Circuitul echivalent al unui scurtcircuit direct între două faze.

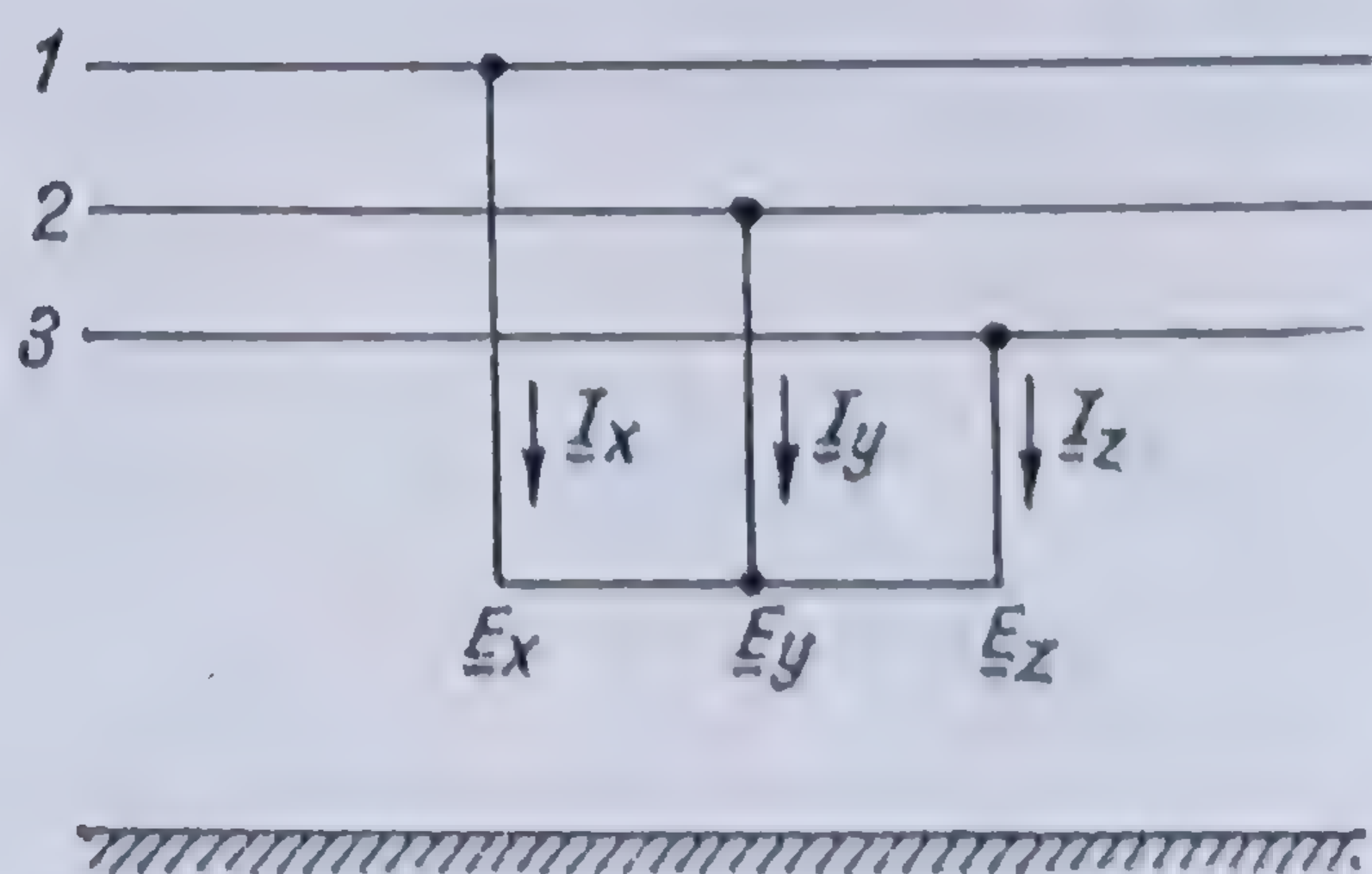


Fig. 8.47. Scurtcircuit între toate trei fazele și izolat de pămînt.



Din relația (8.11), care dă componenta homopolară de curent, ținând seama de relația (8.61), rezultă

$$\underline{I}_h = 0 \quad \text{și deci} \quad \underline{E}_h = 0.$$

Calculând componentele simetrice de tensiune, se găsește

$$\underline{E}_d = 0 \quad \text{și} \quad \underline{E}_i = 0.$$

Rezultă dar

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \underline{Z}_d \underline{I}_d = 0$$

$$\underline{E}_i = -\underline{Z}_i \underline{I}_i = 0$$

și deci  $\underline{I}_i = 0$  și  $\underline{E} = \underline{Z}_d \underline{I}_d$ , care arată că rețeaua fictivă directă este singura care intră în circuitul echivalent și care are deci aspectul din figura 8. 48.

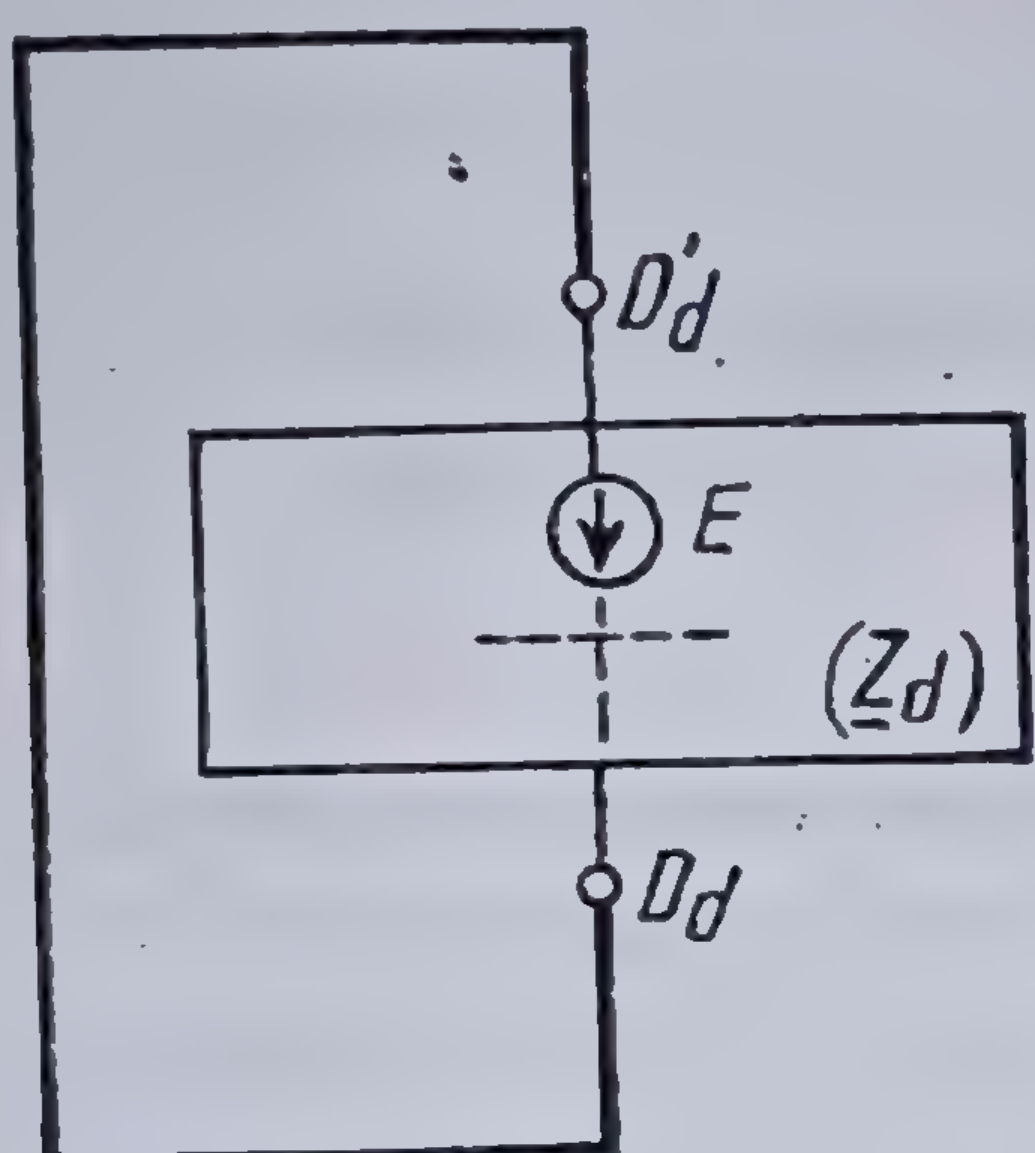


Fig. 8.48. Schema echivalentă a unui scurtcircuit trifazat izolat de pământ.

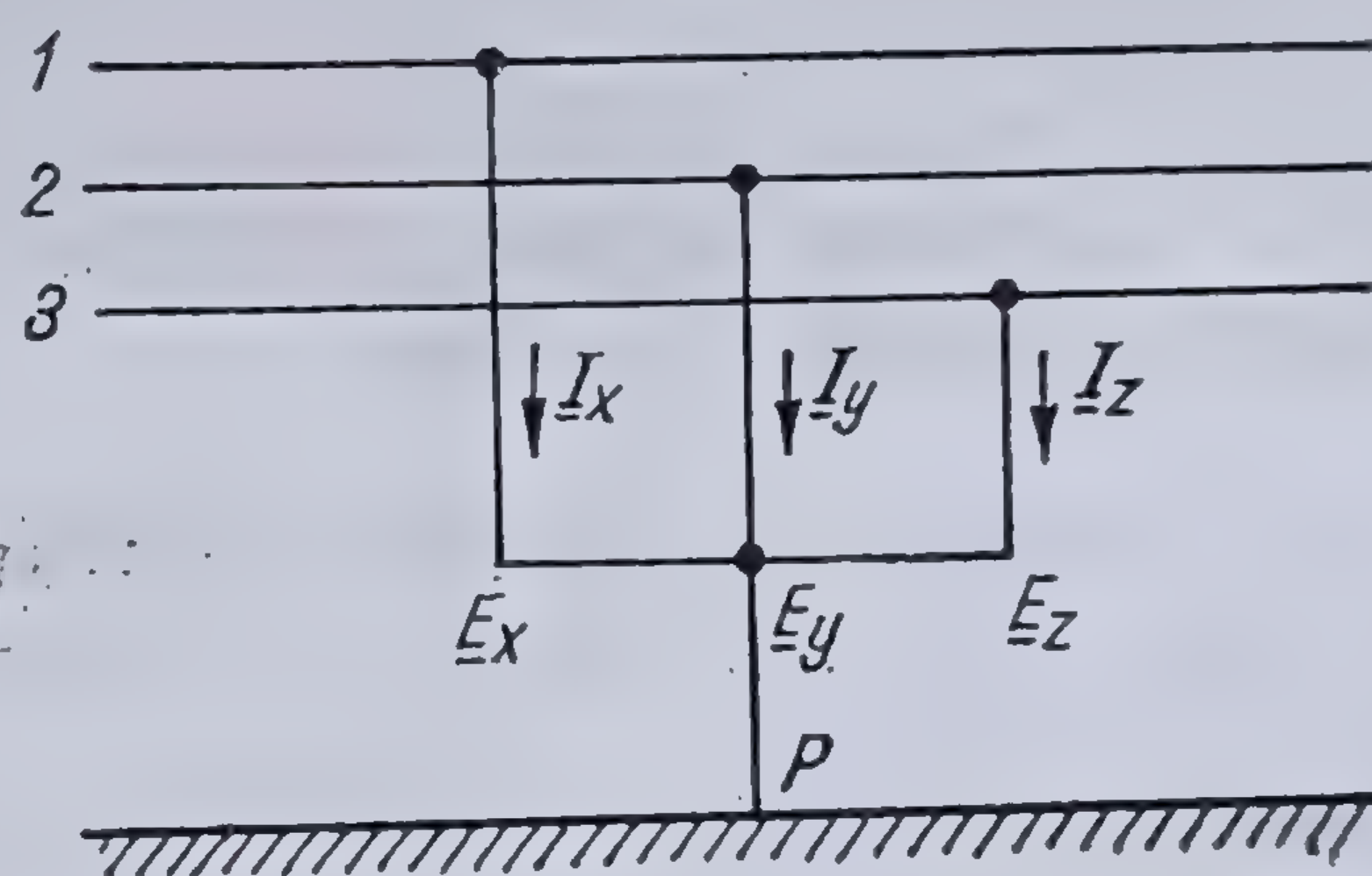


Fig. 8.49. Scurtcircuit trifazat și la pământ.

5. *Scurtcircuit între toate fazele și la pământ* (fig. 8.49). În acest caz condițiile de funcționare ale scurtcircuitului sînt

$$\underline{E}_x = \underline{E}_y = \underline{E}_z = 0.$$

Calculînd componentele simetrice respective, se găsește

$$\underline{E}_h = \underline{E}_d = \underline{E}_i = 0$$

și deci,

$$\underline{I}_h = 0, \quad \underline{I}_i = 0 \quad \text{și} \quad \underline{E} = \underline{Z}_d \underline{I}_d.$$

Defectul se comportă deci, ca și în cazul precedent și are același circuit echivalent. Scurtcircuitul între toate fazele este un scurtcircuit simetric.

6. *Scurtcircuit între toate fazele și la pământ cu arc* (fig. 8.50). Condițiile de funcționare ale defectului sînt în acest caz

$$\underline{E}_x = \underline{E}_y = \underline{E}_z = \underline{Z} (\underline{I}_x + \underline{I}_y + \underline{I}_z) = 3 \underline{Z} \underline{I}_h.$$

Rezultă imediat

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i = 0$$

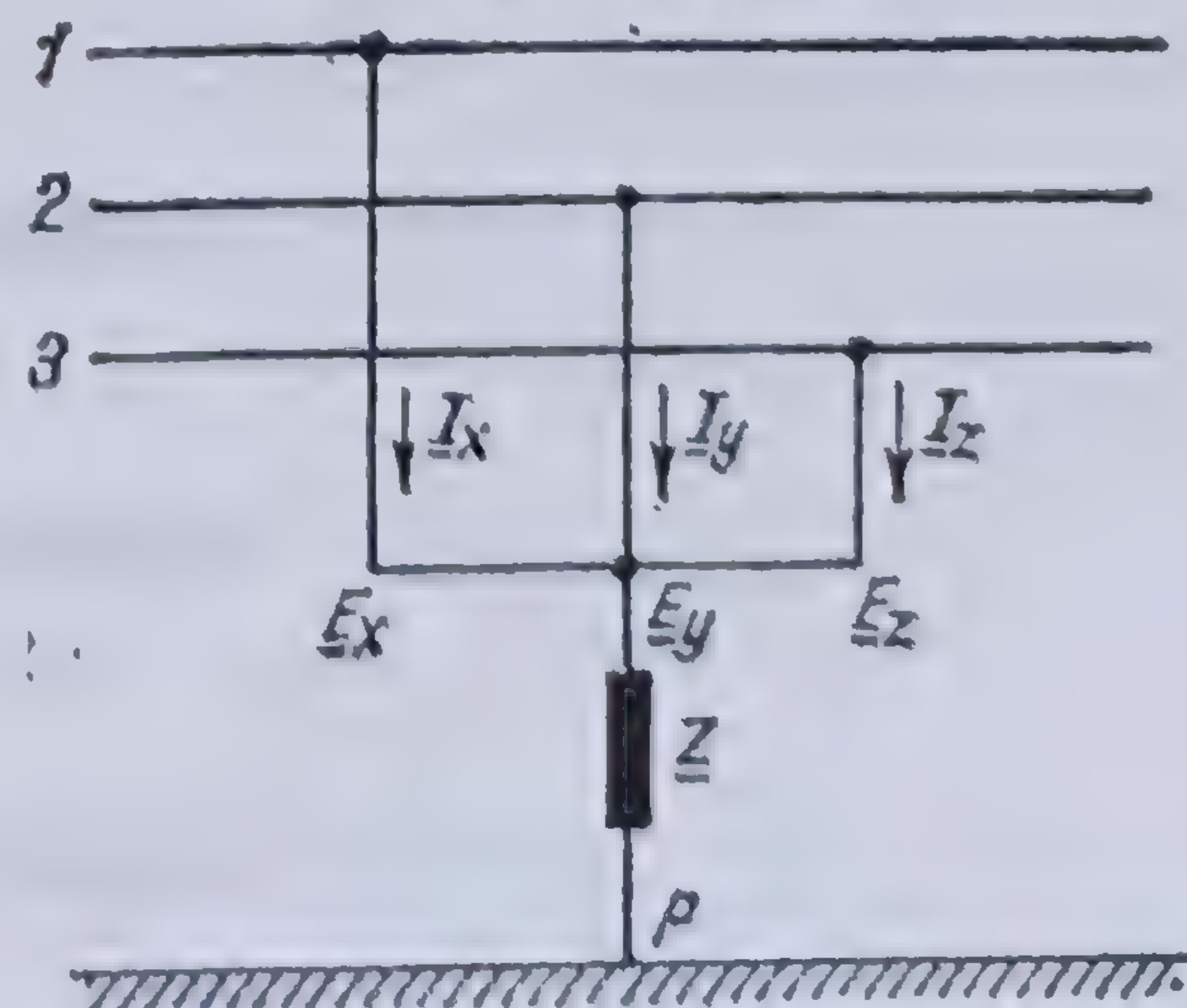


Fig. 8.50. Scurtcircuit trifazat și la pământ cu arc.



și deci,

$$\underline{E} = \underline{Z}_d \underline{I}_d \quad \text{și} \quad \underline{I}_i = 0.$$

Ținând seama că

$$\underline{E}_h = - \underline{Z}_h \underline{I}_h = 3 \underline{Z} \underline{I}_h,$$

rezultă

$$(3 \underline{Z} + \underline{Z}_h) \underline{I}_h = 0$$

și deci

$$\underline{I}_h = 0 \quad \text{și} \quad \underline{E}_h = 0.$$

În consecință și acest caz se reduce la precedentele.

**OBSERVAȚIE:** Metodele generale de calcul a scurtcircuitelor pot fi folosite și pentru calculul sistemelor trifazate dezechilibrate. Astfel, de exemplu, un sistem trifazat, avînd un receptor de impedanță  $Z$  conectat între două faze, poate fi asemuit cu un scurtcircuit bifazat izolat de pămînt dar cu arc și în consecință calculat ca atare.

**8.4.5.5. Influența conexiunilor transformatoarelor din rețea asupra componentelor simetrice de curent și de tensiune.** Determinarea componentelor simetrice de curent și de tensiune s-a făcut în ipoteza că tensiunea de referință este o tensiune simplă pe fază, curenții rezultanți fiind curenți pe fază. Repartiția acestor componente simetrice în diversele elemente ale rețelei se face, de asemenea, fără să se țină seama de prezența diverselor transformatoare care ar exista în rețea. Cele stabilite mai sus sînt valabile însă, numai în cazul transformatoarelor cu conectare stea-stea. În cazul conectării stea-triunghi sau, invers, în conectarea triunghi, curenții de linie au un anumit defazaj față de curenții de fază. Acest defazaj trebuie introdus în componentele simetrice corespunzătoare, în caz contrar determinarea curenților de linie făcîndu-se greșit.

Fie un transformator cu conexiunea triunghi-stea (fig. 8.51.). Fie

$\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$ , curenții de linie pe partea primară;

$\underline{A}_h, \underline{A}_d, \underline{A}_i$ , componentele lor simetrice;

$\underline{A}'_1, \underline{A}'_2, \underline{A}'_3$ , curenții de fază pe partea primară;

$\underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3$ , curenții din secundarul transformatorului;

$\underline{B}_h, \underline{B}_d, \underline{B}_i$ , componentele lor simetrice.

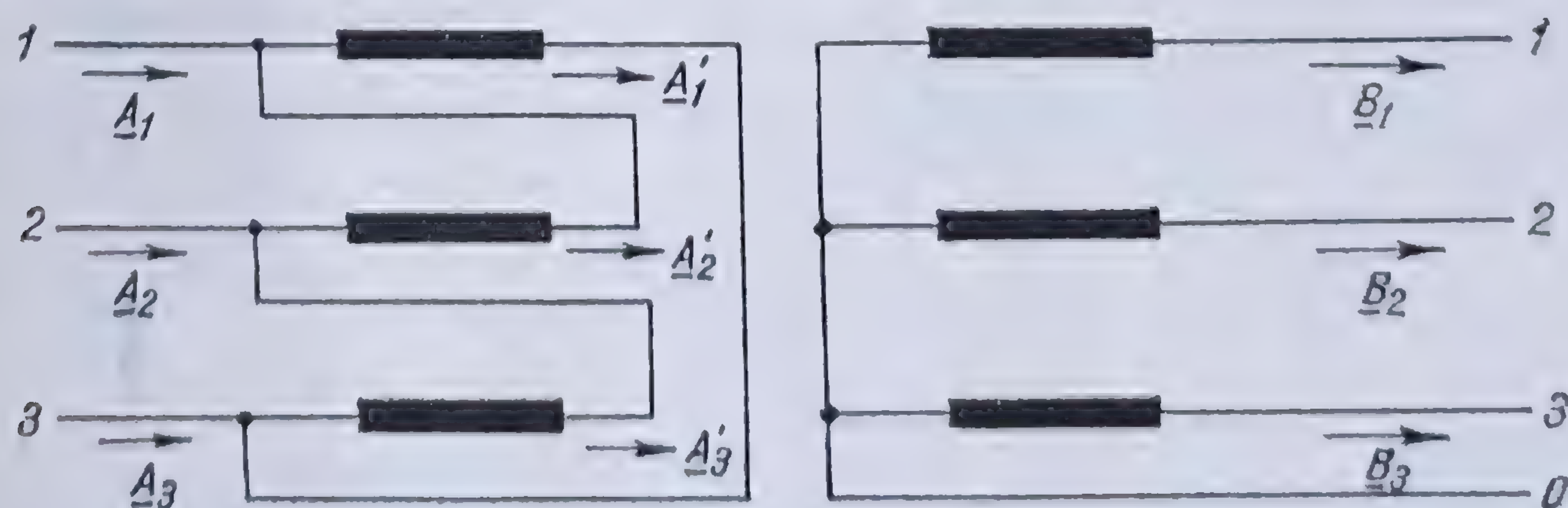


Fig. 8.51. Transformator cu conexiunea triunghi-stea.



Fie  $k$  raportul de transformare al transformatorului, definit prin relațiile

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = k;$$

rezultă

$$A'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} A_1 = \frac{k}{\sqrt{3}} B_1, \quad A'_2 = \frac{k}{\sqrt{3}} B_2, \quad A'_3 = \frac{k}{\sqrt{3}} B_3.$$

Pe de altă parte, între curenții de linie și de fază în înfășurarea conectată în triunghi, există următoarele relații :

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_1 &= \underline{A}'_1 - \underline{A}'_2 = \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_1 - \underline{B}_2), \\ \underline{A}_2 &= \underline{A}'_2 - \underline{A}'_3 = \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_2 - \underline{B}_3), \\ \underline{A}_3 &= \underline{A}'_3 - \underline{A}'_1 = \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_3 - \underline{B}_1). \end{aligned} \right\} \quad (8.62)$$

Calculînd componentele simetrice ale curenților  $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3$  și ținînd seama de relațiile (8.62) se obține

$$\underline{A}_n = \frac{1}{3} (\underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3) = 0$$

$$\underline{A}_a = \frac{1}{3} \frac{k}{\sqrt{3}} [(\underline{B}_1 - \underline{B}_2) + a(\underline{B}_2 - \underline{B}_3) + a^2(\underline{B}_3 - \underline{B}_1)] =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{k}{\sqrt{3}} [(\underline{B}_1 + a\underline{B}_2 + a^2\underline{B}_3) - (\underline{B}_2 + a\underline{B}_3 + a^2\underline{B}_1)] =$$

$$= \frac{k}{\sqrt{3}} (\underline{B}_{a1} - \underline{B}_{a2}) = \frac{k}{\sqrt{3}} (1 - a^2) \underline{B}_a = k \underline{B}_a | 30^\circ.$$

Rezultă și invers

$$\underline{B}_a = \frac{1}{k} \underline{A}_a | -30^\circ. \quad (8.63)$$

În același mod se găsește

$$\underline{A}_i = k \underline{B}_i | -30^\circ,$$

de unde,

$$\underline{B}_i = \frac{1}{k} \underline{A}_i | 30^\circ. \quad (8.64)$$



În ceea ce privește tensiunile, în cazul când în rețea nu există decît transformatoare cu conectarea în stea, componentele simetrice ale tensiunilor între faze, în diversele puncte ale rețelei, se determină aplicînd relațiile căderilor de tensiune; tensiunile reale se obțin apoi compunînd aceste componente.

În cazul transformatoarelor cu conectarea triunghi-stea, sau invers, componentele simetrice ale tensiunilor pe fază, deduse ca mai sus, trebuie transformate în componente ale tensiunilor între faze. Aceasta se obține imediat aplicînd relațiile (8.15) și (8.16), sau relațiile (8.17) care, pentru a ține seama de raportul de transformare, trebuie înmulțite cu acesta. Astfel,  $k$  fiind raportul de transformare al transformatorului, definit prin relația

$$\frac{U'}{U''} = k,$$

în care  $U'$  și  $U''$  sînt respectiv tensiunile între faze la primarul și scundarul transformatorului, relațiile (8.15) și (8.16) se vor scrie

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}'_d &= \sqrt{3k} \underline{V}''_d \angle -90^\circ, \\ \underline{U}'_i &= \sqrt{3k} \underline{V}''_i \angle 90^\circ, \end{aligned} \right\} \quad (8.65)$$

ar din relațiile (8.17), rezultă :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}'_d &= \sqrt{3k} \underline{V}''_d \angle 30^\circ, \\ \underline{U}'_i &= \sqrt{3k} \underline{V}''_i \angle -30^\circ. \end{aligned} \right\}$$

**8.4.5.6. Exemplu de aplicație. Scurtcircuit la bornele unui alternator.** Fie un alternator trifazat avînd tensiunea pe fază  $\underline{E}_1 = 100 + j 0$  V, și impedanțele sincronă, asincronă și homopolară :  $\underline{Z}_s = 0 + j 1,0 \Omega$ ,  $\underline{Z}_a = 0,1 + j 0,3 \Omega$ ,  $\underline{Z}_0 = 0 + j 0,1 \Omega$ . Se cere să se determine curenții de scurtcircuit în toate cazurile posibile.

1. *Scurtcircuit direct al unei faze la pămînt.* Schema echivalentă se obține legîndu-se în serie cele trei impedanțe. În acest caz componentele simetrice ale curentului sînt egale și date de relația

$$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_0} = 5,08 - j 71,1 \text{ A.}$$

Curentul pe faza 1 (faza în scurtcircuit) este

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i = \frac{3\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_0} = 15,24 - j 213,3 \text{ A}$$

și pe celelalte faze :

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i = 0; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_h + a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i = 0.$$



Componentele de tensiune directă, inversă și homopolară sînt :

$$\underline{E}_d = \underline{E} - \underline{Z}_s \underline{I}_d = \left( 1 - \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} \right) \underline{E} = \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_o}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} \underline{E} = 28,9 - j 5,08 \text{ V};$$

$$\underline{E}_i = - \underline{Z}_a \underline{I}_i = - \frac{\underline{Z}_a \underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} = - 21,84 + j 5,59 \text{ V};$$

$$\underline{E}_h = - \underline{Z}_o \underline{I}_h = - \frac{\underline{Z}_o \underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} = - 7,11 - j 0,508 \text{ V}.$$

Tensiunile de fază sînt :

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_h + \underline{E}_d + \underline{E}_i = \left( \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_o}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} - \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} - \frac{\underline{Z}_o}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} \right) \underline{E} = 0;$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_h + a^2 \underline{E}_d + a \underline{E}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} (a^2 - a) \underline{Z}_a + (a^2 - 1) \underline{Z}_o = - 19,88 - j 44,70 \text{ V};$$

$$\underline{E}_3 = \underline{E}_h + a \underline{E}_d + a^2 \underline{E}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a + \underline{Z}_o} (a - a^2) \underline{Z}_a + (a - 1) \underline{Z}_o = - 1,40 + j 43,16 \text{ V}.$$

2. Scurtcircuit între două faze și la pămînt. Schema echivalentă se obține legînd în paralel cele trei impedanțe.

Calculîndu-se curenții în rețeaua echivalentă, se găsesc componentele simetrice :

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \frac{\underline{Z}_a \cdot \underline{Z}_o}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_o}} = \frac{\underline{Z}_a + \underline{Z}_o}{\underline{Z}_o \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_o} \underline{E} = 0,50 - j 92,8 \text{ A};$$

$$\underline{I}_i = - \frac{\underline{Z}_o}{\underline{Z}_o + \underline{Z}_a} \underline{I}_d = - \frac{\underline{Z}_o \underline{E}}{\underline{Z}_o \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_o} = 5,58 + j 21,81 \text{ A};$$

$$\underline{I}_h = - \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_o + \underline{Z}_a} \underline{I}_d = - \frac{\underline{Z}_a \underline{E}}{\underline{Z}_o \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_o} = 5,07 + j 71,02 \text{ A}.$$

Din acestea se deduc curenții de fază :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_o \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_o} (\underline{Z}_a + \underline{Z}_o - \underline{Z}_o - \underline{Z}_a) = 0;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_o \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_o} (a^2 - 1) \underline{Z}_a + (a^2 - a) \underline{Z}_o = - 91,8 + j 101,3 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_o \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_o} (a - 1) \underline{Z}_a + (a^2 - a) \underline{Z}_o = 106,9 + j 111,8 \text{ A}.$$



Componentele simetrice ale tensiunilor fiind egale,

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i = \underline{E}_h,$$

rezultă

$$\underline{E}_i = -\underline{I}_i \underline{Z}_a = \underline{E} \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_a}{\underline{Z}_0 \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_0} = 7,10 - j 0,507 \text{ V.}$$

Tensiunile de fază sînt deci :

$$\underline{E}_1 = 3 \underline{E} \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_a}{\underline{Z}_0 \underline{Z}_s + \underline{Z}_s \underline{Z}_a + \underline{Z}_a \underline{Z}_0} = 3 \underline{E}_i = 21,3 - j 1,521 \text{ V}; \quad \underline{E}_2 = 0; \quad \underline{E}_3 = 0.$$

3. Scurtcircuit între două faze fără punere la pămînt. Schema echivalentă se obține legînd în paralel impedanțele directă și inversă ale alternatorului. Componentele simetrice de curent sînt

$$\underline{I}_d = -\underline{I}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} = 5,88 - j 76,5 \text{ A}; \quad \underline{I}_h = 0.$$

Curenții de fază sînt :

$$\underline{I}_1 = 0; \quad \underline{I}_2 = -\underline{I}_3 (a^2 - a) \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} = -132,5 - j 10,2 \text{ A.}$$

Componentele simetrice ale tensiunilor sînt :

$$\underline{E}_d = \underline{E}_i = -\underline{Z}_a \underline{I}_i = \frac{\underline{Z}_a}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} \underline{E} = 23,54 - j 5,89 \text{ V}; \quad \underline{E}_h = 0,$$

astfel, încît tensiunile pe faze vor fi

$$\underline{E}_1 = 2 \underline{E}_d = \frac{2 \underline{Z}_a}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_a} \underline{E} = 47,08 - j 11,78 \text{ V},$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_3 = (a^2 + a) \underline{E}_d = -\underline{E}_d = -23,54 + j 5,89 \text{ V.}$$

4. Scurtcircuit între toate fazele. În acest caz scurtcircuitul este simetric și curentul pe fază este

$$\underline{I} = \underline{I}_d = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_a} = \frac{100 + j 0}{0 + j 1,0} = -j 100 \text{ A.}$$

8.5.5.7. Aplicarea metodei generale la calculul unui scurtcircuit într-o rețea electrică complexă. Calculul circuitelor dezechilibrate este una din aplicațiile cele mai importante ale coordonatelor simetrice. Acest calcul își are în special aplicația în probleme de defecte în rețele în vederea dimensionării întreruptoa-



relelor rețelei și a sistemului de protecție selectiv. De asemenea, problemele de dimensionare a aparaturii din punct de vedere termic și mecanic, cum și problemele de stabilitate a rețelelor se rezolvă tot pe această cale.

Înainte de a ataca o problemă de această natură, se fac anumite ipoteze simplificatoare, fără ca prin aceasta, rezultatele să sufere din punctul de vedere al rigurozității. Aceste ipoteze sînt :

a) Forța electromotoare a fiecărui generator din rețea este identică, în mărime și fază. În cazul general, aceasta nu se întîmplă și atunci tensiunile se reduc la o aceeași mărime, numită tensiune de referință.

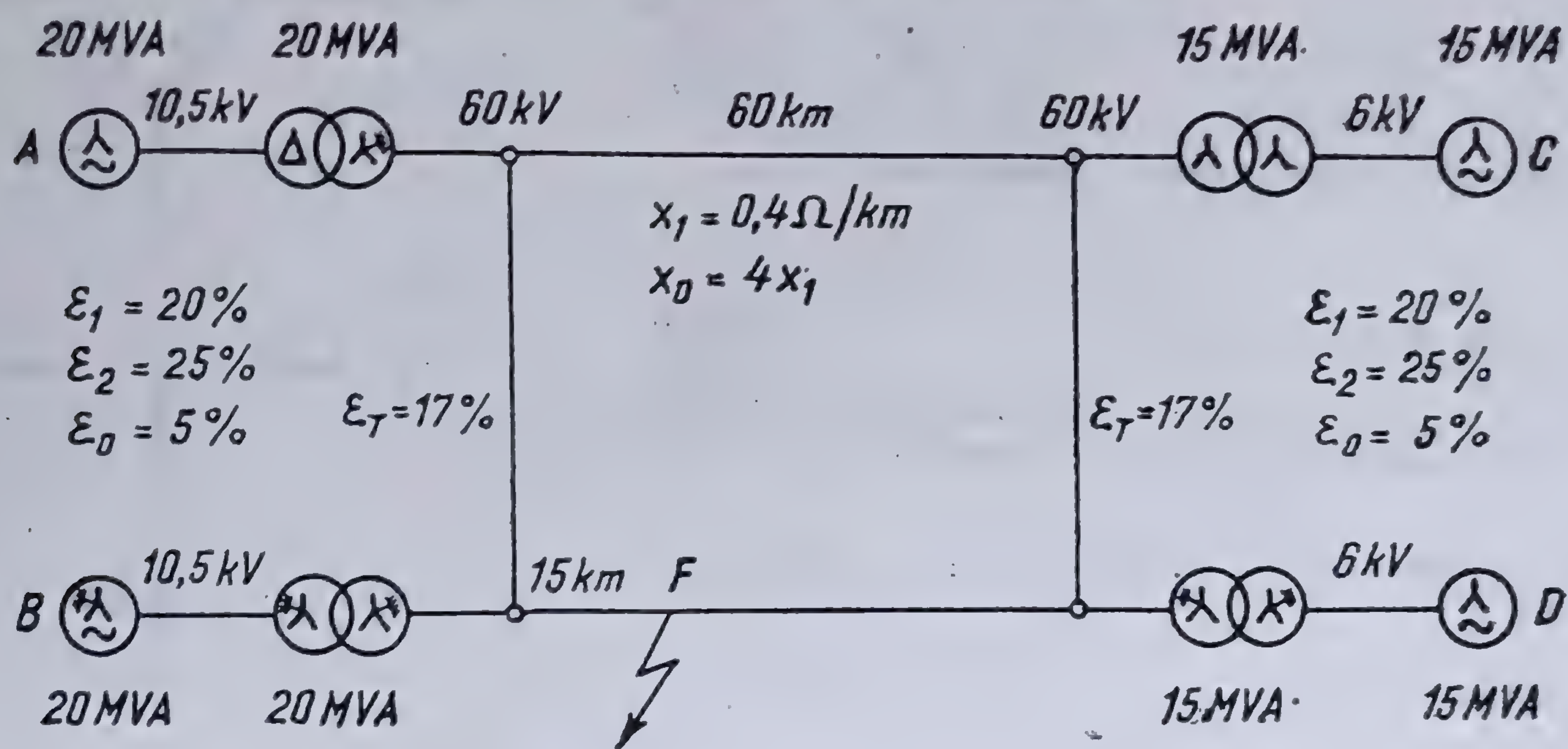


Fig. 8.52. Schema sistemului interconectat.

b) Se neglijează toate rezistențele față de reactanțele diverselor circuite.

c) Se neglijează curenții de magnetizare ai transformatoarelor, precum și curenții de încărcare ai cablurilor sau liniilor.

d) Se neglijează de asemenea, inductanțele mutuale între linii.

Mersul calculului poate fi rezumat în următoarele puncte :

1. Se determină rețeaua fictivă directă precum și distribuția de curenți în diversele laturi, luîndu-se pentru aceasta valoarea 1, pentru curențul care iese prin defect. Valorile astfel obținute se numesc *factorii de distribuție ai curenților*.

2. Se determină, ca mai sus, rețeaua inversă și distribuția de curenți.

3. Se procedează la fel, pentru rețeaua homopolară.

Aceste operații sînt aceleași pentru orice tip de defect. Restul calculului este diferit și depinde de defectul considerat. Totuși, este necesar ca acest calcul să se facă în ordinea următoare.

4. Se grupează convenabil diversele impedanțe în raport cu defectul considerat și se determină componentele simetrice ale curenților la locul defectului.

5. Se determină componentele simetrice ale curenților în diversele elemente ale rețelelor fictive, folosindu-se factorii de distribuție ai curenților.

6. Se calculează curenții pe faze cu ajutorul componentelor simetrice ale acestora.

7. Se determină componentele simetrice ale tensiunilor în diversele laturi ale celor trei rețele fictive, cu ajutorul componentelor simetrice ale curenților și ale diverselor impedanțe.

8. Se calculează tensiunile pe faze și între faze cu ajutorul componentelor simetrice.



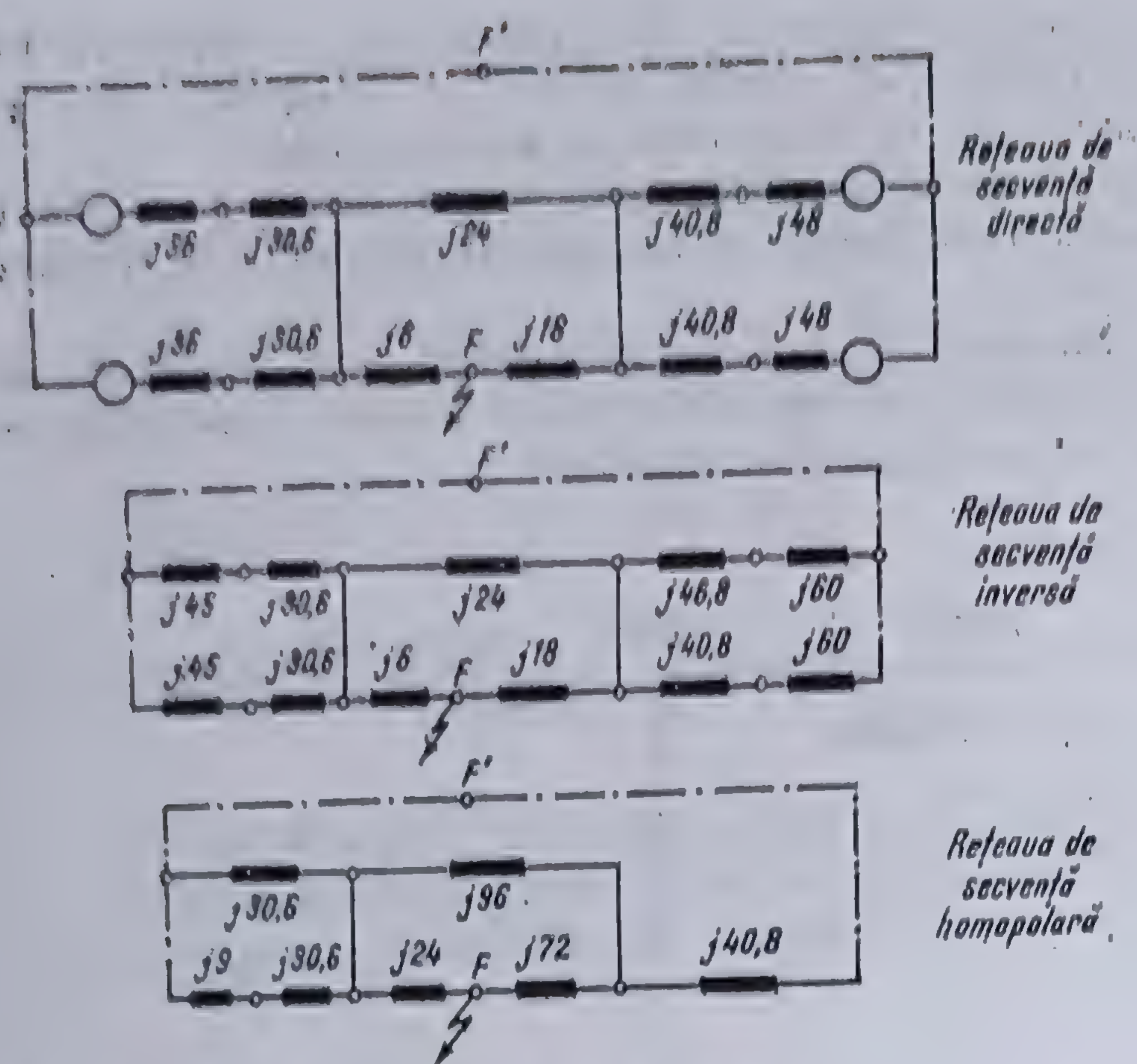


Fig. 8.53. Rețelele fictive echivalente ale circuitului dat.

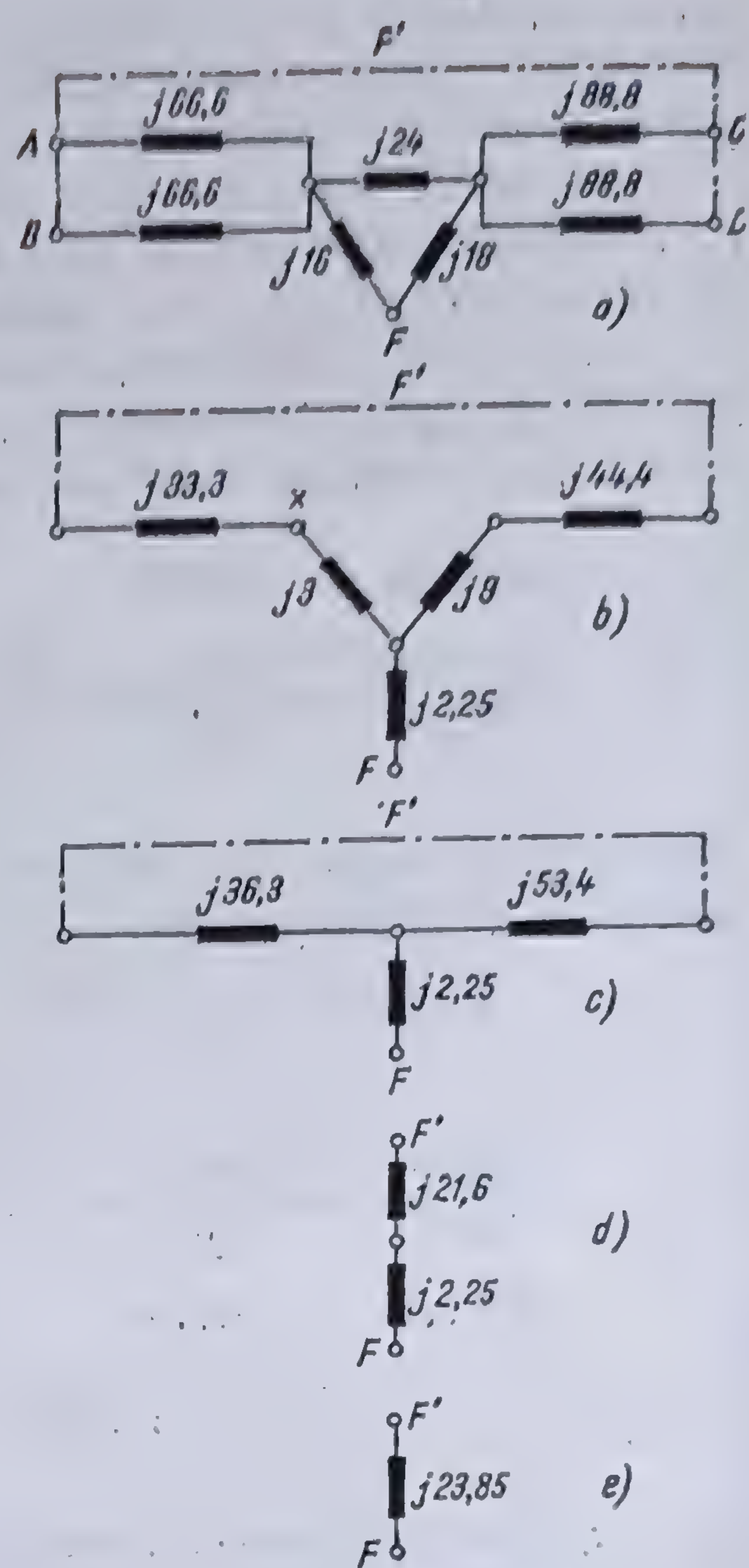


Fig. 8.54. Reducerea impedanțelor schemei fictive de secvență 1.

9. Se calculează tensiunile și curenții reali, ținându-se seama de conectarea și raportul de transformare al diverselor transformatoare.

Acestea fiind enunțate, fie rețeaua din figura 8.52 în care a avut loc un defect la 15 km de sistemul de alimentare, din stînga.

Elementele constitutive ale rețelei sînt acelea arătate în figură. Neglijînd rezistența, diversele reactanțe ale alternatoarelor din rețea și ale transformatoarelor, le deducem din tensiunea de scurtcircuit prin relația\*

$$X = \frac{\varepsilon}{100} \cdot \frac{U^2}{S} \Omega,$$

în care  $\varepsilon$  este tensiunea de scurtcircuit dată, în procente,  $U$  — tensiunea nominală a mașinii, în kV și  $S$  — puterea aparentă a acesteia, în MVA.

Cu aceste elemente se calculează reactanțele respective și se stabilesc cele trei rețele fictive (fig. 8.53).

S-a ales ca tensiune de referință, tensiunea de 60 kV a liniei de transmitere a energiei electrice, deoarece defectul a avut loc chiar pe această linie.

Pentru calculul impedanței echivalente și al factorului de distribuție al curenților, se fac toate transformările posibile rețelelor fictive echivalente

\* Vezi 6.3.4



(sumări de impedanțe, transfigurare etc.). Se obțin astfel, pentru rețeaua directă, diversele transformări arătate în figura 8.54 și impedanța echivalentă

$$\underline{Z}_d = j 23,85 \Omega.$$

Pentru a găsi factorii de distribuție ai curenților, pornim de la figura 8.54, e spre schema reală, repartizînd curenții în diversele circuite după regulile cunoscute și luînd valoarea 1 pentru curentul care iese prin defect (curentul din impedanța echivalentă).

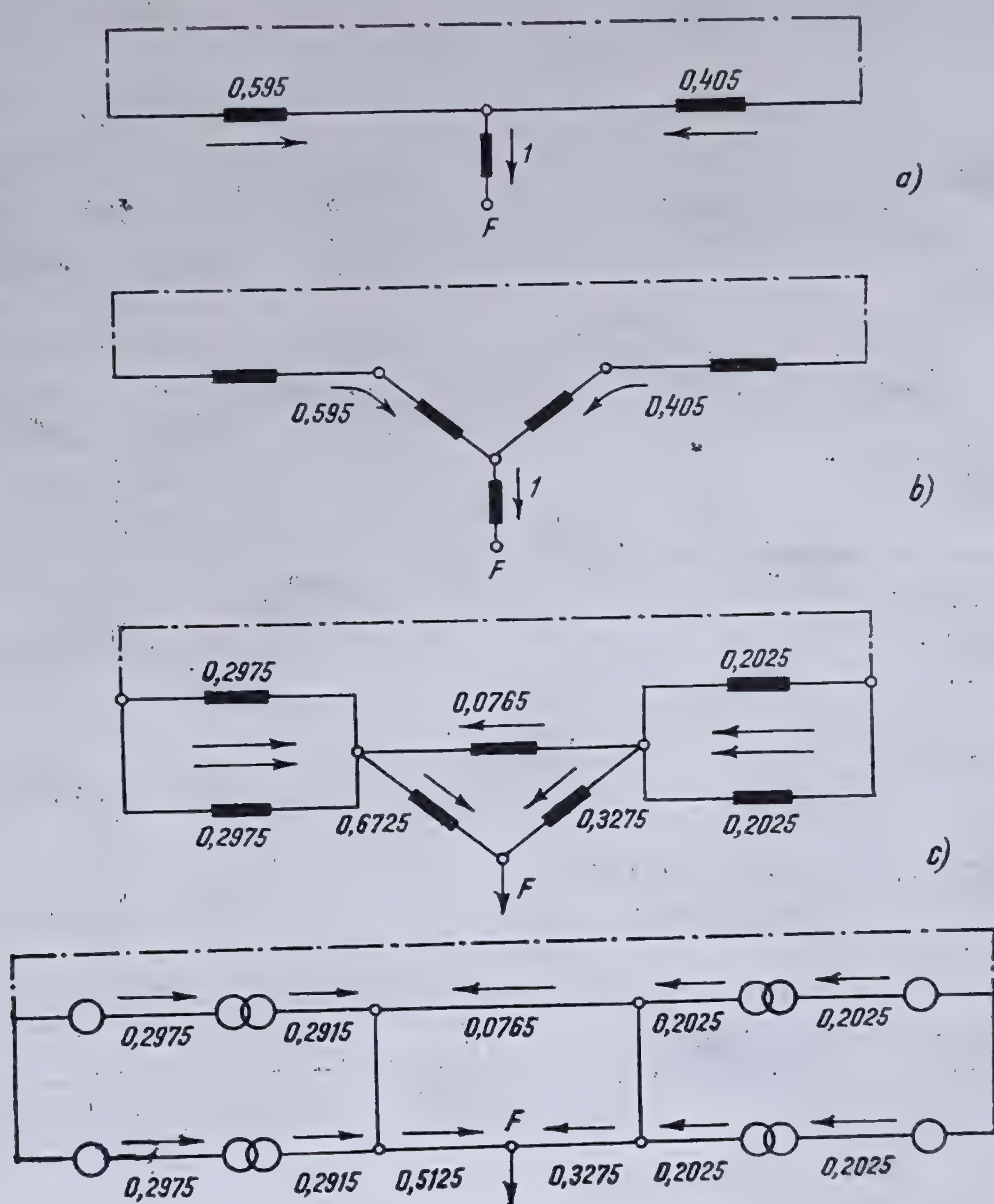


Fig. 8.55. Distribuția de curenți în rețeaua de secvență directă.

Distribuția de curenți în rețeaua fictivă directă este dată în figura 8.55.

Procedînd în același mod pentru rețelele fictive inversă și homopolară, găsim schemele echivalente și distribuțiile de curenți, date în figurile 8.56 și 8.57.

Calculul se va face numai pentru cazul unui scurtcircuit al unei faze la pămînt, cazul cel mai frecvent al rețelelor electrice aeriene.

În acest caz, cele trei rețele fictive — și, deci, impedanțele lor echivalente — vor fi legate în serie. În consecință, componentele simetrice de curent la defect sînt egale și sînt date de relația

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i}.$$



## Gruparea impedanțelor dă

$$\underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i = j 77,30 \Omega.$$

Întrucît impedanța circuitului echivalent are numai parte complexă, se poate lua tensiunea la bornele ei, care este identică cu tensiunea aplicată, de asemenea numai cu parte complexă; în acest caz, curentul rezultat este real. Rezultă

$$\underline{I}_h = \underline{I}_d = \underline{I}_i = \frac{j \frac{60\,000}{\sqrt{3}}}{j (23,85 + 26,45 + 27)} = 448 \text{ A.}$$

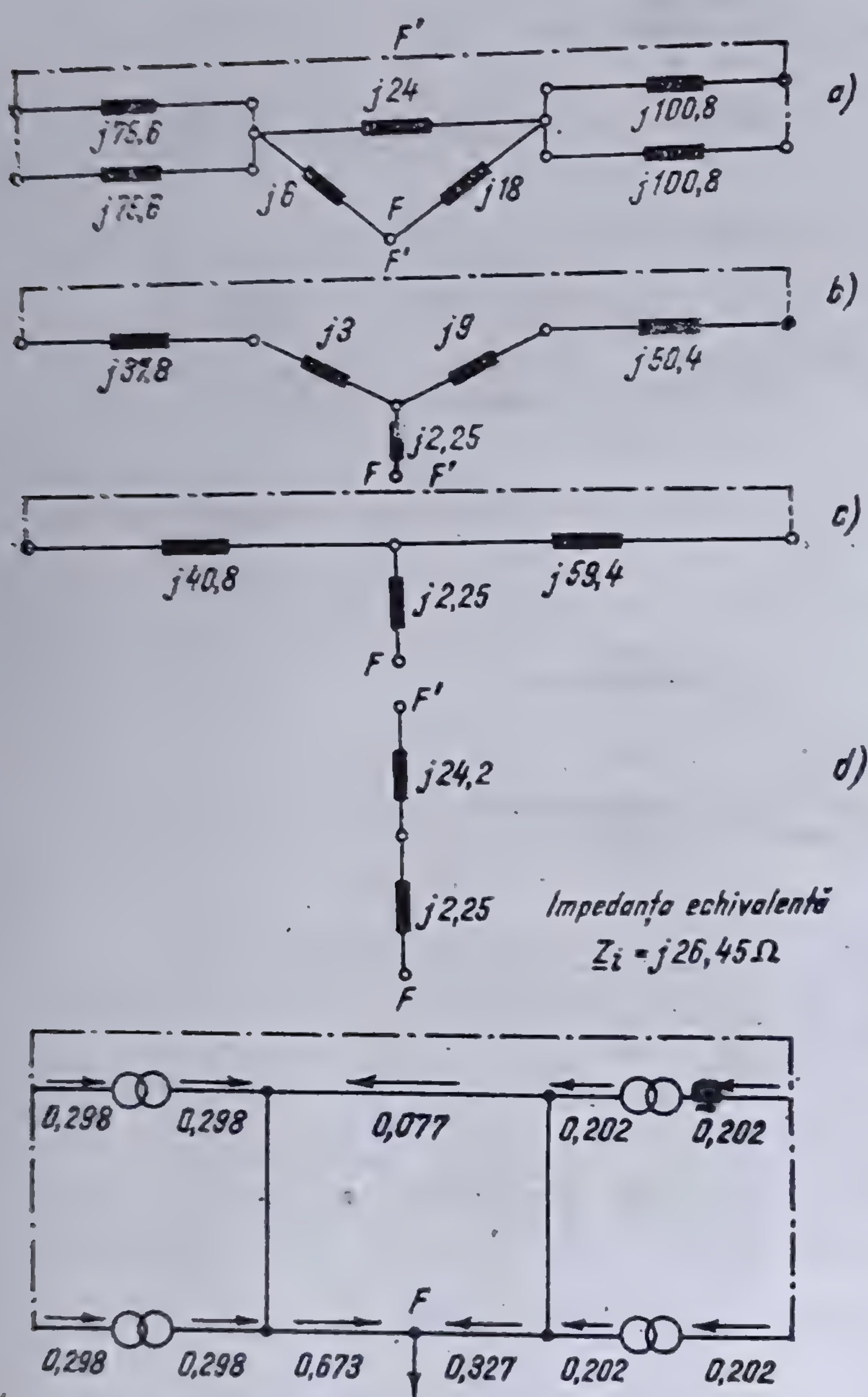


Fig. 8.56. Calculul impedanței echivalente și a distribuției de curenți în rețeaua de secvență inversă.

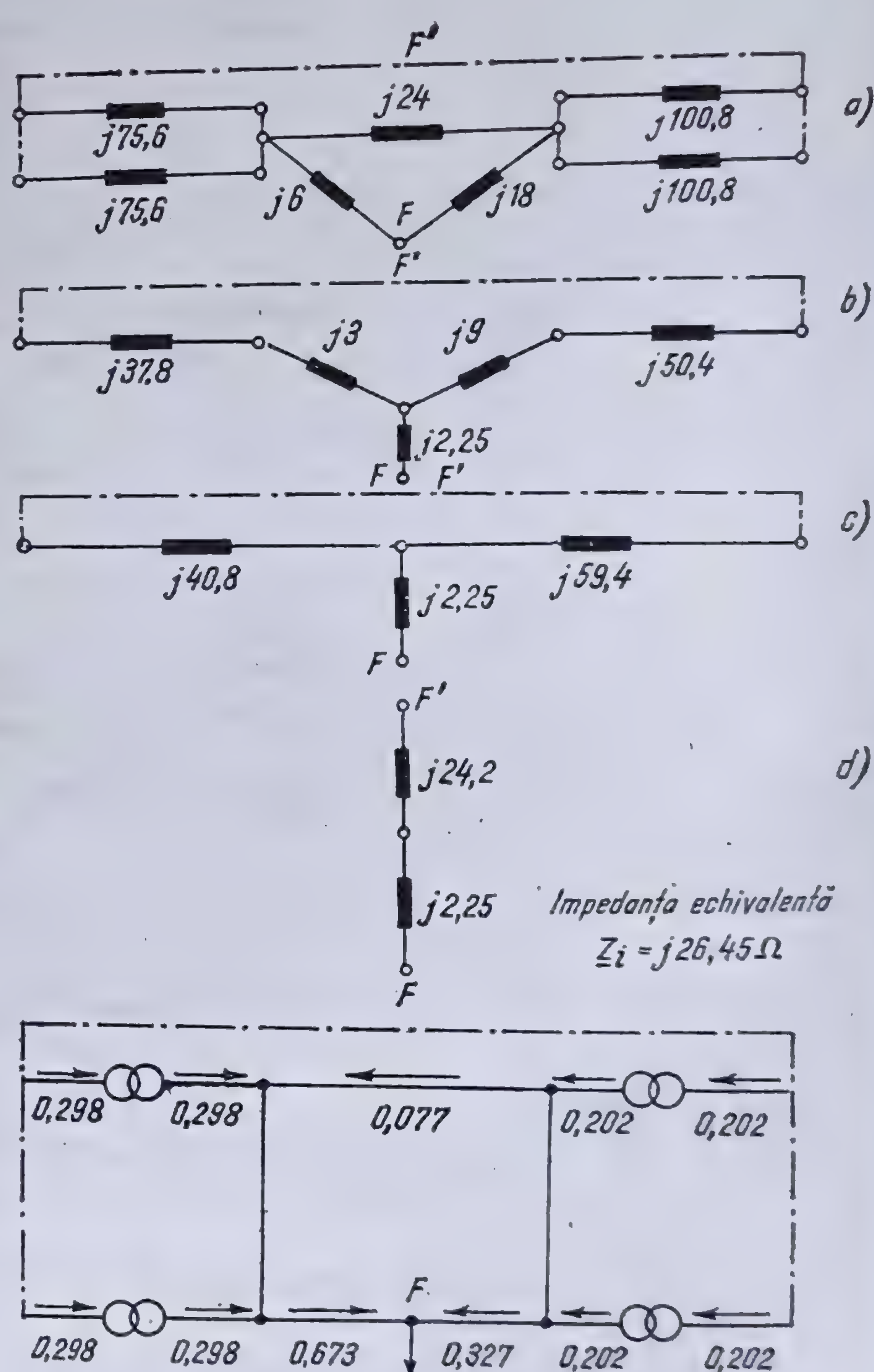


Fig. 8.57. Calculul impedanței echivalente și a distribuției de curenți în rețeaua de secvență nulă.

Cunoscînd componentele simetrice de curent la defect, se pot găsi componentele simetrice în fiecare din laturile rețelei cu ajutorul factorilor de distribuție; astfel, pentru linia bună, al cărei factor de distribuție a componentei directe este 0,765, valoarea acestei componente este

$$0,765 \times 448 = 34,3 \text{ A.}$$

Calculînd în același mod pentru toate cele trei rețele fictive, se găsește distribuția componentelor simetrice de curent, reprezentată în figura 8.58. Cu ajutorul acestora se calculează curenții de linie cu ajutorul relațiilor (8.10).



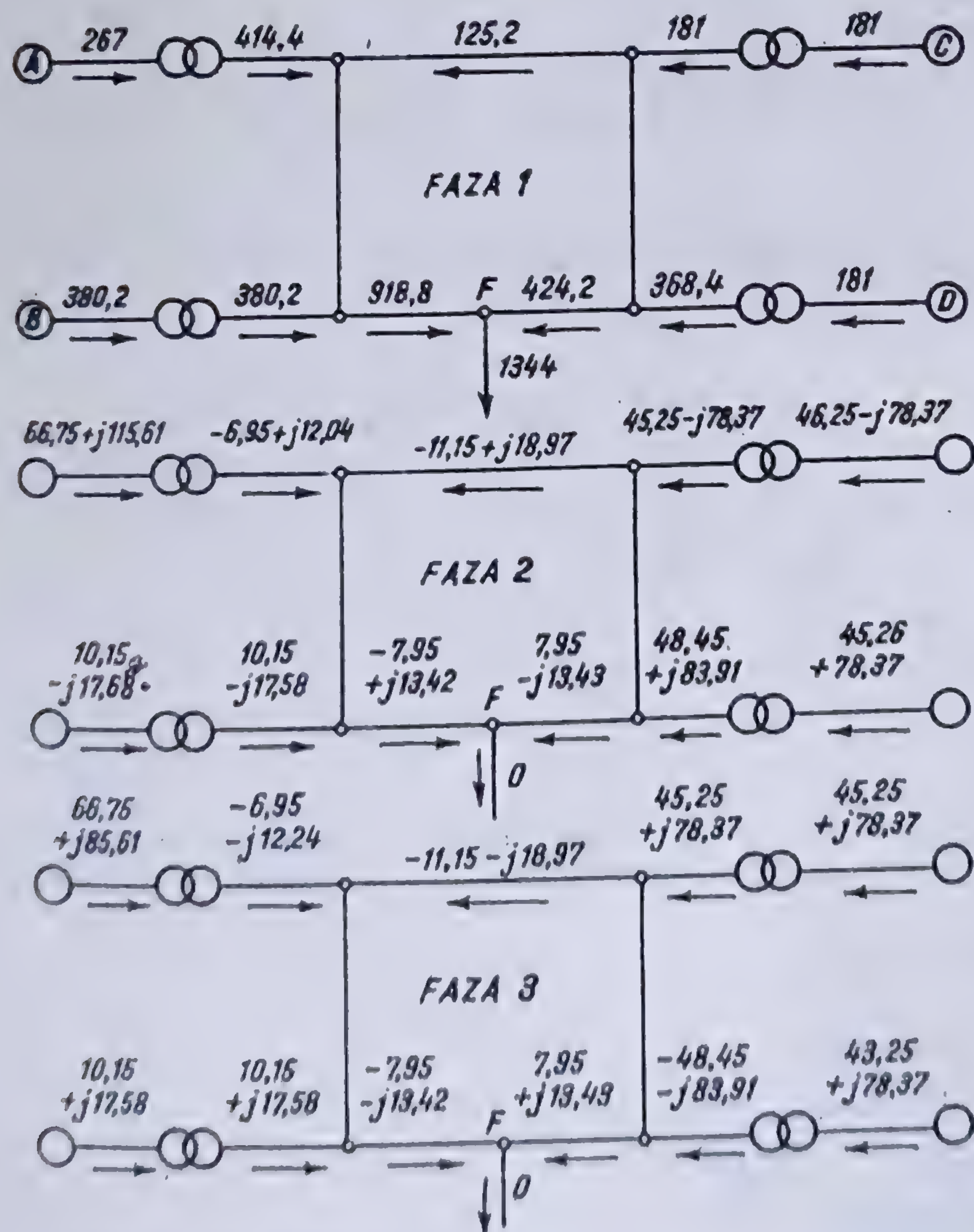
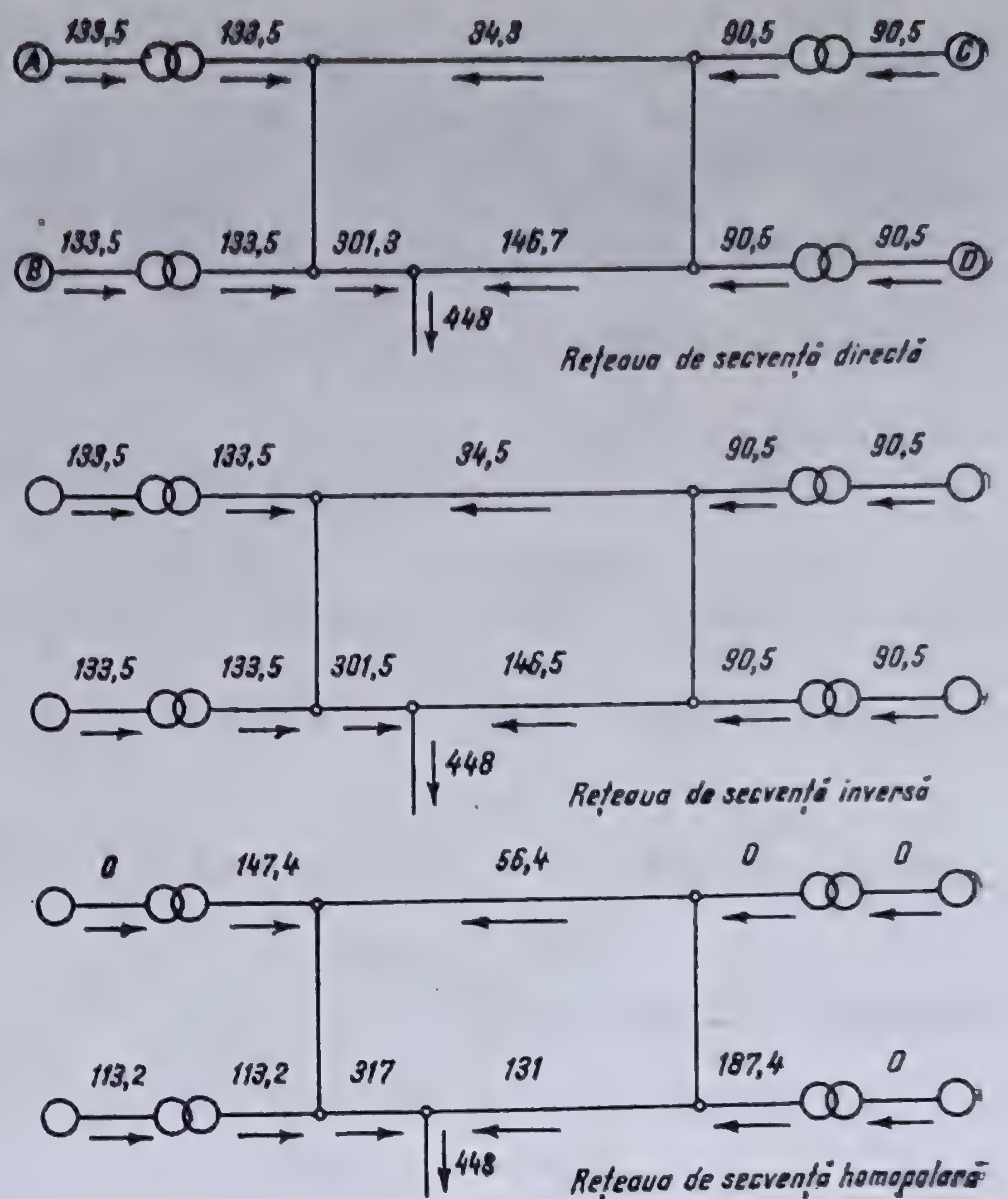
Fig. 8.58. Repartiția curenților în cele trei rețele fictive.

Calculând, de exemplu, curenții în cele trei faze în linia defectă, pe porțiunea din dreapta defectului, se găsește

$$\begin{aligned} I_1 &= 146,7 + 146,5 + 131 = \\ &= 424,2 \text{ A}; \quad I_2 = 7,95 - j 13,43 \text{ A}; \\ I_3 &= 7,95 + j 13,43 \text{ A}. \end{aligned}$$

Procedând în același mod pentru toate laturile, se găsesc toți curenții din rețea pe toate cele trei faze (fig. 8.59). Trebuie observat, că acești curenți au fost determinați în raport cu tensiunea de referință. Ei vor trebui să fie recalculați la situația reală, ținându-se seama de raportul de transformare și de conectarea transformatoarelor.

Urmează să se determine



\* Vezi 8.4.5.4.

tensiunile în diversele puncte ale rețelei. Pentru aceasta se vor determina componentele simetrice ale tensiunilor pe fază. Acestea se obțin calculând diversele căderi de tensiune cu ajutorul impedanțelor respective și al componentelor simetrice de curent care circulă prin aceste impedanțe. Aplicând metoda indicată\* se găsesc componentele simetrice de tensiune, la barele din stînga;

$$\underline{E}_a = j 25 709 \text{ V};$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_i &= 0 - j 75,6 \times 733,5 = \\ &= -j 10 092 \text{ V}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_h &= 0 - j 30,6 \times 147,4 = \\ &= -j 4 510 \text{ V}. \end{aligned}$$

Fig. 8.59. Repartiția curenților de scurt-circuit pe cele trei faze.



Procedînd în acest mod, se găsește distribuția componentelor de tensiune în cele trei rețele fictive, în diferitele puncte ale rețelei (fig. 8. 60).

Cunoscînd componentele simetrice de tensiune, se calculează acum cu ușurință tensiunile fiecărei faze față de pămînt, aplicînd relațiile (8.10), obținîndu-se rezultatele indicate în figura 8.61.

Astfel, pentru bara din stînga se găsește :

$$\underline{E}_1 = j 11 107 \text{ V} ; \quad \underline{E}_2 = - 4 834 + j 33 016 \text{ V} ;$$

$$\underline{E}_3 = - 4 834 - j 33 016 \text{ V}.$$

Pentru a determina tensiunea între faze, se utilizează relația (5.8). Calculînd, de exemplu, pentru bara din stînga, se găsește :

$$\underline{U}_1 = j 66 032 \text{ V} ; \quad \underline{U}_2 = - 4 834 - j 44 123 \text{ V} ; \quad \underline{U}_3 = 4 834 - 21 909 \text{ V}.$$

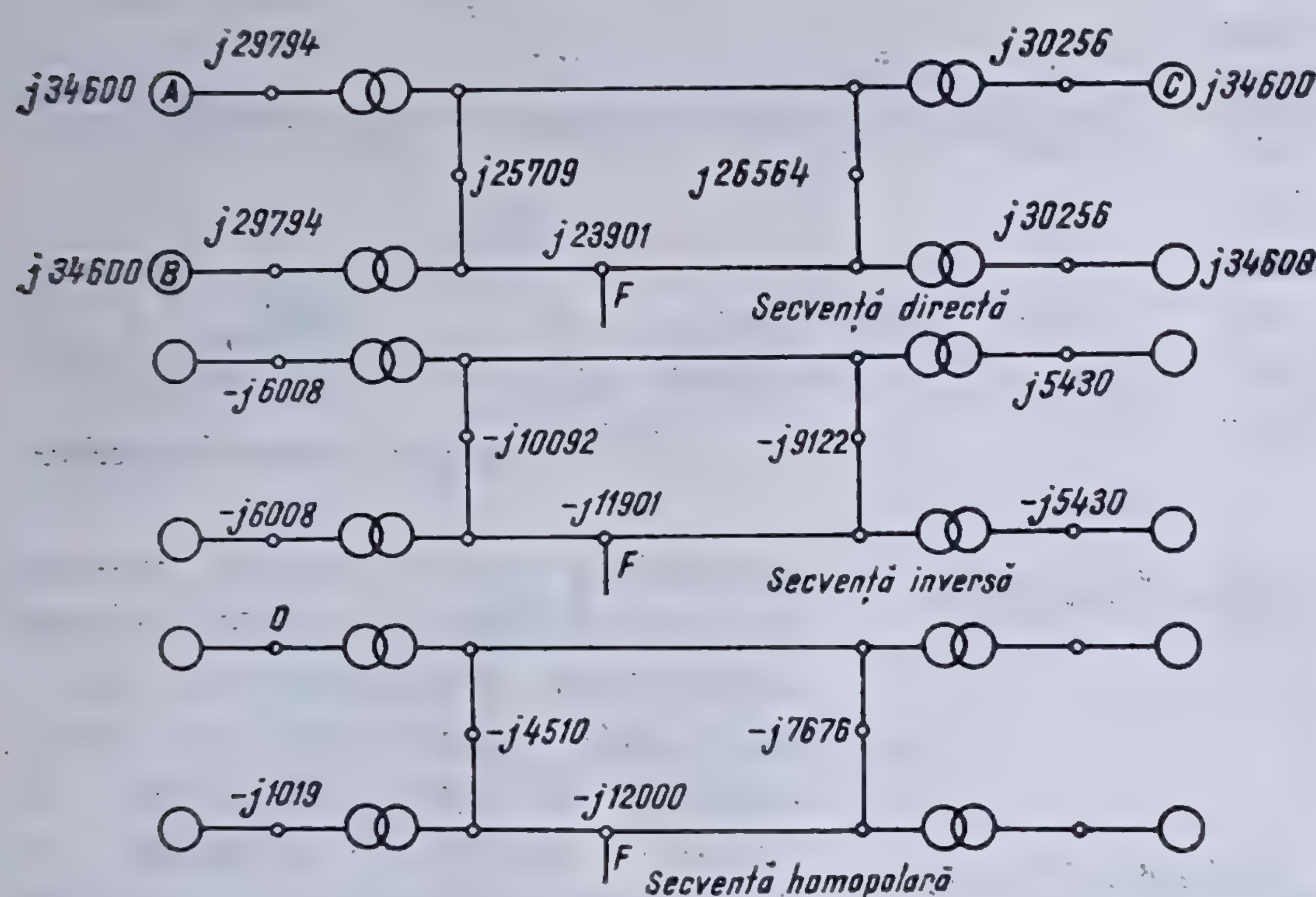


Fig. 8.60. Repartiția tensiunilor în rețelele fictive.

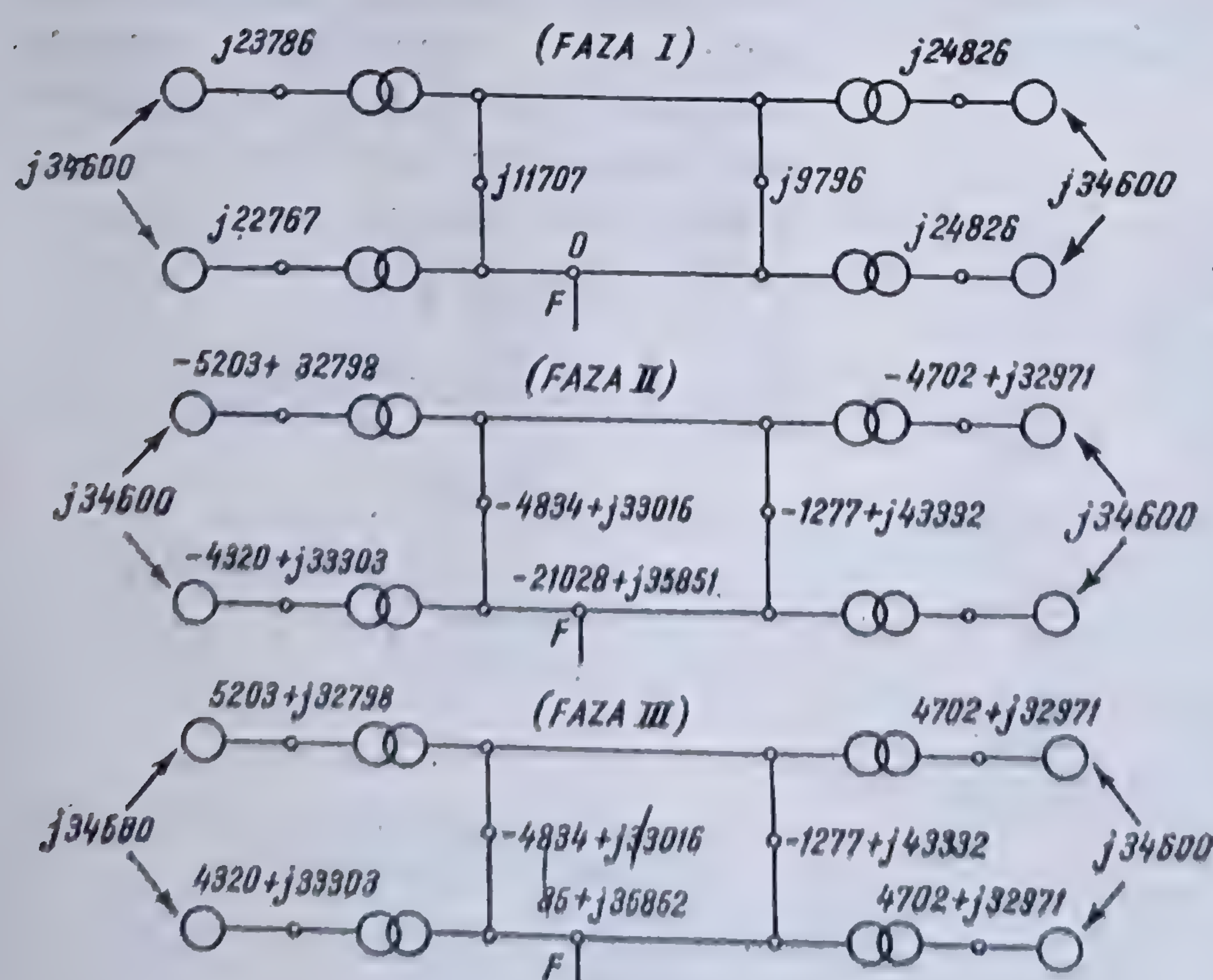


Fig. 8.61. Repartiția tensiunilor în rețea.



Tensiunile între faze pot fi obținute și prin intermediul componentelor simetrice, utilizând relațiile (8.15) și (8.16).

Pentru a termina calculul de scurtcircuit, trebuie să se țină seama de transformatoarele din rețea, precum și de faptul că unele transformatoare au conectarea triunghi-*stea*, ceea ce are drept efect schimbarea de fază a curenților sau a tensiunilor respective, între primar și secundar.

Tot calculul a fost efectuat luându-se drept bază, tensiunea de transport de 60 kV.

Pentru a calcula curenții reali, în cazul transformatoarelor cu conectarea *stea-stea*, trebuie înmulțiți curenții calculați cu raportul de transformare simetric. Astfel, pentru generatorul din *C* se găsește :

$$\underline{I}_1 = \frac{60\,000}{6\,000} 181 = 1\,810 \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = \frac{60\,000}{6\,000} (42,25 - j\,48,37) = 422,5 - j\,183,7 \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = \frac{60\,000}{6\,000} (42,25 + j\,78,37) = 422,5 + j\,783,7 \text{ A}.$$

Pentru calculul curenților în cazul transformatoarelor cu conectarea *triunghi-stea*, trebuie să se țină seama de defazajul care are loc din cauza acestei conectări, utilizând relațiile (8.63) și (8.64).

Se găsesc astfel, de exemplu, curenții debitați de alternatorul *A* :

$$\underline{I}_1 = 660,8 + j\,381,6 \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = 763,0 \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = -660,8 + j\,381 \text{ A}.$$

În același mod trebuie ținut seama și de transformatoare pentru a calcula tensiunile la bornele mașinilor electrice.

#### 8.4.6. UTILIZAREA CALCULULUI MATRICEAL LA STUDIUL REȚELOR ELECTRICE TRIFAZATE DEZECHILIBRATE

**8.4.6.1. Generalități. Formule de calcul.** Regulile de calcul matriceal aplicate la studiul rețelilor electrice de curent continuu sau de curent alternativ monofazat\* se aplică întocmai și în cazul rețelilor trifazate. Introducerea coordonatelor simetrice modifică puțin formulele de transformare, fără ca metoda generală de calcul să se modifice.

Fie un sistem trifazat oarecare, la care presupunem că cele trei faze sînt fiecare alimentate de o forță electromotoare  $e_k$  și sînt străbătute fiecare de curenții  $i^k$  ( $k = a, b, c$ ); de asemenea se presupune că sistemul are atît impedanțe proprii pe fază, cît și impedanțe mutuale între faze. Pentru acest sistem se pot scrie matricele corespunzătoare

$$[e] = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix}, \quad [i] = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{bmatrix} i^a \\ i^b \\ i^c \end{bmatrix}, \quad [Z] = \begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

\* Vezi 2.4 și 6.2.4.



Utilizând coordonatele simetrice, curenții și tensiunile date se pot scrie sub forma\*.

$$[i] = [C_s][i_s] \text{ și } [e] = [C_s][e_s]$$

în care

$$[i_s] = \begin{matrix} h \\ d \\ i \end{matrix} \begin{bmatrix} i^h \\ i^d \\ i^i \end{bmatrix}, \quad [e_s] = \begin{matrix} h \\ d \\ i \end{matrix} \begin{bmatrix} e_h \\ e_d \\ e_i \end{bmatrix}$$

sînt matricele componentelor simetrice ale curenților și ale tensiunilor iar

$$[C_s] = \begin{matrix} & h & d & i \\ a & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ b & \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \\ c & \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8.66)$$

este matricea de conexiune a sistemului (8.10) care dă legătura dintre mărimile pe fază și componentele simetrice respective; întrucît operatorul  $a$  este o mărime complexă, matricea  $[C_s]$  este o matrice complexă.

Ținînd seama de proprietățile operatorului de rotație  $a$ , se găsește ușor

$$[C_s]^* = \begin{matrix} & a & b & c \\ h & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ d & \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \\ i & \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \end{matrix} = 3[C_s]^{-1}. \quad (8.67)$$

În cazul coordonatelor simetrice, invariația puterii trebuie scrisă sub forma\*\*

$$[e]_t [i]^* = 3[e_s]_t [i_s]^* ;$$

\* Vezi relațiile (8.10).

\*\* Vezi paragraful 8.4.3. Aceasta se poate arăta și direct. Într-adevăr, dacă în relația

$$[S] = [e]_t [i]^*$$

punem

$$[e] = [C_s] [e_s] \text{ și } [i] = [C_s] [i_s],$$

rezultă

$$[S] = [e_s]_t [C_s]_t [C_s]^* [i_s]^*.$$

Însă

$$[C_s]_t = [C_s] \text{ și } [C_s]_t^* = 3 [C_s]^{-1}$$

rezultă

$$[C_s]_t [C_s]^* = [C_s] 3 [C_s]^{-1} = 3$$

și deci

$$[S] = 3 [e_s]_t [i_s]^*.$$



rezultă formulele de transformare ale tensiunilor și impedanțelor

$$[e_s] = \frac{1}{3} [C_s]^* [e] = [C_s]^{-1} [e], \quad (8.68)$$

$$[Z_s] = \frac{1}{3} [C_s]^* [Z] [C_s] = [C_s]^{-1} [Z] [C_s]. \quad (8.69)$$

Aplicînd aceste relații sistemului trifazat dat se găsește

$$[e_s] = \frac{1}{3} \begin{matrix} h \\ d \\ i \end{matrix} \begin{bmatrix} e_a + e_b + e_c \\ e_a + ae_b + a^2e_c \\ e_a + a^2e_b + ae_c \end{bmatrix}, \quad [i_s] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} i^a + i^b + i^c \\ i^a + ai^b + a^2i^c \\ i^a + a^2i^b + ai^c \end{bmatrix}$$

și

$$[Z_s] = \frac{1}{3} \begin{matrix} h \\ d \\ i \end{matrix} \begin{bmatrix} \xi_{00} & \mu_{01} & \mu_{02} \\ \mu_{01} & \xi_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{20} & \mu_{21} & \xi_{22} \end{bmatrix}$$

în care s-a notat:

$$\xi_{00} = Z_{a0} + Z_{b0} + Z_{c0}$$

$$\xi_{11} = Z_{a1} + Z_{b1} + Z_{c1}$$

$$\xi_{22} = Z_{a2} + Z_{b2} + Z_{c2}$$

$$\mu_{01} = Z_{a1} + a^2Z_{b1} + aZ_{c1}, \quad \mu_{10} = Z_{a0} + aZ_{b0} + a^2Z_{c0},$$

$$\mu_{02} = Z_{a2} + aZ_{b2} + a^2Z_{c2}, \quad \mu_{20} = Z_{a0} + a^2Z_{b0} + aZ_{c0},$$

$$\mu_{12} = Z_{a2} + a^2Z_{b2} + aZ_{c2}, \quad \mu_{21} = Z_{a1} + aZ_{b1} + a^2Z_{c1},$$

$$Z_{a0} = Z_{aa} + Z_{ab} + Z_{ac}$$

$$Z_{a1} = Z_{aa} + a^2Z_{ab} + aZ_{ac}$$

$$Z_{a2} = Z_{aa} + aZ_{ab} + a^2Z_{ac}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$



În cazul particular cînd inductanțele mutuale ale celor trei înfășurări sînt nule, matricea de impedanță este

$$[Z] = \begin{array}{c} a & b & c \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline Z_a & & \\ \hline & Z_b & \\ \hline & & Z_c \\ \hline \end{array} \end{array}$$

și matricea corespunzătoare în coordonate simetrice va fi

$$[Z_s] = \begin{array}{c} h & & \\ d & & \\ i & & \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{Z}_h & \underline{Z}_i & \underline{Z}_d \\ \hline \underline{Z}_d & \underline{Z}_h & \underline{Z}_i \\ \hline \underline{Z}_i & \underline{Z}_d & \underline{Z}_h \\ \hline \end{array}$$

unde  $\underline{Z}_h$ ,  $\underline{Z}_d$  și  $\underline{Z}_i$  sînt impedanțele de calcul\*. Se observă ușor regula de formare a matricei  $[Z_s]$  în acest caz, ea urmînd regula indicilor\*\*.

**8.4.6.2. Metoda generală de calcul a rețelelor electrice trifazate nesimetrice.** La studiul rețelelor electrice trifazate, folosind coordonatele simetrice, se dau de obicei forțele electromotoare din circuit și diversele impedanțe. Necunoscute sînt curenții din rețea și tensiunile la bornele sarcinii. Se consideră date ale problemei :

- forțele electromotoare din rețea  $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$ ;
- impedanțele generatorului  $\underline{Z}_s, \underline{Z}_a, \underline{Z}_0$ ;
- impedanțele pe fază ale rețelei  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ ;
- eventual impedanțele mutuale  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32}, \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_{13}$ ;
- impedanțele la pămînt  $\underline{Z}_g$  și ale arcului electric  $\underline{Z}_A$ .

Necunoscute sînt :

- curenții care circulă în rețea și componentele lor simetrice :  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$  și  $\underline{I}_a, \underline{I}_i, \underline{I}_h$ ;
- tensiunile la bornele sarcinii și componentele lor simetrice  $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$  și  $\underline{V}_a, \underline{V}_i, \underline{V}_h$ .

În total sînt deci 12 necunoscute.

Între aceste mărimi se pot scrie următoarele relații matriceale :

$$[I] = [C_s][I_s], \quad (8.70)$$

$$[V] = [C_s][V_s], \quad (8.71)$$

$$[E_s] = [V_s] + [Z_s][I_s], \quad (8.72)$$

în care indicele arată că avem de-a face cu mărimi în coordonate simetrice, iar  $[C_s]$  este matricea de conexiune definită prin relația (8.66). Rezultă că nu avem decît 9 ecuații între cele 12 necunoscute, sistemul fiind astfel nedeter-

\* Vezi relațiile (8.42).

\*\* Vezi 8.3.5.3.



minat. Celelalte trei ecuații necesare rezolvării problemei sînt date de condițiile particulare de funcționare ale rețelei.

În cazul utilizării coordonatelor simetrice în studiul rețelelor electrice trifazate nesimetrice cu ajutorul calculului matriceal apar *patru* rețele diferite, cu ajutorul cărora se studiază rețeaua respectivă. Acestea sînt (fig. 8.62) :

I. Rețeaua primitivă a rețelei date, conținînd  $K$  elemente și  $K$  bucle, repartizate în grupe, fiecare grupă conținînd cîte trei laturi (sau numai una).

II. Rețeaua dată, conținînd  $B$  bucle.

III. Rețeaua primitivă a rețelei echivalente în coordonate simetrice, conținînd — la fel ca rețeaua primitivă (I) —  $K$  laturi și  $K$  bucle grupate ca mai înainte, numărul acestor grupe fiind identic cu precedentul.

IV. Rețeaua echivalentă în coordonate simetrice, avînd același număr de laturi și de bucle ca și rețeaua dată (II) însă, în general, un număr diferit de subrețele. Această rețea este, de obicei, necunoscută la începutul studiului și găsirea structurii ei constituie, în general, obiectul studiului.

La aceste patru rețele anumite elemente sînt cunoscute, altele urmează a fi determinate. Astfel, pot fi cunoscute impedanțele circuitelor fie din rețeaua primitivă a rețelei date (I), fie din rețeaua primitivă (III) a rețelei dată în coordonate simetrice, fie unele dintr-o rețea, altele din altă rețea.

Ca elemente de aflat, sînt în general curenții și tensiunile din rețeaua dată (II), fie din rețeaua echivalentă în coordonate simetrice (IV), fie din ambele.

Pentru rezolvarea problemei trebuie găsită matricea de conexiune care să transforme rețeaua (III) în rețeaua (IV) cînd matricea de conexiune care transformă rețeaua (I) în rețeaua (II) este cunoscută, legătura dintre rețele (II) și (III) făcîndu-se prin matricea de conexiune a coordonatelor simetrice (8.66).

În practică studiul unei probleme poate fi simplificat, renunțîndu-se la unele rețele, în special la rețeaua (I).

**8.4.6.3. Exemplu de aplicație.** Fie să studiem prin metoda dată o rețea care funcționează în scurtcircuit bifazat și la pămînt cu arc electric (fig. 8.62). Ecuațiile de funcționare ale defectului sînt\*

$$\underline{I}_x = 0 \quad \text{și} \quad \underline{E}_y = \underline{E}_z = \underline{Z}_A (\underline{I}_y + \underline{I}_z)$$

care dau cele trei ecuații suplimentare necesare rezolvării problemei.

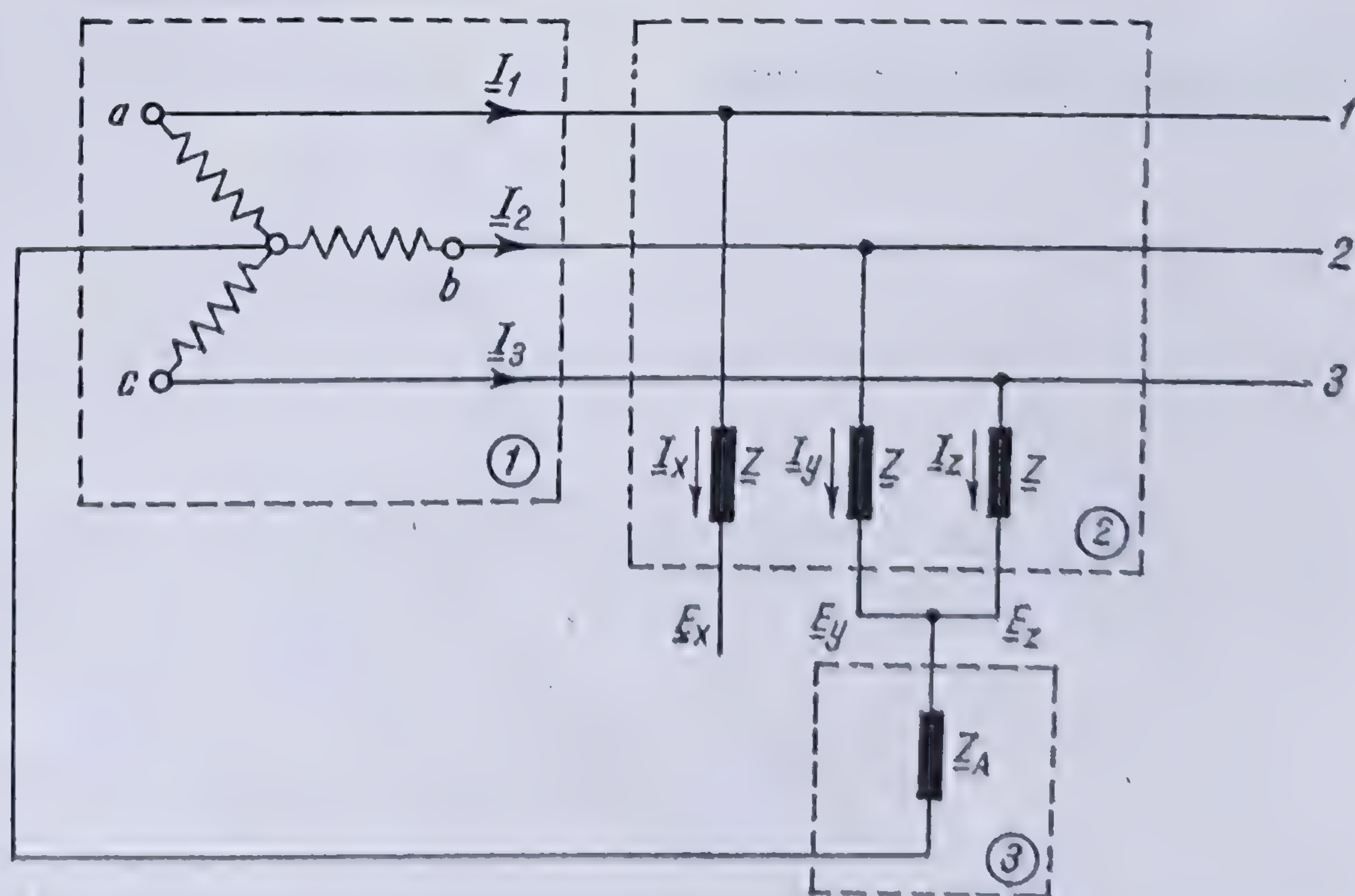


Fig. 8.62. Schema unui scurtcircuit între două faze și la pămînt cu arc electric.

\* Vezi 8.4.5.4. punctul 2.



Rețeaua dată poate fi considerată ca formată din trei rețele interconectate și anume:

— Rețeaua 1 constituită din generatorul care o alimentează (sau în general generatorul echivalent al surselor care alimentează defectul) pentru care sînt date impedanțele echivalente

$$[Z_1]_s = \begin{matrix} & h_1 & d_1 & i_1 \\ \begin{matrix} h_1 \\ d_1 \\ i_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_0 & & \\ & Z_s & \\ & & Z_a \end{bmatrix} \end{matrix},$$

unde  $Z_0$ ,  $Z_s$  și  $Z_a$  sînt respectiv impedanțele de nul, sincronă și asincronă a generatorului\*, și forțele electromotoare

$$[e_1]_s = \begin{matrix} h_1 \\ d_1 \\ i_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \\ E \\ \end{bmatrix},$$

generatorul fiind presupus simetric\*\*.

— Rețeaua 2 constituită din elementele rețelei date și care se presupune echilibrată; impedanțele rețelei sînt

$$[Z_2] = \begin{matrix} & 1' & 2' & 3' \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z & & \\ & Z & \\ & & Z \end{bmatrix} \end{matrix}$$

iar forțele electromotoare

$$[e_2] = \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

— Rețeaua 3 constituită din impedanța arcului electric avînd matricele

$$[Z_3] = g \begin{bmatrix} g \\ Z_A \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad [e_3] = g \begin{bmatrix} g \\ \end{bmatrix}$$

\* Vezi 8.3.9.

\*\* Indicele  $s$  la matrice arată că aceasta este exprimată în coordonate simetrice.



Prima operație ce trebuie făcută este transformarea matricelor de impedanță  $[Z_2]$  și  $[Z_3]$  în sistemul de coordonate simetrice cu ajutorul formulei de transformare (8.69). Se găsește

$$[Z_2]_s = \begin{matrix} & h_2 & d_2 & i_2 \\ \begin{matrix} h_2 \\ d_2 \\ i_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z & & \\ & Z & \\ & & Z \end{bmatrix} \end{matrix}$$

și

$$[Z_3]_s = h_3 \begin{bmatrix} 3Z_A \end{bmatrix},$$

întrucît matricea de conexiune a impedanței de arc este

$$[C_3]_s = g \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix},$$

care rezultă din relația

$$\underline{I^g} = \underline{I^1} + \underline{I^2} + \underline{I^3} = 3 \underline{I^h}$$

Calculul scurtcircuitului se face interconectînd aceste trei rețele. Vom avea

$$[Z]_s = \begin{matrix} & h_1 & d_1 & i_1 & h_2 & d_2 & i_2 & h_3 \\ \begin{matrix} h_1 \\ d_1 \\ i_1 \\ h_2 \\ d_2 \\ i_2 \\ h_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} Z_0 & & & & & & \\ & Z_s & & & & & \\ & & Z_a & & & & \\ & & & Z & & & \\ & & & & Z & & \\ & & & & & Z & \\ & & & & & & 3Z_A \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{și } [e]_s = \begin{matrix} h_1 \\ d_1 \\ i_1 \\ h_2 \\ d_2 \\ i_1 \\ h_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \\ E \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Ecuția de funcționare a scurtcircuitului,  $\underline{I^w} = 0$ , dă ecuația de legătură a componentelor simetrice ale curentului

$$\underline{I^h} + \underline{I^d} + \underline{I^i} = 0,$$

care arată că două din aceste componente sînt independente; în consecință, poate fi eliminată una din axele de referință. Trecînd la noul sistem de axe,



se scriu vechii curenți în funcție de noii curenți

$$\underline{I}_{h1} = -\underline{I}^d - \underline{I}^i$$

$$\underline{I}_{d1} = \underline{I}^d$$

$$\underline{I}_{i1} = \underline{I}^i$$

$$\underline{I}_{h2} = -\underline{I}^d - \underline{I}^i$$

$$\underline{I}_{d2} = \underline{I}^d$$

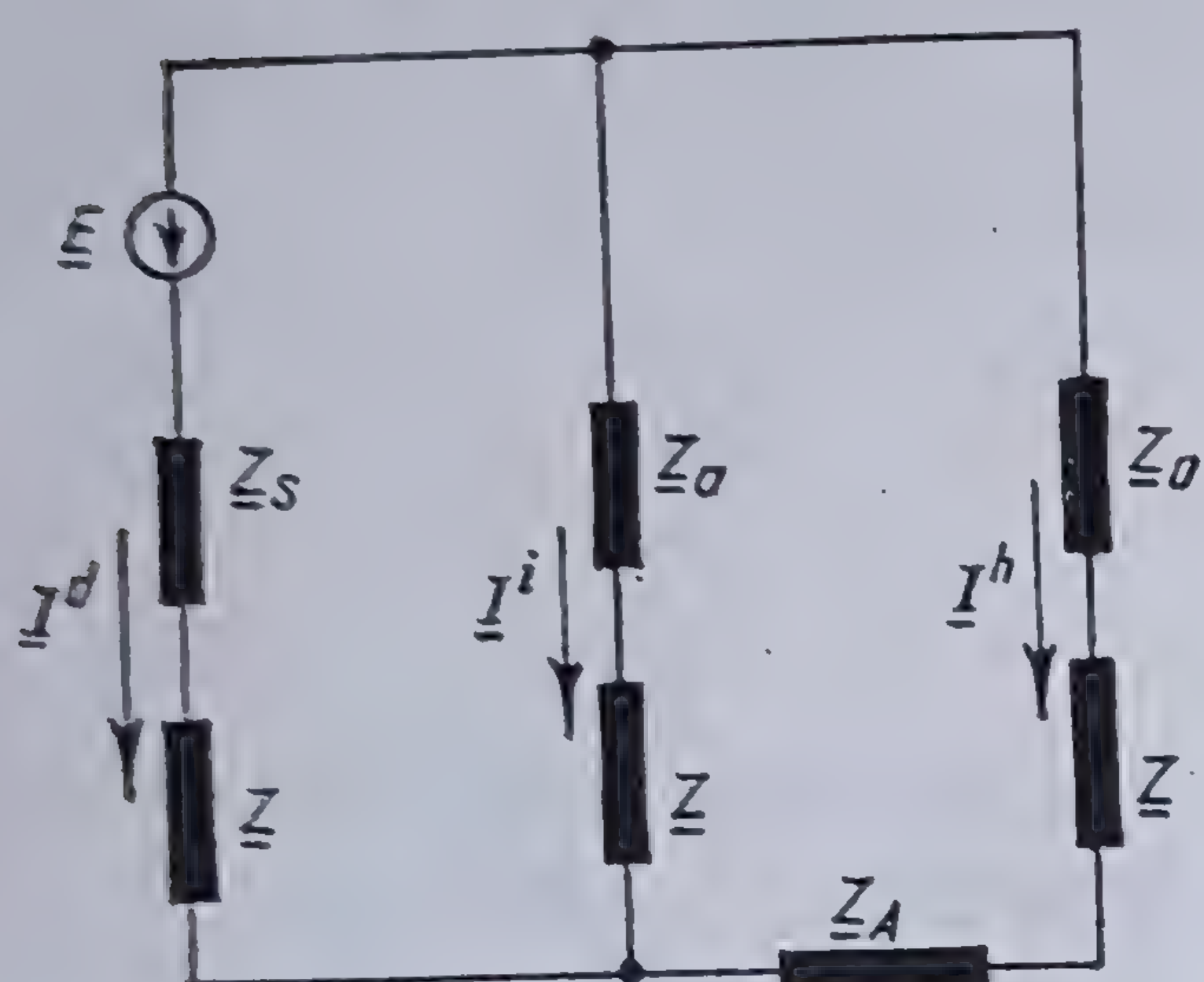
$$\underline{I}_{i2} = \underline{I}^i$$

$$\underline{I}_{h3} = -\underline{I}^d - \underline{I}^i$$

de unde rezultă

matricea de conexiune  $[C_4^3] =$

	$d$	$i$
$h_1$	$-1$	$-1$
$d_1$	$1$	
$i_1$		$1$
$h_2$	$-1$	$-1$
$d_2$	$1$	
$i_2$		$1$
$h_3$	$-1$	$-1$



matricea\*  $[C_4^3]$  făcînd trecerea de la rețeaua primitivă (III) [în coordonate simetrice] la rețeaua echivalentă (IV) în coordonate simetrice. Matricele acestei rețele se determină acum ușor și sînt

$$[e']_s = [C_4^3]_t [e]_s = \begin{matrix} d & i \\ \begin{bmatrix} E \\ \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Fig. 8.63. Schema echivalentă a scurtcircuitului în coordonate simetrice. și

$$[Z']_s = [C_4^3]_t [Z]_s [C_4^3] = \begin{matrix} d & i \\ \begin{bmatrix} Z_0 + Z_s + 2Z + 3Z_A & Z_0 + Z + 3Z_A \\ Z_0 + Z + 3Z_A & Z_0 + Z_a + 2Z + 3Z_A \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cu ajutorul acestor două matrice se construiește circuitul echivalent al defectului considerat în coordonate simetrice (fig. 8.63) și care este schema cunoscută\*\*. Pornind de la această schemă, determinarea curenților de scurtcircuit se poate face fie direct\*\*\*, fie cu ajutorul calculului matriceal, în care caz se va aplica relația (2.141).

$$[I]_s = [Z']_s^{-1} [E]_s.$$

Calculînd matricea inversă  $[Z']_s^{-1}$  se găsește

$$[Z']_s^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{matrix} d & i \\ \begin{bmatrix} Z_0 + Z_a + 2Z + 3Z_A & -Z_0 - Z - 3Z_A \\ -Z_0 - Z - 3Z_A & Z_0 + Z_s + 2Z + 3Z_A \end{bmatrix} \end{matrix}$$

unde

$$\Delta = Z_0(Z_s + Z_a) + Z_s Z_a + 2Z(Z_0 + Z_s + Z_a) + 3Z_A(Z_s + Z_a) + 3Z(Z + 3Z_A)$$

\* S-a notat  $[C_n^m]$  pentru a arăta că această matrice transformă rețeaua  $m$  în rețeaua  $n$ .

\*\* Vezi 8.4.5.4 punctul 2.

\*\*\* Vezi 8.4.5.6 punctul 2.



Rezultă

$$\begin{matrix} d \\ i \end{matrix} \begin{bmatrix} I^d \\ I^i \end{bmatrix} = \frac{E}{\Delta} \begin{bmatrix} Z_0 + Z_a + 2Z + 3Z_A \\ -Z_0 - Z - 3Z_A \end{bmatrix}$$

Găsirea curenților reali de scurtcircuit se face aplicînd relația (8.73) care operează transformarea rețelei date (II) în circuitul echivalent în coordonate simetrice (IV). Această matrice se stabilește ușor. Într-adevăr, fie  $[I]$  curenții de scurtcircuit din rețeaua dată (II),  $[I']$  curenții de scurtcircuit din rețeaua primitivă în coordonate simetrice (III) și  $[I'']$  curenții din rețeaua echivalentă în coordonate simetrice (IV). Avem imediat

$$[I] = [C_3^2] [I'] \quad \text{și} \quad [I'] = [C_4^3] [I''];$$

rezultă

$$[I] = [C_3^2] [C_4^3] [I''] \quad \text{și deci} \quad [C_4^2] = [C_3^2] [C_4^3]. \quad (8.73)$$

Matricea de trecere de la rețeaua dată (II) la rețeaua primitivă în coordonate simetrice (III) este

$$[C_3^2] = \begin{matrix} & h_1 & d_1 & i_1 & h_2 & d_2 & i_2 & h_3 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & a^2 & a & & & & \\ 1 & a & a^2 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & a^2 & a & \\ & & & 1 & a & a^2 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

matricea  $[C_4^3]$  fiind cea calculată mai înainte, rezultă imediat

$$[C_4^2] = \begin{matrix} & d & i \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ g \end{matrix} & \begin{bmatrix} & \\ a^2 - 1 & a - 1 \\ a - 1 & a^2 - 1 \\ & \\ a^2 - 1 & a - 1 \\ a - 1 & a^2 - 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Curenții căutați vor fi

$$[I] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ g \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ (1-a^2)Z_a + (a-a^2)Z_0 + (a-2a^2)Z + 3(a-a^2)Z_A \\ (1-a)Z_a + (a^2-a)Z_0 + (a^2-2a)Z + 3(a^2-a)Z_A \\ 0 \\ (1-a^2)Z_a + (a-a^2)Z_0 + (a-2a^2)Z + 3(a-a^2)Z_A \\ (1-a)Z_a + (a^2-a)Z_0 + (a^2-2a)Z + 3(a^2-a)Z_A \\ 3(Z_a + Z) \end{vmatrix} \cdot \frac{-E}{\Delta}$$

În cazul particular al unui scurtcircuit direct la bornele alternatorului și la pământ, curenții de scurtcircuit corespunzători se obțin făcând în relația de mai sus  $Z = Z_A = 0$  și se obține

$$\Delta = Z_0(Z_s + Z_a) + Z_s Z_a;$$

rezultă:

— componentele simetrice ale curenților

$$\frac{d}{i} \frac{I^d}{I^i} = \frac{d}{i} \frac{Z_0 + Z_a}{-Z_0} \frac{E}{Z_0(Z_s + Z_a) + Z_s Z_a};$$

— curenții reali

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ g \end{matrix} \begin{vmatrix} I^1 \\ I^2 \\ I^3 \\ I^{1'} \\ I^{2'} \\ I^{3'} \\ I^p \end{vmatrix} = - \frac{E}{Z_0(Z_s + Z_a) + Z_s Z_a} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \\ g \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 \\ (1-a^2)Z_a + (a-a^2)Z_0 \\ (1-a)Z_a - (a-a^2)Z_0 \\ 0 \\ (1-a^2)Z_a + (a-a^2)Z_0 \\ (1-a)Z_a - (a-a^2)Z_0 \\ 3Z_a \end{vmatrix},$$

regăsindu-se astfel rezultatul obținut direct pe altă cale\*. Se verifică ușor că

$$\underline{I^p} = \underline{I^2} + \underline{I^3}$$

#### 8.4.7. REGIMUL TRANZITORIU ÎN SISTEME TRIFAZATE

Folosirea mărimilor complexe la studiul regimurilor tranzitorii\*\* dă posibilitatea examinării regimurilor tranzitorii în sisteme trifazate, în cazul când schimbarea regimului de funcționare produce o dezechilibrare.

\* Vezi 8.4.5.6, punctul 2.

\*\* Vezi 7.4.



Fie o rețea trifazată, supusă unui regim tranzitoriu oarecare. Curenții și tensiunile în cele trei faze pot fi exprimați prin niște sume de mărimi complexe de forma

$$\underline{P}_1 = \Sigma A_1 e^{p_1 t},$$

$$\underline{P}_2 = \Sigma A_2 e^{p_2 t},$$

$$\underline{P}_3 = \Sigma A_3 e^{p_3 t}.$$

Se definesc sumele  $\underline{P}_h$ ,  $\underline{P}_d$ ,  $\underline{P}_i$  prin relațiile

$$\underline{P}_h = \frac{1}{3}(\underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_3),$$

$$\underline{P}_d = \frac{1}{3}(\underline{P}_1 + a\underline{P}_2 + a^2\underline{P}_3), \quad (8.74)$$

$$\underline{P}_i = \frac{1}{3}(\underline{P}_1 + a^2\underline{P}_2 + a\underline{P}_3)$$

a fiind operatorul de rotație  $1 \mid 120^\circ$ .

Din relațiile (8.74) se deduce

$$\underline{P}_1 = \underline{P}_h + \underline{P}_d + \underline{P}_i,$$

$$\underline{P}_2 = \underline{P}_h + a^2\underline{P}_d + a\underline{P}_i, \quad (8.75)$$

$$\underline{P}_3 = \underline{P}_h + a\underline{P}_d + a^2\underline{P}_i.$$

În consecință, teoria coordonatelor simetrice se poate aplica și mărimilor tranzitorii.

Din relațiile (8.74) rezultă că starea electrică, atât pentru curenți cât și pentru tensiuni, provine din suprapunerea în fiecare latură a sistemului:

— a unei sume  $\underline{P}_h$  de termeni avînd fiecare același amortisment și aceeași fază relativă în fiecare latură; acesta este sistemul *homopolar amortizat*;

— a unei sume  $\underline{P}_d$  de termeni, avînd fiecare același amortisment în cele trei laturi, însă o fază relativă  $\psi_d$  pe faza 1,  $\psi_d - \frac{2\pi}{3}$  pe faza 2 și  $\psi_d + \frac{2\pi}{3}$  pe faza 3; acesta este sistemul *direct amortizat*;

— a unei sume  $\underline{P}_i$  de termeni, avînd fiecare același amortisment în cele trei laturi, însă o fază relativă  $\psi_i$  pe faza 1,  $\psi_i + \frac{2\pi}{3}$  pe faza 2 și  $\psi_i - \frac{2\pi}{3}$  pe faza 3; acesta este sistemul *invers amortizat*.

Să considerăm, pentru fixarea ideilor, o rețea trifazată oarecare simetrică și echilibrată (fig. 8.64). Privită dintr-un punct  $M$  oarecare al ei, această rețea prezintă:

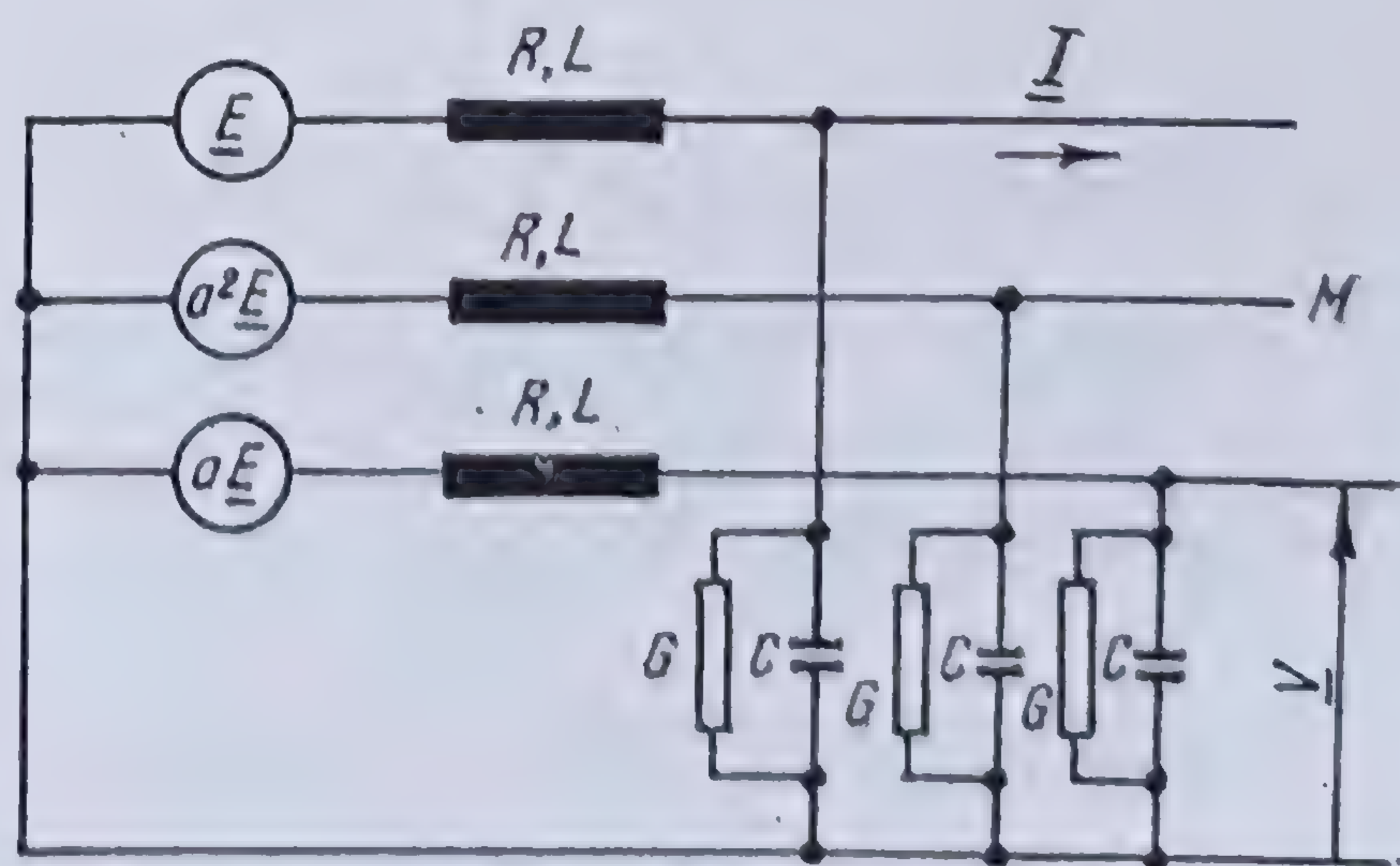


Fig. 8.64. Rețea electrică trifazată simetrică.



a) pentru un sistem *homopolar* amortizat de pulsație generalizată

$$\underline{\Omega}_h = -j \underline{p}_h = \underline{\Omega}_h - j\delta_h,$$

o impedanță

$$\underline{Z}_h = R_h + \underline{p}_h L_h$$

și o admitanță

$$\underline{Y}_h = G_h + \underline{p}_h C_h;$$

b) pentru un sistem *direct* amortizat de pulsație generalizată

$$\underline{\Omega}_d = -j \underline{p}_d = \underline{\Omega}_d - j\delta_d,$$

o impedanță

$$\underline{Z}_d = R_d + \underline{p}_d L_d$$

și o admitanță

$$\underline{Y}_d = G_d + \underline{p}_d C_d;$$

c) pentru un sistem *invers* amortizat de pulsație generalizată

$$\underline{\Omega}_i = -j \underline{p}_i = \underline{\Omega}_i - j\delta_i$$

o impedanță

$$\underline{Z}_i = R_i + \underline{p}_i L_i$$

și o admitanță

$$\underline{Y}_i = G_i + \underline{p}_i C_i.$$

Teoremele lui KIRCHHOFF aplicate celor trei sisteme dau relațiile

$$\underline{V}_h + \underline{Z}_h (\underline{I}_h + \underline{V}_h \underline{Y}_h) = 0,$$

$$\underline{V}_d + \underline{Z}_d (\underline{I}_d + \underline{V}_d \underline{Y}_d) = 0,$$

$$\underline{V}_i + \underline{Z}_i (\underline{I}_i + \underline{V}_i \underline{Y}_i) = 0.$$

Înlocuind pe  $\underline{Z}$  și  $\underline{Y}$  cu valorile lor corespunzătoare se obține :

$$\underline{V}_h [\underline{p}_h^2 C_h L_h + \underline{p}_h (C_h R_h + G_h L_h) + (1 + G_h R_h)] + \underline{I}_h (R_h + \underline{p}_h L_h) = 0,$$

$$\underline{V}_d [\underline{p}_d^2 C_d L_d + \underline{p}_d (C_d R_d + G_d L_d) + (1 + G_d R_d)] + \underline{I}_d (R_d + \underline{p}_d L_d) = 0,$$

$$\underline{V}_i [\underline{p}_i^2 C_i L_i + \underline{p}_i (G_i R_i + G_i L_i) + (1 + G_i R_i)] + \underline{I}_i (R_i + \underline{p}_i L_i) = 0$$

care reprezintă regimul liber al sistemului.



Starea electrică a rețelei în punctul  $M$  mai dă alte trei ecuații între componentele simetrice ale curenților, care reprezintă regimul forțat.

Suprapunerea acestor două regimuri constituie regimul tranzitoriu în sistemul trifazat.

Pentru găsirea stărilor reale pe faze în sistem, se compun componentele simetrice conform regulilor cunoscute.

Dacă se urmărește cunoașterea ecuației diferențiale de funcționare a sistemului, aceasta se obține imediat înlocuind pe  $p$  și  $p^2$  prin simbolurile respective. Astfel, spre exemplu pentru componenta simetrică directă, se găsește :

$$C_d L_d \frac{d^2 v_d}{dt^2} + (C_d R_d + G_d L_d) \frac{dv_d}{dt} + (1 + G_d R_d) v_d + R_d i_d + L \frac{di_d}{dt} = 0$$

Metoda poate fi aplicată, în același mod, la orice sistem polifazat.

#### 8.4.8. CÎMPUL MAGNETIC ÎNVÎRTITOR ELIPTIC

În practică, se pot ivi situații anormale în funcționarea mașinilor electrice, fie din cauză că bobinajul mașinii nu este simetric (datorit unei reparații defectuoase), fie că curenții de alimentare a mașinii nu sînt simetrici. În aceste condiții, cîmpul magnetic învîrtitor, produs de armătura trifazată a mașinii electrice, nu mai este circular și devine eliptic.

Cazul cel mai frecvent este acel al unei mașini cu bobinaj polifazat simetric alimentat cu un sistem polifazat de curenți nesimetric și dezechilibrat.

Dacă curențul este dezechilibrat, îl descompunem în componente simetrice și vom obține — pentru aceeași armătură — două cîmpuri învîrtitoare (fig. 8.65), unul care se va roti în sens direct, corespunzînd componentei directe a curențului

$$B_d = B_{Md} \cos [p\theta - (\omega t - \varphi_d)]$$

și unul care se va roti în sens invers ( $m \neq m'$ ) corespunzînd componentei inverse a curențului

$$B_i = B_{Mi} \cos [p\theta + (\omega t - \varphi_i)].$$

Componentele acestor cîmpuri pe axele spațiale ale armăturii sînt

$$\left. \begin{aligned} x_d &= B_{Md} \cos (\omega t - \varphi_d), \\ y_d &= -B_{Md} \sin (\omega t - \varphi_d), \\ x_i &= B_{Mi} \cos (\omega t - \varphi_i), \\ y_i &= B_{Mi} \sin (\omega t - \varphi_i). \end{aligned} \right\}$$

Extremitatea cîmpului rezultat

$$\bar{B}_M = \bar{B}_{Md} + \bar{B}_{Mi}$$

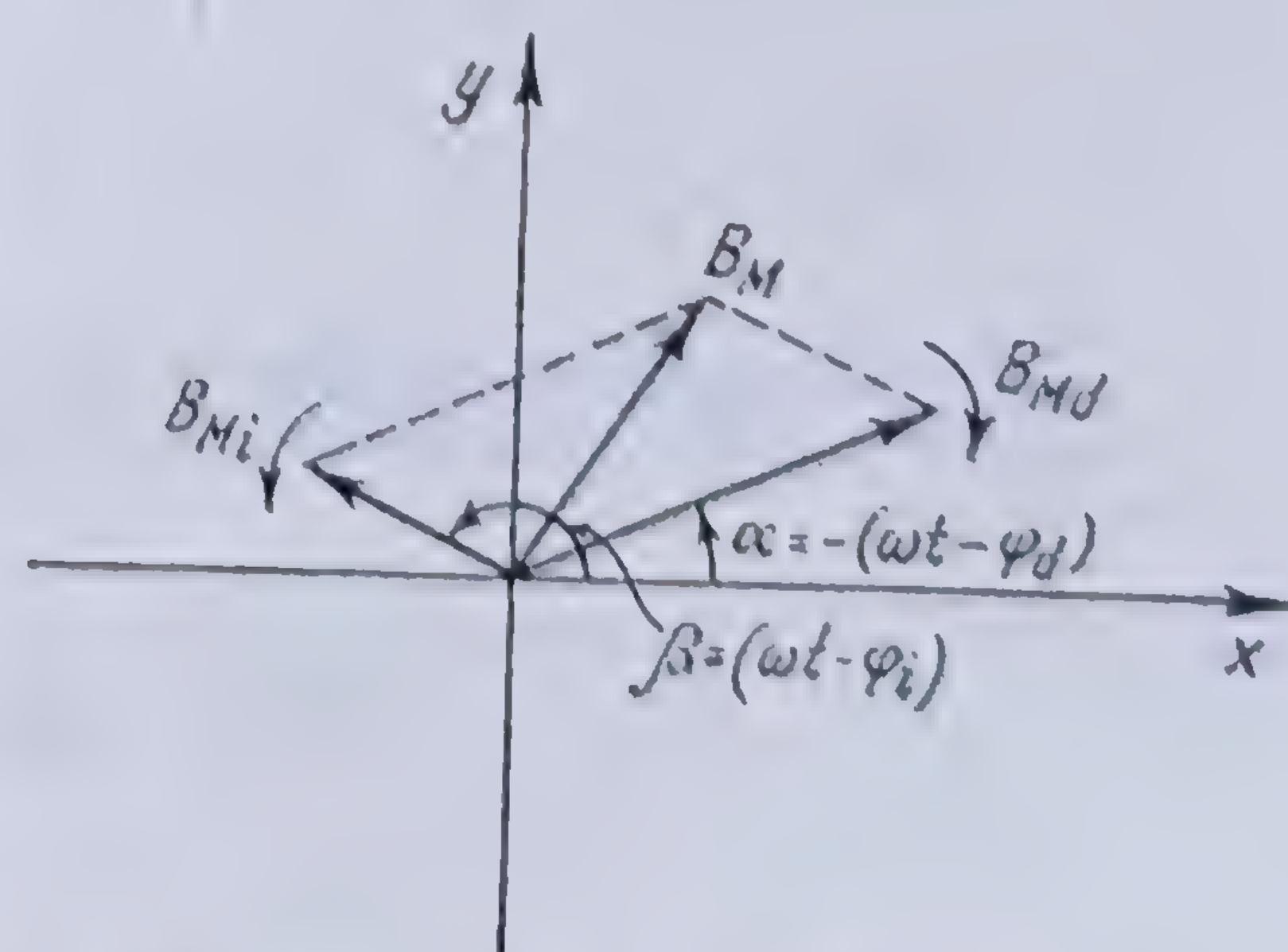


Fig. 8.65. Diagrama fazorială a cîmpului de inducție magnetică.



va avea coordonatele

$$\left. \begin{aligned} X = x_d + x_i &= (B_{Md} \cos \varphi_d + B_{Mi} \cos \varphi_i) \cos \omega t + (B_{Md} \sin \varphi_d + \\ &+ B_{Mi} \sin \varphi_i) \sin \omega t = P \cos (\omega t - \beta_1) \\ Y = y_d + y_i &= -(B_{Md} \cos \varphi_d - B_{Mi} \cos \varphi_i) \sin \omega t + (B_{Md} \sin \varphi_d - \\ &- B_{Mi} \sin \varphi_i) \cos \omega t = Q \cos (\omega t - \beta_2) \end{aligned} \right\} \quad (8.76)$$

în care  $P, Q, \beta_1, \beta_2$  se obțin prin identificare

$$P = \sqrt{B_{Md}^2 + B_{Mi}^2 + 2B_{Md} B_{Mi} \cos (\varphi_d - \varphi_i)}$$

$$Q = \sqrt{B_{Md}^2 + B_{Mi}^2 - 2B_{Md} B_{Mi} \cos (\varphi_d - \varphi_i)}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{B_{Md} \sin \varphi_d + B_{Mi} \sin \varphi_i}{B_{Md} \cos \varphi_d + B_{Mi} \cos \varphi_i}$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = - \frac{B_{Md} \cos \varphi_d - B_{Mi} \cos \varphi_i}{B_{Md} \sin \varphi_d - B_{Mi} \sin \varphi_i}$$

Ecuatiile (8.76) sînt ecuațiile parametrice ale unei elipse. Într-adevăr avem

$$\frac{X}{P} = \cos (\omega t - \beta_1),$$

$$\frac{Y}{Q} = \cos (\omega t -$$

de unde, eliminînd pe  $t$  între aceste două ecuații se obține\*

$$\frac{X^2}{P^2} + \frac{Y^2}{Q^2} - 2 \frac{XY}{PQ} \cos (\beta_1 - \beta_2) - \sin^2 (\beta_1 - \beta_2) = 0, \quad (8.78)$$

care este ecuația unei elipse cu centrul în originea axelor de coordonate.

Studiul acestei elipse se face în mod obișnuit. Se găsește astfel:

— axa mare:  $2a = 2 (B_{Md} + B_{Mi})$ ;

— axa mică:  $2b = 2 (B_{Md} - B_{Mi})$ ;

— înclinarea axei mari:  $\xi_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2}$ .

\* Dezvoltînd cosinusul din relațiile (8.77) și înmulțind prima din aceste relații cu  $\cos \beta_2$  și pe a doua cu  $\cos \beta_1$ , apoi pe prima cu  $\sin \beta_2$  și pe a doua cu  $\sin \beta_1$ , și scăzînd respectiv una din alta, se obține

$$\frac{X}{P} \cos \beta_2 - \frac{Y}{Q} \cos \beta_1 = \sin \omega t \sin (\beta_1 - \beta_2),$$

$$\frac{X}{P} \sin \beta_2 - \frac{Y}{Q} \sin \beta_1 = - \cos \omega t \sin (\beta_1 - \beta_2).$$

Ridicînd la pătrat fiecare din aceste relații și adunîndu-le se obține relația (8.78).



Studiul acestui câmp se face mai comod cu ajutorul cantităților complexe. Ecuația câmpului este în acest caz

$$\underline{\bar{B}}_M = \underline{\bar{B}}_{Ma} | -\xi + \underline{\bar{B}}_{Mi} | \xi, \quad (8.79)$$

în care  $\xi = \omega t$  este unghiul pe care îl parcurg vectorii respectivi cu viteza  $\omega$  și care este o elipsă\*.

Luînd ca origine de fază axa  $x$ , și presupunînd că la  $t = 0$  argumentele celor doi fazori sînt  $\varphi_d$  și  $\varphi_i$ , ecuația câmpului (8.79) se scrie

$$\underline{\bar{B}}_M = \underline{\bar{B}}_{Ma} | \varphi_d - \xi + \underline{\bar{B}}_{Mi} | \varphi_i + \xi .$$

Cele două semiaxe sînt vectori cu originea în centrul elipsei și avînd modulele respectiv

$$a = |\underline{\bar{B}}_{Ma}| + |\underline{\bar{B}}_{Mi}|$$

și

$$b = |\underline{\bar{B}}_{Ma}| - |\underline{\bar{B}}_{Mi}|.$$

Argumentul  $\xi_1$  al axei mari corespunde unghiului  $\xi$  pentru care cei doi vectori sînt în fază iar argumentul  $\xi_2$  al axei mici corespunde unghiului  $\xi$  pentru care cei doi vectori sînt în opoziție, cele două argumente fiind legate prin relația

$$|\xi_1 - \xi_2| = \frac{\pi}{2}. \quad (8.80)$$

Argumentul  $\xi_1$  al axei mari se determină observînd că, cei doi vectori rotindu-se în sens contrar, ei vor fi în fază cînd argumentele lor sînt egale

$$\varphi_d - \xi_1 = \varphi_i + \xi_1,$$

de unde rezultă

$$\xi_1 = \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2}.$$

Ecuația semiaxe mari este deci

$$\underline{\bar{B}}_{Ma} = \underline{\bar{B}}_{Ma} \left| \varphi_d - \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} + \underline{\bar{B}}_{Mi} \right| \varphi_i + \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} = (\underline{\bar{B}}_{Ma} + \underline{\bar{B}}_{Mi}) \left| \frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} \right|.$$

Este ușor de văzut că direcția axei mari coincide cu biseectoarea unghiului dintre cei doi vectori,  $\underline{\bar{B}}_{Ma}$  și  $\underline{\bar{B}}_{Mi}$  considerați la timpul  $t = 0$ ; într-adevăr, dacă  $\varphi_i > \varphi_d$ , atunci

$$\frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} = \frac{\varphi_i - \varphi_d}{2} + \varphi_d ;$$



dacă  $\varphi_d > \varphi_i$ , atunci

$$\frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} = \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} + \varphi_i.$$

Ecuatia semiaxei mici se obtine tinind seama de relatia (8.80); se gasesce

$$\begin{aligned}\bar{B}_{Ma} &= \bar{B}_{Ma} \left[ \varphi_d - \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} + \frac{\pi}{2} - \bar{B}_{Mi} \left[ \varphi_i + \frac{\varphi_d - \varphi_i}{2} + \frac{\pi}{2} \right] \right. \\ &= (\bar{B}_{Ma} - \bar{B}_{Mi}) \left[ \frac{\varphi_d + \varphi_i}{2} + \frac{\pi}{2} \right].\end{aligned}$$

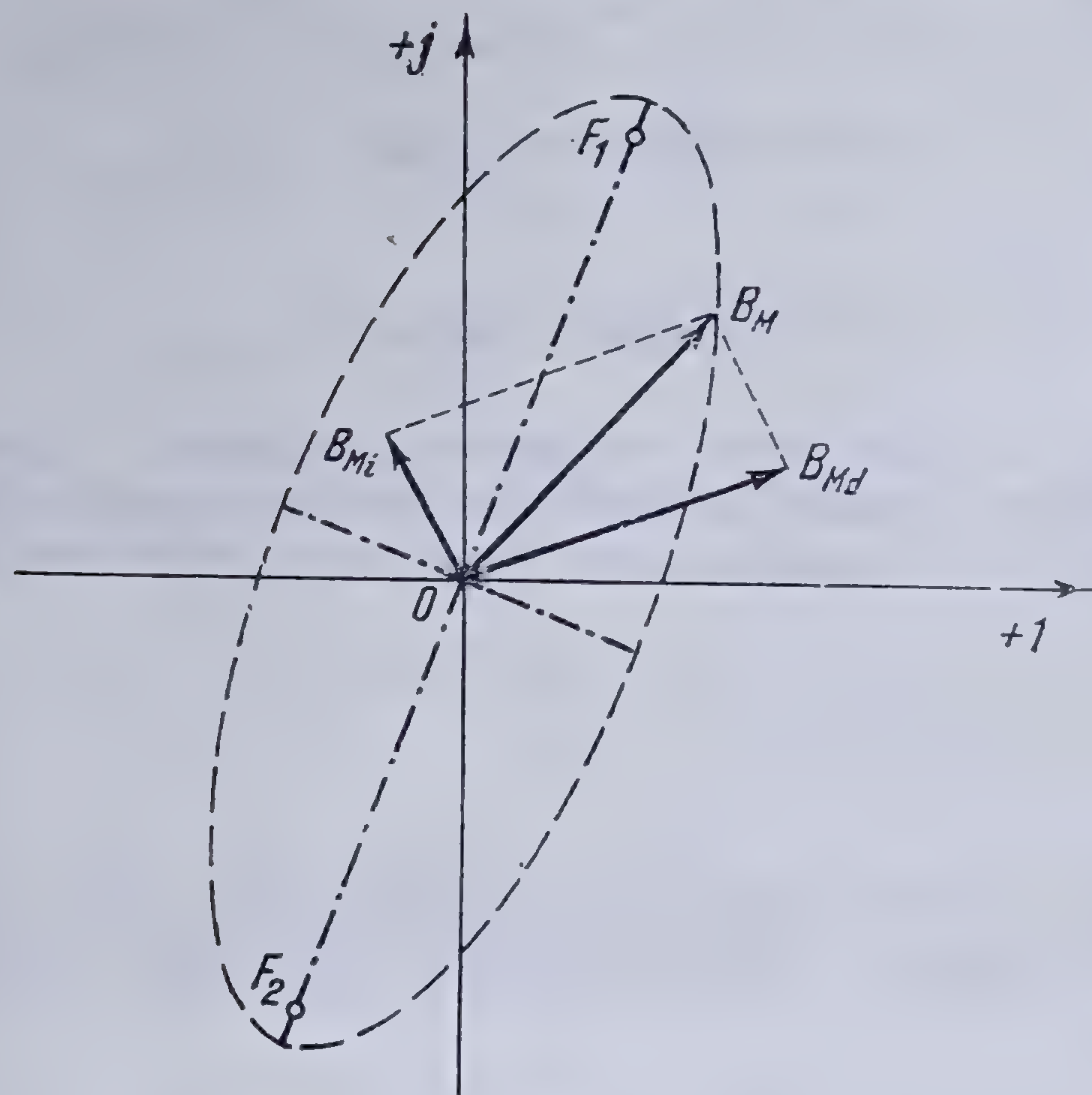


Fig. 8.66. Câmp magnetic învîrtitor eliptic.

Cu aceste elemente elipsa reprezentînd hodograful vîrfului vectorului cîmp învîrtitor se construiește ușor (fig. 8.66); un asemenea cîmp învîrtitor se numește eliptic.



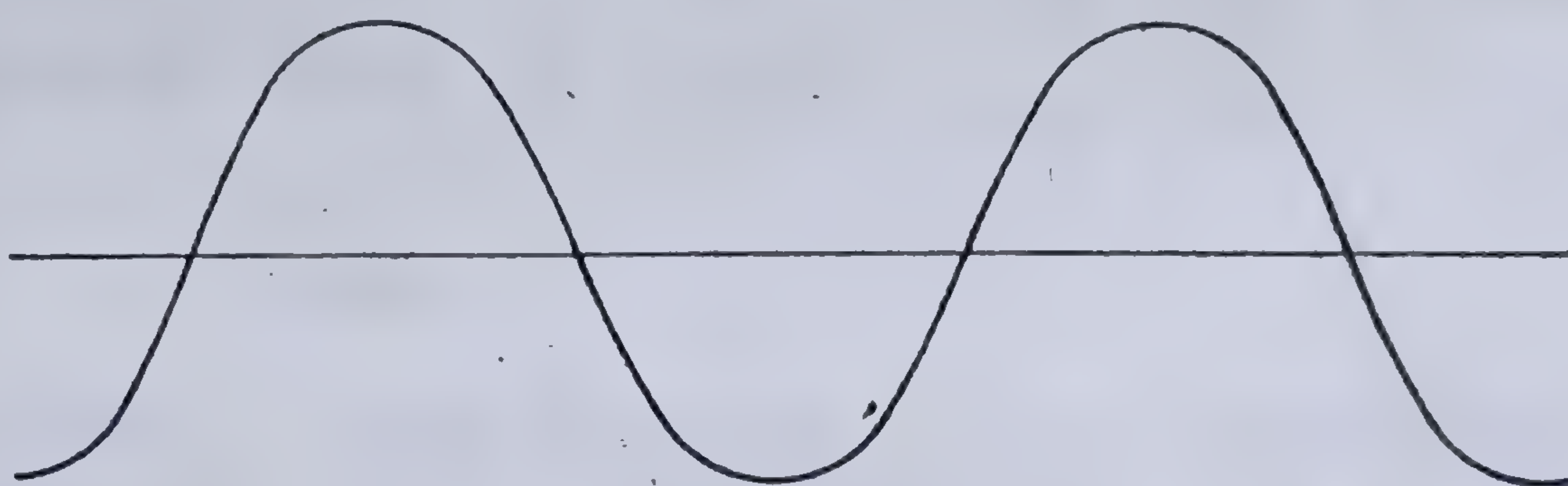
## Capitolul IX

### CURENTUL ALTERNATIV MONOFAZAT NESINUSOIDAL REGIMUL DEFORMANT

#### 9.1. GENERALITĂȚI

Studiul fenomenelor electrice în curent alternativ, studiul mașinilor electrice de curent alternativ sau al rețelelor electrice funcționând în curent alternativ se face admitându-se că unda sau curba de tensiune sau de curent

Fig. 9.1. Undă de tensiune sau de curent sinusoidală.



este perfect sinusoidală (fig. 9.1). În realitate, atât unda de tensiune cât și unda de curent sînt în general departe de a fi sinusoidale și, deși periodice, ele au o formă oarecare (fig. 9.2). Se zice că undele respective sînt *deformate*.

*Regimul sinusoidal* poate fi considerat un caz particular, un caz către care se tinde a se ajunge în practică, dar care nu este realizat în general. Regimul sinusoidal conduce la soluții mai simple ale tuturor problemelor de curent alternativ și pentru acest motiv el este adoptat în expunerile teoretice.

*Regimul deformant* este acela care se întâlnește mai mult în practică. El se datorează funcționării în rețelele de curent alternativ a *aparaturilor deformante* și care sînt constituite în general de elementele neliniare din rețea. Funcționarea unei rețele electrice, oricare ar fi caracterul ei, trebuie să satisfacă neapărat

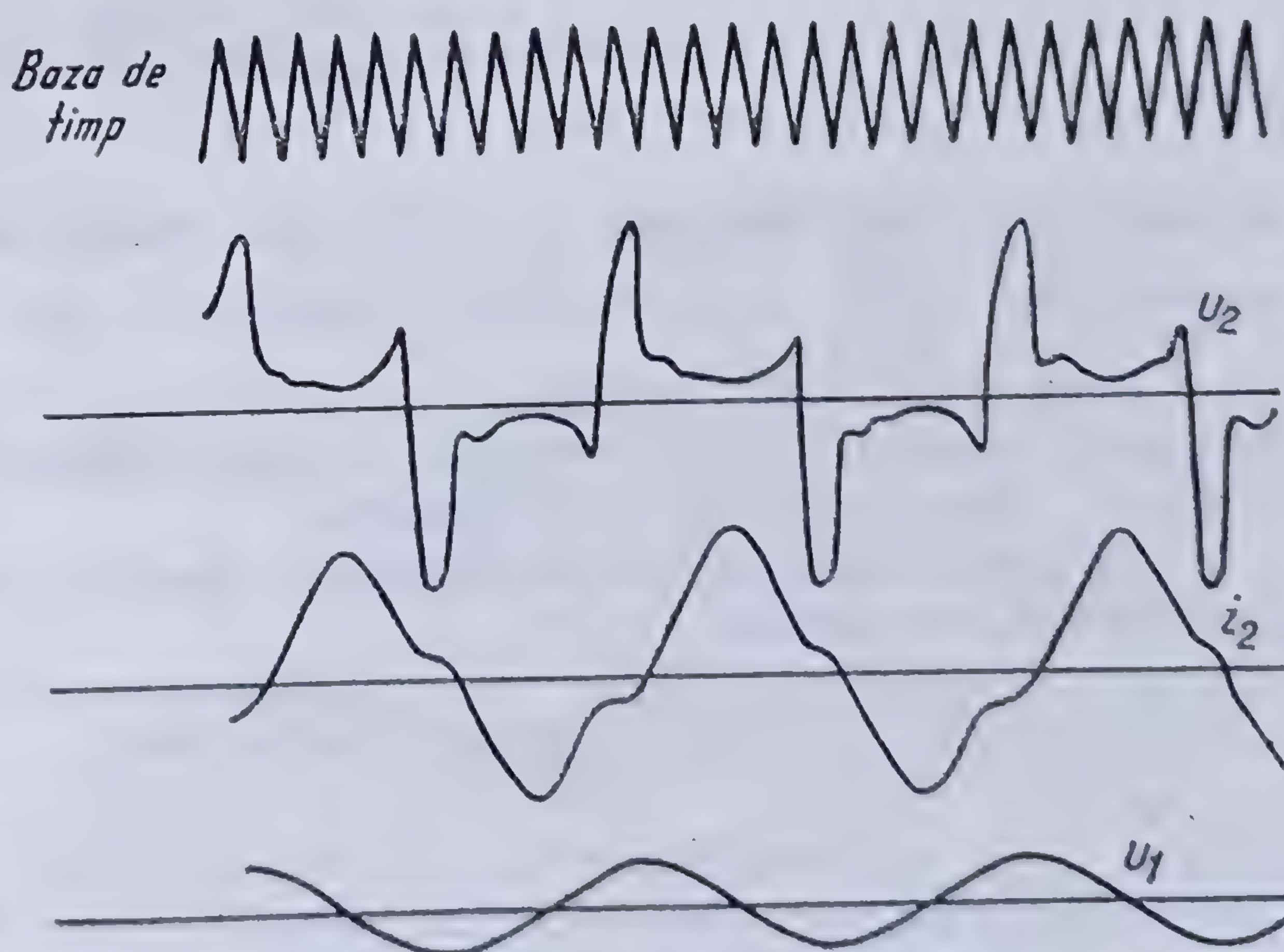


Fig. 9.2. Unde de tensiune și de curent nesinusoidale.



teorema a doua a lui KIRCHHOFF, care poate fi scrisă în general sub forma

$$\Sigma e = \Sigma Ri + \Sigma \frac{d(Li)}{dt} + \Sigma \int \frac{1}{C} i dt + \Sigma u; \quad (9.1)$$

în suma  $\Sigma \frac{d(Li)}{dt}$  au fost cuprinse atât forțele electromotoare de inducție proprie, cât și acelea de inducție mutuală. Rezultă dar, că pentru a exista regim deformant, este necesar ca cel puțin unul din parametrii rețelei să nu fie liniar\*, sau ca un semnal aplicat rețelei să fie nesinusoidal\*\*.

După studiile academicianului prof. CONSTANTIN BUDEANU, aparatele deformante pot fi împărțite în două categorii: *aparate deformante de prima categorie*, care sînt cauza inițială — și singura de altfel — a producerii regimului deformant și *aparate deformante de categoria a doua*, care nu dau naștere regimului deformant dar care, fiind alimentate cu curenți deformanți, amplifică această deformare. În prima categorie se clasează aparatele care, fiind alimentate cu tensiuni sau curenți riguros sinusoidali, produc fenomene deformante. Printre acestea sînt *mutatoarele* de orice categorie (supape mecanice, cu vapori de mercur etc.), *reactanțele cu miez de fier* (transformatoare, bobine de șoc etc.), *liniile aeriene de înaltă tensiune* etc.

Într-adevăr, să considerăm un circuit neliniar, care satisface ecuația (9.1) și a cărei soluție este de forma

$$i = f(u) \quad (9.2)$$

$u$  fiind tensiunea perfect sinusoidală aplicată circuitului. Pentru a găsi forma curentului  $i$ , să dezvoltăm în serie relația (9.2) folosind dezvoltarea în serie TAYLOR; se obține

$$i = i_0 + \left( \frac{di}{du} \right)_0 (u - u_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2i}{du^2} \right)_0 (u - u_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left( \frac{d^ni}{du^n} \right)_0 (u - u_0)^n + \dots \quad (9.3)$$

în care diversele derivate ale lui  $i$  sînt luate pentru  $u = u_0$ ; dintre acestea, coeficientul  $\left( \frac{di}{du} \right)_0$  al termenului de gradul I are dimensiunile unei admitanțe.

Este evident că, pentru  $u = u_0$ , avem  $i = i_0$ ; dacă  $u_0$  este pozitiv, cum elementul considerat este *receptor*, atunci puterea  $u_0 i_0$  trebuie să fie pozitivă și deci  $i_0$  trebuie să fie și el pozitiv.

Să presupunem acum că tensiunea de alimentare a elementului este perfect sinusoidală, de forma

$$u = U \sqrt{2} \cos \omega t$$

\* Vezi 2.5.1.

\*\* Vezi 9.3.3.1.

\*\*\* Academicianul CONST. BUDEANU (1886—1959) a fost profesor de Electrotehnică, Măsurile electrice și Tracțiuni electrice la politehnică și la Institutul politehnic din București. El este întemeietorul școlii românești de electrotehnică, privind regimul deformant.



Introducând această valoare în relația (9.3) rezultă

$$i = i_0 + \left( \frac{di}{du} \right)_0 (U \sqrt{2} \cos \omega t - u_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 i}{du^2} \right)_0 (U \sqrt{2} \cos \omega t - u_0)^2 + \dots \quad (9.4)$$

Dar

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (\cos 2\omega t + 1)$$

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} (\cos 3\omega t + 3 \cos \omega t)$$

.....

Înlocuind aceste valori în relația (9.4) se obține

$$i = I_0 + I_1 \sqrt{2} \cos \omega t + I_2 \sqrt{2} \cos 2\omega t + I_3 \sqrt{2} \cos 3\omega t + \dots$$

în care:

$$I_0 = i_0 - \left( \frac{di}{du} \right)_0 u_0 + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 i}{du^2} \right)_0 \left[ u_0^2 + \frac{1}{2} (U \sqrt{2})^2 \right] - \\ - \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 i}{du^3} \right)_0 \left[ \frac{3}{2} (U \sqrt{2})^2 u_0 + u_0^3 \right] + \dots$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{di}{du} \right)_0 (U \sqrt{2}) - \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 i}{du^2} \right)_0 2 u_0 (U \sqrt{2})^2 + \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 i}{du^3} \right)_0 \left[ \frac{3}{4} (U \sqrt{2})^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 (U \sqrt{2}) u_0^2 \right] + \dots \right]$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 i}{du^2} \right)_0 \frac{1}{2} (U \sqrt{2})^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 i}{du^3} \right)_0 \frac{3}{2} (U \sqrt{2})^2 u_0 + \dots \right]$$

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{3!} \left( \frac{d^3 i}{du^3} \right)_0 \frac{1}{4} (U \sqrt{2})^3 + \dots \right]$$

.....

În consecință, dacă un element neliniar sau un circuit care conține elemente neliniare este alimentat cu o tensiune perfect sinusoidală, curentul care rezultă în circuit este nesinusoidal.

Un raționament analog, pornind însă de la dezvoltarea lui  $u$  în funcție de  $i$ , conduce la rezultatul că tensiunea la bornele unui element neliniar alimentat cu un curent perfect sinusoidal, este nesinusoidală.

Tot în această categorie trebuie să se pună și alternatoarele industriale a căror curbă de tensiune nu este sinusoidală.



În a doua categorie sînt clasate aparatele care produc fenomene deformante numai dacă sînt alimentate cu curenți alternativi nesinusoidali ca, spre exemplu, orice *reactanță capacitivă* sau *capacitate constantă*, cum ar fi liniile de transmitere a energiei electrice, aeriene sau subterane etc.

Rețelele electrice moderne comportă în constituția lor un număr destul de mare de aparate deformante de prima sau de a doua categorie. Într-adevăr, nu se poate concepe o rețea modernă fără transformatoare, al căror fier este adesea saturat; de asemenea, alimentarea tramvaielor și căilor ferate electrice, funcționînd cu curent continuu, se face azi, din ce în ce mai mult, cu ajutorul mutatoarelor; în sfîrșit rețelele, care în majoritatea cazurilor sînt constituite din cabluri subterane, formează de asemenea un aparat deformant.

Rezultă dar că, în aceste rețele vor apărea întotdeauna fenomene deformante.

Un regim deformant este caracterizat prin prezența armonicelor în instalațiile electrice. El poate fi caracterizat ca atare și prin fenomenele deformante particulare ce apar în acest caz și în special prin efectele pe care le produce. Fenomenele deformante pot produce efecte de rezonanță în rețelele și mașinile electrice; ele măresc puterea aparentă, provocînd astfel o micșorare a factorului de putere; micșorează în general capacitatea de receptivitate a aparatelor receptoare, micșorîndu-le astfel randamentul; tot din cauza fenomenelor deformante, liniile de telecomunicații suferă anumite influențe supărătoare din cauza existenței acestor fenomene în liniile industriale vecine; în sfîrșit, fenomenele deformante introduc erori suplimentare în aparatele de măsură\*.

Regimul deformant se definește astfel: *Regimul energetic ale cărui unde de tensiune și curent sînt periodice și cel puțin una din ele nu este sinusoidală este un regim deformant.*

## 9.2. STUDIUL UNDELOR COMPLEXE

### 9.2.1. UNDE ARMONICI

9.2.1.1. **Definiții.** Două sau mai multe funcții periodice sinusoidale se zice că sînt armonici între ele, dacă raportul perioadelor lor este un număr întreg oarecare. Funcția de bază, față de care se face raportul perioadelor, se numește *unda*, *sinusoida* sau *armonica fundamentală*, celelalte se numesc *unde* sau *armonici superioare*.

Fie, spre exemplu, funcțiile

$$y_1 = A_1 \sin \omega t \text{ și } y_2 = A_2 \sin 2\omega t.$$

Prima funcție are perioada  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$  și a doua perioada  $T_2 = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$ . Raportul perioadelor este

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\pi} = 2.$$

\* Vezi 9.5.4.4.



Prima funcție este armonica fundamentală, iar a doua funcție este armonica de ordinul 2.

În general, perioada armonicii de ordinul  $n$  este a  $n$ -a parte din perioada armonicii fundamentale.

Reprezentarea lor grafică este arătată în figura 9.3.

Armonicile pot fi tot așa de bine în cosinus ca și în sinus, avînd astfel toate proprietățile funcției respective. De asemenea, ele pot fi defazate cu un unghi oarecare față de origine. Astfel, expresia generală a unei armonici de ordinul  $n$  este

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n). \quad (9.5)$$

Se observă că, în această expresie, defazajul față de origine nu este unghiul  $\varphi_n$ , ci unghiul  $\frac{\varphi_n}{n}$ . Într-adevăr, pentru a vedea cînd această funcție trece prin zero, trebuie rezolvată ecuația

$$\sin(n\omega t - \varphi_n) = 0$$

care este satisfăcută pentru

$$\omega t = \frac{\varphi_n}{n}.$$

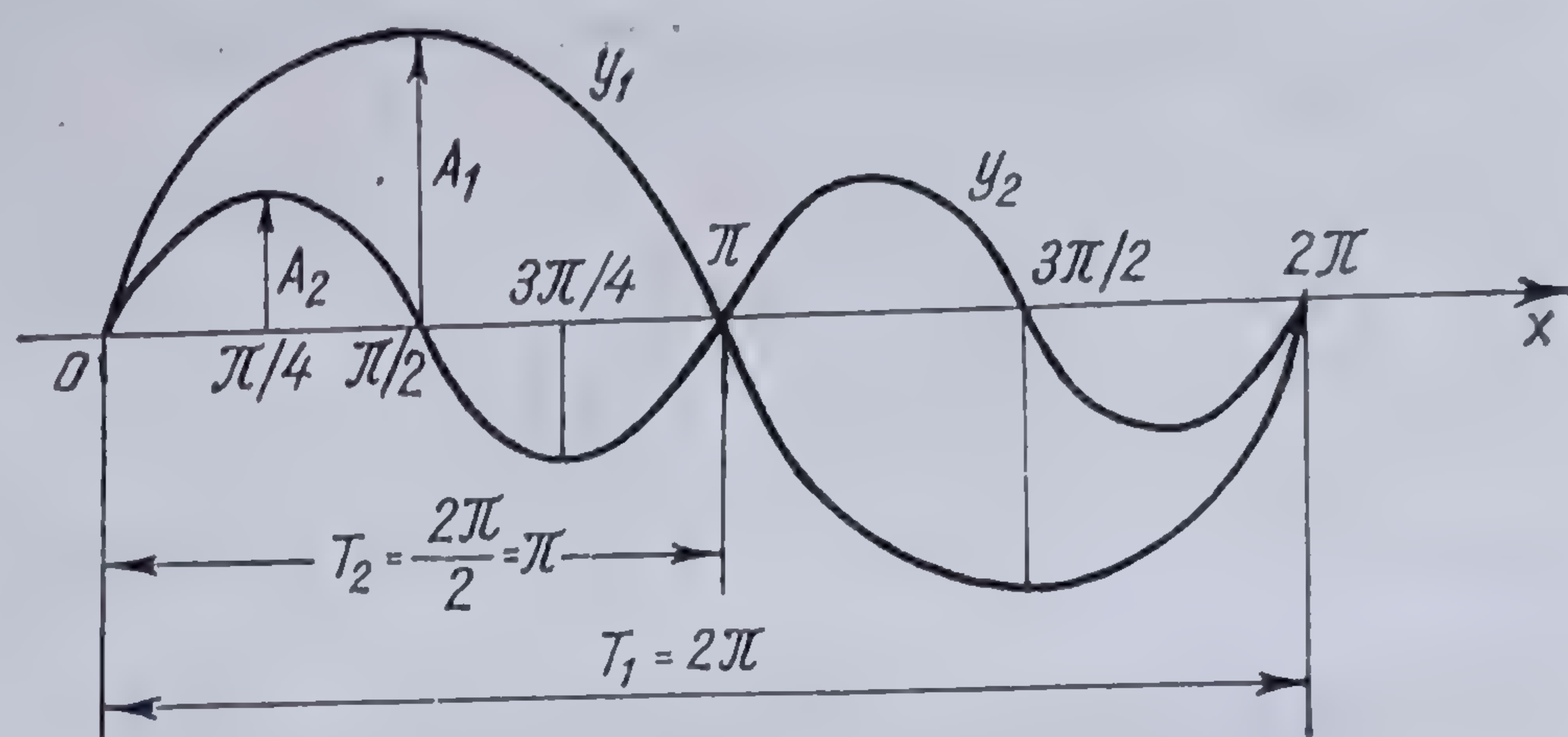


Fig. 9.3. Unde armonici.

Astfel, pentru a găsi defazajul față de origine al unei armonici oarecare, se scrie expresia sa (9.5) sub forma

$$y_n = A_n \sin n \left( \omega t - \frac{\varphi_n}{n} \right)$$

și defazajul căutat este unghiul

$$\varphi'_n = \frac{\varphi_n}{n}.$$

În ceea ce privește defazajele, transformarea undei etc., se aplică pentru armonici aceleași reguli ca și pentru unda fundamentală, cu condiția de a se ține seama de perioada proprie a armonicii superioare respective\*.

Fie, de exemplu, armonica de ordinul  $n$ , pusă sub forma

$$y_n = A_n \sin n(\omega t - \varphi'_n)$$

în care

$$\varphi'_n > \frac{1}{2} T_n = \frac{\pi}{n}.$$

\* Vezi 4.1.2.5.



Se va determina unghiul  $\varphi_n'' < \frac{\pi}{n}$ , scăzînd din defazajul  $\varphi_n'$  un număr întreg de perioade ale armonicii  $n$ , adică punînd pe  $\varphi_n'$  sub forma

$$\varphi_n' = k \frac{2\pi}{n} \pm \varphi_n'' ;$$

se va obține astfel

$$y_n = A_n \sin n(\omega t \mp \varphi_n'').$$

În cazul cînd armonica este pusă sub forma

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n)$$

iar  $\varphi_n > 180^\circ$ , atunci se procedează ca și în cazul unde fundamentale punînd

$$\varphi_n' = 2 k\pi \pm \psi_n$$

în care  $\psi_n < 180^\circ$  și rezultă

$$y_n = A_n \sin (n\omega t \mp \psi_n).$$

*Exemplu numeric:* Fie

$$y_6 = 100 \sin 6(\omega t - 95^\circ)$$

în care

$$\varphi_6' = 95^\circ > \frac{1}{2} T_6 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ .$$

Pe de altă parte,

$$\varphi_6' = 95^\circ = 2 \times \frac{360^\circ}{6} - 25^\circ$$

de unde

$$\varphi_6'' = - 25^\circ$$

și deci

$$y_6 = 100 \sin 6 (\omega t + 25^\circ) .$$

*OBSERVAȚII:* 1. În cazul cînd

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{\pi}{n}$$

nu este un număr întreg de grade, este mai comod a se opera asupra armonicii superioare pusă sub forma

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n) .$$



Spre exemplu

$$y_7 = 5 \sin 7 (\omega t - 78^\circ) .$$

În acest caz,  $\frac{1}{2} T = \frac{\pi}{7}$  nu este un număr întreg de grade. Se consideră atunci funcția

$$y_7 = 5 \sin (7\omega t - 546^\circ) .$$

Punînd

$$\varphi_n = k 360^\circ \pm \psi_n = 2 \times 360^\circ - 174^\circ$$

se obține

$$y_7 = 5 \sin (7\omega t + 174^\circ) .$$

2. De asemenea, atunci cînd amplitudinea armonicii superioare este negativă sau funcția este o cosinusoidă, înainte de a face transformarea defazajului, se face în prealabil transformarea funcției într-o sinusoidă cu amplitudine pozitivă cu ajutorul operațiilor elementare, așa cum s-a arătat mai înainte.

9.2.1.2. Defazajul între două armonici superioare. Definirea defazajului între două armonici superioare este o chestiune pur convențională și ea nu se poate face decît în anumite condiții.

a) Defazajul între armonici de același ordin. Noțiunea defazaj între două armonici de același ordin are aceeași semnificație ca și în cazul undelor fundamentale, făcîndu-se aceleași interpretări.

Trebuie observat că, dacă cele două armonici sînt date sub forma generală

$$y_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n)$$

$$y'_n = A'_n \sin (n\omega t - \varphi'_n)$$

defazajul respectiv este

$$\frac{\varphi_n}{n} - \frac{\varphi'_n}{n}$$

și nu

$$\varphi_n - \varphi'_n .$$

În consecință, pentru a nu se greși în calcule, se pun expresiile armonicilor de același ordin sub forma

$$y_n = A_n \sin n \left( \omega t - \frac{\varphi_n}{n} \right)$$

și numai după aceea se calculează defazajul respectiv.

b) Defazajul între armonici de ordine diferite. Se înțelege prin defazaj între două armonice de ordine diferite, cea mai mică valoare a intervalului dintre timpurile cînd cele două armonici trec prin zero cu valori crescătoare de același sens și se determină în raport cu defazajul față de originea de fază.



Această noțiune se aplică mai ales pentru defazajul dintre o armonică superioară și unda fundamentală.

Defazajul dintre armonicile

$$y_p = A_p \sin(p\omega t - \varphi_p)$$

și

$$y_q = A_q \sin(q\omega t - \varphi_q)$$

în care  $A_p$  și  $A_q$  sînt pozitivi, este

$$\varphi = \frac{\varphi_p}{p} - \frac{\varphi_q}{q}.$$

În particular, armonicile

$$y_p = A_p \sin p x$$

și

$$y_q = A_q \sin q x$$

în care  $A_p$  și  $A_q$  sînt pozitivi, sînt în fază, iar armonicile

$$y_p = A_p \sin p x$$

și

$$y_q = A_q \sin q(x - \pi)$$

$A_p$  și  $A_q$  îndeplinind aceleași condiții ca mai sus, sînt în opoziție.

**9.2.1.3. Reprezentarea polară a funcțiilor periodice.** În afară de reprezentare carteziană, o funcție periodică, reprezentînd o undă periodică, poate fi reprezentată și într-un sistem de coordonate polare. Această reprezentare este de multe ori utilă în aplicațiile electrotehnicii.

Fie o rază vectorie  $OA$ , care se rotește cu viteza uniformă  $\omega$  în sensul trigonometric și a cărei lungime în fiecare moment este egală cu valoarea instantanee a funcției în acel moment (fig. 9.4). O rotație completă a razei vectorie

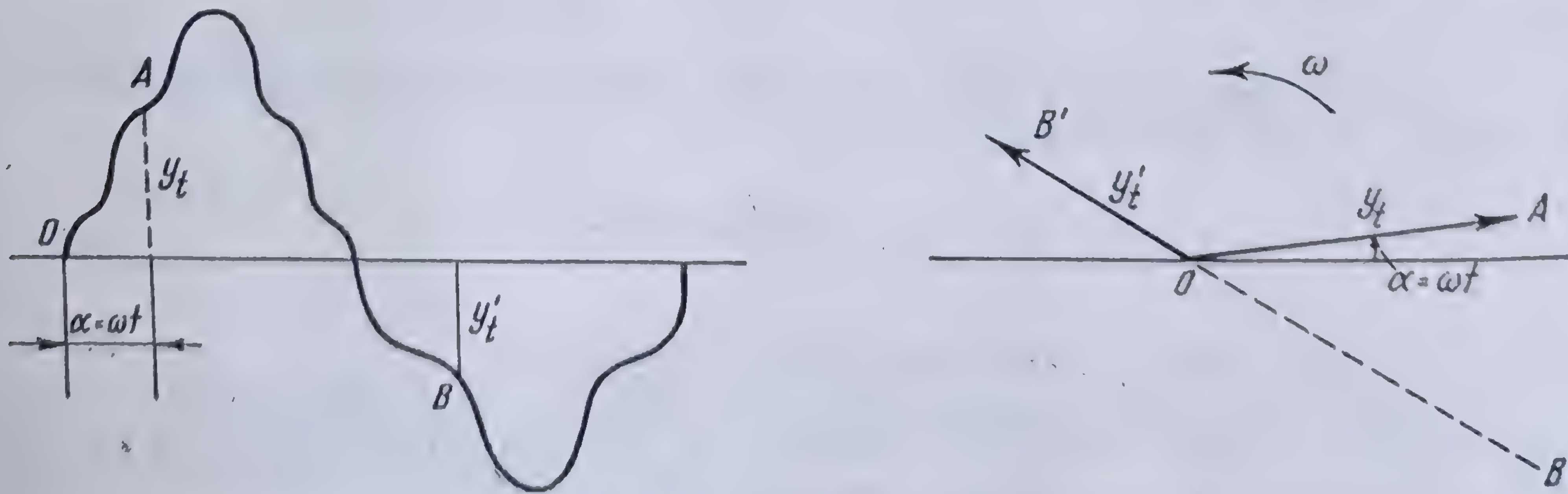


Fig. 9.4. Reprezentarea polară a funcțiilor periodice.



corespunde unui ciclu al funcției periodice, astfel că diferitele unghiuri pe care le face raza vectorie cu originea de fază sînt egale cu  $\omega t$ .

Construcția diagramei polare a unei funcții periodice se face astfel: pentru diferitele unghiuri, corespunzătoare diverselor timpuri  $t$ , se construiește raza vectorie a cărei mărime este egală cu valoarea instantanee a funcției la timpul considerat. Locul geometric al vîrfurilor acestor raze vectorie, pentru un ciclu complet, reprezintă curba polară a funcției periodice dată. Trebuie observat că, atunci cînd valoarea amplitudinii este negativă, ea se așază în sens invers pe raza vectorie respectivă. Astfel, în cazul figurii 9.4, pe raza vectorie  $OB$ , mărimea amplitudinii s-a pus în sens contrar  $OB'$ .

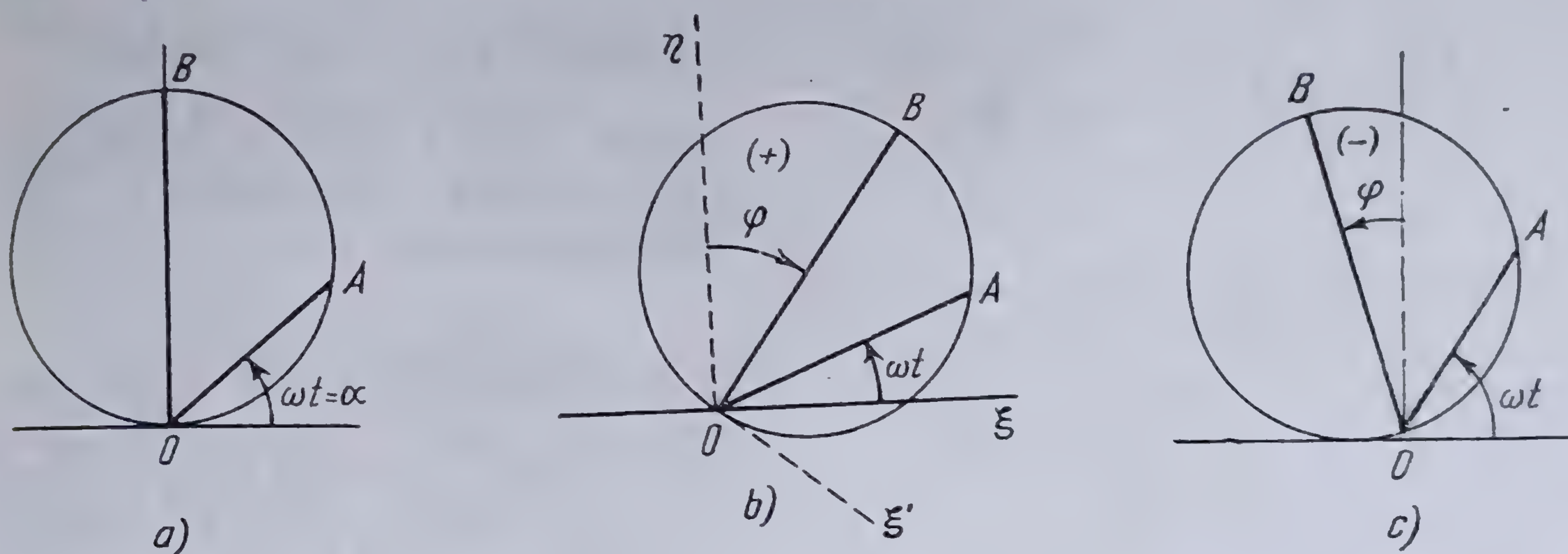


Fig. 9.5. Reprezentarea polară a unei funcții periodice alternative sinusoidale.

Diagrama polară a unei funcții periodice sinusoidale este un cerc avînd diametrul egal cu amplitudinea maximă (fig. 9.5,a). Într-adevăr, fie funcția periodică sinusoidală

$$y = Y \sin \omega t$$

$OB = Y$  fiind un diametru, rezultă că

$$OA = OB \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = Y \sin \omega t = y.$$

Este ușor de observat că cercul reprezintă atît alternanța pozitivă, cît și cea negativă, a funcției periodice sinusoidale.

Dacă funcția periodică sinusoidală are un anumit defazaj  $\varphi$ , pozitiv sau negativ, atunci, pentru a construi diagrama polară a funcției respective, este suficient a înclina diametrul principal al cercului în sensul orar pentru defazaaje pozitive și în sensul antiorar sau trigonometric pentru defazaaje negative\*. Astfel figura 9.5,b reprezintă funcția

$$y = Y \sin (\omega t + \Phi)$$

ceea ce se poate demonstra ușor observînd că

$$\angle \eta OB = \angle \xi O \xi'$$

\* S-ar părea că există o contradicție între cele ce preced și convenția făcută pentru reprezentarea unghiurilor, pentru care s-a adoptat sensul trigonometric normal. De fapt, ținînd seama că o funcție periodică sinusoidală este reprezentată de relația (4.7), înclinarea axei în sensul orar corespunde la o înclinare cu un unghi negativ și deci în expresia (4.7) apare defazaajul pozitiv.



iar figura 9.5,c reprezintă funcția

$$y = Y \sin (\omega t - \varphi) .$$

În același mod pot fi reprezentate și funcțiile armonici superioare. În acest caz trebuie să se țină seama de ipoteza ce s-a făcut, și anume că raza vectorie se rotește cu viteza  $\omega$  și că o rotire a acesteia cu  $360^\circ$  corespunde unui ciclu al unde fundamentale. Se va obține deci, în cazul armonicilor superioare, o supra-

față formată din mai multe curbe închise, numărul acestora fiind egal cu acela al alternanțelor armonicii superioare într-o semiperioadă.

Pentru exemplificare fie armonica de ordinul 3 în fază cu armonica fundamentală reprezentată prin funcția

$$y_3 = Y_3 \sin 3\omega t$$

a cărei construcție este simplă (fig. 9.6). Raza vectorie este maximă pentru unghiul  $\omega t$  egal cu  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  (când ea este negativă),  $150^\circ$ ,  $210^\circ$  (când ea se suprapune peste prima rază, fiind negativă),  $270^\circ$  și  $330^\circ$  (când ea se suprapune peste raza vectorie corespunzătoare unghiului de  $150^\circ$ , fiind negativă). Defazajul armonicii superioare nu face altceva decât să rotească axele principale de simetrie înainte sau înapoi, cu unghiul corespunzător, ca și în cazul armonicii fundamentale.

Diagrama polară poate fi folosită și pentru reprezentarea sistemelor trifazate (și în general polifazate) conectate în stea. Tensiunea diverselor faze poate fi reprezentată prin cercuri, trecând toate prin aceeași origine și având diametrele principale decalate cu  $120^\circ$ . Pentru faza I, diametrul

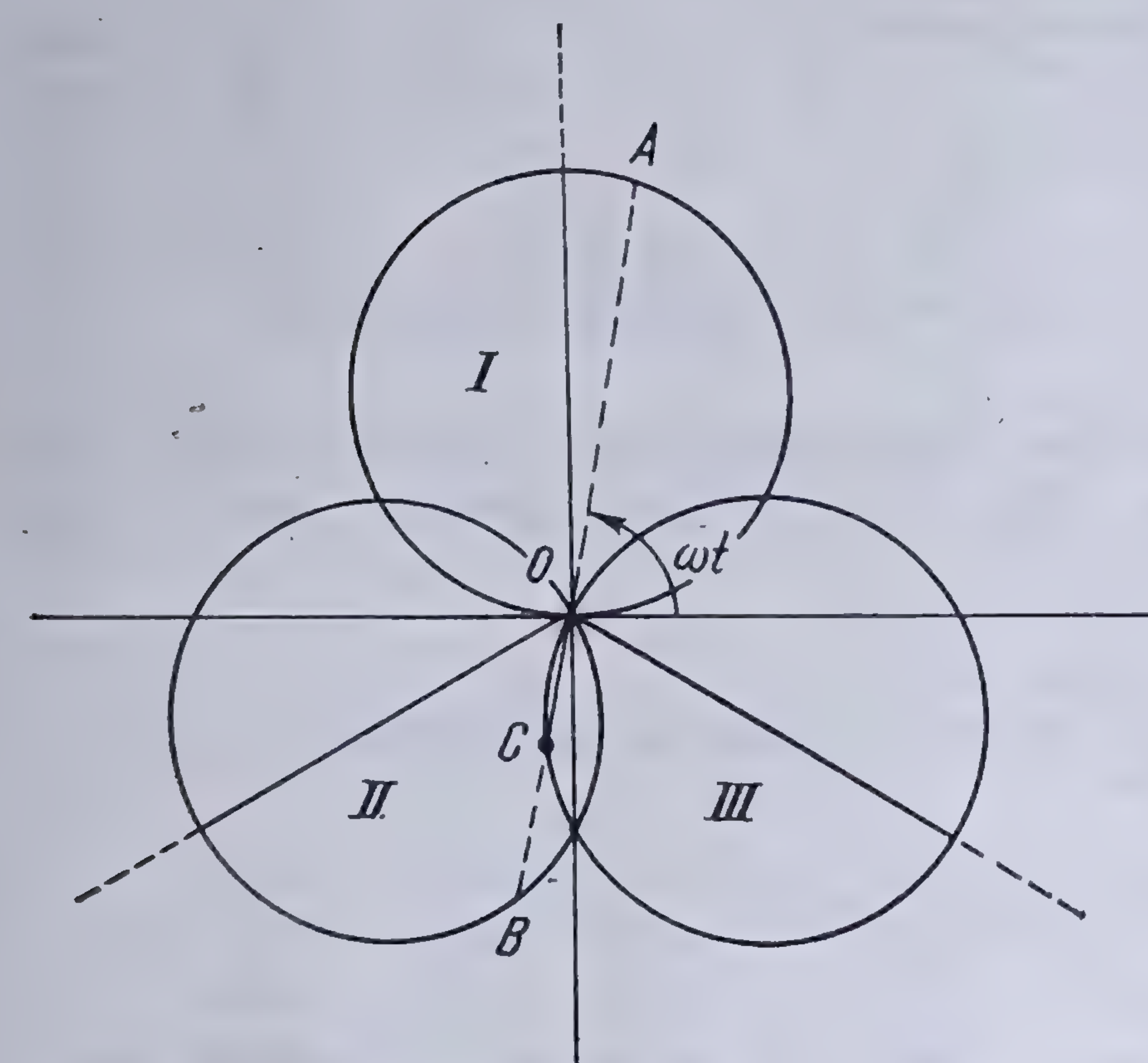


Fig. 9.7. Reprezentarea polară a undelor unui sistem trifazat

principal se așază în raport cu verticala, cu înclinarea corespunzătoare defazajului respectiv, întocmai ca în cazul sistemelor periodice sinusoidale simple (fig. 9.7).

Diagrama dă posibilitatea să se determine și tensiunea între faze în orice moment  $t$ . Pentru aceasta se duce prin origine dreapta  $ABC$ , înclinată față de originea de fază cu unghiul  $\omega t$ . În acest caz, segmentul  $AB$  reprezintă tensiunea între fazele I și II, segmentul  $BC$  reprezintă tensiunea între fazele II și III, iar segmentul  $OA$  reprezintă tensiunea între fazele III și I.

Într-adevăr, fie de determinat tensiunea între fazele III și I. Din figura 9.7 rezultă că

$$OA = E \sin \omega t$$

și

$$OC = E \sin (\omega t - 60^\circ)$$



după cum se poate stabili ușor pe figură. Adunînd cele două segmente se obține

$$OA + OC = E[\sin \omega t + \sin (\omega t - 60^\circ)] = E \sqrt{3} \sin (\omega t - 30^\circ).$$

Pe de altă parte

$$e_I = E \sin \omega t \quad \text{și} \quad e_{III} = E \sin (\omega t + 120^\circ)$$

de unde

$$e_{III-I} = e_I - e_{III} = E [\sin \omega t - \sin (\omega t + 120^\circ)] = E \sqrt{3} \sin (\omega t - 30^\circ)$$

adică aceeași expresie ca mai sus.

## 9.2.2. COMPUNEREA ARMONICILOR

**9.2.2.1. Generalități.** Undele complexe care se întîlnesc în electrotehnică sînt formate dintr-un număr oarecare de armonici, constituind o rezultantă a lor care, în general, nu mai este o sinusoidă. Forma undei rezultante depinde de natura armonicilor componente și de defazajul lor relativ. Aceleași armonici, defazate însă diferit, pot da unde rezultante diferite. În unele cazuri particulare, compunerea armonicilor conduce la anumite condiții de simetrie ale undei rezultante nesinusoidale, cu ajutorul cărora se pot face anumite simplificări în operația inversă de descompunere în armonici a unei unde nesinusoidale.

Se deosebesc astfel trei cazuri principale :

- compunerea de armonici de aceeași perioadă ;
- compunerea de armonici de perioadă diferită ;
- compunerea de armonici oarecare cu un termen constant.

**9.2.2.2. Compunerea armonicilor oarecare de aceeași perioadă.** Fie armonicile

$$y'_n = A'_n \sin (n \omega t - \varphi'_n)$$

și

$$y''_n = A''_n \sin (n \omega t - \varphi''_n).$$

Compunînd aceste două armonici este ușor de văzut că se va obține tot o sinusoidă de același ordin

$$y_n = A_n \sin (n \omega t - \varphi_n)$$

ai cărei parametri, amplitudinea  $A_n$  și defazajul  $\varphi_n$ , se obține prin identificarea coeficienților lui  $\sin \omega t$  și  $\cos \omega t$  din ambii membri ai relației

$$y_n = y'_n + y''_n$$

așa cum s-a procedat și în cazul regimului sinusoidal\*.

\* Vezi 4.1.3.1, a



Un caz particular, care se întâlnește foarte des în analiza armonică, îl constituie suma funcțiilor în cuadratură

$$y'_n = A_n \sin n\omega t \text{ și } y''_n = B_n \cos n\omega t.$$

Rezultanta este o funcție armonică de ordinul  $n$  și de forma

$$y_n = C_n \sin (n\omega t - \varphi_n)$$

în care

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \text{și} \\ \operatorname{tg} \varphi_n &= -\frac{B_n}{A_n} \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

Ca o consecință, rezultă că o armonică oarecare de ordinul  $n$

$$y'_n = A_n \sin (n\omega t - \varphi_n),$$

avînd un defazaj  $(\varphi_n/n)$  față de originea  $O$ , poate fi descompusă în două armonici

$$y'_n = A_n \sin n\omega t,$$

$$y''_n = B_n \cos n\omega t,$$

coeficienții  $A_n$  și  $B_n$  deducîndu-se cu ajutorul relațiilor 4.7

Este ușor de văzut că o asemenea armonică se poate descompune într-o infinitate de moduri în două armonici, una în sinus și cealaltă în cosinus, fiecare din aceste descompuneri fiind diferită.

Într-adevăr, luînd o altă origine  $O_1$ , va rezulta un alt defazaj al armonicii respective și deci alte componente pentru armonici.

Originea  $O_1$  fiind aleasă oriunde, rezultă că descompunerea depinde de poziția acestei origini.

**9.2.2.3. Compunerea armonicilor oarecare de perioade diferite.** În compunerea armonicilor oarecare de perioade diferite pot apărea următoarele cazuri:

- a) compunerea armonicilor oarecare, constituind cazul general;
- b) compunerea armonicilor oarecare, pare și impare, în fază sau în opoziție;
- c) compunerea armonicilor oarecare, pare și impare, așezate simetric unele față de celelalte;
- d) compunerea armonicilor oarecare impare;
- e) compunerea armonicilor oarecare pare.

a) *Compunerea armonicilor oarecare.* Fie de găsit forma unei rezultante a unei sume de armonici oarecare, de amplitudini și perioade diferite

$$y = C_1 \sin (\omega t - \varphi_1) + C_2 \sin 2 (\omega t - \varphi_2) + \dots + C_n \sin n (\omega t - \varphi_n). \quad (9.7)$$



Procedînd grafic, prin sumarea algebrică a diferitelor amplitudini se va obține o undă periodică oarecare de perioadă  $2\pi$ , dar care nu va mai fi o sinusoidă (fig. 9.8). Perioada curbei rezultante este în adevăr  $2\pi$ , căci cea mai mică valoare a variabilei  $\omega t = x$  pentru care fiecare din sinusoidale componente reia aceeași valoare, este  $2\pi$ .

Este ușor de văzut de altfel că, întrucît pentru fiecare din sinusoidale există relația

$$f(\omega t) = f(\omega t + 2\pi),$$

unda rezultantă va satisface de asemenea aceleași relații.

Gradul de deformare al undei depinde de următorii trei factori:

$\alpha)$  *Natura armonicilor* în ceea ce privește gradul lor de paritate sau imparitate.

$\beta)$  *Valoarea defazajelor*, adică de poziția relativă a diverselor armonici.

$\gamma)$  *Raportul amplitudinilor* diverselor armonici.

O asemenea undă rezultantă nu are nici un fel de simetrie și nu se bucură decît de proprietatea că perioada sa este egală cu  $2\pi$ , adică aceeași cu a undei fundamentale.

Pentru o asemenea undă, aria închisă cu axa absciselor pentru o perioadă este nulă. Într-adevăr,

$$S = \int_0^T y dt = \sum_1^n C_n \int_0^T \sin n(\omega t - \varphi_n) dt = 0.$$

**OBSERVAȚIE:** Funcția

$$y = \sum_1^n C_n \sin n(\omega t - \varphi_n)$$

poate fi descompusă în două sume de termeni în sinus și în cosinus

$$y = \sum_1^n A_n \sin n\omega t + \sum_1^n B_n \cos n\omega t.$$

Rezultă că sumarea unor armonici pare și impare în sinus și în cosinus dă o undă periodică deformată de perioadă  $2\pi$ , fără nici un fel de simetrie.

**Corolar:** Fiind dată o undă periodică oarecare, de perioadă  $2\pi$ , pentru care aria închisă între curbă și axa absciselor este nulă pentru o perioadă, această undă poate fi descompusă într-o serie de armonici pare și impare de forma  $C_n \sin n(\omega t - \varphi_n)$  sau într-o serie de armonici pare și impare de forma

$$A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t$$

față de originea dată.

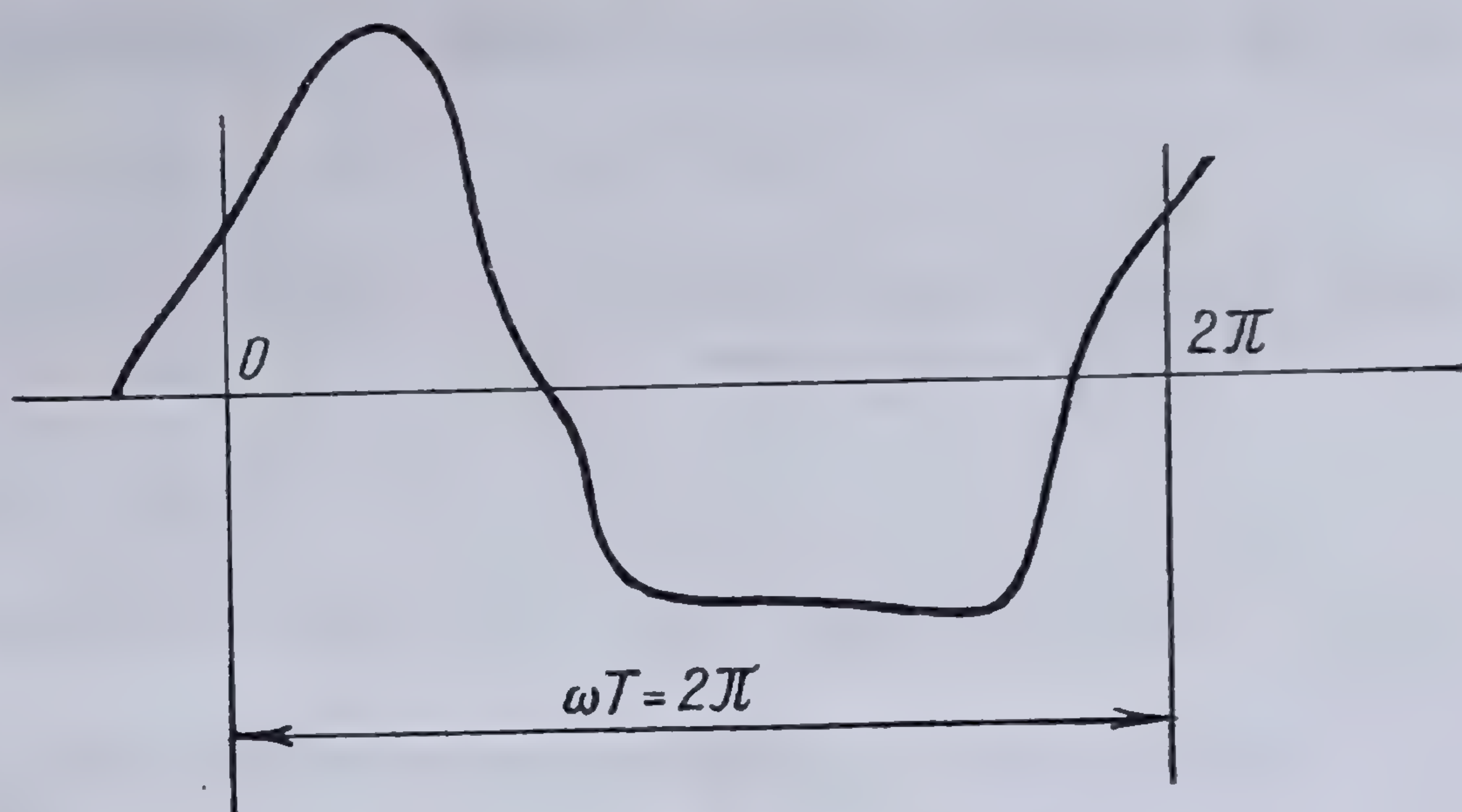


Fig. 9.8. Undă periodică nesinusoidală



b) Compunerea armonicilor oarecare, pare și impare, în fază (sau în opoziție). Funcția corespunzătoare (9.7) se scrie în acest caz

$$y = C_1 \sin(\omega t - \varphi_1) + C_2 \sin 2(\omega t - \varphi_1) + \dots + C_n \sin n(\omega t - \varphi_1),$$

amplitudinile  $C_1, C_2, \dots, C_n$  putând fi pozitive sau negative (armonici în fază, respectiv în opoziție).

Ținând schimbarea de origine în punctul  $O_1$  de abscisă

$$\overline{OO_1} = \alpha_1 = \varphi_1,$$

egală cu defazajul comun al armonicilor, relația de mai sus devine

$$y = C_1 \sin \omega t + C_2 \sin 2\omega t + \dots + C_n \sin n\omega t,$$

adică unda rezultantă provine din sumarea unor armonici în *sinus* pare și impare.

Față de noua origine, unda rezultantă  $y = f(\omega t)$  se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = -f(2\pi - \omega t),$$

aceasta deoarece fiecare din sinusoidale componente se bucură de aceeași proprietate.

Așadar, unda rezultantă se compune din două semiperioade simetrice

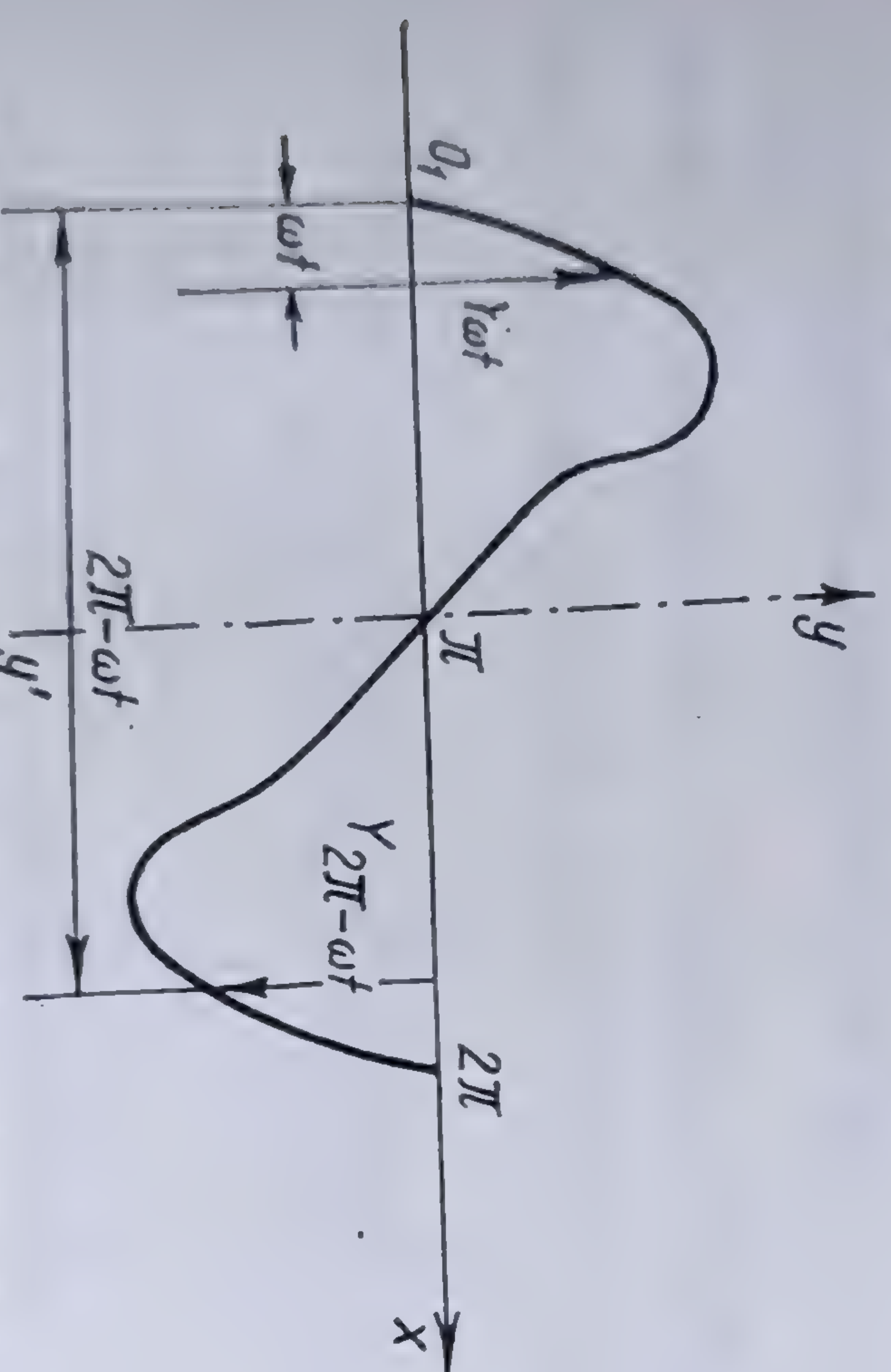


Fig. 9.9. Undă periodică nesinusoidală cu simetria  $f(\omega t) = -f(2\pi - \omega t)$ .

față de o axă verticală  $yy'$ , dusă la  $x = \pi$ , și răsturnată față de axa absciselor (fig. 9.9). Unda se anulează pentru  $x = 0$  și  $x = 2\pi$ . În aceste puncte toate armonicile trec prin zero.

*Corolar:* În cazul când o undă experimentală periodică, de perioadă  $2\pi$  este constituită din două jumătăți identice dar răsturnate față de axa absciselor și au o axă de simetrie pentru  $t = \pi$ , adică are proprietatea

$$f(\omega t) = -f(2\pi - \omega t),$$

această curbă poate fi descompusă față de originea ei într-o serie de armonici în *sinus*, pare și impare, în fază sau în opoziție.

c) Compunerea armonicilor oarecare, pare și impare, așezate simetric unele față de celalalte. Acesta este cazul când armonicile superioare impare sunt în fază cu unda fundamentală, iar armonicile superioare pare sunt în cuadratură cu această armonică (fig. 9.10).

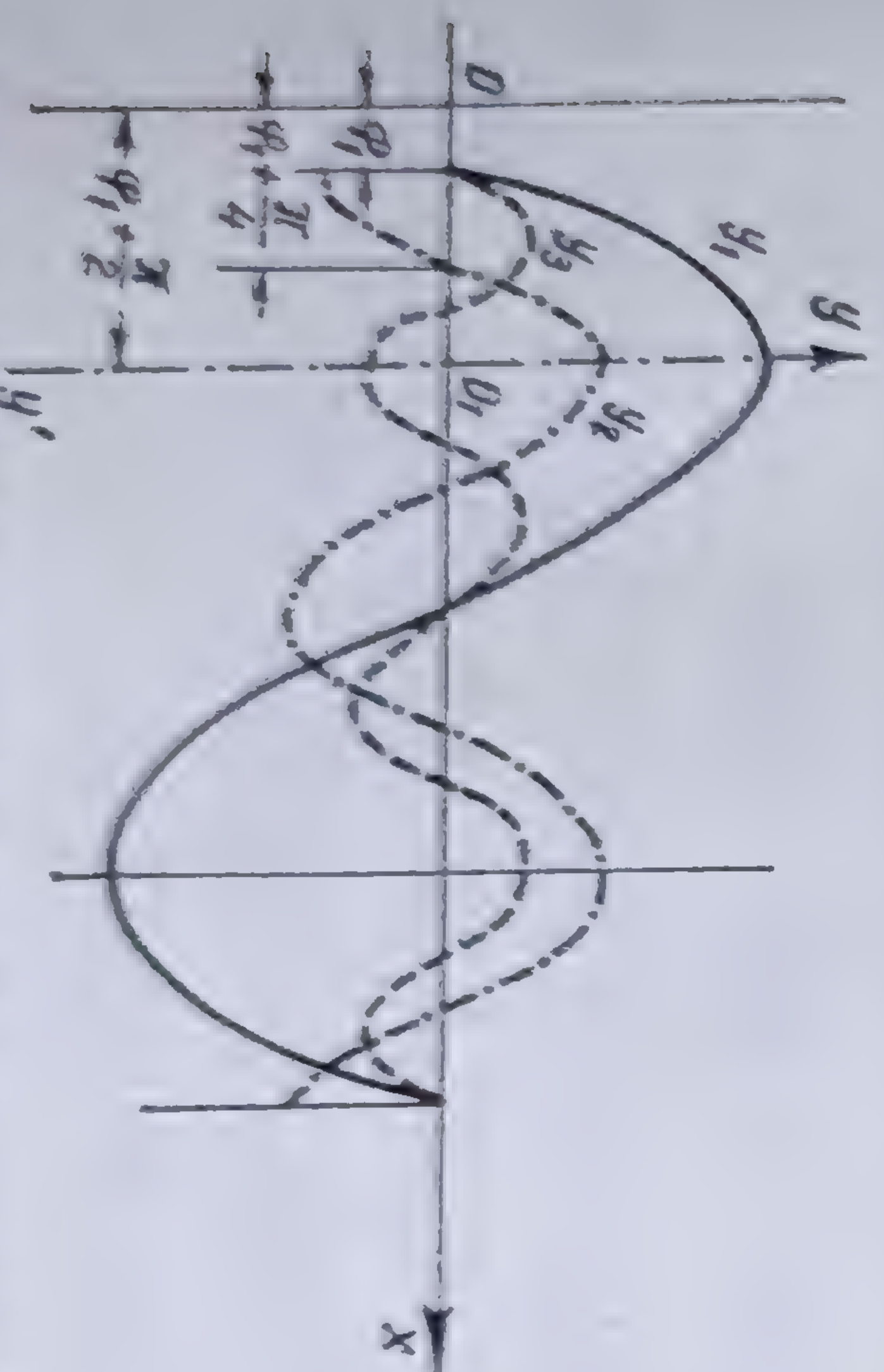


Fig. 9.10. Compunerea armonicilor în fază și în cuadratură.



În acest caz, funcția (9.7) se scrie

$$y=f(\omega t) = \sum C_{2n+1} \sin (2n+1)(\omega t - \varphi_1) + \sum C_{2n} \sin 2n\left(\omega t - \varphi_1 - \frac{\pi}{4n}\right). \quad (9.8)$$

Este ușor de văzut, că toate armonicile sînt simetric așezate față de axa verticală  $yy'$  dusă în punctul  $O_1$ , de abscisă  $\overline{OO_1} = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ .

Dacă se schimbă originea în acest punct, toate armonicile devin armonici în *cosinus*. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} C_{2n+1} \sin (2n+1)(\omega t - \varphi_1) &= C_{2n+1} \sin (2n+1)\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \\ &= C_{2n+1} \sin (2n+1)\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = C_{2n+1} \cos (2n+1) \omega t \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} C_{2n} \sin 2n\left(\omega t - \varphi_1 - \frac{\pi}{4n}\right) &= C_{2n} \sin \left(2n \omega t - 2n \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= C_{2n} \sin \left[2n\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right) - 2n \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right] = C_{2n} \sin \left[2n \omega t + (2n-1) \frac{\pi}{2}\right] = \\ &= -C_{2n} \cos n \pi \cos 2n \omega t. \end{aligned}$$

În consecință, relația (9.8) se va scrie

$$y = \sum C_n \cos n \omega t. \quad (9.9)$$

Dat fiind că fiecare din armonicile sumei (9.9) se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = f(2\pi - \omega t),$$

și unda rezultantă se va bucura de aceeași proprietate. În consecință, unda rezultantă se va compune din două semiperioade identice și simetric așezate față de o axă verticală  $yy'$  dusă prin punctul de abscisă  $\omega t = \pi$  (fig. 9.11).

*Corolar:* Orice undă periodică nesinusoidală, de perioadă  $2\pi$ , formată din două jumătăți identice, simetrice față de o axă verticală dusă prin punctul de abscisă  $\omega t = \pi$  și care are proprietatea

$$f(\omega t) = f(2\pi - \omega t),$$

se poate descompune într-o sumă de armonici pare și impare în *cosinus*.

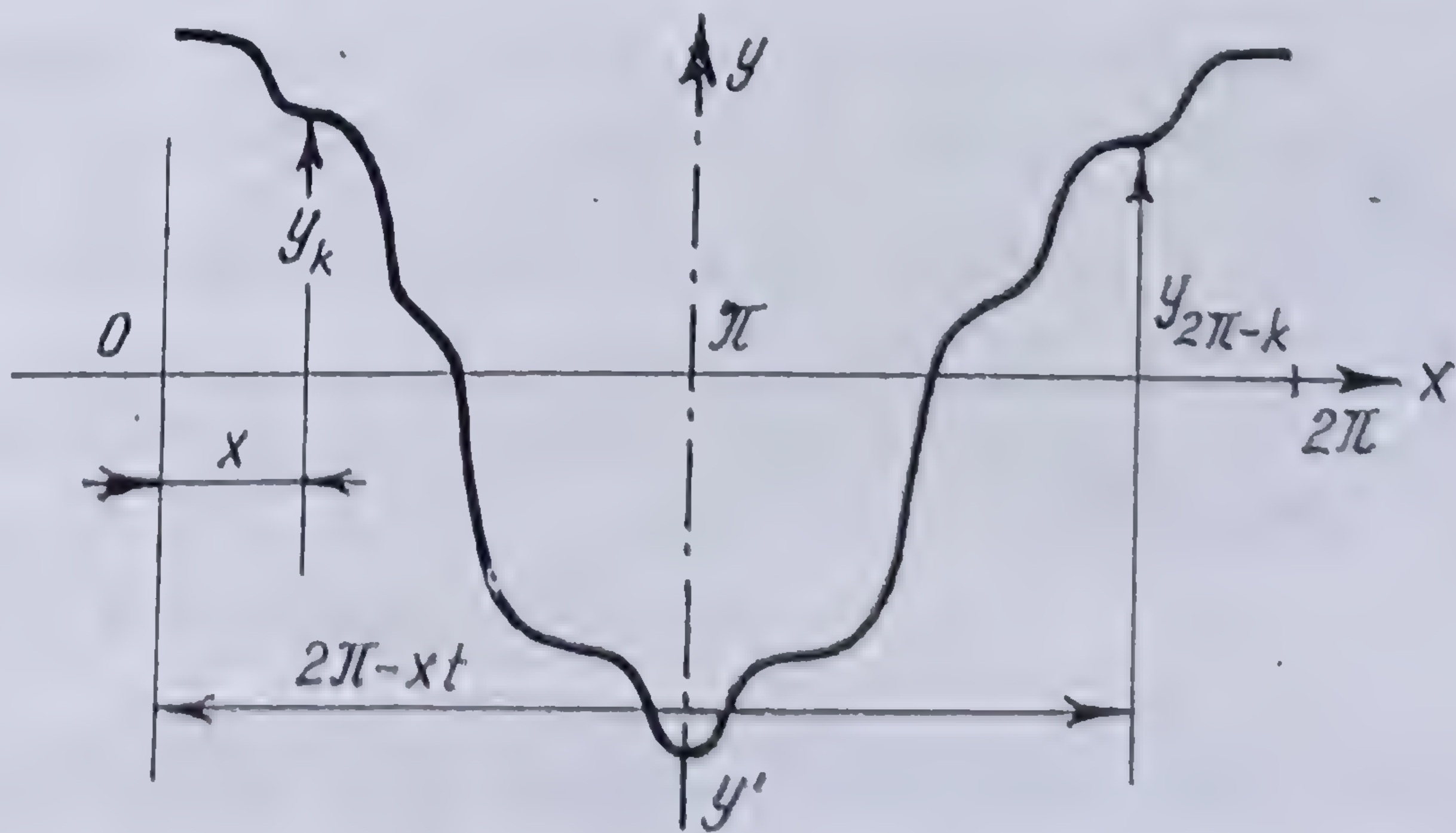


Fig. 9.11. Undă periodică nesinusoidală cu simetria  $f(\omega t) = f(2\pi - \omega t)$ .



d) Compunerea armonicilor impare. Fie

$$y = \sum C_{2n+1} \sin(2n+1)(\omega t - \varphi_{2n+1}). \quad (9.10)$$

Dat fiind că fiecare armonică se bucură de proprietatea că

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi),$$

și unda rezultantă se va bucura de aceeași proprietate.

Rezultă că ea va fi formată din două jumătăți identice, a doua jumătate obținându-se din prima, luând simetrica acesteia față de axa absciselor și dându-i-se o translație de o jumătate de perioadă spre dreapta (fig. 9.12).

Descompunând armonicile din expresia (9.10) în componente în sinus și în cosinus, se obține

$$y = \sum [A_{2n+1} \sin(2n+1)\omega t + B_{2n+1} \cos(2n+1)\omega t],$$

adică acest caz echivalează cu sumarea de armonici impare în sinus și în cosinus.

**Corolar :** O undă periodică nesinusoidală, de perioadă  $2\pi$ , care se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi),$$

poate fi descompusă într-o serie de armonici impare de forma

$$C_{2n+1} \sin(2n+1)(\omega t - \varphi_{2n+1})$$

sau într-o serie de armonici impare în sinus și în cosinus de forma

$$A_{2n+1} \sin(2n+1)\omega t + B_{2n+1} \cos(2n+1)\omega t.$$

**OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ:** Acest gen de unde sînt cele mai importante pentru electricieni, deoarece ele reprezintă undele de tensiune ale alternatoarelor obișnuite, la care un pol nord urmează unui pol sud, ele reprezentînd în același timp și curbele curenților pe care aceste tensiuni îi produc în circuitele electrice.

Un caz particular interesant este acela în care diversele armonici impare sînt în fază

$$y = \sum C_{2n+1} \sin(2n+1)(\omega t - \varphi_1)$$

sau, luînd originea în punctul unde unda trece prin zero,

$$Y = \sum C_{2n+1} \sin(2n+1)\omega t.$$

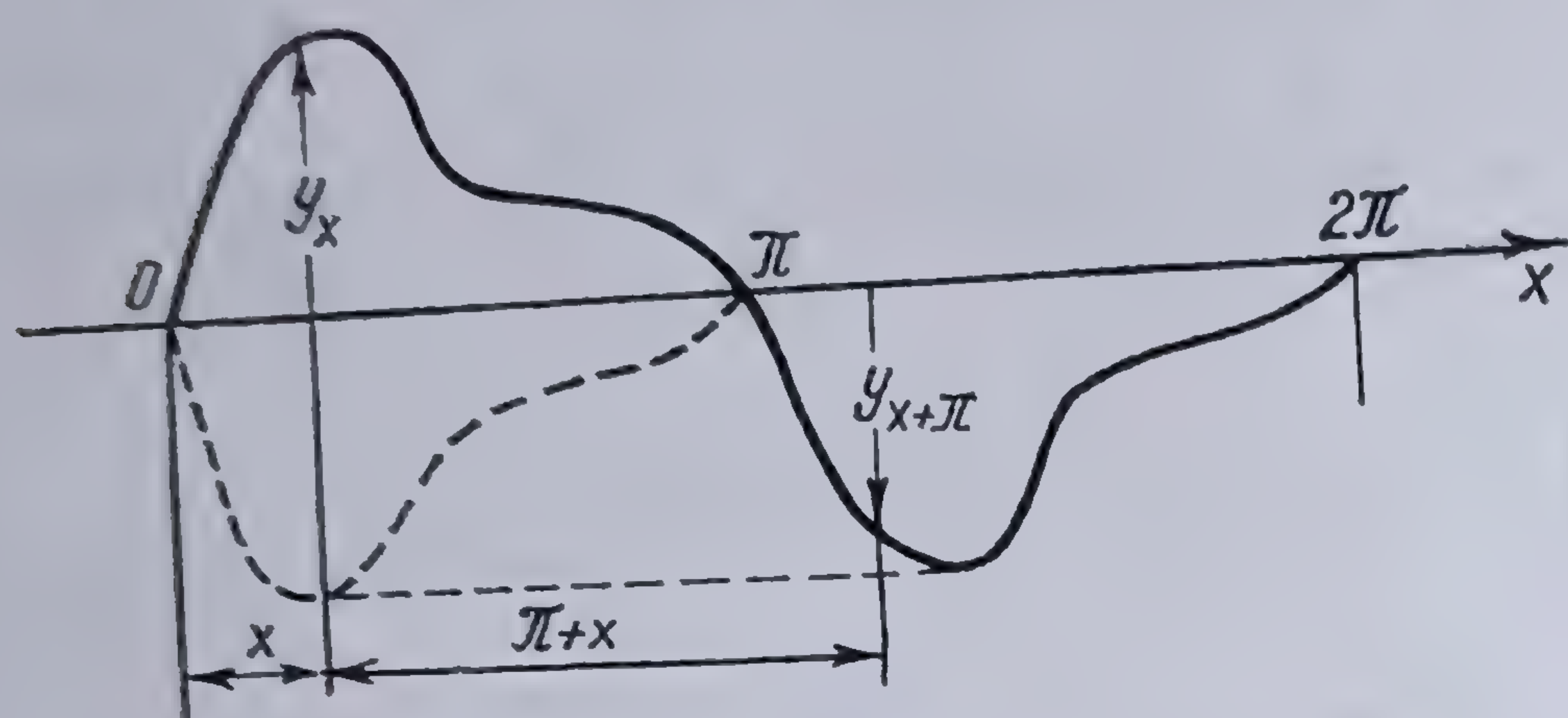


Fig. 9.12. Undă periodică nesinusoidală cu simetria  $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ . Curba electrotehnică.



Se vede ușor că fiecare din armonicile componente se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = f(\pi - \omega t) = -f(\pi + \omega t) = -f(2\pi - \omega t) \quad (9.11)$$

proprietatea pe care o va avea și unda rezultantă. Unda rezultantă va fi deci formată din două jumătăți identice, fiecare jumătate avînd o axă de simetrie verticală la un sfert de perioadă, unda fiind formată din patru sferturi de perioadă egală (fig. 9.13).

Dacă se ia ca origine de fază punctul de pe abscisă pentru care armonica fundamentală este maximă, adică punctul de abscisă  $\overline{OO'} = x = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ , unde de sumat devin armonici impare în cosinus

$$y = \sum C_{2n+1} \cos (2n + 1) \omega t.$$

Rezultă deci că, sumarea armonicilor impare în sinus este identică cu sumarea armonicilor impare în cosinus. Armonicile în cosinus se bucură de proprietatea

$$f(\omega t) = -f(\pi - \omega t) = -f(\pi + \omega t) = f(2\pi - \omega t). \quad (9.12)$$

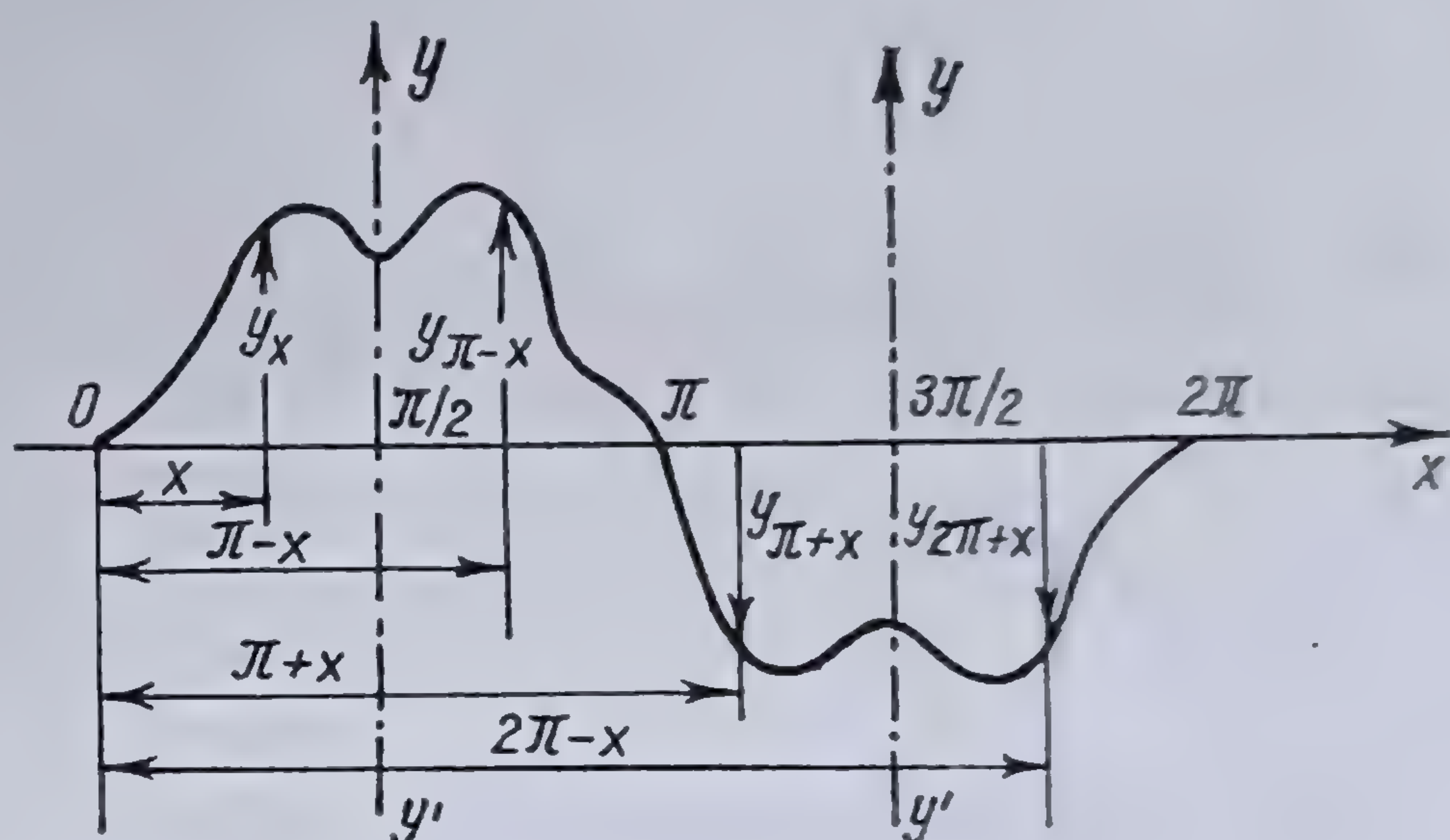


Fig. 9.13. Undă periodică nesinusoidală.

**Corolar :** Undele periodice nesinusoidale de perioadă  $2\pi$ , care se bucură de una din proprietățile (9.11) sau (9.12) sînt unde *bisimetrice*; ele pot fi descompuse într-o serie de armonici impare în *sinus* sau în *cosinus*, după cum este satisfăcută relația (9.11) sau (9.12).

e) *Compunerea armonicilor oarecare pare.* Fie

$$y = \sum C_{2n} \sin 2n (\omega t - \varphi_{2n}).$$

Este ușor de văzut că, pentru fiecare armonică există relația

$$f(\omega t) = f(\omega t + \pi),$$

ceea ce înseamnă că perioada fiecărei unde este  $\pi$ . Deci și perioada undei rezultante va fi tot  $\pi$ .

Situația este ca și cum ar fi de sumat pe o jumătate de perioadă o undă fundamentală desenată pe acest interval cu toate armonicile sale pare și impare.

Tot ce s-a spus pentru cazurile precedente se aplică în cazul de față pentru armonicile sumate pe o jumătate de perioadă.

**9.2.2.4. Compunerea armonicilor oarecare cu un termen constant.** Fie de construit unda

$$y = C_0 + \sum C_n \sin n(\omega t - \varphi_n) \quad (9.13)$$



care este obținută prin adăugarea unui termen constant  $C_0$  la o funcție periodică nesinusoidală oarecare. Rezultanta acestei unde va fi undă nesinusoidală reprezentată prin ecuația

$$\Sigma C_n \sin n(\omega t - \varphi_n),$$

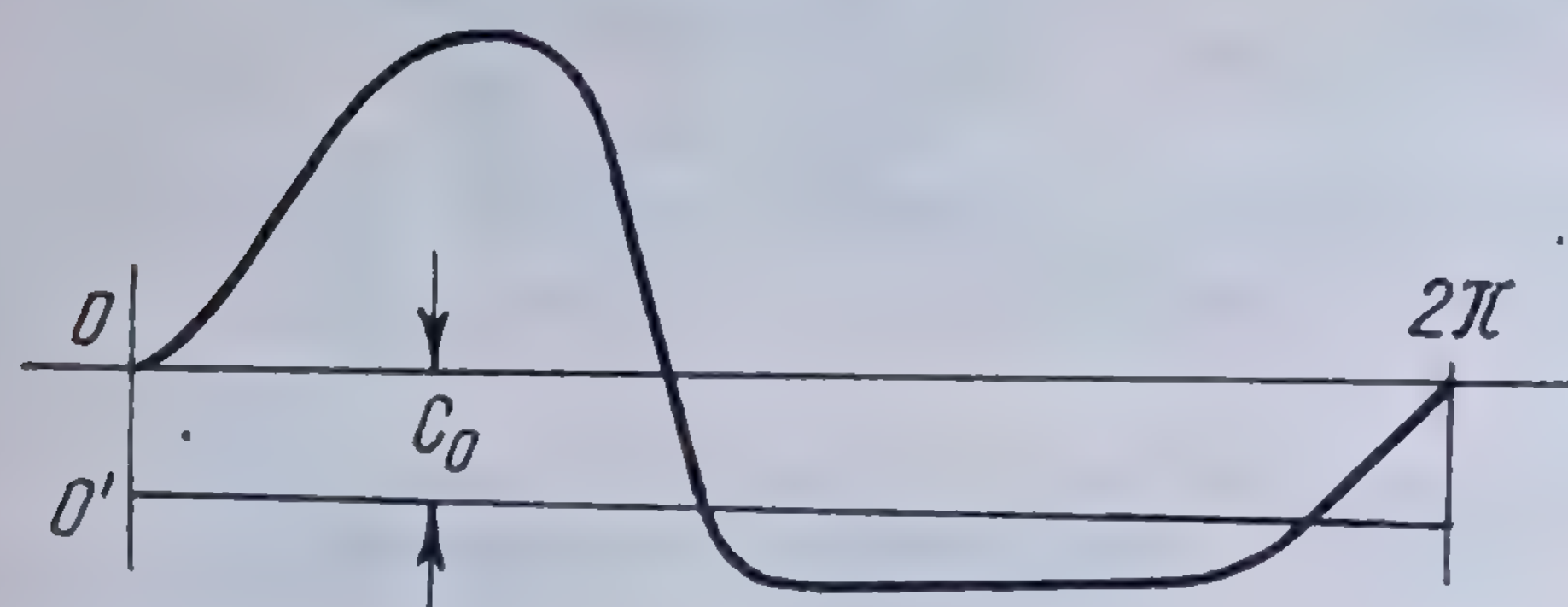
căreia i s-a dat o translație verticală de lungime  $\overline{OO_1} = C_0$  (fig. 9.14), ceea ce este tot una cu a deplasa axa absciselor în sens contrar cu aceeași lungime  $\overline{OO_1} = C_0$ .

Se observă că, în acest caz, suprafața închisă între undă și axa absciselor nu mai este nulă, ci este egală cu aceea a dreptunghiului  $TC_0$ . Într-adevăr,

$$S = \int_0^T y dt = \int_0^T C_0 dt + \Sigma \int_0^T C_n \sin n(\omega t - \varphi_n) dt = C_0 T$$

căci integralele de sub semnul  $\Sigma$  sînt nule.

*Corolar :* Dacă suprafața de-a lungul unei perioade a unei unde nesinusoidale nu este nulă, acea undă poate fi descompusă într-o sumă de termeni din care unul este constant, ceilalți fiind armonici oarecare, pare sau impare. Mărimea termenului constant se deduce din calculul ariei suprafeței și este egală cu valoarea medie a curbei



$$C_0 = \frac{A}{T},$$

Fig. 9.14. Undă periodică nesinusoidală generală. în care  $A$  reprezintă aria suprafeței închise de undă și axa absciselor.

Expresia (9.13) reprezintă expresia cea mai generală a unei unde periodice nesinusoidale.

**9.2.2.5. Interferența armonicilor.** Un caz particular de compunere a armonicilor îl constituie compunerea a două armonici impare sau pare de ordin succesiv. Prin compunerea acestui fel de armonici se produce fenomenul denumit *bătăie*: amplitudinea undei rezultante a acestor armonici este o funcție periodică de timp, avînd frecvența egală cu aceea a undei fundamentale.

Fie undă nesinusoidală

$$y = Y_1 \sin \omega t + Y_{2n+1} \sin [(2n+1)\omega t + \alpha] + Y_{2n+3} \sin [(2n+3)\omega t + \beta]$$

și, pentru simplificarea expunerii, se presupune că

$$Y_{2n+1} = Y_{2n+3} = Y.$$

Rezultanta celor două armonici este

$$\begin{aligned} y_n &= Y \{ \sin [(2n+1)\omega t + \alpha] + \sin [(2n+3)\omega t + \beta] \} = \\ &= 2Y \cos \left( \omega t - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \times \sin \left[ 2(n+1)\omega t + \frac{\alpha - \beta}{2} \right]. \end{aligned} \quad (9.14)$$



Se vede ușor că amplitudinea acestei unde este o funcție periodică de timp, avînd aceeași frecvență ca și unda fundamentală; ordinul armonicii rezultante este egal cu media aritmetică a ordinelor armonicilor componente. Maximul amplitudinii armonicii rezultante este  $2Y$  și are loc la timpul

$$t = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

cînd se produc *bătăile de interferență*.

Două cazuri particulare interesante pot apărea în raport cu valorile unghiurilor  $\alpha$  și  $\beta$ :

a) Pentru  $\alpha = 0^\circ$  și  $\beta = 180^\circ$  se obține

$$y'_n = 2Y \cos(\omega t + 90^\circ) \times \sin[2(n+1)\omega t + 90^\circ] = 2Y \sin \omega t \times \cos 2(n+1)\omega t.$$

În acest caz bătaia are loc în același timp cu maximul undei fundamentale (fig. 9.15, a).

b) Pentru  $\alpha = \beta = 0^\circ$  se obține

$$y''_n = 2Y \cos \omega t \times \sin 2(n+1)\omega t$$

și bătaia are loc, în acest caz, pentru  $t = 0$  sau  $t = \frac{\pi}{\omega}$ , adică atunci cînd armonica fundamentală trece prin zero (fig. 9.15, b).

În cazul general, cînd amplitudinile celor două unde care interferează nu sînt egale, interferența se produce între întreaga undă cu amplitudinea mică și o parte din unda cu amplitudinea mare, în modul arătat mai sus, rămî-nînd astfel o armonică reziduală cu amplitudine constantă.

Astfel, pentru exemplificare, unde

$$y_{17} = Y_{17} \sin 17 \omega t \text{ și } y_{19} = Y_{19} \sin 19 \omega t$$

în care

$$Y_{17} > Y_{19}$$

vor da unda rezultantă

$$Y = (Y_{17} - Y_{19}) \sin 17\omega t + 2Y_{19} \cos \omega t \times \sin 18\omega t,$$

interferența fiind în acest caz nesinusoidală.

Un alt caz interesant de interferență este atunci cînd ordinul armonicilor diferă cu patru. În acest caz, armonică rezultantă este de aceeași paritate cu armonicile com-

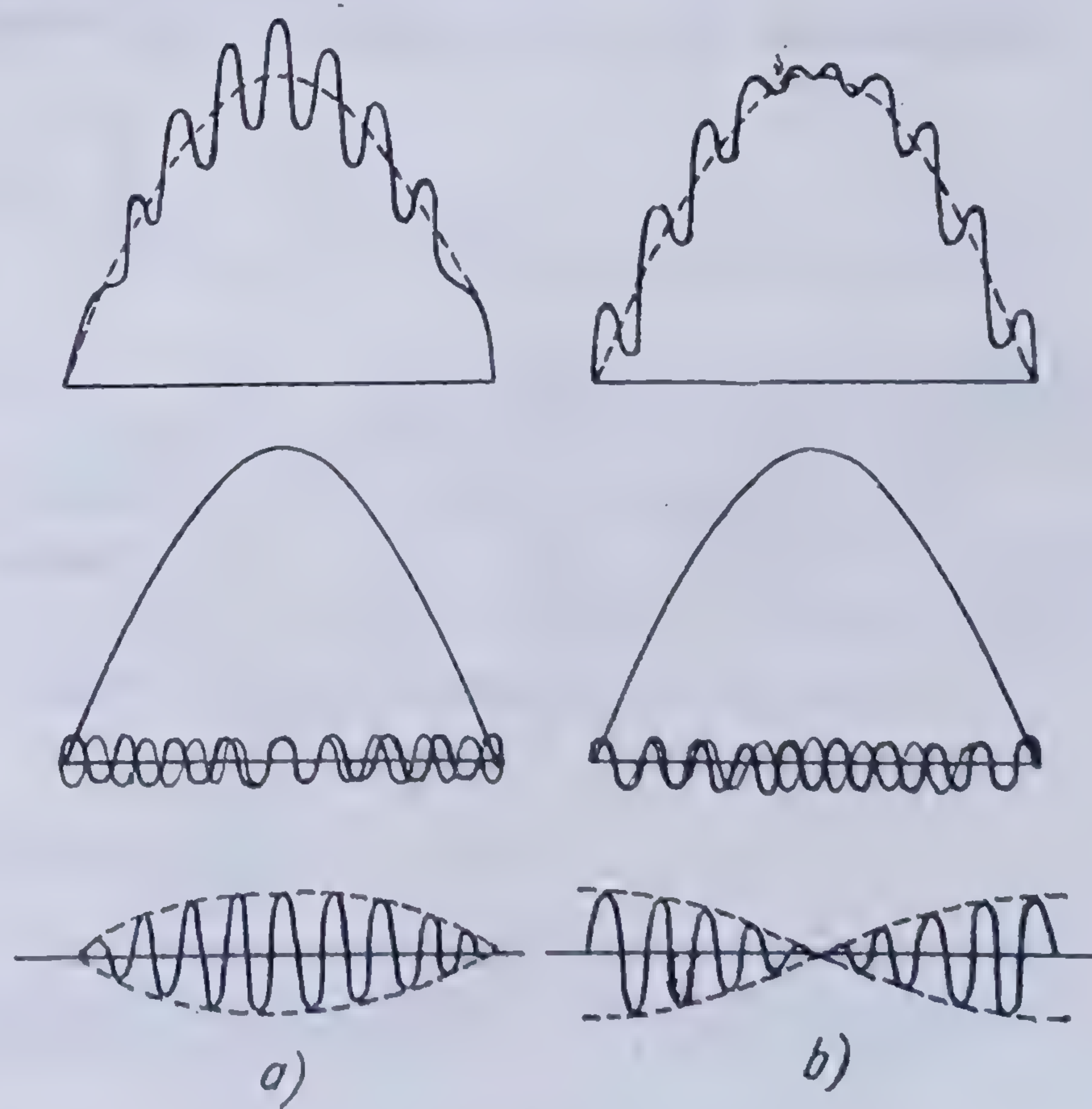


Fig. 9.15. Interferența armonicilor.



ponente iar amplitudinea sa este o funcție periodică de timp de frecvență dublă aceea a armonicii fundamentale.

Fie, pentru ilustrare, armonicile de ordinul  $n$  și  $n+4$ , avînd, pentru simplificare, aceeași amplitudine. Se obține

$$Y_n \sin n\omega t + Y_n \sin (n+4)\omega t = 2Y_n \cos 2\omega t \sin (n+2)\omega t$$

de unde rezultă cele arătate mai sus.

Undele rezultante, date de relația (9.14), se numesc și *unde modulate*.

Fenomenul de modulație este folosit foarte mult în tehnica frecvențelor înalte, în special în transmisiunea sunetelor.

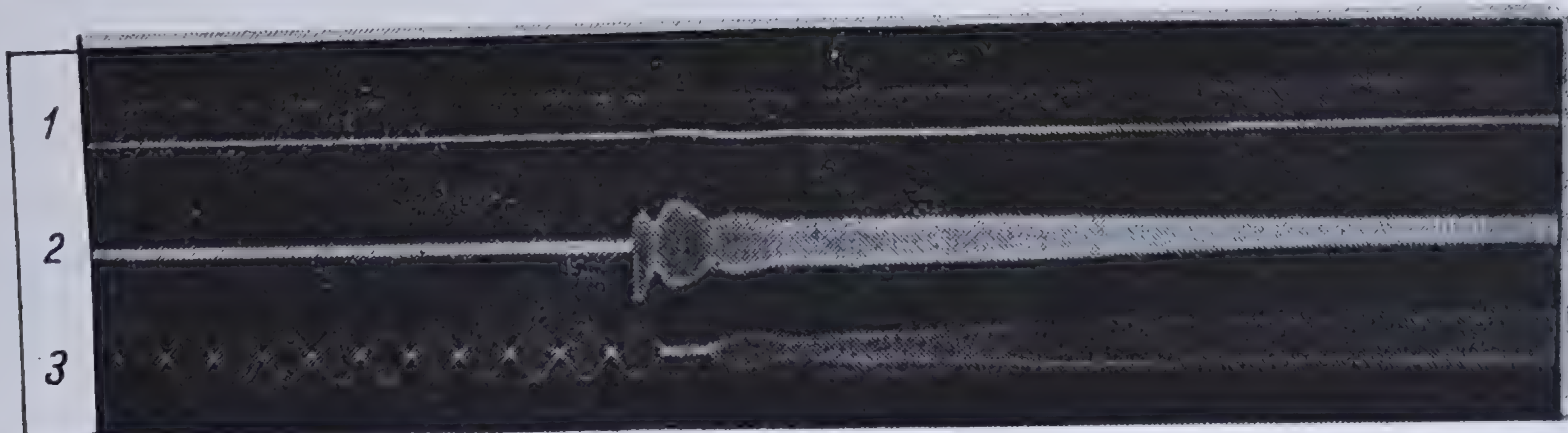


Fig. 9.16. Apariția bătăilor la sincronizarea alternatoarelor.

Fenomenul bătăilor apare la punerea în paralel a alternatoarelor sincrone, în perioada de sincronizare, în special în cazul cînd această operație se face prin metoda autosincronizării\* (fig. 9.16).

### 9.2.3. ANALIZA ARMONICĂ A UNDELOR PERIODICE NESINUSOIDALE CĂRORA LI SE POATE SCRIE ECUAȚIA ANALITICĂ

9.2.3.1. **Metoda integrării.** Undele periodice nesinusoidale fiind reprezentate prin funcții periodice nesinusoidale, ecuația cea mai generală care exprimă o asemenea funcție periodică nesinusoidală este

$$y = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin (k\omega t - \varphi_k). \quad (9.15)$$

Rezultă dar, că avînd dată o anumită funcție periodică nesinusoidală, ea poate fi descompusă într-o serie FOURIER.

În aplicațiile practice se restrînge numărul termenilor seriei la un număr finit  $n$  oricît de mare vom noi. Practic s-a constatat că pentru  $n > 25$ , termenii seriei FOURIER devin neglijabili.

Dezvoltînd sinusul, ecuația (9.15) se poate scrie :

$$y = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k\omega t. \quad (9.16)$$

Coeficienții  $A_k$  și  $B_k$  poartă numele de *coeficienții lui FOURIER*.

\* Vezi [215]



Descompunerea în serie armonică a unei funcții periodice nesinusoidale constă în a găsi valoarea coeficienților lui FOURIER.

Aceasta se poate obține prin metoda cunoscută a cuadraturii\* și rezultă

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T y \sin n\omega t dt, \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T y \cos n\omega t dt, \\ C_0 &= \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y dt. \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

Dacă se ia  $\omega t = x$ , perioada acestei funcții fiind  $2\pi$ , coeficienții lui FOURIER iau forma

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin nx dx, \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos nx dx, \\ C_0 &= \frac{B_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx. \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

Calculul coeficienților lui FOURIER cu ajutorul relațiilor (9.17) sau (9.18) nu se poate face, decât dacă se cunoaște expresia analitică a unde.

Calculul expresiilor coeficienților lui FOURIER poate fi simplificat într-o oarecare măsură dacă undele periodice au o anumită simetrie.

Astfel, pentru undele formate din armonici impare — undele din electrotehnică — pentru care avem simetria,

$$f(\omega t) = -f(\omega t + \pi),$$

coeficienții lui FOURIER se pot calcula numai pentru o semiperioadă. Se obține :

$$\left. \begin{aligned} A_{2n+1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y \sin (2n+1)\omega t dt, \\ B_{2n+1} &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} y \cos (2n+1)\omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

Este evident că în acest caz  $C_0 = 0$ .

Pentru undele formate din armonici impare numai în sinus sau numai în cosinus — undele bisimetrice — coeficienții lui FOURIER respectivi se pot cal-

\* Vezi [10] pag. 198



cula efectuând integrarea numai pe un sfert de perioadă. Se găsește astfel

$$A_{2n+1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y \sin(2n+1)\omega t \, dt, \quad (9.20)$$

pentru curbele în sinus și

$$B_{2n+1} = \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} y \cos(2n+1)\omega t \, dt, \quad (9.21)$$

pentru curbele în cosinus.

**OBSERVAȚII:** 1. Dacă din expresiile (9.17) se calculează coeficientul  $B_n$  al termenului de ordinul 0, se găsește

$$B_0 = \frac{2}{T} \int_0^T y \, dt,$$

și deci

$$C_0 = \frac{1}{2} B_0,$$

expresie adesea întâlnită pentru termenul constant.

2. Curba undei reprezentată prin funcția periodică nesinusoidală  $y$  poate fi — fie formată, între 0 și  $T$ , de un singur arc de curbă;

Pentru calculul coeficienților lui FOURIER se aplică relațiile (9.17) sau (9.18) în expresia acestor coeficienți, efectuându-se cuadratura respectivă.

— fie formată, între 0 și  $T$ , de un număr oarecare de arce de curbă diferite.

Pentru calculul coeficienților lui FOURIER integrarea trebuie făcută pentru intervalele corespunzătoare fiecărei funcții componente în parte, conform regulilor cunoscute.

Astfel, de exemplu, pentru calculul lui  $A_n$  se obține

$$A_n = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{t_1} f_1(\omega t) \sin n \omega t \, dt + \dots + \int_{t_n}^T f_n(\omega t) \sin n \omega t \, dt \right].$$

În ceea ce privește funcțiile componente  $f_k(\omega t)$ , ecuația lor trebuie să fie raportată la aceeași origine  $O$  ca și întreaga funcție  $f(\omega t)$ .

Pentru ilustrarea metodei, fie de calculat coeficienții seriei FOURIER corespunzător curbei numită „dinți de ferăstrău“ (fig. 9.17) și reprezentată printr-un segment de dreaptă  $AB$  între 0 și  $2\pi$ , de ecuație:

$$y = -\frac{25}{\pi} x + 100.$$



Aplicînd relațiile (9.18) se găsește :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{25}{\pi} x + 100 \right) \sin nx \, dx = \frac{50}{\pi n},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{25}{\pi} x + 100 \right) \cos nx \, dx = 0,$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{25}{\pi} x + 100 \right) dx = 75.$$

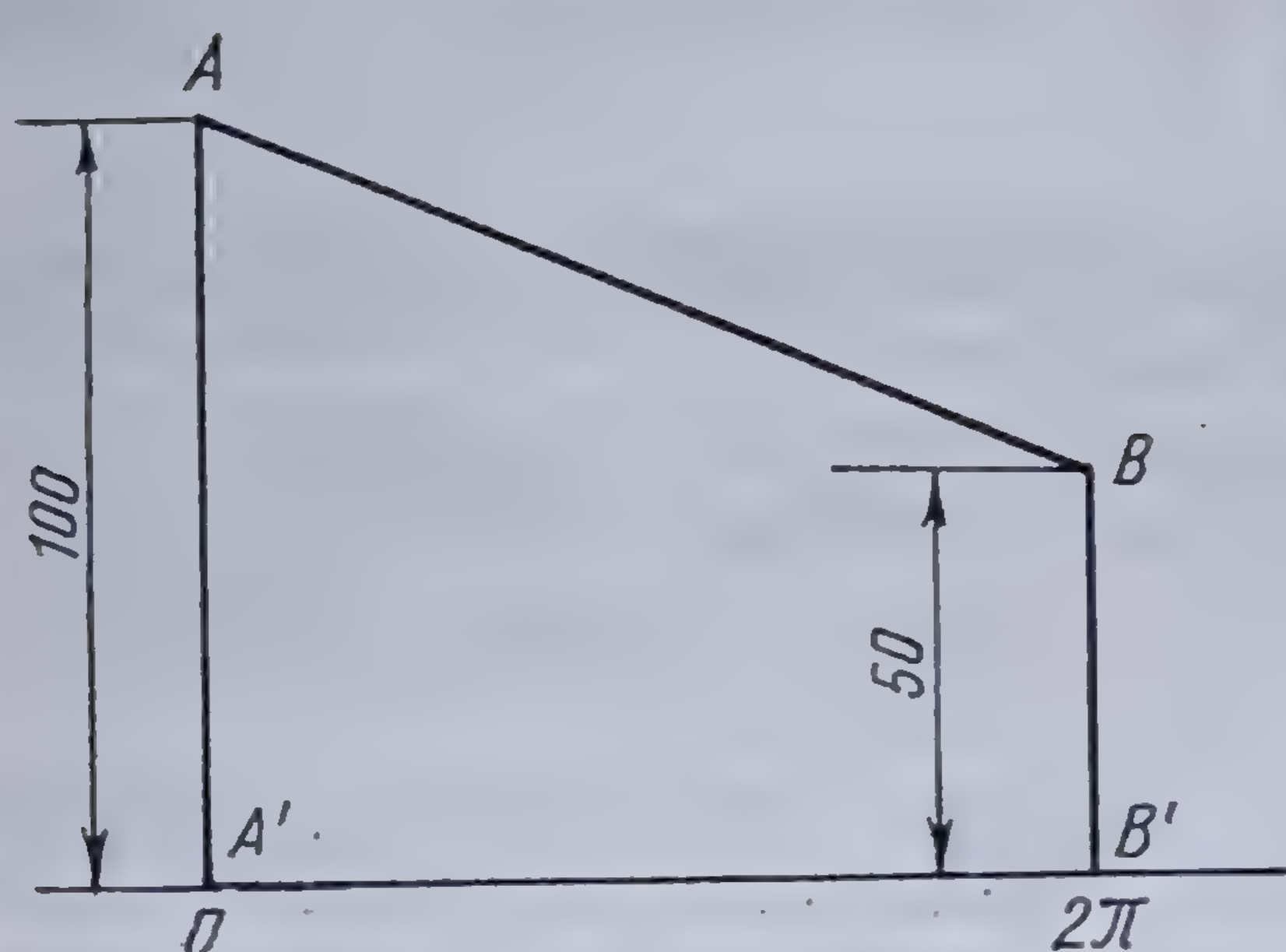


Fig. 9.17. Curba „dinți de ferăstrău”.

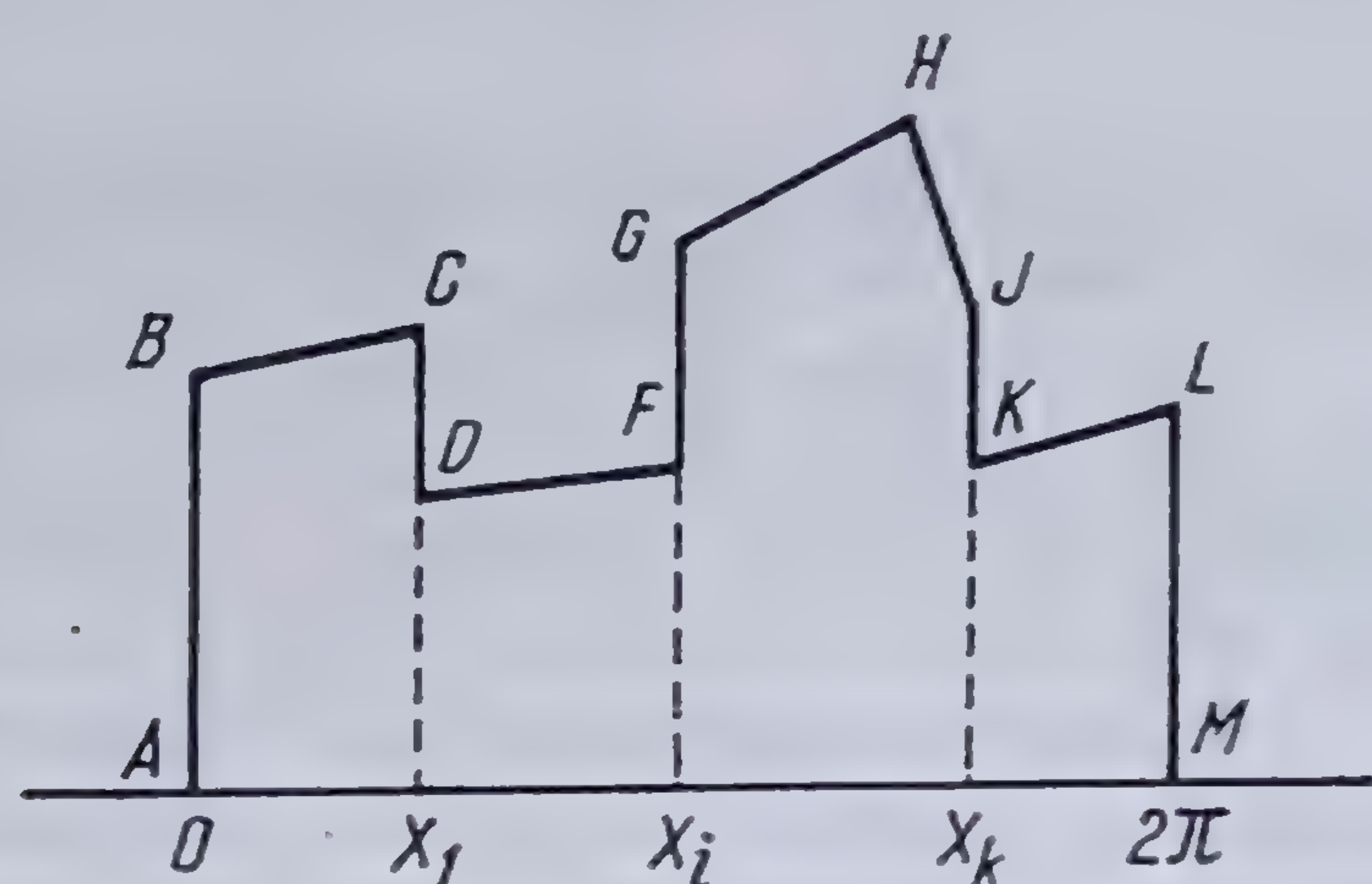


Fig. 9.18. Undă periodică nesinusoidală poligonală.

Dezvoltarea în serie armonică a acestei funcții este deci

$$y = 75 + \frac{50}{\pi} \left[ \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n} + \dots \right]$$

**9.2.3.2. Metoda discontinuităților sau a incidentelor geometrice.** Metoda discontinuităților geometrice a fost enunțată pentru prima oară de profesorul TRAIAN LALESCU\* în cursul de „Serii trigonometrice” pe care îl predă în 1919 la Universitatea din București\*\*. LALESCU a stabilit metoda pentru funcțiile periodice poligonale, înțelegînd prin asemenea funcții o undă care, între 0 și  $2\pi$ , are ca diagramă o linie poligonală  $OABCDEFGHJKLM$  (fig. 9.18).

Această funcție este determinată prin salturile verticale sau prin salturi de ordonată.

$$\sigma_0 = +\overline{AB}; \quad \sigma_1 = -\overline{CD}; \dots; \quad \sigma_i = +\overline{FG};$$

$$\sigma_k = -\overline{JK}; \dots; \quad \sigma_{2\pi} = -\overline{LM}$$

și prin salturile unghiulare sau salturile de tangentă

$$\tau_0 = k_0 - 0 = +k_0; \quad \tau_1 = k_1 - k_0; \dots; \dots$$

\* Dr. TRAIAN LALESCU (1882–1929) a fost profesor de matematici la Universitatea din București și la politehnicele din Timișoara și București.

\*\* Vezi și [163]



în care  $k_0, k_1, \dots, k_n, \dots$  sînt coeficienții unghiulari ai dreptelor  $\overline{AB}, \overline{CD}, \dots$ . Aceste elemente constituie *incidentele geometrice* ale diagramei. Atît salturile de ordonată cît și salturile de tangentă se obțin făcînd diferența dintre valoarea corespunzătoare *la dreapta* punctului considerat și aceea corespunzătoare *la stînga* aceluiasi punct. Dezvoltînd în serie FOURIER o asemenea funcție, care este de fapt o serie de funcții periodice nesinusoidale poligonale elementare, se obține pentru grupul termenilor generali în sinus și cosinus

$$A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

o expresie de forma

$$\frac{1}{n\pi} \sum_i \sigma_i \sin n(x - x_i) + \frac{1}{n^2\pi} \sum_k \tau_k \cos n(x - x_i) \quad (9.22)$$

în care  $i$  și  $k$  primesc toate valorile lui  $x$  din intervalul  $0$  și  $2\pi$  pentru care diagrama prezintă salturi de ordonată sau de tangentă.

Din relația (9.22) reiese o corespondență simplă între incidentele geometrice ale diagramei funcției  $f(x)$  și structura seriei FOURIER care o reprezintă. Rezultă că aceste incidente geometrice pot fi folosite pentru a dezvolta în serie FOURIER o funcție periodică nesinusoidală poligonală.

În urma sugestiilor lui TRAIAN LALESCU, ERNEST ABASOHN\* a generalizat problema, studiînd expresia grupului termenilor generali ai dezvoltării în serie FOURIER pentru funcții periodice nesinusoidale polinomiale, adică pentru funcții avînd diagrama formată din arce de parabolă de un ordin oarecare  $m$ , cu ecuații de forma

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m;$$

ERNEST ABASOHN dă formulele generale pentru termenii seriei FOURIER.

Pentru a aplica formulele generale, în cazul funcțiilor periodice polinomiale, în afară de *saltul de ordonată* sau *saltul de ordinul 0* și *saltul de tangentă* sau *saltul de ordinul 1*, se mai definește și *saltul de pantă de ordinul  $p$* , care este diferența derivatelor de ordinul  $p$  ale funcției *la dreapta* și *la stînga* punctului considerat, adică

$$S^{(p)} = F^{(p)}(x_i) - f^{(p)}(x)_i,$$

în care  $F(x_i)$  este valoarea funcției *la dreapta* punctului considerat și  $f(x)_i$  aceea *la stînga* acestuia.

Cu aceste elemente termenii generali ai descompunerii în serie Fourier ai unei funcții periodice nesinusoidale sînt

$$\begin{aligned} \pi A_n = & + \frac{1}{n} \sum S_i^{(0)} \cos nx_i - \frac{1}{n^2} \sum S_i^{(1)} \sin nx_i - \\ & - \frac{1}{n^3} \sum S_i^{(2)} \cos nx_i + \frac{1}{n^4} \sum S_i^{(3)} \sin nx_i + \frac{1}{n^5} \sum S_i^{(4)} \cos nx_i - \dots \end{aligned} \quad (9.23)$$

\* ERNEST ABASOHN (1897–1942) a fost profesor de matematici și subdirector al politehnicii din București.



$$\begin{aligned} \pi B_n = & -\frac{1}{n} \sum S_i^{(0)} \sin nx_i - \frac{1}{n^2} \sum S_i^{(1)} \cos nx_i + \\ & + \frac{1}{n^3} \sum S_i^{(2)} \sin nx_i + \frac{1}{n^4} \sum S_i^{(3)} \cos nx_i - \dots \end{aligned} \quad (9.24)$$

$$2\pi C_0 = \sum \left( -\frac{1}{1!} x_i S_i^{(0)} + \frac{1}{2!} x_i^2 S_i^{(1)} - \frac{1}{3!} x_i^3 S_i^{(2)} + \dots \right) \quad (9.25)$$

în care termenul general

$$\sum S_i^{(p)} \frac{\sin}{\cos} nx_i$$

trebuie înțeles în sensul că pentru toate punctele de abscisă  $x_i$  în care funcția prezintă salturi de ordinul  $p$  ale derivatelor de ordinul  $(p)$ , se va face produsul  $S_i^{(p)} \sin nx_i$  (sau  $S_i^{(p)} \cos nx_i$ ) și se vor aduna rezultatele.

Pentru originea unde de analizat  $x_i = 0$ , ca și pentru extremitatea ei, adică pentru  $x_i = 2\pi$ , se consideră că valoarea funcției din *stînga* originii, precum și valoarea funcției din *dreapta* punctului de abscisă  $x_i = 2\pi$ , sînt nule.

**OBSERVAȚII:** 1. Dacă se notează

$$-P_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} S_i^{(0)} - \frac{1}{n^3} S_i^{(2)} + \frac{1}{n^5} S_i^{(4)} - \dots$$

$$Q_n\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^2} S_i^{(1)} + \frac{1}{n^4} S_i^{(3)} - \frac{1}{n^6} S_i^{(5)} + \dots$$

atunci dezvoltarea în serie FOURIER a unei funcții periodice nesinusoidale oarecare  $f(x)$  este dată de relația

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_i \left[ P_n\left(\frac{1}{n}\right) \sin nx_i + Q_n\left(\frac{1}{n}\right) \cos nx_i \right] \right\} \cos nx + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_i \left[ -P_n\left(\frac{1}{n}\right) \cos nx_i + Q_n\left(\frac{1}{n}\right) \sin nx_i \right] \right\} \sin nx. \end{aligned}$$

2. Metoda discontinuităților sau a incidentelor geometrice prezintă oarecare avantaje asupra metodei integrării, în special atunci cînd unda de analizat este poligonală, ceea ce în general însă nu prea este cazul.

Dacă unda periodică nesinusoidală intră în cazul general, dificultatea formării termenilor armonicilor constă în imposibilitatea simțurilor noastre de a aprecia derivatele de ordin superior lui 2, deci și salturile lor.

Ori de cîte ori diagrama obținută experimental permite înscrierea unui contur poligonal, aplicarea metodei de mai sus este simplă; în cazul arcelor de parabolă de ordinul 2, problema se complică imediat deoarece, în afară de determinarea ordonatelor și a coeficienților unghiulari, va trebui să se determine și razele de curbura.



Pentru exemplificare, fie de descompus în serie armonică unda din figura 9.17. Se vor aplica relațiile (9.23), (9.24) și (9.25), care se vor limita numai la primii doi termeni, funcția neavînd decît salturi de ordinate și de tangente și anume, numai în punctele de la extremitățile perioadei, adică de abscise  $x = 0$  și  $x = 2\pi$ . Pentru coeficientul  $A_n$  calculul se aranjează după cum urmează :

Salturi de ordinate

$$S^{(0)} = F^{(0)}(x_i) - f^{(0)}(x_i)$$

În punctul  $A'$  de abscisă  
 $x = 0$

$$S_0^{(0)} = 100 - 0 = 100$$

$$S_0^{(0)} \cos nx_0 = 100 \cos n \cdot 0 = 100$$

În punctul  $B'$  de abscisă  
 $x = 2\pi$

$$S_{2\pi}^{(0)} = 0 - 50 = -50$$

$$S_{2\pi}^{(0)} \cos nx_{2\pi} = -50 \cos n \cdot 2\pi = -50$$

$$\frac{1}{n} \sum S_i^{(0)} \cos nx_i = \frac{100 - 50}{n} = \frac{50}{n}$$

Salturi de tangentă

$$S^{(1)} = F^{(1)}(x_i) - f^{(1)}(x_i).$$

Se observă că aceste salturi se multiplică cu  $\sin nx_i$ , care este nul pentru cele două extremități ale intervalului, astfel că aceste salturi nu dau valori în calculul coeficientului respectiv. Rezultă dar

$$A_n = \frac{50}{\pi n}.$$

Pentru coeficientul  $B_n$  se obține zero pentru primul termen al relației (9.24), deoarece sinusul este nul pentru cele două abscise; al doilea termen este format din salturile de tangentă; se găsește :

$$\text{În punctul } A' \text{ de abscisă } x = 0 \quad S_0^{(1)} = \left( -\frac{AA''}{A''B} \right) - 0 = -\frac{50}{2\pi} = -\frac{25}{\pi}$$

$$S_0^{(1)} \cos nx_0 = -\frac{25}{\pi} \pi \cos n0 = -\frac{25}{\pi}$$

$$\text{În punctul } B' \text{ de abscisă } x = 2\pi \quad S_{2\pi}^{(1)} = 0 - \left( -\frac{25}{\pi} \right) = \frac{25}{\pi}$$

$$S_{2\pi}^{(1)} \cos nx_{2\pi} = \frac{25}{\pi} \cos n \cdot 2\pi = \frac{25}{\pi}$$

$$\frac{1}{n^2} \sum S_i^{(1)} \cos nx_i = \frac{1}{n^2} \left( -\frac{25}{\pi} + \frac{25}{\pi} \right) = 0$$

și deci  $B_n = 0$ .



Termenul constant  $C_0$  se determină calculând primii doi termeni ai relației (9.25). Contribuția punctului de abscisă  $x_i = 0$  este nulă, astfel încât rămâne

$$2\pi C_0 = -2\pi S_{\frac{\pi}{2}}^{(0)} + \frac{1}{2}(2\pi)^2 S_{\frac{\pi}{2}}^{(1)}$$

Ținând seama de valorile găsite mai sus, rezultă

$$2\pi C_0 = 50 \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \frac{25}{\pi} 4\pi^2 = 2\pi \cdot 75$$

și deci

$$C_0 = 75.$$

S-au obținut astfel aceleași valori ca și în cazul integrării.

**9.2.3.3. Formule generale pentru calculul simultan al coeficienților lui FOURIER.** Pentru determinarea coeficienților lui FOURIER ai seriei reprezentând o undă periodică nesinusoidală se procedează calculându-se acești coeficienți pentru termenii în sinus și cosinus, utilizându-se relațiile (9.17) sau (9.18) și apoi, folosind relațiile (9.6), se calculează coeficientul termenului general și defazajul său.

Prof. ALEXANDRU TH. POPESCU\* a dat o relație cu ajutorul căreia se calculează simultan acești doi parametri.

Fie unda periodică nesinusoidală oarecare  $f(x)$  care urmează a fi descompusă într-o serie armonică. Coeficienții lui FOURIER sînt dați de relațiile (9.18)

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad \text{și} \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx;$$

acești coeficienți, fiind valorile unor integrale definite, sînt niște factori numerici care se exprimă numai în funcție de  $n$  și de  $\pi$ . Valoarea lor nu se schimbă dacă variabila independentă  $x$  este înlocuită cu un alt simbol  $\gamma$ ,  $\sigma$ ,  $z$ ,...etc. Se va putea scrie deci

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \sin n\gamma \, d\gamma \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \cos n\gamma \, d\gamma \end{aligned} \tag{9.26}$$

cu condiția ca  $f(\gamma)$  să fie exact aceeași funcție în  $\gamma$  ca și  $f(x)$  funcția în  $x$ .

Expresia armoniciei de ordinul  $n$  este

$$\begin{aligned} C_n \sin(nx - \varphi_n) &= A_n \sin nx + B_n \cos nx = \\ &= \frac{1}{\pi} \sin nx \int_0^{2\pi} f(\gamma) \sin n\gamma \, d\gamma + \frac{1}{\pi} \cos nx \int_0^{2\pi} f(\gamma) \cos n\gamma \, d\gamma. \end{aligned}$$

\* Profesor emerit ALEX. TH. POPESCU a fost șeful Catedrei de aparate și măsuri electrice la Institutul politehnic din București.



În această expresie factorii  $\sin nx$  și  $\cos nx$  sînt independenți de variabila  $\gamma$ , în raport cu care se efectuează cele două integrale; ei pot fi trecuți sub semnul integralei. Efectuînd această trecere, dînd factor comun pe  $f(\gamma)d\gamma$  și restrîngînd suma produselor de funcții trigonometrice ce rezultă, se obține :

$$C_n \sin (nx - \varphi_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma) \cos n(x - \gamma) d\gamma. \quad (9.27)$$

În cazul metodei discontinuităților, formula generală se obține introducînd în expresia armoniciei de ordinul  $n$

$$C_n \sin (nx - \varphi_n) = A_n \sin nx + B_n \cos nx$$

valorile coeficienților  $A_n$  și  $B_n$  sînt date de relațiile (9.23) și (9.24). Observînd, ca și în cazul precedent, că factorii constanți care multiplică sumele  $\sum S_i^{(p)} \sin nx_i$  și  $\sum S_i^{(p)} \cos nx_i$  pot fi introduși sub semnul sumă, se obține relația

$$\begin{aligned} \pi C_n \sin (nx - \varphi_n) = & \frac{1}{n} \sum S_i^{(0)} \sin n(x - x_i) - \frac{1}{n^2} \sum S_i^{(1)} \cos n(x - x_i) - \\ & - \frac{1}{n^3} \sum S_i^{(2)} \sin n(x - x_i) + \frac{1}{n^4} \sum S_i^{(3)} \cos n(x - x_i) + \frac{1}{n^5} \sum S_i^{(4)} \sin n(x - x_i) - \dots \end{aligned} \quad (9.28)$$

care este analoagă cu relațiile (9.23) și (9.24) care dau coeficienții  $A_n$  și  $B_n$ .

*Exemplu de aplicație :* Pentru exemplificare se vor aplica formulele generale (9.27) și (9.28) unei din figura 9.17.

*Prin metoda integrării :* Se introduce în relația (9.27)

$$f(\gamma) = -\frac{25}{\pi} \gamma + 100$$

care este ecuația unei date, în care s-a luat  $\gamma$  ca variabilă independentă. Se găsește :

$$C_n \sin (nx - \varphi_n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{25}{\pi} \gamma + 100 \right) \cos n(x - \gamma) d\gamma = \frac{50}{\pi n} \sin nx$$

integrarea făcîndu-se prin părți.

*Prin metoda discontinuităților :* Din relația (9.28) se rețin numai primii doi termeni, funcția dată neavînd derivate de ordin superior.

Salturile de ordonată au fost găsite, la  $x = 0$ ,  $S_0^{(0)} = 100$  și la  $x = 2\pi$ ,  $S_{2\pi}^{(0)} = -50$ ; rezultă

$$\frac{1}{n} \sum S_i^{(0)} \sin n(x - x_i) = \frac{1}{n} [100 \sin nx - 50 \sin (nx - 2\pi)] = \frac{50}{n} \sin nx.$$



Salturile de pantă au fost găsite, la  $x = 0$ ,  $S_0^{(1)} = -\frac{25}{\pi}$  și la  $x = 2\pi$ ,  $S_{2\pi}^{(1)} = \frac{25}{\pi}$ ; rezultă

$$\frac{1}{n^2} \sum S_i^{(1)} \cos n(x - x_i) = \frac{1}{n^2} \left[ -\frac{25}{\pi} \cos nx + \frac{25}{\pi} \cos (nx - 2\pi) \right] = 0$$

și deci

$$C_n \sin (nx - \varphi_n) = \frac{50}{n\pi} \sin nx.$$

#### 9.2.4. ANALIZA ARMONICĂ A UNDELOR PERIODICE NESINUSOIDALE EXPERIMENTALE

**9.2.4.1. Generalități.** În studiul fenomenelor electrice, curbele periodice care se obțin cu ajutorul aparatelor înregistratoare (oscilografe, reografe etc.) și care reprezintă unde periodice nesinusoidale, sînt curbe periodice oarecare, a căror ecuație analitică nu se cunoaște.

De asemenea, este practic imposibil ca în aceste curbe să se poată înscrie un contur poligonal oarecare, numărul de laturi corespunzător trebuind să fie foarte mare. În consecință, metodele de analiză armonică indicate în paragrafele precedente nu se mai pot aplica.

Există numeroase metode pentru determinarea armonicilor unei unde periodice nesinusoidale experimentale, aproape toate aceste metode bazîndu-se pe calculul coeficienților lui FOURIER.

Fie o undă periodică nesinusoidală, reprezentată printr-o curbă periodică nesinusoidală, obținută pe o cale experimentală (fig. 9.19). Descompunerea în serie FOURIER a acestei curbe necesită calculul coeficienților lui FOURIER dați de relațiile (9.18). Pentru a-i putea calcula este necesar a transforma expresiile lor în sume finite; aceasta înseamnă a înlocui aria închisă de curba respectivă și axa absciselor printr-o sumă de arii de dreptunghiuri elementare înscrise în această arie.



Fig. 9.19. Curbă periodică nesinusoidală

Pentru aceasta se împarte perioada într-un număr  $p$  de părți egale  $2p^*$ . Fiecare din aceste diviziuni este deci egală cu

$$\alpha = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}.$$

\* Împărțirea perioadei se poate face într-un număr oarecare de părți egale, par sau impar. Alegerea unui număr par prezintă oarecare avantaje în sistematizarea și simplificarea calculelor.



Se dau ordonatele la curba corespunzătoare acestor diviziuni și se numerează, atribuindu-se primei ordonate cifra 0; ultima ordonată va avea indicele  $2p$ . Este evident că

$$Y_0 = Y_{2p}.$$

Elementului diferențial din integrală îi va corespunde baza dreptunghiurilor elementare în care a fost descompusă curba, adică tocmai mărimea  $\alpha$  a diviziunilor efectuate. Rezultă deci că

$$dx \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{p}.$$

Elementului  $y dx$  din integrală îi corespunde aria dreptunghiului elementar de ordonată  $Y_k$  și baza

$$y dx \rightarrow Y_k \frac{\pi}{p};$$

abscisa corespunzătoare ordonatei  $Y_k$  fiind

$$x_k = k \frac{\pi}{p}$$

integrala care dă coeficientul lui FOURIER se transformă în o serie de  $2p$  termeni de forma

$$Y_k \frac{\pi}{p} \sin nk \frac{\pi}{p}, \text{ respectiv } Y_k \frac{\pi}{p} \cos nk \frac{\pi}{p},$$

astfel, încât coeficienții lui FOURIER vor fi dați de relațiile

$$A_n = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{2p} Y_k \sin nk \frac{\pi}{p} \text{ și } B_n = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{2p} Y_k \cos nk \frac{\pi}{p} \quad (9.29)$$

Valoarea termenului constant se deduce în același mod, găsindu-se

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2\pi} Y_k \frac{\pi}{p} = \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{2p} Y_k. \quad (9.30)$$

Aceste formule sînt suficiente pentru a calcula coeficienții dezvoltării în serie FOURIER. Înainte însă de a vedea modul cum se pot calcula aceste expresii în mod practic, trebuie spus că metoda comportă o eroare sistematică datorită faptului că se calculează numai un număr finit de armonici și anume numai *armonicile de ordin 1 pînă la p*, adică

$$A_1, A_2, \dots, A_p \\ B_1, B_2, \dots, B_p.$$

Într-adevăr, metoda fiind bazată pe transformarea integralelor (9.18) care dau coeficienții seriei FOURIER în sume finite, comportă de la început, o



eroare, datorită acestei aproximații. De asemenea, prin faptul că în calculul coeficienților prin această metodă nu s-a ținut seama decât de cele  $2p$  ordonate, s-a comis o nouă eroare prin neglijarea celorlalte puncte ale curbei : este ca și cum curba n-ar conține decât punctele corespunzătoare acestor ordonate. De aici, rezultă că toate undele periodice nesinusoidale reprezentate prin curbe care trec prin aceste puncte vor avea aceeași descompunere în armonici. În aceste condiții, unda

$$y = \frac{B_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \sin kx + B_k \cos kx)$$

care s-a obținut prin descompunerea unei date cu ajutorul acestei metode nu va reprezenta în general unda reală

$$y = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

în care  $a_k$  și  $b_k$  sînt coeficienții lui FOURIER.

Metoda comportă deci o eroare sistematică, care se calculează exprimîndu-se valoarea coeficienților determinați cu relația (9.29) în funcție de coeficienții reali ai seriei FOURIER\*.

Calculul coeficienților dezvoltării în serie a unei curbe reprezentative a unei nesinusoidale respective, obținută pe cale experimentală, utilizînd relațiile (9.29) și (9.30) este destul de laborios. Pentru simplificarea calculului s-au preconizat numeroase metode analitice sau grafice. Dintre primele cităm metoda ordonatelor echidistante a lui THOMPSON-RUNGE\*\*, care conduce la o mecanizare destul de interesantă.

Metodele grafice și în special calculatoarele electronice dau însă tehnicianului metode mult mai expeditiv pentru obținerea analizei armonice, a unei unde nesinusoidale. De aceea, îndrumăm cititorul care dorește să cunoască și să aplice metodele analitice la literatura de specialitate, — în cele ce urmează se va indica numai o metodă grafică și două metode experimentale simple.

**9.2.4.2. Metoda grafică ROTH.** Metoda grafică ROTH dă posibilitatea calculării pe cale grafică a coeficienților dați de relațiile (9.29) și (9.30).

Înmulțind expresia lui  $A_n$  cu  $j$  și adunînd-o cu expresia lui  $B_n$ , se obține

$$\underline{C}_n = B_n + jA_n = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{2p} Y_k \left( \cos nk \frac{\pi}{p} + j \cos nk \frac{\pi}{p} \right) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{2p} Y_k \left| \frac{n \cdot k \pi}{p} \right| \quad (9.31)$$

Din această relație rezultă că se poate determina armonica de ordinul  $n$ , dacă se face suma geometrică a diverselor ordonate, luate fiecare cu argumentul  $nk \frac{\pi}{p}$  față de originea de fază și împărțind rezultatul prin  $p$  ( $2p$  fiind numărul de părți în care s-a divizat perioada).

Procedeu este următorul : se împarte perioada într-un număr  $2p$  părți egale ; prin fiecare diviziune se duc verticale determinîndu-se ordonatele res-

\* Vezi [229]

\*\* Vezi [10] pag. 216



pective  $Y_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 2p-1$ ). Se duc apoi  $2p$  raze făcînd între ele unghiuri egale cu  $\alpha = \frac{\pi}{p}$ , pe fiecare din aceste raze așezîndu-se ordonatele corespunzătoare  $Y_k$  (fig. 9.20); dacă una din aceste ordonate are o valoare negativă, ea se așază pe prelungirea în sens invers a razei respective așa cum se procedează la construcția polară a unei funcții periodice oarecare\*. Pentru a găsi amplitudinea armonicilor de ordinul  $n$ , se construiește un poligon funicular format din diversele ordonate așezate pe raze, făcînd între ele unghiuri egale cu  $k \frac{\pi}{p}$ ,

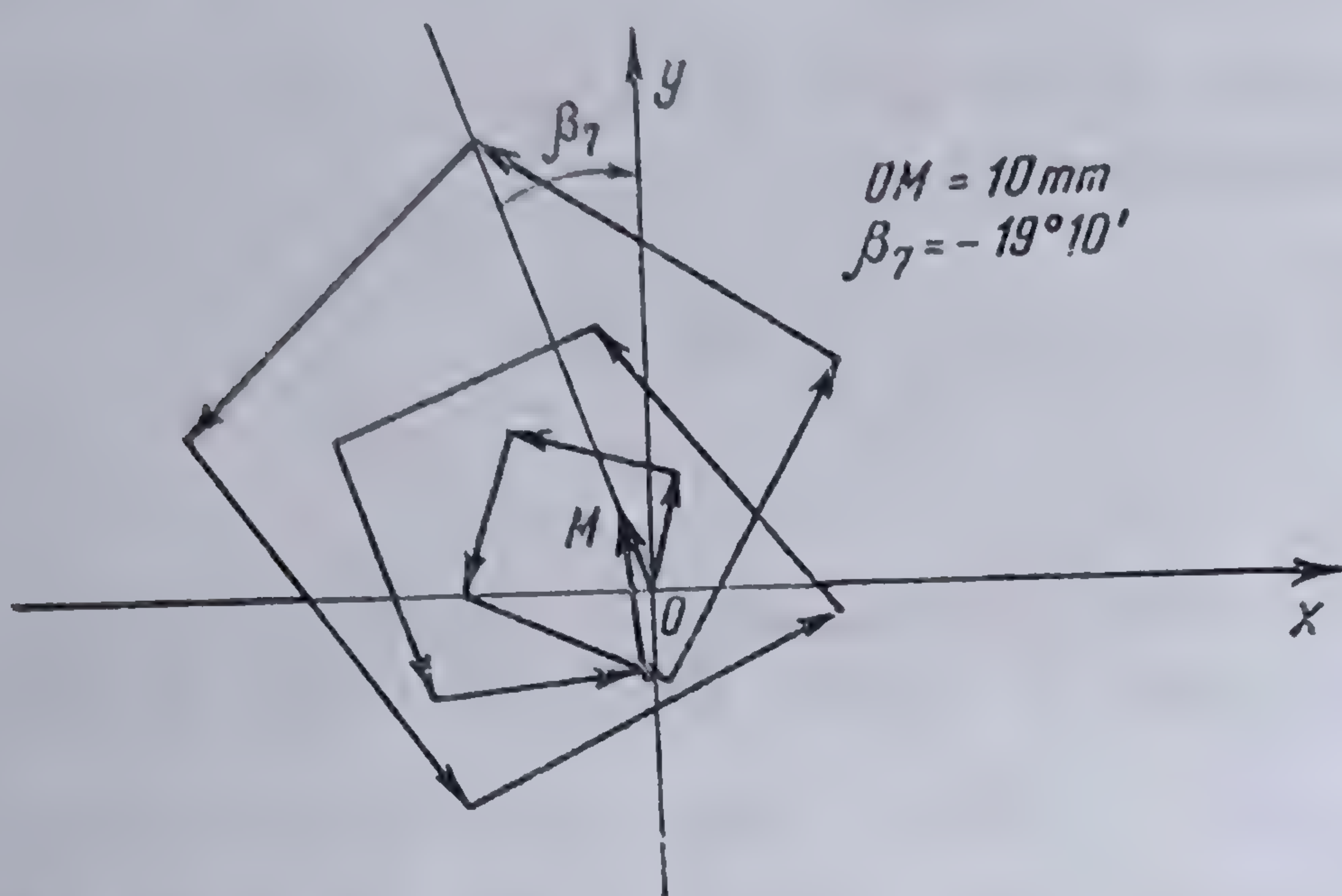


Fig. 9.20. Calculul coeficienților armonicilor prin metoda grafică ROTH (armonica de ordinul 7).

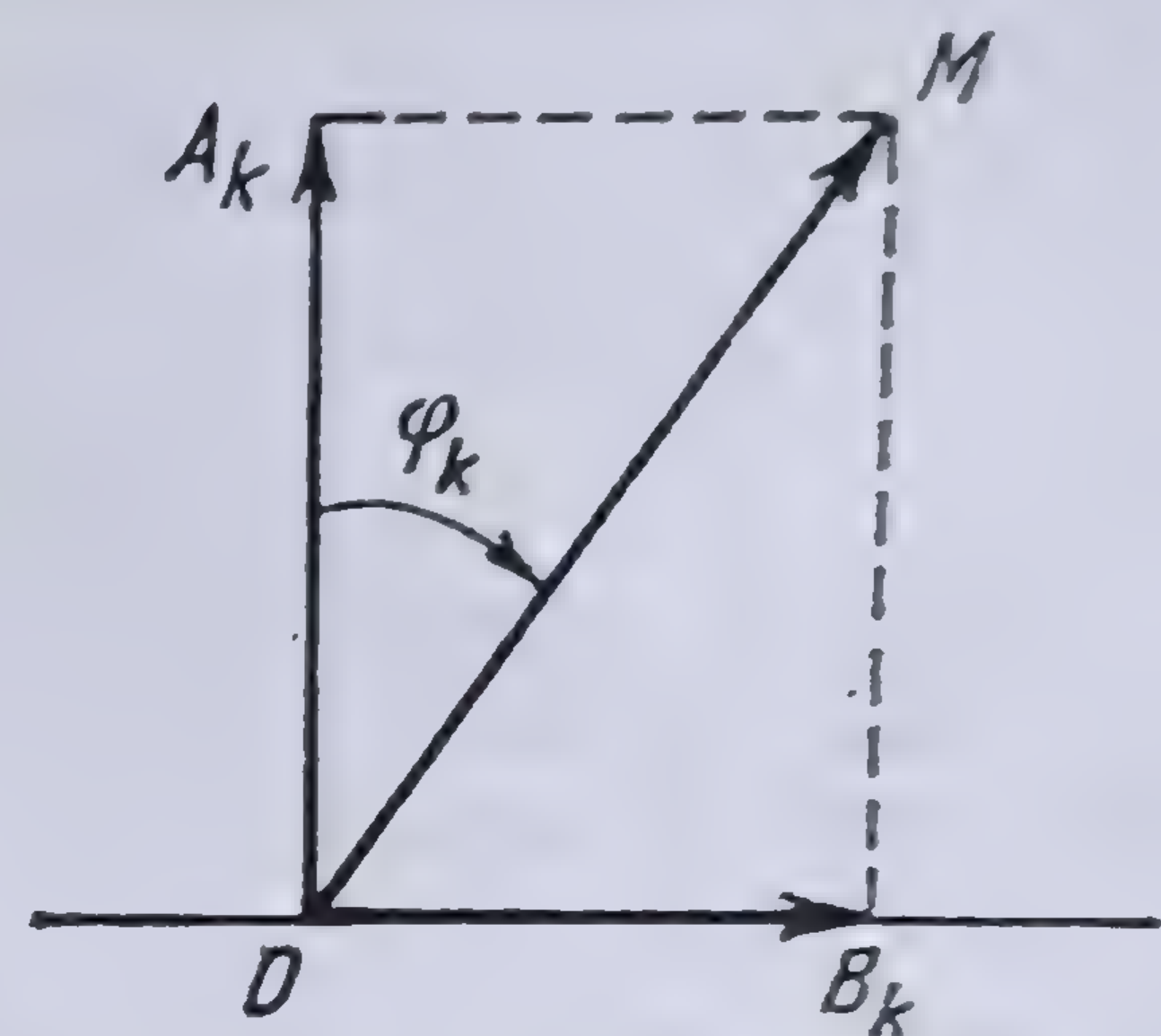


Fig. 9.21. Determinarea unghiului de fază al armonicilor.

începînd de la raza orizontală, care se ia ca origine de fază și pe care este așezată ordonata  $Y_0$ ; astfel ordonatele  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2p-1}$  se așază pe razele făcînd unghiurile  $n \frac{\pi}{p}, 2 n \frac{\pi}{p}, \dots, (2p-1)n \frac{\pi}{p}$ . Suma geometrică a acestor vectori, împărțită cu  $p$ , dă — la scara corespunzătoare — amplitudinea armonicilor de ordinul  $n$  căutată.

Defazajul corespunzător acestei armonici, unghiul  $\varphi_n$ , este egal cu unghiul pe care îl face rezultanta obținută cu o axă dusă prin origine și perpendiculară pe originea de fază. Într-adevăr, se poate considera armonica respectivă reprezentată într-un sistem de referință care se rotește cu viteza  $k\omega$  și atunci raza vectorie va descrie un cerc avînd diametrul principal egal cu valoarea amplitudinii maxime a acestei armonici și înclinat cu unghiul  $\varphi_k$  față de ordonată (vezi 9.2.1.3).

Aceasta se poate arăta și direct, fără a recurge la reprezentarea polară și cinematică a armonicilor respective. Într-adevăr, o armonică este în fază atunci cînd îi lipsește termenul în cosinus, adică  $B_k = 0$ . În acest caz  $\varphi_k = 0$ . Relația (9.31), aplicată armonicilor de ordinul  $k$ , dă

$$\operatorname{tg} \varphi'_k = \frac{A_k}{B_k}.$$

Pentru a avea îndeplinită condiția de mai sus (fig. 9.21) trebuie luat drept fază unghiul complementar. Rezultă

$$\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi_k) = \operatorname{ctg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k}$$

\* Vezi 9.2.1.3.



de unde

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{B_k}{\Delta_k}.$$

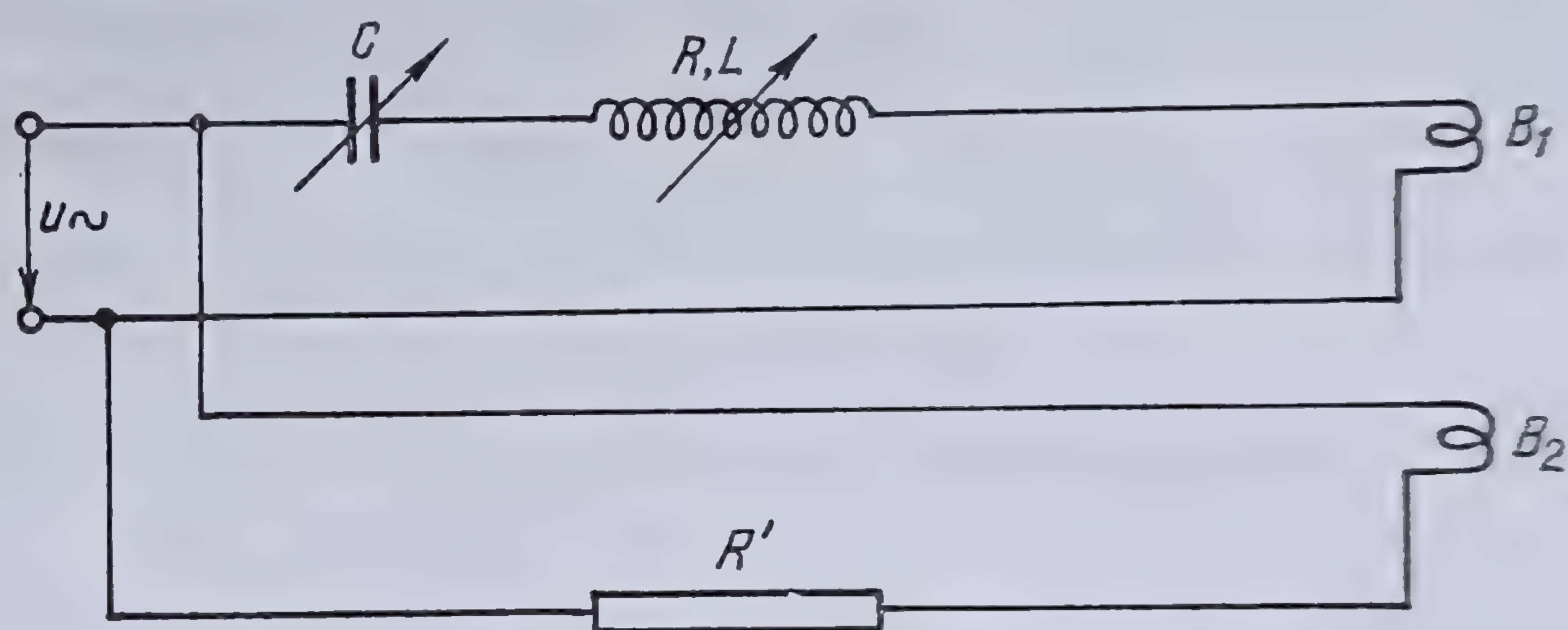
**9.2.4.3. Metode experimentale pentru determinarea armonicilor unei funcții periodice nesinusoidale.** În afară de metodele grafice, electricienii au căutat și metode experimentale cu ajutorul cărora să poată determina cât mai repede și, mai ales, cât mai precis diversele armonici ale unei funcții periodice nesinusoidale. În acest caz analiza armonică se face chiar în momentul studierii fenomenului.

Există o serie întreagă de asemenea metode; în cele ce urmează se vor examina pe scurt numai două din ele și anume:

- Metoda prin rezonanță electrică.
- Metoda cu electrodinamometrul.

S-au lăsat de o parte metodele folosind calculatoarele electronice, acestea ieșind din cadrul acestei lucrări.

Fig. 9.22. Montaj pentru efectuarea analizei armonice prin metoda rezonanței electrice.



a) *Metoda prin rezonanță electrică.* Oscilograful permite să se separe direct armonicile unei curbe de tensiune prin folosirea rezonanței electrice.

Fie de analizat o tensiune  $u$  nesinusoidală. Se realizează un circuit format dintr-o bobină fără fier, reglabilă în mod continuu și un condensator, de asemenea reglabil, însă în mod discontinuu; acest circuit se leagă în serie cu una din buclele de tensiune ale unui oscilograf și la bornele sale se aplică tensiunea  $u$  (fig. 9.22); o a doua buclă a oscilografului este legată direct, prin intermediul unei rezistențe, la tensiunea  $u$ . Acest al doilea circuit servește de martor pentru toate determinările ulterioare.

După cum se va vedea mai târziu \*, curentul în circuitul analizat (circuitul legat la bucla  $B_1$ ) este dat de relația

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left( Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega} \right)^2}} \sin(k\omega t - \varphi_k - \psi_k) \quad (9.32)$$

în care

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}}{R}.$$

\* Vezi 9.3.3.1.



Într-un asemenea circuit, curentul dat de armonica  $U_k$  este cu atât mai mare, cu cât armonica este mai importantă și numitorul expresiei (9.32) este mai mic. Numitorul acestei expresii este minim pentru

$$L C k^2 \omega^2 = 1,$$

adică atunci când este realizată rezonanța armonicii de ordinul  $k$ ; în aceste condiții, curentul dat de această armonică este maxim și egal cu raportul dintre forța electromotoare  $U_k$  a armonicii corespunzătoare prin rezistența ohmică a circuitului; dacă aceasta este mică, valoarea acestui curent poate deveni foarte mare.

Variind inductanța se poate face să intre în rezonanță diversele armonici, de la cea fundamentală pînă la aceea de ordinul cel mai înalt și, cum în acest caz pentru o armonică oarecare curentul este egal cu raportul  $U_k/R$  și este în fază cu tensiunea corespunzătoare ( $\operatorname{tg} \varphi_k = 0$ ), va fi suficient să se măsoare pe ecranul oscilografului amplitudinea armonicii și să se înmulțească această valoare cu rezistența circuitului pentru a avea valoarea tensiunii căutate  $U_k$ ; defazajul respectiv se va determina tot pe acest ecran în raport cu curba de analizat — curba martoră — înregistrată pe ecran de a doua buclă a oscilografului. Etalonarea oscilografului se poate face și cu ajutorul unei unde perfect sinusoidale de amplitudine cunoscută.

În practică, însă, lucrurile nu se petrec în acest mod. Într-adevăr, curentul obținut nu este tocmai pur și este în general influențat fie de armonica fundamentală, fie de armonicile vecine. Armonica fundamentală fiind întotdeauna mai mare decât celelalte, va persista mereu; ea se va manifesta prin ondulații cu maxime și minime ale armonicii în rezonanță. Aceasta nu împiedică însă la determinarea elementelor armonicilor respective.

În cazul când există două armonici vecine, destul de importante, nu se poate obține niciodată rezonanța perfectă a uneia din cele două armonici, una fiind influențată de cealaltă.

Pentru a se obține rezultate cât mai precise, trebuie folosite condensatoare de calitate foarte bună, avînd o capacitate suficientă și pierderi în dielectric foarte mici, precum și inductanțe astfel constituite, încît să nu apară pierderi prin curenți FOUCAULT.

b) *Metoda cu electrodinamometrul.* Metoda constă în a folosi un electrodinamometru la care unul din circuite este legat la tensiunea (sau străbătut de curentul) de analizat; al doilea circuit este străbătut de un curent perfect sinusoidal cu frecvență variabilă.

Se cunoaște ecuația de funcționare a unui aparat electrodinamic

$$\alpha = \frac{\varphi'(\alpha)}{\lambda} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt \quad (9.33)$$

în care  $i_1$  și  $i_2$  sînt curenții care străbat cele două bobine.

Fie deci

$$i_1 = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t - \beta_k)$$



curentul nesinusoidal care urmează a fi analizat și

$$i_2 = \sqrt{2} I \sin (n\omega t - \varphi)$$

curentul auxiliar, care a fost luat cu frecvență corespunzătoare armonicii  $n$ , a cărei amplitudine este căutată.

Introducând aceste valori în expresia (9.33), se obține

$$\alpha = K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 I I_k}{T} \int_0^T \sin (k\omega t - \beta_k) \sin (n\omega t - \varphi) dt$$

în care s-a notat

$$K = \frac{\varphi'(\alpha)}{\lambda}.$$

Transformând produsul de sinusuri de sub semnul integralei într-o diferență de cosinusuri, se obține

$$\alpha = K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I I_k}{T} \int_0^T \{ \cos [(k-n)\omega t - (\beta_k - \varphi)] - \cos [(k+n)\omega t - (\beta_k + \varphi)] \} dt.$$

În această expresie toate integralele din membrul al doilea sînt nule afară de aceea pentru care

$$k - n = 0.$$

Se obține astfel,

$$\alpha = K I I_n \cos (\beta_n - \varphi). \quad (9.34)$$

Pentru a determina defazajul armonicii căutate, se variază defazajul  $\varphi$  al undei analizatoare pînă cînd deviația electrodinamometrului este maximă. În acest caz din relația (9.34) se va deduce valoarea efectivă a armonicii corespunzătoare

$$I = \frac{\alpha}{K I_n}$$

iar defazajul dat undei analizatoare determină defazajul armonicii respective față de originea de fază aleasă.

## 9.2.5. DEZVOLTAREA ÎN SERIE FOURIER A FUNCȚIILOR NEPERIODICE

9.2.5.1. Generalități. În unele aplicații din electrotehnică, forțele electromotoare aplicate circuitelor nu sînt periodice; de asemenea ele pot să nu fie continue și să aibă orice formă. Rezolvarea problemelor respective poate fi făcută mai ușor dacă circuitul corespunzător ar putea fi studiat, ca



funcționând sub acțiunea unei forțe electromotoare periodice oarecare. Se pune deci problema dezvoltării în serie trigonometrică a unei funcții  $f(x)$  definită numai în intervalul \*  $[0, 2\pi]$ . În acest caz nu se mai poate vorbi de periodicitatea lui  $f(x)$ , ceea ce însă nu poate împiedica efectuarea dezvoltării în serie FOURIER a funcției respective, întrucât relațiile (9.18) se aplică numai la intervalul  $[0, 2\pi]$ . Pe de altă parte, dacă se prelungește funcția  $f(x)$ , în mod periodic în dreapta și în stânga intervalului  $[0, 2\pi]$ , pe întreaga axă a absciselor, se obține o funcție periodică ce coincide cu funcția dată în intervalul corespunzător și care are aceeași dezvoltare în serie FOURIER ca și funcția  $f(x)$  dată; în consecință este același lucru să se vorbească de seria FOURIER a lui  $f(x)$ , definită în intervalul  $[0, 2\pi]$  sau de seria FOURIER a funcției obținută din  $f(x)$  prin prelungirea ei periodică pe axa  $Ox$ .

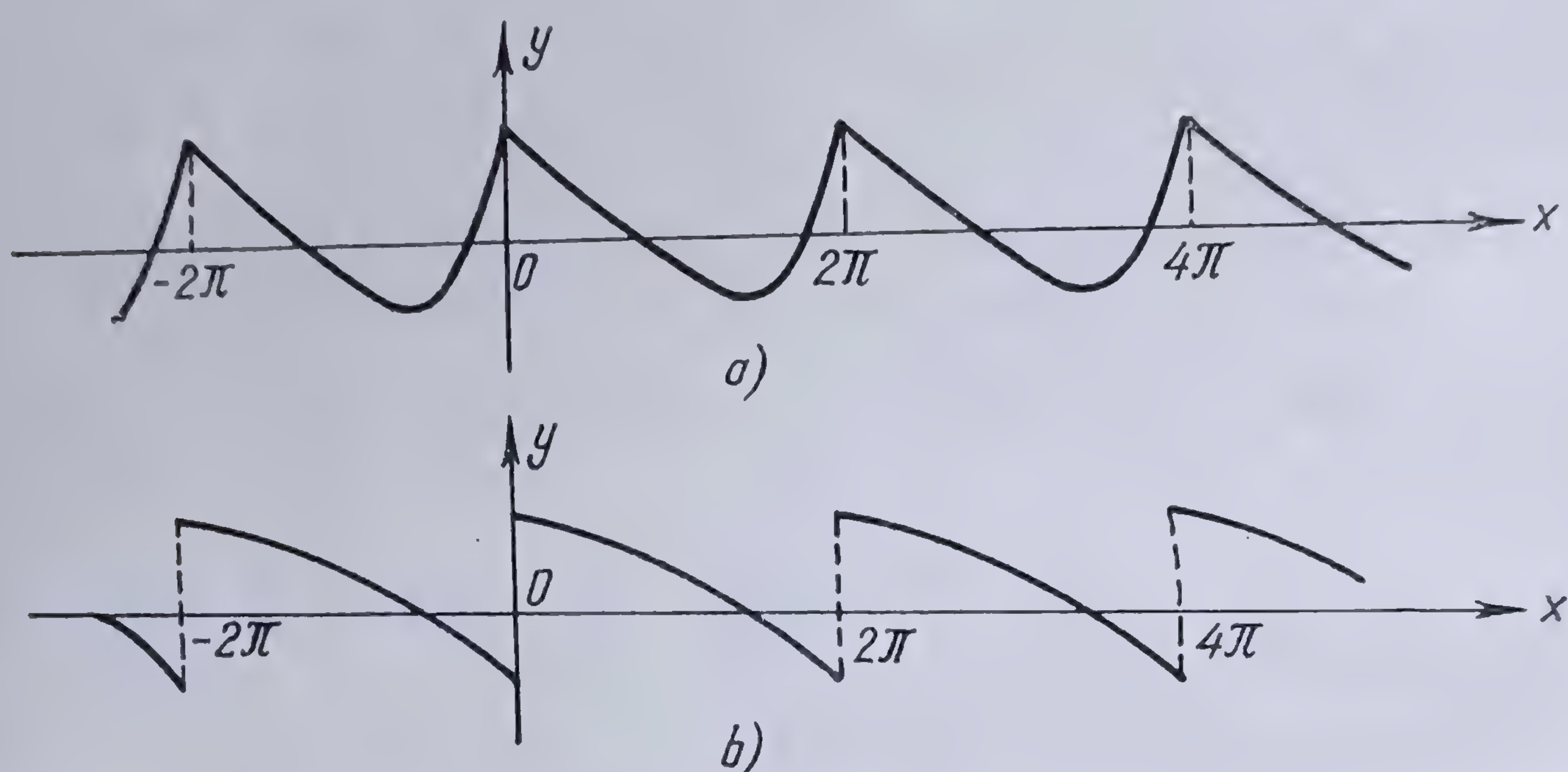


Fig. 9.23. Funcții neperiodice.

În legătură cu această prelungire periodică a lui  $f(x)$  trebuie observat următoarele :

Dacă  $f(0) = f(2\pi)$ , efectuarea prelungirii periodice se face fără nici o dificultate (fig. 9.23, a);  $f(x)$  fiind continuu în intervalul  $[0, 2\pi]$ , și prelungirea ei va fi continuă pe toată axa  $Ox$ .

Dacă însă  $f(0) \neq f(2\pi)$ , prelungirea periodică nu se poate realiza întrucât, datorită periodicității,  $f(0)$  trebuie să coincidă cu  $f(2\pi)$ , ceea ce nu se întâmplă în acest caz (fig. 9.23, b). Se poate evita această dificultate în două moduri :

a) se renunță la valorile lui  $f(x)$  în punctele  $x = 0$  și  $x = 2\pi$ , formând astfel o funcție care nu este definită pentru aceste valori și prelungind periodic pe  $f(x)$  fără a defini această prelungire în punctele  $x$  de forma  $2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ );

b) se schimbă în mod convenabil, dacă e posibil, valorile lui  $f(0)$  și  $f(2\pi)$ , prin schimbarea originii astfel, încât ele să fie egale.

Trebuie observat că valoarea coeficienților seriei FOURIER rămâne aceeași în ambele cazuri, aceasta deoarece schimbarea valorilor unei funcții într-un număr finit de puncte, sau chiar inexistența ei în aceste puncte, nu poate influența asupra valorii unei integrale definite a ei și în particular asupra

\* Se poate lua intervalul oricum, spre exemplu în originea în mijlocul său  $[-\pi, \pi]$ .



valorii integralelor (9.18) care dau coeficienții seriei FOURIER\*. În consecință, fie că se modifică sau nu funcția  $f(x)$  în modul arătat mai sus, seria FOURIER corespunzătoare rămâne neschimbată.

Trebuie observat de asemenea că dacă  $f(0) \neq f(2\pi)$  și dacă  $f(x)$  este continuă în intervalul  $[0, 2\pi]$ , prelungirea periodică a lui  $f(x)$  pe întreaga axă  $Ox$  va avea discontinuități în punctele de abscisă  $2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Cele arătate mai sus sînt aplicabile oricărei funcții  $f(x)$  definită într-un interval  $[a, a + 2\pi]$ ,  $a$  fiind oarecare.

**9.2.5.2. Limitele la dreapta și la stînga ale unei funcții, într-un punct. Puncte de discontinuitate de prima speță. Notînd**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0) \quad (x < x_0)$$

și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0 + 0) \quad (x > x_0)$$

dacă aceste limite există și sînt finite, prima dintre aceste limite se numește *limita la stînga* a lui  $f(x)$  în punctul  $x_0$ , iar a doua — *limita la dreapta* a lui  $f(x)$  în punctul  $x_0$ .

În caz de continuitate

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0).$$

În cazul cînd punctul  $x_0$  este un punct de discontinuitate, dacă cele două limite există, punctul  $x_0$  se numește un *punct de discontinuitate de prima speță* al funcției  $f(x)$ ; în cazul cînd *cel puțin una* din limite *nu există*, punctul respectiv se numește *punct de discontinuitate de a doua speță*.

Pentru un punct de discontinuitate de primă speță, mărimea

$$\delta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

se numește *saltul* funcției  $f(x)$  în punctul  $x_0$ .

**9.2.5.3. Funcții netede și funcții netede pe porțiuni.** O funcție  $f(x)$  se zice că este *netedă* în intervalul  $[a, b]$  dacă în acest interval ea admite o derivată continuă; aceasta înseamnă că, în acest interval parcurgînd curba, coeficientul unghiular al tangentei geometrice la curbă variază *continuu* fără salturi (fig. 9.24, a).

O funcție  $f(x)$  se zice că este *netedă pe porțiuni* în intervalul  $[a, b]$  dacă acest interval poate fi descompus într-un număr finit de intervale parțiale astfel ca în fiecare din ele  $f(x)$  să fie o funcție netedă (fig. 9.24, b). Funcțiile netede pot fi astfel considerate ca un caz particular al acestora.

O funcție  $f(x)$  discontinuă poate fi considerată netedă pe porțiuni în intervalul  $[a, b]$  dacă:

— are un număr finit de discontinuități de prima speță în intervalul considerat;

\* Vezi [279] pag. 23.



— funcția este continuă în fiecare din intervalele parțiale  $[c, d]$  în care punctele de discontinuitate împart intervalul  $[a, b]$  (fig. 9.24, c).

Orice funcție netedă pe porțiuni este mărginită și are o derivată mărginită în întreg intervalul, cu excepția punctelor unghiulare și a celor de discontinuitate — unde funcția nu există; funcția corespunzătoare nu are decât discontinuități de prima speță.

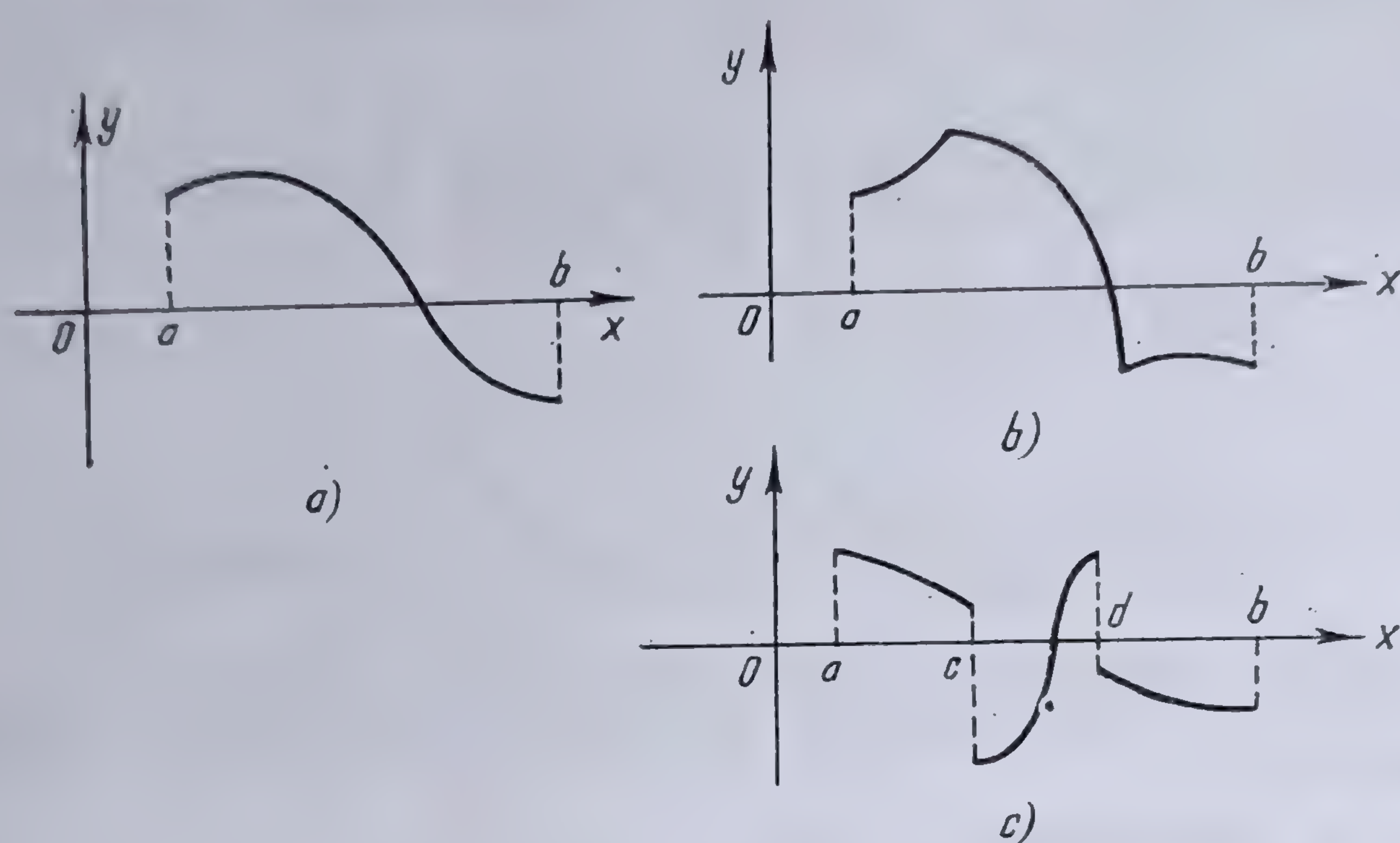


Fig. 9.24. Funcții netede (a) și funcții netede pe porțiuni (b).

9.2.5.4. Un criteriu de convergență pentru seriile FOURIER\*. Fără a da demonstrația corespunzătoare, se enunță în cele ce urmează un criteriu de convergență pentru seriile FOURIER ale unei funcții  $f(x)$  oarecare.

Seria FOURIER a unei funcții  $f(x)$ , de perioadă  $2\pi$ , netedă pe porțiuni (continuă sau discontinuă), este convergentă pentru toate valorile lui  $x$  și suma ei este egală cu  $f(x)$  în orice punct de continuitate și cu

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

în fiecare punct de discontinuitate. Dacă  $f(x)$  este continuă peste tot, atunci seria este absolut și uniform convergentă.

#### 9.2.6. SERIILE FOURIER CU TERMENI COMPLECȘI

9.2.6.1. Transformarea seriilor FOURIER obișnuite în serii cu termeni complecși. Fie o funcție periodică oarecare  $f(x)$ , de perioadă  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , a cărei dezvoltare în serie FOURIER este de forma (9.16)

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t). \quad (9.35)$$

\* Vezi [279] pag. 26



Aplicând identitățile lui EULER

$$\sin k\omega t = \frac{1}{2j}(\varepsilon^{jk\omega t} - \varepsilon^{-jk\omega t}) \quad \text{și} \quad \cos k\omega t = \frac{1}{2}(\varepsilon^{jk\omega t} + \varepsilon^{-jk\omega t})$$

termenul general al seriei FOURIER se poate scrie

$$A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t = C_k \varepsilon^{jk\omega t} + C_k \varepsilon^{-jk\omega t}$$

în care s-a notat

$$\underline{C}_k = \frac{1}{2}(B_k - jA_k) \quad \text{și} \quad \underline{C}_{-k} = \frac{1}{2}(B_k + jA_k) = \underline{C}_k^* \quad (9.36)$$

numerele  $\underline{C}_k$  și  $\underline{C}_{-k} = \underline{C}_k^*$  fiind complex conjugate.

Cu aceste elemente seria FOURIER (9.35) se poate scrie

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{C}_k \varepsilon^{jk\omega t} + \underline{C}_{-k} \varepsilon^{-jk\omega t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \varepsilon^{jk\omega t}. \quad (9.37)$$

Expresia (9.37) reprezintă dezvoltarea în serie FOURIER cu termeni complecși a funcției periodice oarecare  $f(t)$ .

**9.2.6.2. Calculul coeficienților seriei FOURIER cu termeni complecși.** Determinarea coeficienților  $\underline{C}_k$  ai seriei (9.37) se face procedînd ca și în cazul determinării coeficienților seriei FOURIER cu termeni reali, aplicînd metoda integrării.\*

Fie de determinat coeficientul  $\underline{C}_k$  al termenului  $\varepsilon^{jk\omega t}$  al seriei respective. Înmulțind ambii membri ai relației (9.27) cu  $\varepsilon^{jn\omega t}$ , unde  $n$  este un număr întreg oarecare pozitiv, negativ sau nul, și luînd valoarea medie pe un interval de timp cuprins între timpurile  $T_0$  și  $T_0 + T$ , unde  $T$  este perioada funcției  $f(t)$ , se obține:

$$\frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) \varepsilon^{jn\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \varepsilon^{j\omega(k+n)t} dt.$$

Schimbînd ordinea de sumare în membrul al doilea al relației de mai sus și efectuînd integrala respectivă, se obține

$$\frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} \underline{C}_k \varepsilon^{j\omega(k+n)t} dt = \frac{\underline{C}_k \varepsilon^{j\omega(k+n)T_0}}{j\omega(k+n)T} [\varepsilon^{j\omega(k+n)T} - 1]. \quad (9.38)$$

Pentru  $k+n = N \neq 0$ , exponențiala din paranteza dreaptă se poate scrie

$$\varepsilon^{j\omega NT} = \varepsilon^{j2\pi N} = \cos 2\pi N + j \sin 2\pi N = 1$$

și integrala (9.38) este nulă;

\* Vezi 9.2.3.1.



pentru  $k + n = N = 0$ , paranteza expresiei (9.38) este de asemenea nulă, dar și numitorul acestei expresii este nul, astfel că integrala (9.38) capătă forma nedeterminată  $\frac{0}{0}$ . Ridicând această nedeterminare prin aplicarea regulii lui L'HOPITAL, se obține

$$\lim_{N \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega NT_0}}{j\omega NT} (e^{j2\pi N} - 1) = 1$$

și deci, din relația (9.38), rezultă

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad (9.39)$$

expresie cu ajutorul căreia se poate calcula valoarea coeficienților seriei FOURIER cu termeni complecși; această relație este analoagă cu relațiile (9.17) cu care se determină coeficienții seriei FOURIER cu termeni reali. Dealtfel aceștia pot fi deduși din relația (9.39). Într-adevăr, ținând seama de relațiile (9.20) și de relația lui EULER

$$e^{-jk\omega t} = \cos k\omega t - j \sin k\omega t$$

și identificând părțile reale și cele complexe, se obțin tocmai relațiile (9.17).

**9.2.6.3. Valoarea medie a produsului a două serii FOURIER cu termeni complecși.** Fie  $f_1(t)$  și  $f_2(t)$  două funcții de forma (9.37); să calculăm valoarea medie, în timpul unei perioade, a produsului acestor două funcții

$$M = \frac{1}{T} \int_0^T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega t} \right] \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \underline{D}_l e^{jl\omega t} \right] dt.$$

Efectuând produsul din membrul al doilea al acestei relații și schimbând ordinea de sumare, se obține

$$M = \sum_{\substack{k=-\infty \\ l=-\infty}}^{\infty} \underline{C}_k \underline{D}_l \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k+l)\omega t} dt. \quad (9.40)$$

Efectuând integrala, se găsește

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(k+l)\omega t} dt = \frac{1}{j(k+l)\omega T} \left[ e^{j(k+l)\omega T} - 1 \right];$$

pentru  $k + l = N \neq 0$  se poate scrie

$$e^{j(k+l)\omega T} = e^{j2\pi N} = \cos 2\pi N + j \sin 2\pi N = 1$$



și integrala este nulă; pentru  $k + l = N = 0$  paranteza este tot nulă dar, de data aceasta, și numitorul expresiei respective e nul. Ridicând nedeterminarea cu ajutorul teoremei lui L'HOPITAL se găsește

$$I = 1$$

și deci relația (9.40) devine

$$M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \underline{D}_{-k}. \quad (9.41)$$

**9.2.6.4. Spectre de frecvență.** În anumite probleme tehnice, interesează numai amplitudinea unora din armonicele superioare în vederea eliminării unora din ele, fie în vederea combaterii lor; de asemenea defazajul diverselor armonici nu interesează, deși acesta este foarte important, întrucât de el depinde forma undei nesinusoidale respective.

Reprezentând pe un grafic în abscisă valorile diverselor frecvențe, sau ordinul diverselor armonici, și în dreptul acestora un segment de dreaptă a cărui lungime este proporțională cu amplitudinile armonicilor corespunzătoare, se obține o diagramă care se numește *spectrul de frecvențe* al undei respective (fig. 9.25).

În consecință, un spectru de frecvențe poate da imaginea unei unde nesinusoidale însă, dintr-un spectru de frecvență nu poate fi reconstituită unda nesinusoidală respectivă decât numai dacă se cunosc defazajele diverselor armonici.

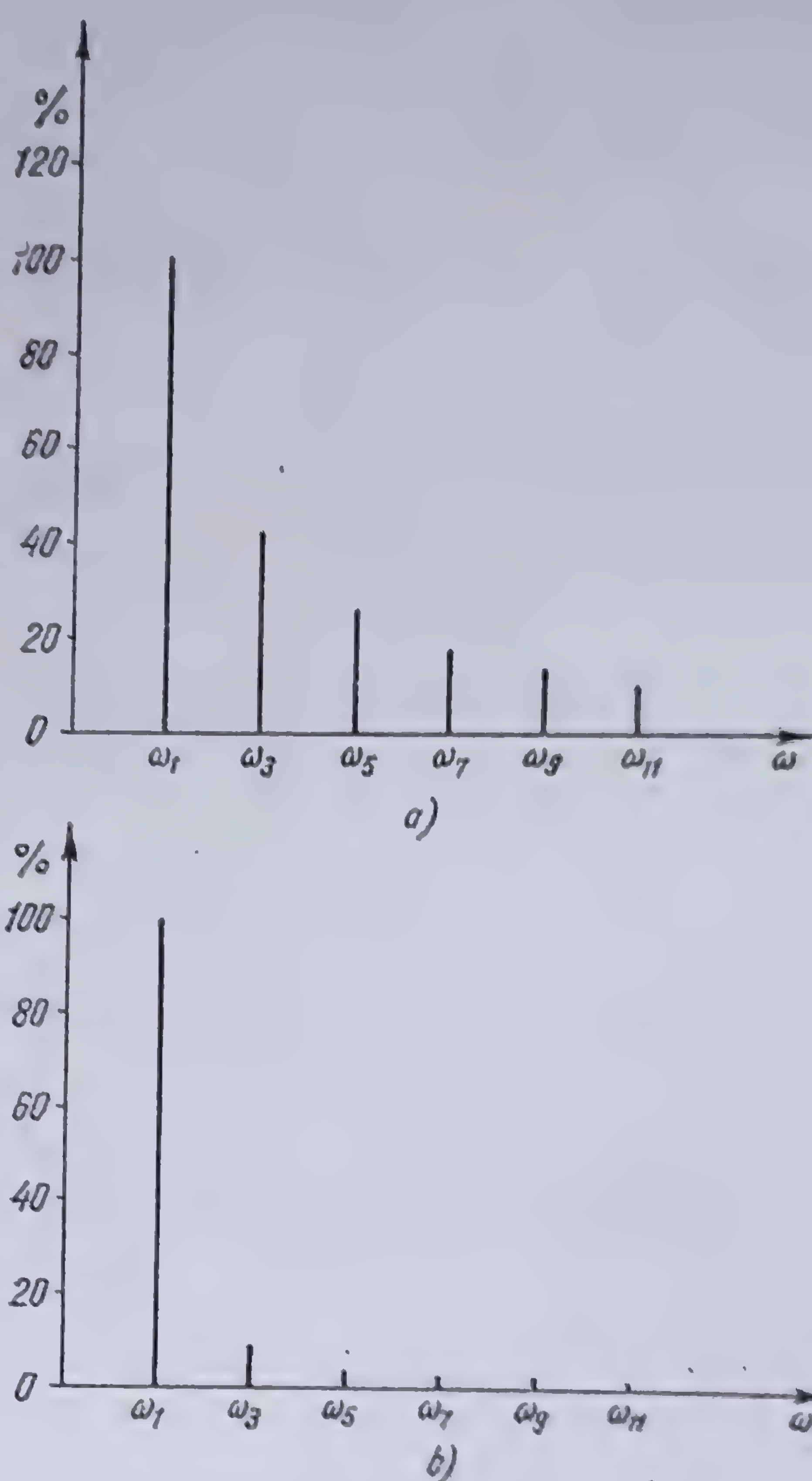


Fig. 9.25. Spectre de frecvență.

## 9.2.7. INTEGRALA FOURIER

**9.2.7.1. Integrala FOURIER în termeni reali.** Fie o funcție  $f(t)$  definită într-un interval oarecare  $T$ . După cum s-a văzut\*, această funcție poate fi reprezentată, în intervalul considerat, printr-o serie FOURIER. Ne propunem să găsim o reprezentare analoagă pentru o asemenea funcție definită însă pentru toate valorile variabilei  $t$  în intervalul  $[-\infty, +\infty]$ . Acesta este cazul, spre exemplu, al unei funcții  $f(t)$  diferită de zero în intervalul  $T$  și nulă pentru toate valorile lui  $t$  în afara acestui interval. O asemenea funcție o putem obține din seria FOURIER a funcției  $f(t)$  dacă facem ca perioada  $T$  corespunzătoare să tindă către infinit.

\* Vezi 9.2.5.



Pentru a dezvolta în serie FOURIER funcția  $f(t)$ , să mutăm originea sistemului de axe de coordonate în mijlocul intervalului  $T$ ; în aceste condiții funcția  $f(t)$  poate fi reprezentată prin seria FOURIER dată de expresia

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_1 t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\omega_1 t \quad (9.42)$$

$$\text{în care } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}. \quad (9.43)$$

Coeficienții respectivi sînt dați de relațiile (9.17)

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t \, dt,$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t \, dt,$$

$$C_0 = \frac{1}{2} B_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \, dt.$$

Făcînd în aceste relații  $n\omega_1 = \omega$  și notînd

$$A_n = \frac{2}{T} A(\omega) \quad \text{și} \quad B_n = \frac{2}{T} B(\omega),$$

relația (9.42) devine o funcție de  $\omega$  și se poate scrie

$$f(t) = \frac{2}{T} \sum A(\omega) \sin \omega t + \frac{2}{T} \sum B(\omega) \cos \omega t \quad (\omega = \omega_1, 2\omega_1, \dots). \quad (9.44)$$

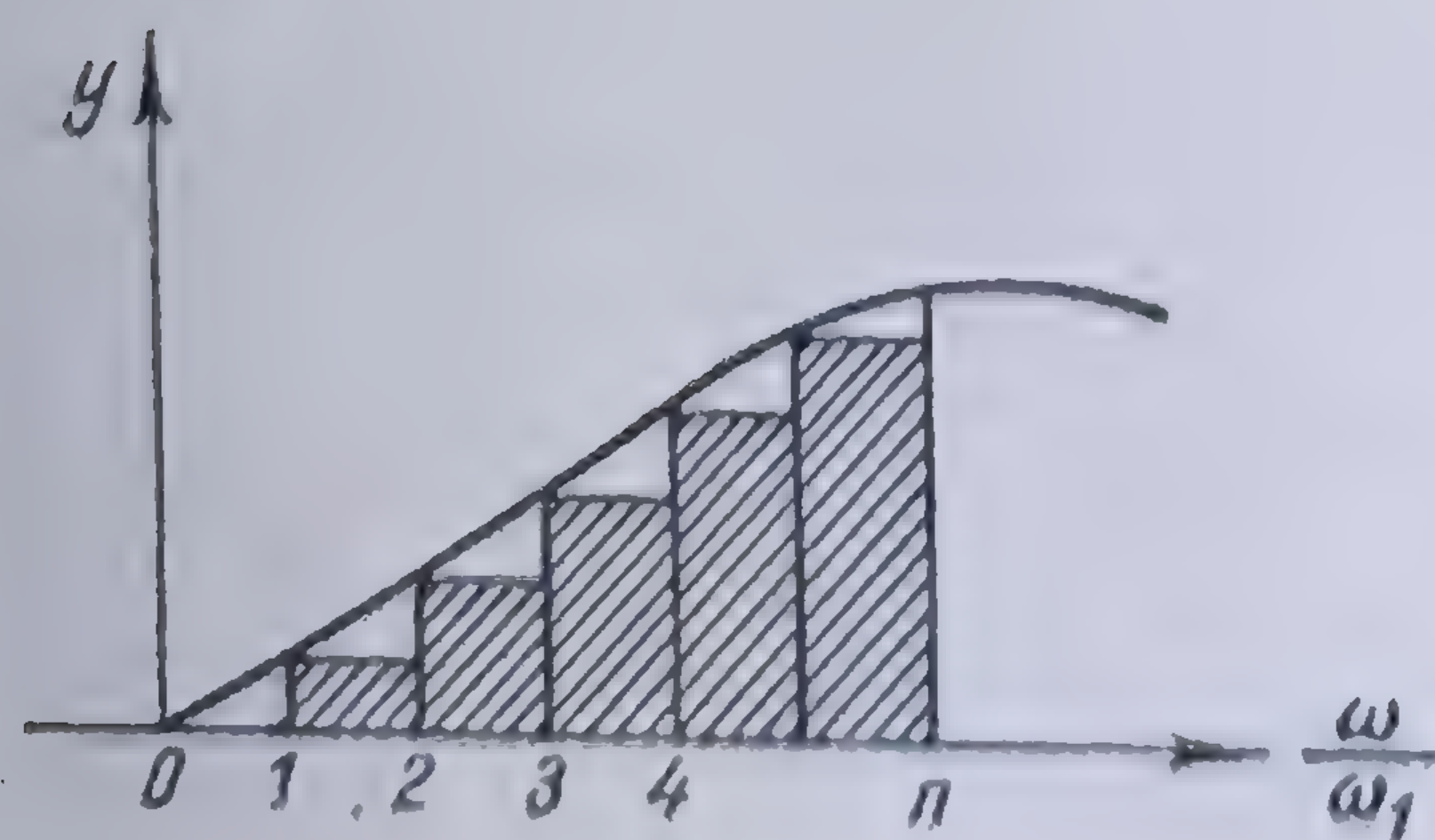


Fig. 9.26. Funcția  $A(\omega) \sin \omega t$ .

Pentru un anumit timp  $t$ , funcțiile de sub semnul sumă din relația (9.44) pot fi reprezentate în funcție de  $\omega$ ; astfel, în figura 9.26 este reprezentată funcția  $A(\omega) \sin \omega t$ , diferitele dreptunghiuri hașurate avînd înălțimea  $A(\omega) \sin \omega t$  pentru  $n\omega_1 = \omega$  și lățimea  $\omega_1$ .

Rezultă dar că suprafața hașurată are aria

$$S = \sum \omega_1 A(\omega) \sin \omega t \quad (\omega = \omega_1, 2\omega_1, \dots).$$



Făcînd pe  $T$  să crească indefinit, ceea ce face ca  $\omega_1$  să tindă către zero, suprafața hașurată tinde către suprafața cuprinsă între curbă și axa absciselor. Se obține deci

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum \omega_1 \Lambda(\omega) \sin \omega t = \int_0^{\infty} \Lambda(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (\omega = \omega_1, 2\omega_1, \dots)$$

sau ținînd seama de (9.13)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \sum \Lambda(\omega) \sin \omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Lambda(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (\omega = \omega_1, 2\omega_1, \dots).$$

În același mod se obține și

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \sum B(\omega) \cos \omega t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega$$

ținînd seama că

$$C_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0.$$

Cu acestea, funcția  $f(t)$  poate fi scrisă

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Lambda(\omega) \sin \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (9.45)$$

în care

$$\Lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (9.46)$$

și

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (9.47)$$

$\Lambda(\omega)$  și  $B(\omega)$  se numesc *funcțiile de frecvență* ale spectrului funcției  $f(t)$ . Introducînd expresiile (9.46) și (9.47), care sînt niște constante și în care, pentru oportunitate am schimbat variabila  $t$  în  $\tau$ , expresia (9.45) poate fi scrisă

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega (t - \tau) d\tau \quad (9.48)$$

care reprezintă dezvoltarea în integrală FOURIER a funcției  $f(t)$ .

Scriînd expresia (9.45) sub forma

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\Lambda(\omega) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t] d\omega$$



rezultă că  $f(t)$  poate fi considerat ca suma unui număr infinit de oscilații sinusoidale de amplitudine

$$C(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$$

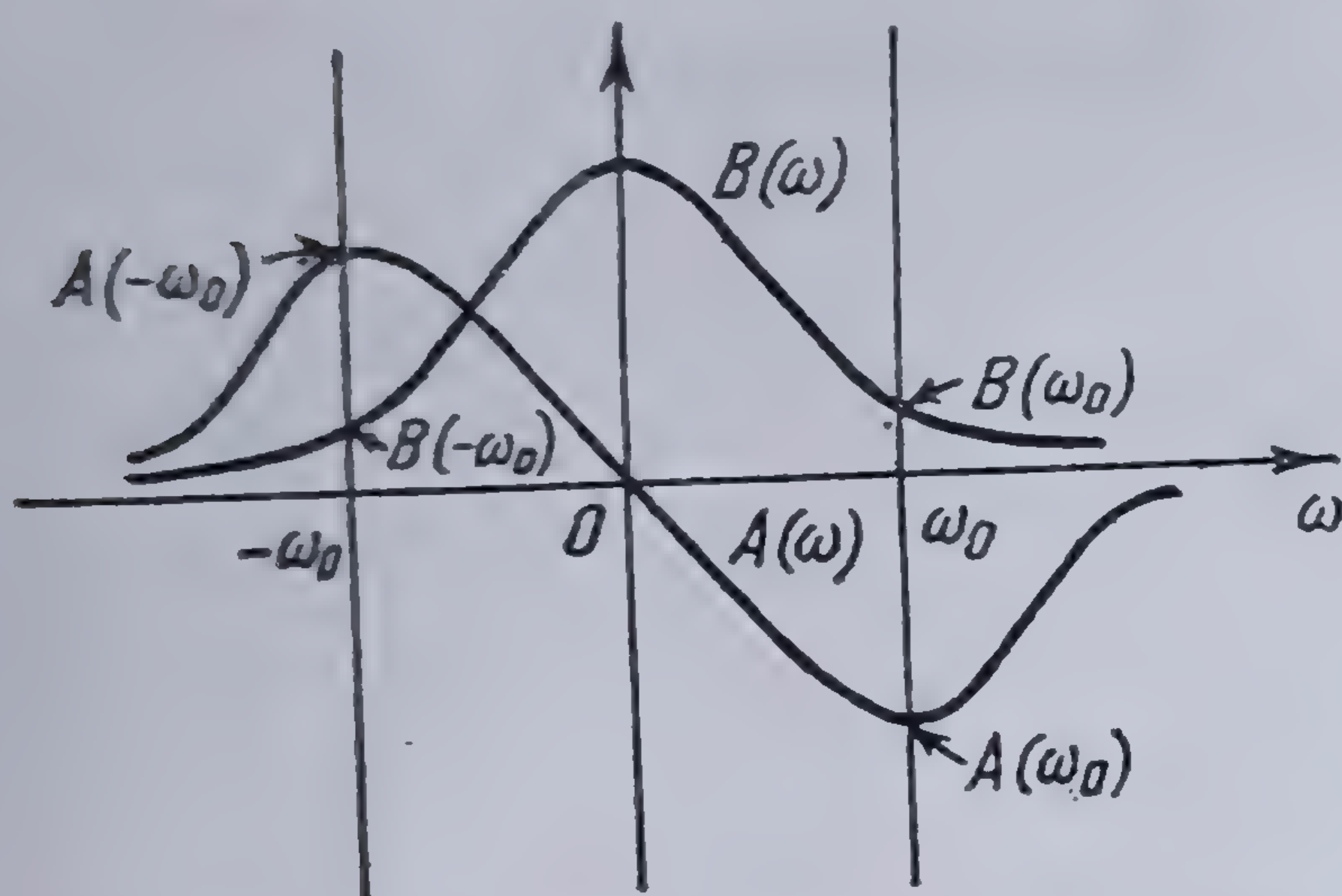
și avînd defazajul

$$\varphi = \arctg \frac{A(\omega)}{B(\omega)}$$

se poate scrie deci

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty C(\omega) \cos(\omega t - \varphi) d\omega.$$

Mărima  $C(\omega)$  se numește *densitate spectrală* sau *densitatea de amplitudine a spectrului* sau — prin analogie — *spectrul funcției  $f(t)$* .



Reluînd expresiile (9.45) și (9.46) se vede ușor că, în raport cu frecvența, funcția  $A(\omega)$  este o funcție impară pentru care

$$A(\omega) = -A(-\omega)$$

iar funcția  $B(\omega)$  este o funcție pară, pentru care (fig. 9.27)

$$B(\omega) = B(-\omega).$$

Fig. 9.27. Spectrul unei funcții pare.

**9.2.7.2. Integrala FOURIER în termeni complecși.** Să considerăm expresia (9.48) în care s-a schimbat ordinea de sumare și s-a înlocuit cosinusul respectiv prin relația lui EULER corespunzătoare; vom avea

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\infty f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^\infty f(\tau) [\varepsilon^{j\omega(t-\tau)} + \varepsilon^{-j\omega(t-\tau)}] d\tau. \end{aligned} \quad (9.49)$$

Ținînd seama că

$$\int_0^\infty \varepsilon^{-j\omega(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^0 \varepsilon^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

relația (9.49) se poate scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty f(\tau) \varepsilon^{j\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (9.50)$$

Expresia (9.50) reprezintă forma complexă a dezvoltării în integrală FOURIER a funcției  $f(t)$ .\*

\* Vezi [4] pag. 64.



Relația (9.50) poate fi pusă și sub o altă formă, utilă în aplicațiile practice : scoțind de sub a doua integrală exponențiala  $e^{j\omega t}$ , întrucât nu depinde de  $\tau$ , se obține

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

sau notînd

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (9.51)$$

rezultă

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (9.52)$$

Expresiile (9.51) și (9.52) pot fi deduse și direct, pornind de la expresia (9.37) a seriei *FOURIER* în termeni complecși. Într-adevăr, repetînd raționamentul făcut în paragraful 9.2.7.1. se obține

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_1 t}, \quad (9.53)$$

în care

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Punînd

$$k\omega_1 = \omega \quad \left( \begin{array}{l} k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \omega = \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \pm 3\omega_1, \dots \end{array} \right)$$

expresia (9.39) a coeficientului termenului general poate fi scrisă

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} C(j\omega) = \frac{\omega_1}{2\pi} C(j\omega) \quad (\omega = \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \dots).$$

Cu aceasta expresia (9.53) devine, ținînd seama că  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ,

$$f(t) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum_{\omega} \frac{\omega_1}{2\pi} C(j\omega) e^{j\omega t} \quad (\omega = \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \dots). \quad (9.54)$$

Notînd

$$G(j\omega) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} C(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} C(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau,$$

relația (9.54) poate fi scrisă

$$f(t) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum_{\omega} \omega_1 G(j\omega) e^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$



adică tocmai expresia (9.52), expresia lui  $G(j\omega)$  de mai sus fiind identică cu (9.51).

Funcția  $G(j\omega)$  dată de relația (9.51) se numește\* *spectrul funcției*  $f(t)$ ; ea fiind o mărime complexă, se poate separa în doi termeni sub forma

$$G(j\omega) = R(\omega) + j I(\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi}, \quad (9.55)$$

unde

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau; \quad I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau; \quad (9.56)$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{I(\omega)}{R(\omega)}.$$

Comparînd relațiile (9.56) cu relațiile (9.46) și (9.47) rezultă:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega); \quad R(\omega) = \frac{1}{2\pi} B(\omega).$$

Între funcțiile definite de relațiile (9.51) și (9.52) se poate observa o oarecare dualitate; într-adevăr, cunoscînd funcția  $f(t)$ , ecuația (9.51) determină funcția  $G(j\omega)$  și invers, cunoscînd funcția  $G(j\omega)$ , ecuația (9.52) determină funcția  $f(t)$ .

**9.2.7.3. Validitatea integralei FOURIER.** Pentru ca o funcție neperiodică  $f(t)$ , dată într-un interval oarecare, să poată fi dezvoltată într-o integrală FOURIER, este necesar ca funcția dată să îndeplinească următoarele condiții\*\*:

- a) în intervalul  $(-\infty, +\infty)$ , funcția  $f(t)$  are un număr finit de extreme;
- b) intervalul dat poate fi descompus într-un număr finit de intervale parțiale, în interiorul cărora  $f(t)$  trebuie să fie continuă și monotonă, adică să scadă sau să crească odată cu  $t$ ;
- c) funcția  $f(t)$  trebuie să fie absolut integrabilă în intervalul  $(-\infty, +\infty)$ , adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty; \quad (9.57)$$

d) numărul de discontinuități al funcției  $f(t)$  trebuie să fie finit în fiecare interval; în punctele de discontinuitate integrala lui FOURIER (9.48) sau (9.50) este egală cu valoarea medie definită la 9.2.5.4;

e) integrala (9.51) trebuie să fie convergentă; aceasta revine în a spune că integralele (9.46) și (9.47) sau (9.53) sînt simultan convergente, ceea ce se realizează dacă

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0. \quad (9.58)$$

\* I se atribue și celelalte denumiri date expresiei  $G(\omega)$ .

\*\* Vezi [4] pag. 70, [155] pag. 150 și [231] pag. 84.



În cazul cînd condițiile (9.57) și (9.58) nu sînt satisfăcute, integralele (9.51) și (9.52) nu mai au sens.

Prin introducerea unui parametru auxiliar — direct sau prin intermediul unei funcții auxiliare — care la sfîrșit este făcut să tindă către zero, se pot rezolva și problemele în care condițiile (9.57) și (9.58) nu sînt satisfăcute.

Pentru exemplificare, să considerăm funcția unitate a lui HEAVISIDE, definită după cum urmează\* :

$$\gamma(t) \begin{cases} = 0 & \text{pentru } t < 0, \\ = 1 & \text{pentru } t \geq 0. \end{cases}$$

Această funcție nu satisface condiția (9.58). Pentru a obține dezvoltarea ei în integrală FOURIER, să o înmulțim cu funcția auxiliară

$$F(t) = \varepsilon^{-\beta t},$$

care presupunem că este nulă pentru  $t < 0$ , avînd o valoare finită pentru  $t \geq 0$  și tinzînd către zero, cînd  $t$  tinde către infinit.

Relația (9.51) dă

$$G(j\omega) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-\beta t} \varepsilon^{-j\omega t} dt = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-\beta t} \varepsilon^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{j\omega}.$$

Introducînd această valoare în relația (9.50) se obține\*\*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} S_i(\omega t).$$

### 9.3. STUDIUL PARTICULAR AL REGIMULUI DEFORMANT

#### 9.3.1. MĂRIMILE CARACTERISTICE ALE REGIMULUI DEFORMANT

9.3.1.1. Valoare a efectivă a unei funcții periodice nesinusoidale. Fie o funcție periodică nesinusoidală, dată prin dezvoltarea ei în serie FOURIER

$$y = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \varphi_k) \quad (9.59)$$

\* Vezi 3.6.2.5.

\*\* Punînd  $\varphi(\omega) = \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{\omega} = \frac{\cos \omega t}{\omega} + j \frac{\sin \omega t}{\omega}$  rezultă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

Calculînd prima integrală prin metoda reziduurilor pe un contur în jurul originii, se găsește

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = \frac{1}{2}$$

funcția  $\frac{\cos \omega t}{\omega}$  fiind impară.

Pe de altă parte  $\omega = 0$  nu este un punct singular al funcției  $\frac{\sin \omega t}{\omega}$  și deci integrala  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$  are un sens.



în care  $Y_k$  reprezintă valoarea efectivă a armonicii de ordinul  $k$ ,  $n$  putînd fi oricît de mare voim.

Valoarea efectivă a unei funcții periodice sinusoidale este definită prin relația (4.2)

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt}.$$

Această definiție se extinde și în cazul funcțiilor periodice nesinusoidale. Ridicînd la pătrat expresia (9.59) se obține

$$\begin{aligned} \int_0^T y^2 dt &= Y_0^2 T + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T 2 Y_k^2 \sin^2 (k \omega t - \varphi_k) dt + \\ &+ \sum_{\substack{m, n=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \int_0^T 2 Y_k Y_l \sin (k \omega t - \varphi_k) \times \sin (l \omega t - \varphi_l) dt. \end{aligned}$$

Ținînd seama de identitățile

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x); \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) - \cos (x + y)],$$

prima integrală din membrul al doilea devine

$$\frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2 Y_k^2 = T \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2,$$

iar a doua este nulă.

În consecință,

$$Y = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \dots}, \quad (9.60)$$

adică valoarea efectivă a unei mărimi nesinusoidale este egală cu rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale amplitudinilor diverselor armonici.

Relația astfel stabilită este valabilă atît pentru un curent periodic nesinusoidal, cît și pentru o tensiune periodică nesinusoidală. Rezultă :

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots};$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots}.$$

În cazul cînd funcția periodică nesinusoidală prezintă anumite simetrii, calculul valorii efective poate fi făcut numai de-a lungul unei jumătăți de perioadă sau sfert de perioadă.



În cazul cînd funcția periodică nesinusoidală este redată printr-o serie FOURIER cu termeni complecși, valoarea efectivă a acestei funcții se poate obține utilizînd relația (9.41) în care se face

$$\underline{C}_k = \underline{D}_k = \underline{Y}_k \text{ respectiv } \underline{C}_{-k} = \underline{D}_{-k} = \underline{Y}_{-k}.$$

Ținînd seama de relațiile (9.36) și de expresia (9.59), se obține fără dificultate

$$M^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{Y}_k \underline{Y}_{-k} = Y_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \underline{Y}_k \underline{Y}_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^2 = Y^2,$$

adică pătratul relației (9.60) și deci al valorii efective.

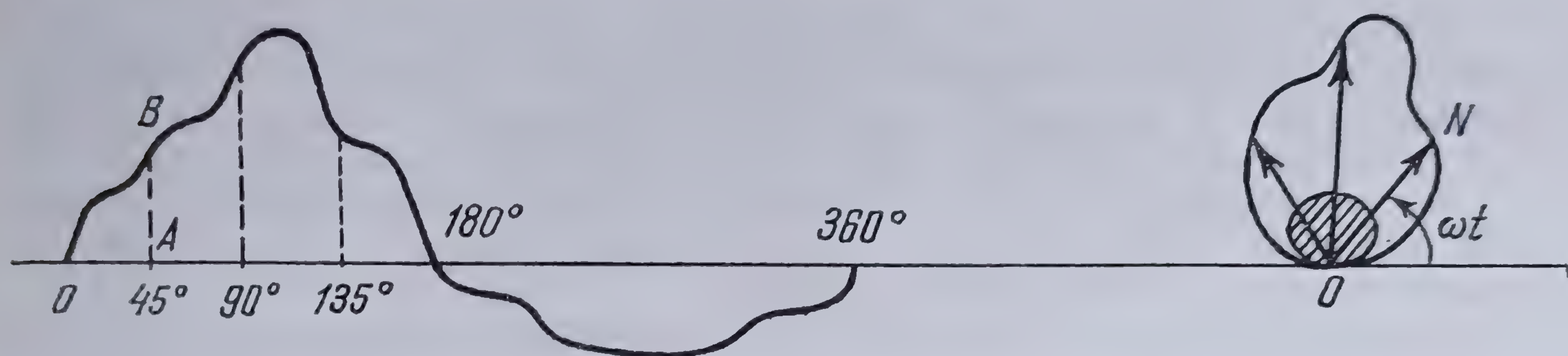


Fig. 9.28. Curba periodică nesinusoidală și curba polară corespunzătoare.

Valoarea efectivă a unei funcții periodice nesinusoidale oarecare poate fi determinată și grafic. Această metodă se aplică în special curbilor experimentale.

Fie

$$y = f(\omega t),$$

curba periodică nesinusoidală, a cărei valoare efectivă urmează a fi determinată (fig. 9.28) și căreia i se construiește curba polară luînd  $ON = AB = y$  și  $\omega t = OA$ .

Suprafața închisă de o curbă, dată în coordonate polare, se calculează cu ajutorul relației

$$S = \int_0^{2\pi} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta.$$

Cum

$$\rho = y \text{ și } \theta = \omega t, \text{ deci } d\theta = \omega dt,$$

se obține

$$S = \frac{\omega}{2} \int_0^T y^2 dt.$$

Dar, din relația (4.2) rezultă

$$\int_0^T y^2 dt = Y^2 T$$



astfel, încît

$$S = \frac{\omega}{2} Y^2 T,$$

de unde

$$Y = \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad (9.61)$$

deoarece

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Metoda este următoarea : se construiește curba polară a curbei periodice nesinusoidale a cărei valoare efectivă urmează a fi determinată și se evaluează suprafața totală  $S$  închisă de această curbă. Împărțind această suprafață prin  $\pi$  și extrăgînd rădăcina pătrată se obține valoarea efectivă căutată.

*Cazuri particulare :* a) *Curbe simetrice.* În acest caz este suficient a se evalua numai suprafața închisă de curba polară corespunzătoare unei jumătăți de perioadă luîndu-se dublul acestei suprafețe.

Dacă se notează cu  $S_1$  această suprafață, atunci rezultă

$$Y = \sqrt{\frac{2S_1}{\pi}}. \quad (9.62)$$

b) *Sinusoida.* Curba polară a unei semiperioade este un cerc descris pe amplitudinea maximă ca diametru \*.

Aplicînd relația (9.62) se găsește

$$Y = \sqrt{\frac{2S_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\pi R^2}{\pi}} = \sqrt{2 \left( \frac{\sqrt{2}Y}{2} \right)^2} = Y.$$

**9.3.1.2. Reziduul deformant.** Se numește *reziduu deformant*, sau numai *reziduu* al unei unde periodice nesinusoidale, unda care se obține din unda dată suprimîndu-se armonica fundamentală. Valoarea efectivă a acestei unde este dată de relația

$$Y_d = \sqrt{Y^2 - Y_1^2} \cong \sqrt{Y_0^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \dots + Y_n^2} \quad (9.63)$$

în care  $Y$  este valoarea efectivă a undei periodice nesinusoidale considerate,  $n$  fiind oricît de mare.

Reziduul deformant al unei unde nesinusoidale are o mare importanță în studiul regimurilor deformante, după cum se va vedea în cele ce vor urma\*\*.

Determinarea lui se poate face pe cale analitică, utilizînd relația (9.63), sau pe cale experimentală.

\* Vezi 9.2.1.3.

\*\* Vezi 9.3.1.4.



Principiul metodei \* experimentale constă în a echilibra o punte WHEATSTONE de curent alternativ pentru unda fundamentală, puntea fiind alimentată cu tensiunea nesinusoidală pentru care urmează să se determine reziduul deformant (fig. 9.29); în aceste condiții, prin aparatul de „zero”, care în acest caz este un aparat indicator cu fir cald, va trece un curent proporțional cu reziduul undei de tensiune aplicată punții.

Pentru măsurarea reziduului deformant al unei unde de curent, se trece curentul respectiv printr-o rezistență neinductivă  $R_3$ , alimentarea punții făcându-se prin aplicarea la bornele punții a tensiunii rezultante la bornele rezistenței.

Etalonarea aparatului indicator se face deschizând întrerupătorul  $I$  (fig. 9.29) și aplicând la bornele  $ab$  o tensiune cunoscută; etalonarea se face pentru diversele valori ale lui  $R_3$ .

Există și o variantă a acestei punți, în sensul că reglajul se face prin variația capacității, inductanța rămânând constantă (metoda CHIODI \*\*).

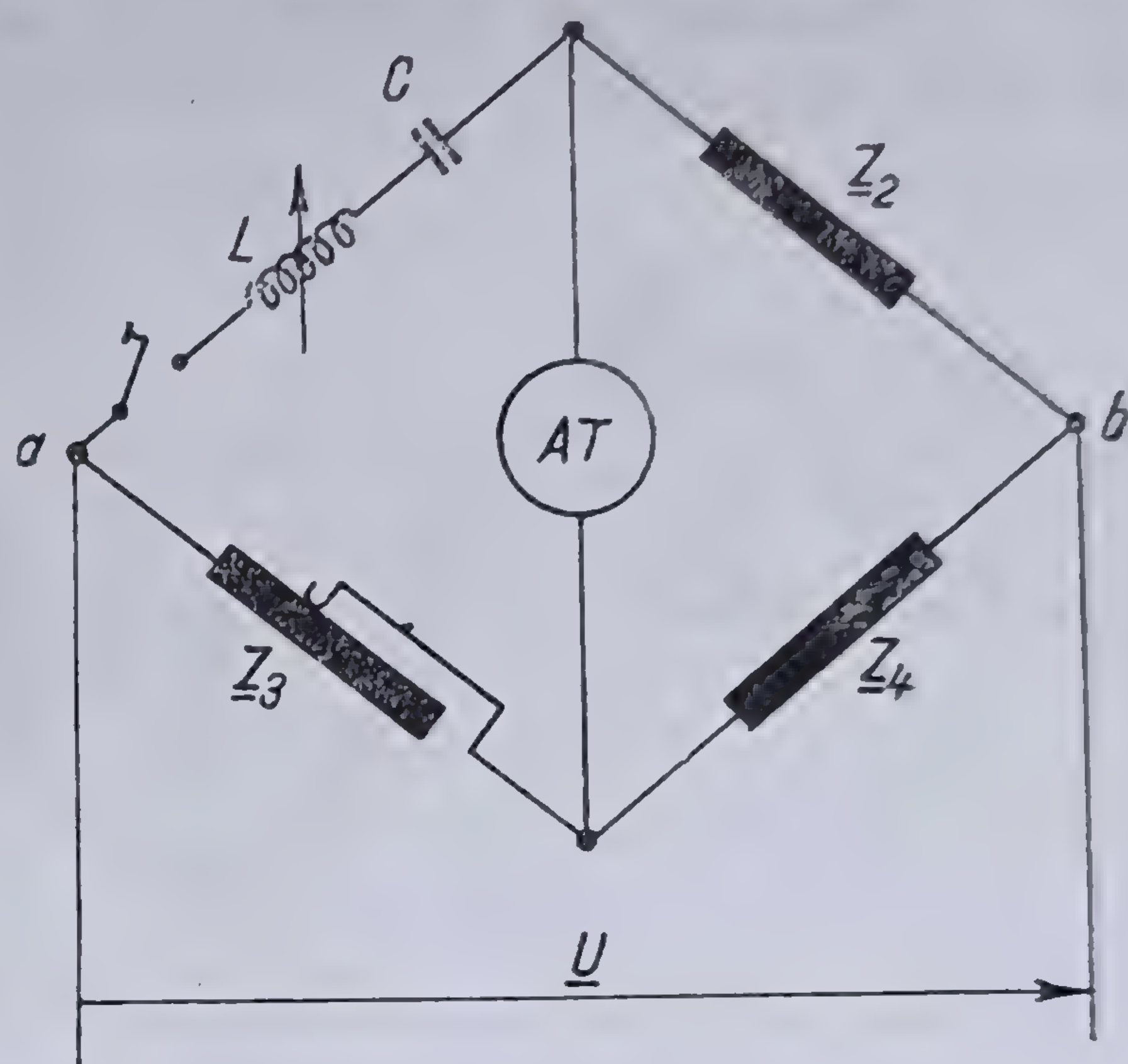


Fig. 9.29. Montaj pentru măsurarea reziduului deformant

**9.3.1.3. Sinusoida echivalentă.** Sinusoida echivalentă a unei unde periodice nesinusoidale este sinusoida care are aceeași valoare efectivă ca și unda deformantă, pulsația sa fiind presupusă aceea a undei fundamentale a undei date.

În cazul existenței simultane a undelor de curent și de tensiune, sinusoidale echivalente trebuie să îndeplinească condiția de a da în circuit aceeași putere ca și undele deformante corespunzătoare.

**9.3.1.4. Criterii de caracterizare a unei unde periodice nesinusoidale.** Caracterizarea unui regim deformant se face cu ajutorul unor criterii propuse în acest scop. Aceste criterii determină un anumit raport al undelor periodice nesinusoidale față de acelea sinusoidale, utilizându-se în acest scop mărimile caracteristice ale regimului deformant.

a) *Coeficientul de deformare a undei periodice nesinusoidale.* Prescripțiile STAS 1893—50 definesc noțiunea de coeficient de deformare a undei periodice nesinusoidale a tensiunii sau curentului prin cea mai mare valoare, exprimată în procente, a raportului

$$d = |a - g|/s$$

în care  $a$  este ordonata curbei reprezentative a undei periodice date,  $g$  ordonata curbei reprezentative a armonicii fundamentale a undei date corespunzând la aceeași abscisă ca și pentru  $a$ ,  $s$  amplitudinea curbei reprezentative a armonicii fundamentale (fig. 9.30). Pentru stabilirea armonicii fundamentale trebuie folosite cel puțin 12 puncte ale curbei. În locul armonicii fundamentale se poate întrebuița sinusoida echivalentă.

Conform acestor prescripții, forma undei poate fi considerată sinusoidală dacă  $d \leq 5\%$  pentru generatoare sincrone mai mari de 1000 kVA, sau  $d \leq 10\%$

\* Numită metoda BELFILS. Vezi [36]

\*\* Vezi [81]



pentru generatoare sincrone cuprinse între 100 și 1000 kVA; aceste cifre se referă la unda de tensiune produsă de generatoarele respective. Prescripțiile nu dau nici o limită în ceea ce privește unda de curent. Prin extindere însă se poate admite că, o undă de curent este practic sinusoidală dacă  $d \leq 5\%$ .

Aceste prevederi au la origine vechi prescripții *VDE*.

Criteriul de definire a unui regim deformant bazat pe această definire a coeficientului de deformare a unei periodice nesinusoidale, poate conduce la lucruri absurde. În afară de aceasta, el este practic inaplicabil.

Într-adevăr\*, deformarea geometrică a ordonatelor unei oscilogramme nu este capabilă să caracterizeze fenomenul fizic corespunzător. Fie unda periodică nesinusoidală

$$e = 100 \sin \omega t + 5 \sin 3 \omega t.$$

Aplicînd criteriul adoptat, coeficientul său de deformare este  $d = 5\%$ . Dacă acestei unde, i se adaugă unda

$$e' = 5 \left[ \frac{1}{3} \sin 9 \omega t + \frac{1}{5} \sin 15 \omega t + \dots + \frac{1}{2k+1} \sin 3(2k+1) \omega t \right],$$

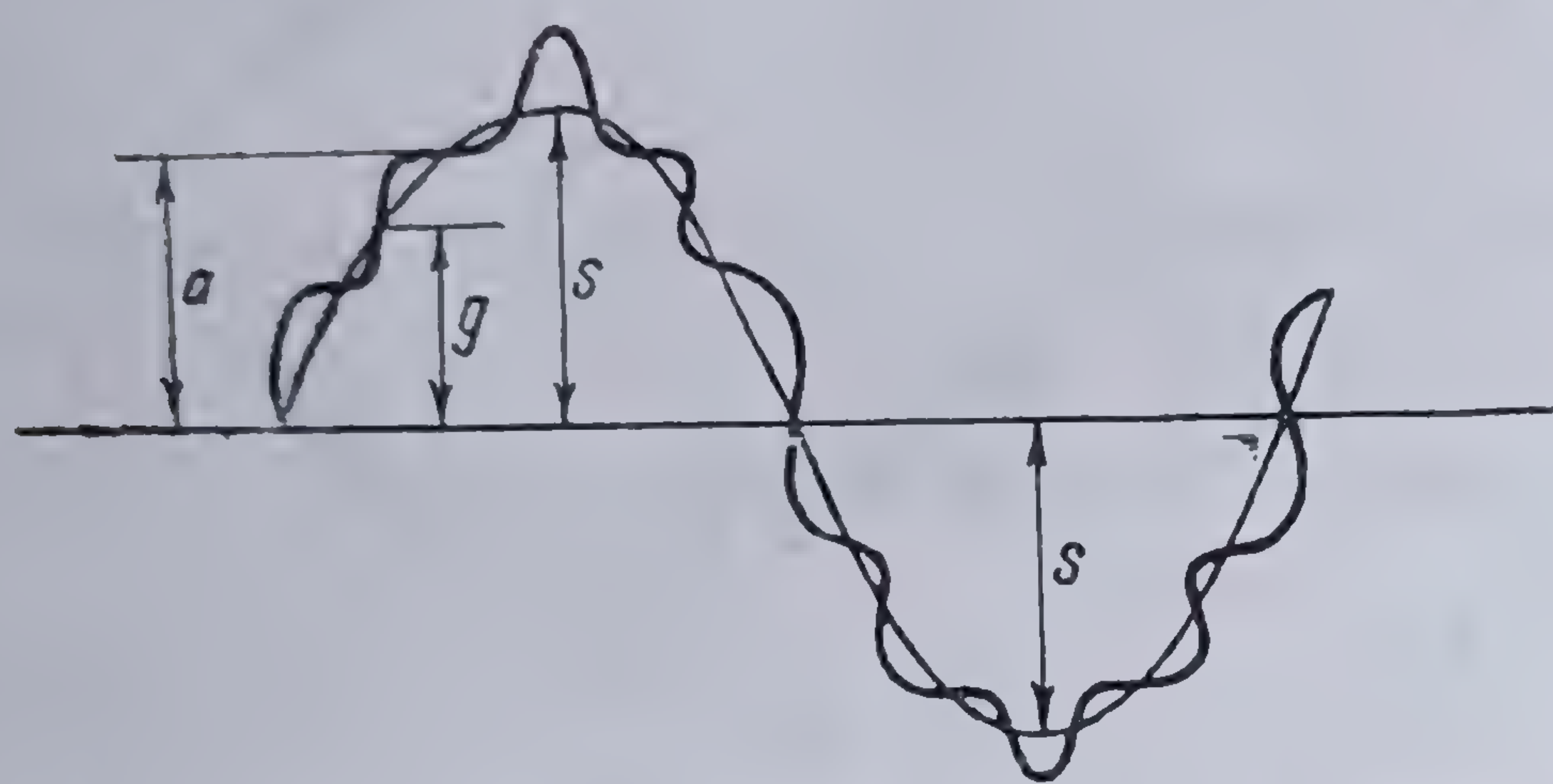


Fig. 9.30. Determinarea coeficientului de deformare.

se obține unda nesinusoidală rezultantă

$$e + e' = 100 \sin \omega t + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin 3(2k+1) \omega t,$$

a cărei sumă din membrul al doilea reprezintă o undă dreptunghiulară, avînd amplitudinea maximă  $\pm \frac{5\pi}{4}$ .

Calculînd coeficientul de deformare a unde totale  $e + e'$  se găsește  $d = 3,93\%$ , ceea ce este absurd deoarece ar însemna că o undă mai deformată este mai bună decît o undă mai puțin deformată.

Aplicînd teoria erorilor expresiei de definiție a coeficientului de deformare se găsește

$$\frac{\Delta d}{d} = \left| \frac{\Delta a + \Delta g}{a - g} \right| + \left| \frac{\Delta s}{s} \right|.$$

Ordonata maximă ce se poate obține cu un bun oscilograf modern este de ordinul 30–40 mm. Fie deci  $s = 40$  mm. Pentru a avea  $d = 5\%$ , este necesar ca  $a - g = 2$  mm. Citirile ordonatelor  $a$ ,  $g$  și  $s$  nu se pot face efectiv, decît cu o eroare absolută, fără precizare de semn, de cel puțin 0,5 mm. Rezultă dar că  $\Delta a + \Delta g \cong 1$  mm și  $\Delta s = 0,5$  mm, de unde  $\frac{\Delta d}{d} > 50\%$ . În consecință, coeficientul de deformare poate fi determinat cu o eroare care poate fi de ordinul de 50% și deci cu o valabilitate cu totul dubioasă.

\* Vezi [62]



b) *Factorul de formă*. Se numește *factor de formă* al unei unde periodice nesinusoidale raportul dintre valoarea efectivă a undei, evaluată pe jumătate de perioadă și valoarea medie a acestei unde evaluată tot pe jumătate de perioadă

$$\alpha = \frac{Y}{Y_{med}} \quad (9.64)$$

Astfel, pentru o undă periodică sinusoidală se găsește

$$\alpha = \frac{\frac{Y}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}}{Y} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,111.$$

În cazul unei funcții nesinusoidale

$$Y = \sqrt{Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \dots}$$

și

$$Y_{med} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left( Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} Y_k \sin k\omega t \right) dt = Y_0 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Y_k$$

astfel că factorul de formă este

$$\alpha = \frac{\sqrt{Y_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2}}{\frac{\pi Y_0}{2\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Y_k} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

în care  $k$  este un număr *impar*, pentru armonicile pare valoarea medie fiind nulă și pe o jumătate de perioadă\*.

Factorul de formă nu poate fi considerat ca un criteriu de caracterizare a unei unde nesinusoidale, deoarece se pot găsi unde periodice nesinusoidale pentru care

$$\sqrt{Y_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^2} = \frac{\pi Y_0}{2\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Y_k$$

și, în acest caz, factorul de formă este egal cu  $(\pi/2\sqrt{2}) = 1,111$  adică exact cu acel al undelor periodice sinusoidale. De exemplu, dacă se adaugă la o undă fundamentală o armonică de ordin  $n$ ,  $Y_n$ , a cărei amplitudine îndeplinește condiția,

$$\frac{Y_n}{Y_1} = \frac{2n}{n^2 - 1},$$

\* În acest caz, calculele corespunzătoare se fac pentru un sfert de perioadă.



$n$  fiind oarecare, atunci factorul de formă al undei complexe

$$y = \sqrt{2} Y_1 \sin \omega t + \sqrt{2} Y_n \sin n\omega t$$

este 1,111 ca și al undei sinusoidale.

c) *Coeficientul de distorsiune*. Se numește *coeficient de distorsiune* al unei unde nesinusoidale, raportul dintre valoarea efectivă a reziduului și valoarea efectivă a curbei. Expresia sa matematică este deci

$$\delta = \frac{Y_d}{Y} . \quad (9.65)$$

Acest criteriu a fost adoptat de Comitetul Internațional pentru studiul fenomenelor reactive și deformante, în 1947, ca fiind criteriul de caracterizare a unei unde deformante.

O undă oarecare este considerată practic sinusoidală și regimul corespunzător practic sinusoidal, dacă  $\delta \leq 5\%$ .

Trebuie observat că nici acest criteriu nu este absolut; într-adevăr el nu poate distinge două unde periodice nesinusoidale formate din același număr de armonici avînd aceleași amplitudini, dar defazaje diferite. Pînă la găsirea unui criteriu mai corespunzător, acest criteriu rămîne cel oficial admis.

d) *Factorul de vîrf sau de creastă*. La încercarea de tensiune a materialelor, precum și la încercarea de izolație a mașinilor și instalațiilor electrice, trebuie ținut seama de valoarea maximă a undei de tensiune, deoarece eventuala străpungere se datorează acestei tensiuni maxime. Cu aparatele obișnuite de măsură folosite se măsoară numai mărimile efective, care sînt oarecum o valoare medie a mărimii alternative considerate. Or, în cazul regimului deformant, se poate întîmpla ca o piesă de bună calitate să fie străpunsă la o anumită valoare a tensiunii efective, iar o alta, știută a fi de calitate inferioară, să reziste acestei probe pentru aceeași valoare a tensiunii de încercare.

Aceasta se datorează faptului că, într-un asemenea regim se poate întîmpla ca, pentru o aceeași valoare efectivă, diversele unde să aibă valori maxime diferite. Este deci necesar a se cunoaște legătura ce există între valoarea maximă a unei unde periodice oarecare și valoarea efectivă a acestei unde.

Se definește raportul

$$f_v = \frac{U_{max}}{U} , \quad (9.66)$$

dintre valoarea maximă a undei și valoarea sa efectivă ca *factorul de vîrf* sau *factorul de creastă*. Pentru o undă periodică sinusoidală factorul de vîrf este

$$f_v = \frac{U\sqrt{2}}{U} = 1,41,$$

$U$  fiind valoarea efectivă a curbei.

Se spune că o undă pentru care  $f_v < 1,41$  este o *undă turtită*; o undă, pentru care  $f_v > 1,41$ , este o *undă ascuțită*.



Pentru a ilustra cele afirmate mai sus, fie undele de tensiune

$$U_1 = 10000 \sqrt{2} \sin \omega t - 2000 \sqrt{2} \sin 3\omega t,$$

$$U_2 = 10000 \sqrt{2} \sin \omega t + 2000 \sqrt{2} \sin 3\omega t,$$

care au amîndouă aceeași valoare efectivă

$$U = \sqrt{10000^2 + 2000^2} = 10\,198 \text{ V.}$$

Este ușor de văzut că valoarea maximă a primei unde este

$$10000 \sqrt{2} + 2000 \sqrt{2} = 12000 \sqrt{2} = 17\,000 \text{ V,}$$

iar a undei a doua

$$10000 \sqrt{2} - 2000 \sqrt{2} = 8000 \sqrt{2} = 11\,300 \text{ V,}$$

cele două armonici componente ale lor fiind în opoziție și în fază.

Factorul de vîrf al primei unde este

$$f'_v = \frac{17000}{10198} = 1,665,$$

unda fiind deci ascuțită, iar al celei de a doua

$$f''_v = \frac{11300}{10198} = 1,110,$$

unda fiind turtită.

Factorul de vîrf are o mare importanță în tehnica încercărilor; el se utilizează drept criteriu de caracterizare a undelor periodice nesinusoidale, numai din punctul de vedere arătat în cele ce preced.

### 9.3.2. PUTEREA ÎN REGIMUL DEFORMANT

**9.3.2.1. Puterea activă.** Puterea activă într-un regim periodic oarecare este definită cu valoarea medie de-a lungul unei perioade a produsului  $ui$ , în care  $u$  și  $i$  sînt valorile instantanee ale tensiunii și curentului, adică\*

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt.$$

\* Vezi și 4.3.2.2.



Fie

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \alpha_k),$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t - \beta_k).$$

Introducând aceste valori în expresia de mai sus, efectuînd produsul și transformînd produsele de linii trigonometrice în sume, se obține

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_k I_k [\cos[(k-l)\omega t - (\alpha_k - \beta_l)] - \cos[(k+l)\omega t - (\alpha_k + \beta_l)]] dt;$$

pentru  $k \neq l$  toate integralele definite de mai sus sînt nule; pentru  $k = l$  rămîn numai integralele de forma

$$\frac{1}{T} \int_0^T U_k I_k \cos(\beta_k - \alpha_k) dt = U_k I_k \cos(\beta_k - \alpha_k).$$

Notînd

$$\varphi_k = \beta_k - \alpha_k$$

atunci expresia puterii active este

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \quad (9.67)$$

adică puterea activă în regim deformant este egală cu suma puterilor active, dată de diversele perechi de armonici.

Calculul expresiei puterii active se poate deduce și din expresia seriei FOURIER cu termeni complecși. Într-adevăr, făcînd

$$f_1(t) = u(t) \quad \text{și} \quad f_2(t) = i(t)$$

și ținînd seama de relațiile (9.36) și (9.41) se obține

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{U}_k \underline{I}_{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [\underline{U}_k \underline{I}_{-k} + \underline{U}_{-k} \underline{I}_k] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [U'_k I'_k + U''_k I''_k]. \end{aligned} \quad (9.68)$$



Însă\*

$$U'_k = U_k \cos \alpha_k, \quad U''_k = U_k \sin \alpha_k, \quad \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{U''_k}{U'_k}$$

$$I'_k = I_k \cos \beta_k, \quad I''_k = I_k \sin \beta_k, \quad \operatorname{tg} \beta_k = \frac{I''_k}{I'_k}$$

$$\alpha_k - \beta_k = \varphi_k,$$

astfel, că relația (9.68) devine

$$\sum_{k=0}^{\infty} [U'_k I'_k + U''_k I''_k] = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos (\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k,$$

adică tocmai expresia puterii active în regimul deformant.

Puterea activă în regim deformant se poate măsura cu orice wattmetru electrodinamic, aparatul dînd măsura mărimii respective cu o eroare acceptabilă\*\*. Unitatea de măsură a puterii active este *watt*-ul (W).

**9.3.2.2. Puterea reactivă.** Definierea\*\*\* puterii reactive în regimul sinusoidal nu prezintă nici o dificultate. Pentru aceasta se pornește de la noțiunea de *putere aparentă* (4.115)

$$S = U I.$$

Comparînd această relație cu relația puterii active (4.111)

$$P = U I \cos \varphi,$$

se vede imediat, că numeric

$$S > P.$$

Fie  $P_c$  *puterea complementară* care lipsește puterii active pentru a fi egală numeric cu puterea aparentă. Se definește această putere complementară ca diferența geometrică dintre puterea aparentă și puterea activă, adică

$$P_c = \sqrt{S^2 - P^2},$$

sau, ținînd seama de expresiile (4.111) și (4.115), se găsește

$$P_c = \sqrt{U^2 I^2 - U^2 I^2 \cos^2 \varphi} = UI \sin \varphi = Q, \quad (4.114)$$

adică, în regimul sinusoidal puterea complementară este chiar puterea reactivă.

\* Vezi 9.2.2.2.

\*\* Vezi 9.5.4.4.

\*\*\* Vezi 9.5.4.4.



Cele trei puteri,  $S$ ,  $P$  și  $Q$  care apar în sistemele sinusoidale de curent alternativ, formează un sistem ortogonal și care poate fi exprimat prin relația fazorială

$$\underline{S} = P \pm jQ,$$

semnul  $\pm$  corespunzând unei puteri reactive inductive, respectiv capacitive\*. Definirea puterii reactive într-un regim deformant este mult mai grea și încă astăzi, după peste 40 ani de discuții, electricienii nu au căzut încă de acord asupra unei definiții unitare a acestei mărimi.

Sînt două concepții care stau la baza definițiilor date pentru puterea reactivă în regim deformant.

Prima concepție este legată de noțiunea de energie medie a cîmpurilor magnetice și electrice, puterea reactivă fiind definită de expresia

$$Q = 2\omega (W_m - W_e)$$

în care

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

este energia cîmpului magnetic și

$$W_e = \frac{1}{2} CU^2$$

este energia cîmpului electric.

Ținînd seama de aceasta, au fost propuse o serie de definiții convenționale. Astfel, A. LIÉNARD a propus pentru definirea puterii reactive expresia

$$Q = -\frac{\omega}{T} \int_0^T u q dt,$$

în care  $u$  este valoarea instantanee a tensiunii,  $q$  valoarea instantanee a cantității de electricitate și  $\omega$  pulsația armonicii fundamentale. În regimul deformant, această relație conduce la expresia

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} U_k I_k \sin \varphi_k \quad (9.69)$$

pentru puterea reactivă.

La o expresie identică conduce și relația

$$Q = -\frac{\omega}{T} \int_0^T \varphi_i dt$$

propusă de A. ILIOVICI, în care  $\varphi$  este un flux definit de relația  $e = -\frac{d\varphi}{dt}$ ,  $i$  curentul instantaneu,  $\omega$  și  $T$  pulsația și perioada curentului alternativ al undei fundamentale.

\* Vezi 4.3.7.4.



Expresia (9.69) poate fi măsurată cu ajutorul unui *varmetru* electrodinamic al cărui circuit voltmetric are o rezistență neglijabilă față de reactanța sa inductivă.

A. ILIOVICI a mai propus o expresie de definiție,

$$Q = -\frac{1}{\omega T} \int_0^T i \, de,$$

în care  $i$  și  $e$  sînt valorile instantanee ale curentului și tensiunii, iar  $\omega$  și  $T$  pulsația și perioada undei fundamentale. Această relație conduce la expresia

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k U_k I_k \sin \varphi_k \quad (9.70)$$

pentru puterea reactivă, care poate fi măsurată cu ajutorul unui *varmetru de inducție*, al cărui circuit voltmetric trebuie să aibă o rezistență neglijabilă față de reactanța sa inductivă. Ea mai poate fi măsurată și cu un *varmetru electrodinamic*, al cărui circuit voltmetric este constituit dintr-o reactanță capacitivă foarte puternică.

Aceste expresii de definiție sînt însă lipsite de o bază fizică admisibilă\*. Într-adevăr, aceste expresii de putere reactivă sînt nesimetrice față de expresia puterii active (4.111).

În afară de aceasta, ansamblul de puteri active-reactive, sub forma  $(P, Q_1)$  sau  $(P, Q_2)$  nu are nici o corelație cu expresia (4.115) a puterii aparente.

În sfîrșit, definițiile de forma (9.69) și (9.70) conduc la unele concluzii inadmisibile. Astfel, fie un regim deformant format din unda fundamentală și armonica 3. Dacă printr-un mijloc de rezonanță (filtru) suprimăm armonica fundamentală — ceea ce este totdeauna posibil, puterea reactivă în circuit devine

$$Q_1 = \frac{1}{3} U_3 I_3 \sin \varphi_3,$$

sau,

$$Q_2 = 3 U_3 I_3 \sin \varphi_3,$$

ceea ce este cu totul în contradicție cu expresia (4.114) consacrată a puterii reactive, regimul în acest caz — după filtrare — fiind un regim pur sinusoidal.

Însăși faptul că pot exista două expresii pentru a exprima aceeași mărime într-un același regim deformant, diferite între ele, dovedește caracterul convențional arbitrar al acestor definiții.

Simpla posibilitate de măsurare nu constituie o justificare suficientă. Dealtfel, relațiile (9.69) și (9.70) nu au căpătat nici un fel de aplicație practică și s-au dovedit incapabile a justifica toată gama de fenomene ale unui regim deformant\*\*.

A doua concepție se datorează Acad. prof. C. I. BUDEANU și se bazează pe metoda separării *puterii aparente* în trei termeni ortogonali.

S-a ajuns la această concepție pornindu-se de la definirea puterii reactive în regim sinusoidal.

\* Pentru detalii vezi [56, 57, 64].

\*\* Vezi [23], o aplicație ce s-a dat relației (9.70).



Ca și în regimul sinusoidal, în regimul nesinusoidal puterea aparentă este formată din doi termeni ortogonali, puterea activă și puterea complementară, adică

$$S^2 = P^2 + P_c^2 = U^2 I^2$$

$U$  și  $I$  fiind valorile efective ale tensiunii și curentului.  
În regim deformant

$$U^2 = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2, I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2$$

și dacă  $\varphi_n$  este unghiul de defazaj al armonicii de curent de ordinul  $n$  față de armonica de tensiune de ordinul  $n$ , relația a doua de mai sus poate fi scrisă

$$I^2 = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 (\cos^2 \varphi_n + \sin^2 \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \sin^2 \varphi_n$$

și deci expresia puterii aparente devine

$$S^2 = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \cos^2 \varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} I_n^2 \sin^2 \varphi_n. \quad (9.71)$$

Ținând seama de identitatea lui LAGRANGE

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m^2 \sum_{m=0}^{\infty} b_m^2 = \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_m \right)^2 + \sum_{\substack{m,n=0 \\ m \neq n}}^{\infty} (a_m b_n - a_n b_m)^2,$$

relația (9.71) poate fi scrisă

$$\begin{aligned} S^2 = & \left( \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \right)^2 + \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \cos \varphi_n - U_n I_m \cos \varphi_m)^2 + \\ & + \left( \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \right)^2 + \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \sin \varphi_n - U_n I_m \sin \varphi_m)^2. \end{aligned}$$

În această expresie, primul termen este pătratul puterii active. Rezultă

$$\begin{aligned} P_c^2 = & \left( \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \right)^2 + \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \cos \varphi_n - U_n I_m \cos \varphi_m)^2 + \\ & + \sum_{m,n=0}^{\infty} (U_m I_n \sin \varphi_n - U_n I_m \sin \varphi_m)^2 \quad (m \neq n). \end{aligned} \quad (9.72)$$

Termenul

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \right)^2$$

este pătratul sumei puterilor reactive ale fiecărui grup de armonici în parte.



Prof. BUDEANU a propus, și această propunere a fost acceptată de C.E.I.\* de a se defini puterea reactivă prin relația

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n, \quad (9.73)$$

obținându-se astfel o expresie analoagă cu aceea a puterii active.

Puterea reactivă definită prin această expresie nu poate fi măsurată cu aparatele de măsură clasice\*\*. Din studiile ces-au făcut însă\*\*\*, s-a constatat că eroarea de determinare a puterii reactive în regim deformant, folosindu-se un varmetru electrodinamic, care măsoară expresia (9.69), rămîne mai mică decît 2%. Măsurarea exactă a acestei mărimi se poate face cu PQD-metrul\*\*\*\*.

Notînd cu  $D^2$  ultimii doi termeni ai expresiei (9.72), puterea aparentă poate fi scrisă sub forma

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (9.74)$$

ceea ce arată că ea poate fi descompusă, în regimul deformant, în trei termeni ortogonali care sînt:  $P$  puterea activă,  $Q$  puterea reactivă și  $D$  puterea deformantă.

Mai rezultă de aici, că puterea complementară în regim deformant este egală cu suma geometrică a puterii reactive și a puterii deformante

$$P_c = \sqrt{Q^2 + D^2}.$$

### 9.3.2.3. Puterea deformantă. Expresia

$$D = \sqrt{\sum_{m,n} (U_m I_n \cos \varphi_n - U_n I_m \cos \varphi_m)^2 + (U_m I_n \sin \varphi_n - U_n I_m \sin \varphi_m)^2} \quad (9.75)$$

a fost introdusă în electrotehnică de Prof. BUDEANU sub denumirea de *putere deformantă*. Numirea este logică. Într-adevăr,  $D$  are dimensiunile unei puteri și ea se datorează deformării undelor de curent și de tensiune. Noțiunea este azi acceptată de electricienii din toată lumea, iar teoria ei figurează în toate tratatele clasice de electrotehnică. Puterea deformantă nu poate fi măsurată cu aparatele de măsură clasice de care se dispune astăzi. Ea se poate determina deocamdată numai prin calcul din descompunerea în armonici a undelor de curent și de tensiune ridicate simultan\*\*\*\*\* sau cu ajutorul PQD-metrului.

Nu s-a fixat încă o unitate de măsură pentru această mărime.

Prin analogie cu unitatea de măsură pentru puterea reactivă, Prof. BUDEANU a propus *vad*-ul, al cărui nume provine din inițialele cuvintelor *Volt-Amper-Deformant*, și al cărui simbol este VAD.

\* Vezi [298] pag. 216 ; C.E.I. Comisia electrotehnică internațională.

\*\* Vezi [23] ; vezi și [5]

\*\*\* Vezi [5]

\*\*\*\* Vezi [23, 24] Aparatul a fost brevetat în țară și în străinătate și la expoziția internațională de la Nürnberg, în 1969, a obținut medalia de aur.

\*\*\*\*\* Vezi [23] unde se indică un mijloc de măsurare a puterii deformante cu ajutorul unui calculator electronic de tip analogic.



Desfăcînd parantezele de sub semnul sumă în expresia (9.75), expresia puterii deformante poate fi pusă sub forma

$$D = \sqrt{\sum_{m,n}^{\infty} [U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2 U_m U_n I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n)]}, \quad (9.76)$$

care este expresia clasică a acestei puteri, sumarea făcîndu-se prin permutarea circulară a indicilor, directă și inversă.

Pentru a vedea cînd puterea deformantă se anulează, se pune expresia (9.76) sub forma

$$D = \sqrt{\sum_{m,n}^{\infty} \left[ (U_m I_n - U_n I_m)^2 + 4 U_m U_n I_m I_n \sin^2 \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2} \right]},$$

care se anulează dacă sînt îndeplinite simultan condițiile

$$(U_m I_n - U_n I_m)^2 = 0 \text{ și } \sin^2 \frac{\varphi_m - \varphi_n}{2} = 0$$

și care sînt satisfăcute atunci cînd

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \dots = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_n}{I_n} = \dots$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = \varphi_n = \dots,$$

adică, trebuie ca ambele unde să aibă armonicile de curent și de tensiune de același ordin, proporționale, cu alte cuvinte undele nesinusoidale de curent și de tensiune să fie *asemenea și în fază*.

În practică acest caz nu poate fi realizat, decît atunci cînd receptorul alimentat cu tensiunea nesinusoidală

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \sin(n \omega t - \varphi_n)$$

este o rezistență pură, fără urmă de reactanță inductivă sau capacitivă. În acest caz

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \dots = \frac{U_n}{I_n} = \dots = R,$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \dots = 0.$$

Un alt caz particular de considerat este acela în care numai unda de curent este deformată, unda de tensiune putînd fi admisă practic sinusoidală. În acest caz

$$U_1 = U; U_0 = U_2 = U_3 = \dots = U_n = \dots = 0$$



și relația (9.76) devine

$$D = \sqrt{U^2 I_0^2 + U^2 I_2^2 + \dots + U^2 I_n^2 + \dots} = U \sqrt{I_0^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots + I_n^2 + \dots} = U I_d \quad (9.77)$$

$I_d$  fiind reziduul deformant al undei de curenț.

Relația (9.77) poate fi folosită în practică, într-o primă aproximație, la determinarea puterii deformante.

Pentru cazul cînd unda de tensiune este practic sinusoidală, calculul puterii deformante cu ajutorul relației (9.77) dă rezultate suficiente. Aproximația poate fi considerată suficientă atît timp cît coeficientul de deformare al undei tensiunii rămîne mai mic de 20%. Cînd acest coeficient depășește cifra de mai sus, relația (9.77) nu mai este suficientă și puterea deformantă poate fi calculată cu destulă aproximație cu relația \*

$$D = UI_d + U_d I; \quad (9.78)$$

ea provine din relația precedentă la care s-a adăugat un termen corectiv, prin care se presupune că unda de curenț este practic sinusoidală și numai tensiunea este deformată,  $U_d$  fiind reziduul deformant al tensiunii.

O formulă simplificată, dar care permite calculul puterii deformante cu o foarte mare precizie, eroarea de determinare în raport cu puterea calculată cu ajutorul formulei exacte (9.76) fiind practic nulă, este următoarea, propusă de Acad. prof. ing. BUDEANU \*\*

$$D = \sqrt{U_1^2 I_d^2 + U_d^2 I_1^2 - 2 U_1 I_1 \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq 1}}^{\infty} U_m I_m \cos(\varphi_1 - \varphi_m)}.$$

**9.3.2.4. Măsurarea puterilor în regim deformant. PQD-metrul.** Pentru măsurarea puterilor (sau energiilor) activă, reactivă și deformantă într-un regim energetic deformant, a fost realizat\*\*\* un aparat PQD-metru\*\*\*\* care este capabil să dea simultan măsura acestor mărimi.

În principiu, aparatul este un calculator electronic hibrid specializat, ce cuprinde două părți principale:

a) o parte care calculează puterile activă și reactivă, pe baza unei analize spectrale a tensiunii și curențului și

b) o parte care calculează puterea deformantă pe baza determinării valorilor efective a undei fundamentale și a reziduului deformant ale undelor de tensiune și curenț (fig. 9.31).

Prin intermediul a două circuite de intrare, de structură analoagă cu circuitele de acest tip din aparatele electronice de măsură\*\*\*\*, se aplică semnalele de tensiune și de curenț blocului de calcul a puterilor activă și reactivă și blocului de calcul a puterii deformante.

\* Vezi [5] pag. 77

\*\* Vezi [61] pag. 138

\*\*\* Vezi [24].

\*\*\*\*  $P$ ,  $Q$ ,  $D$  sînt simbolurile internaționale ale celor trei mărimi de puteri.

\*\*\*\*\* Vezi [2] sau [266].



Analiza armonică a undelor de curent și de tensiune se face prin intermediul a două filtre active analogice cu ieșire digitală. Filturul activ analogic cu ieșire digitală este alcătuit din două amplificatoare operaționale, funcționând ca

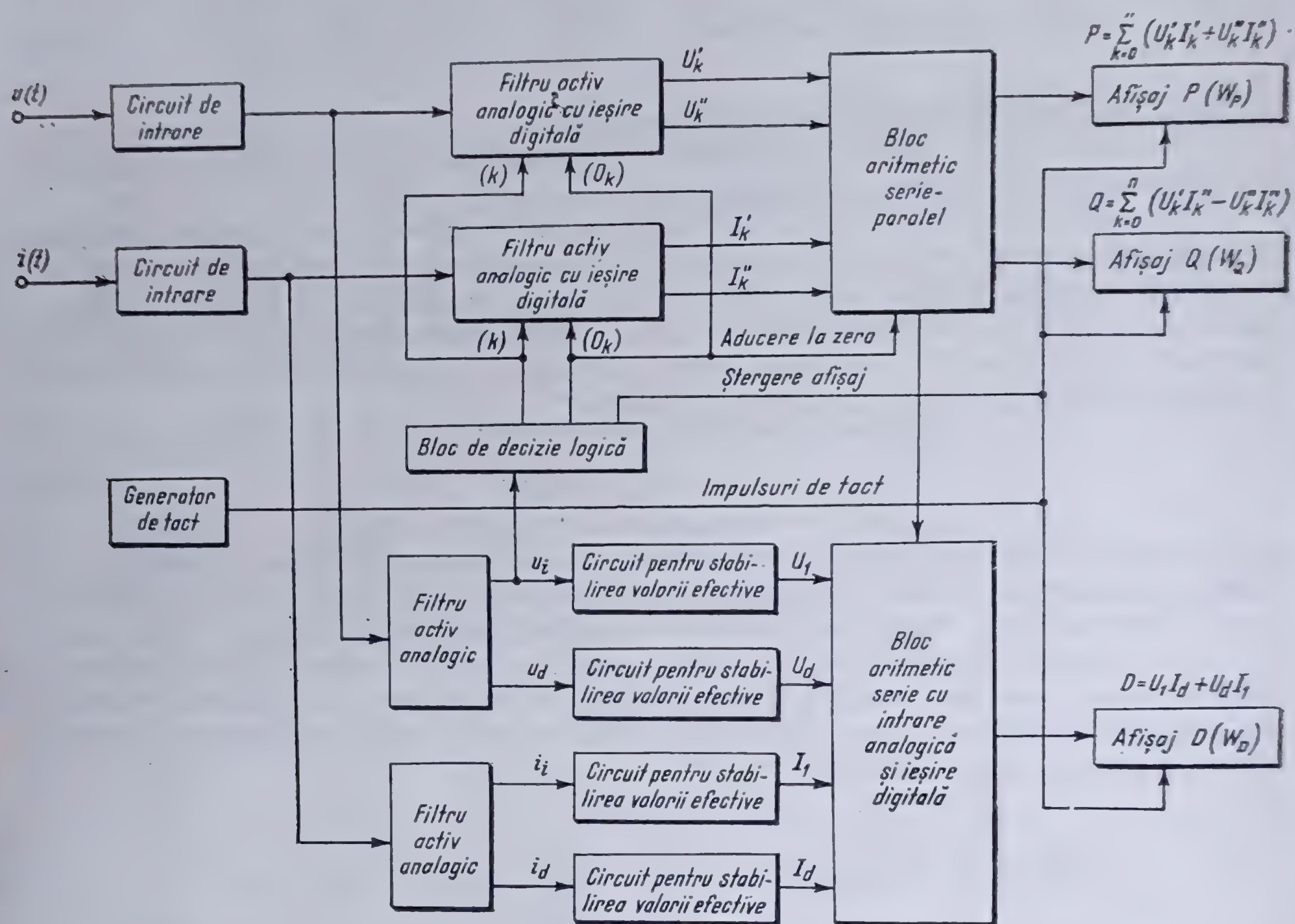


Fig. 9.31. Schema bloc a PQD-metrului.

integratoare, conectate în buclă închisă prin intermediul a două atenuatoare cu rezistență de transfer comandată de blocul de comandă, funcționând ca multiplica-

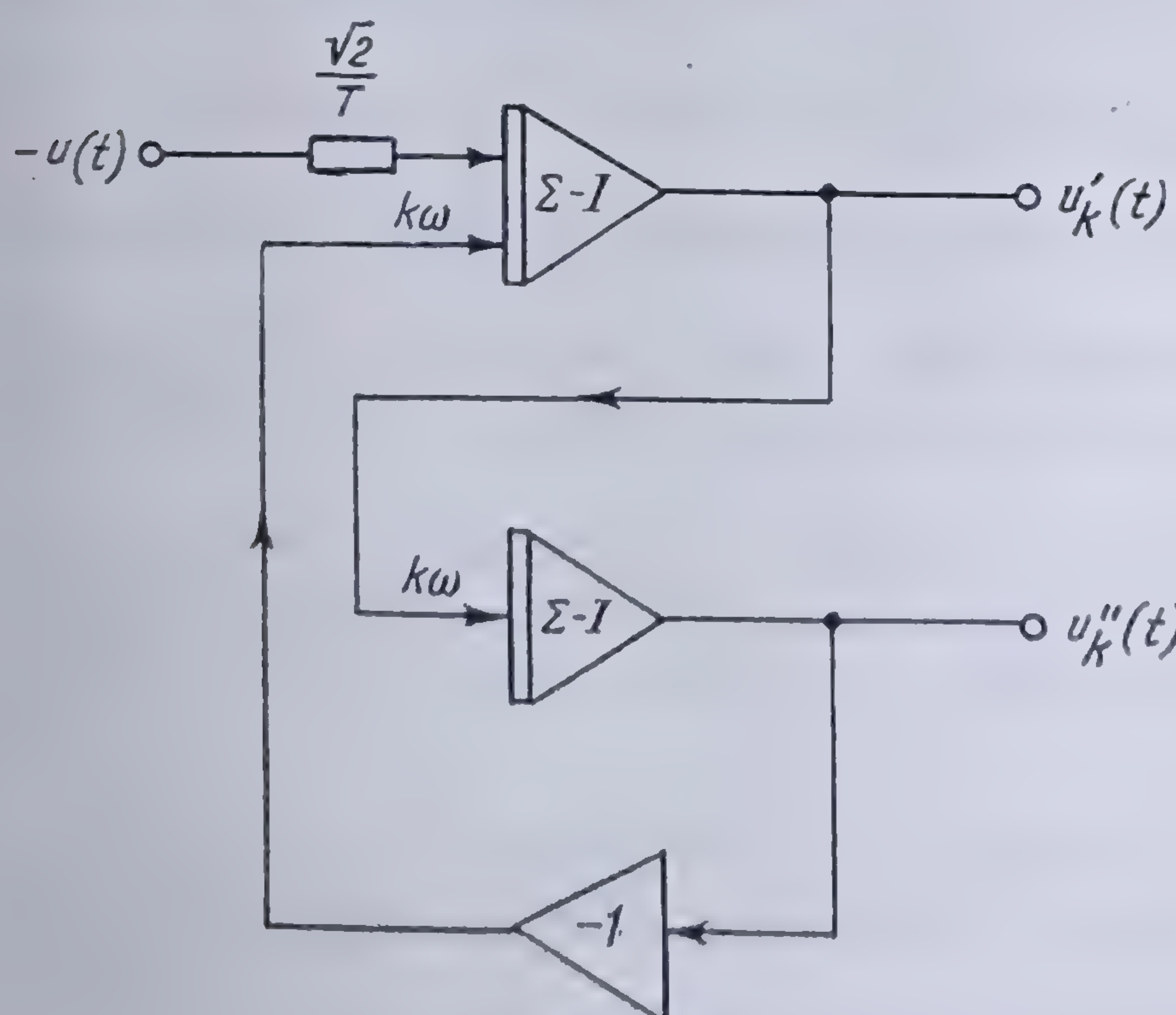


Fig. 9.32. Analizor de armonici.

toare hibride, cu o intrare analogică și o intrare digitală (fig. 9.32). Acest model structural analogic satisface o ecuație diferențială matriceală de forma

$$\frac{d}{dt} [u_k(t)] = [A_k] [u_k(t)] + [B] u(t),$$

unde

$$[u_k(t)] = \begin{bmatrix} u'_k(t) \\ u''_k(t) \end{bmatrix}; [A_k] = \begin{bmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{bmatrix};$$

$$[B_k] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{T} \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Circuitul realizează analizarea succesivă a armonicilor de ordinul  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  ale unei tensiuni periodice nesinusoidale, de frecvență industrială. Analiza fiecărei armonici necesită un interval de două perioade: în prima perioadă — perioada activă a filtrului funcționând ca integrator — se obțin

- valoarea componentei continue  $U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt;$
- valoarea efectivă a armonicii în cosinus  $U'_k = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T u(t) \cos k\omega t dt;$
- valoarea efectivă a armonicii în sinus  $U''_k = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T u(t) \sin k\omega t dt$

și se realizează astfel descompunerea semnalului de intrare  $u(t)$  sub forma aproximată a unei serii FOURIER

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n (U'_k \sqrt{2} \cos k\omega t + U''_k \sqrt{2} \sin k\omega t); \quad (9.79)$$

în a doua perioadă — perioada pasivă a filtrului — se realizează convertirea tensiune-durată a celor două semnale obținute, ceea ce permite convertirea analog-numerică a valorilor efective  $U'_k$  și  $U''_k$ .

În același mod se analizează și semnalul  $i(t)$ .

Semnalele numerice de la ieșirea celor două filtre active analogice cu ieșire digitală sînt introduse într-un bloc de calcul aritmetic de tip serie-paralel, ce realizează multiplicarea și însumarea mărimilor  $U'_k, I'_k, U''_k, I''_k$ , astfel, încît să se obțină \* în final puterea activă

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^n U_k I_k \cos(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^n (U'_k I'_k + U''_k I''_k) \quad (9.80)$$

și puterea reactivă

$$Q = \sum_{k=1}^n U_k I_k \sin(\alpha_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^n (U'_k I''_k - U''_k I'_k). \quad (9.81)$$

Comenzile necesare succesiunii de operații, de analiză armonică a semnalelor, de convertire analog-numerică și de calcul aritmetic sînt date de blocul de comandă, iar ritmul unitar al întregului sistem este asigurat de un generator de tact.

Semnalele  $P$  și  $Q$ , calculate în blocul de calcul aritmetic, sau energiile corespunzătoare  $W_P$  și  $W_Q$ , calculate apoi prin integrare numerică, sînt afișate în sistem zecimal cu ajutorul unui bloc de afișare cu tuburi Nixie.

Partea din aparat ce servește la calculul puterii deformante cuprinde:

- două filtre active analogice, care realizează separarea undei fundamentale de tensiune și de curent  $[u_1 = U_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_1), i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_1)]$
- de restul armonicilor  $[u_d = \sum_{k=2}^n U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \alpha_k), i_d = \sum_{k=2}^n I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \beta_k)]$
- ale semnalelor de tensiune și curent;

\* Relațiile (9.80) și (9.81) se obțin imediat: expresia tensiunii (sau curentului) sub forma (9.79) se obține din dezvoltarea unei expresii de forma (9.7) și identificare.



- patru circuite de calcul analogic a valorilor efective ale undelor fundamentale ( $U_1 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [u_1(t)]^2 dt}$ ;  $I_1$ ) și a rezidului deformant ( $U_d$  și  $I_d$ );
- un bloc de calcul aritmetic de tip serie, cu intrare analogică, care realizează convertirea analog-numerică, multiplicarea și însumarea semnalelor  $U_1, I_1, U_d, I_d$ , calculind puterea deformantă  $D$  cu relația (9.78)

$$D = U_1 I_d + U_d I_1.$$

Puterea deformantă  $D$ , sau energia deformantă  $W_D$ , calculată ca în cazul precedent prin integrare numerică, este afișată în sistem zecimal de un bloc de afișaj analog cu cele utilizate pentru  $P$  și  $Q$ .

**9.3.2.5. Conservarea puterilor în regim deformant.** Principiul conservării puterilor, enunțat de P. BOUCHEROT în cazul rețelelor electrice în regimul sinusoidal în care nu există variație de frecvență, poate fi extins și în cazul regimului deformant și aplicat diverselor puteri caracteristice unui atare regim.

Demonstrația acestui principiu în regimul deformant a fost dată de mai mulți autori. Acad. prof. C. BUDEANU a dat însă o demonstrație generală, care se aplică atât regimului sinusoidal \*, cât și regimului deformant.

În rețelele în care nu există variații de frecvență, principiul conservării puterilor se aplică diverselor puteri caracteristice unui regim deformant.

Fie o rețea complexă constituită din  $s$  laturi (fig. 9.33), fiecare din ele fiind străbătută de câte un curent periodic nesinusoidal de forma

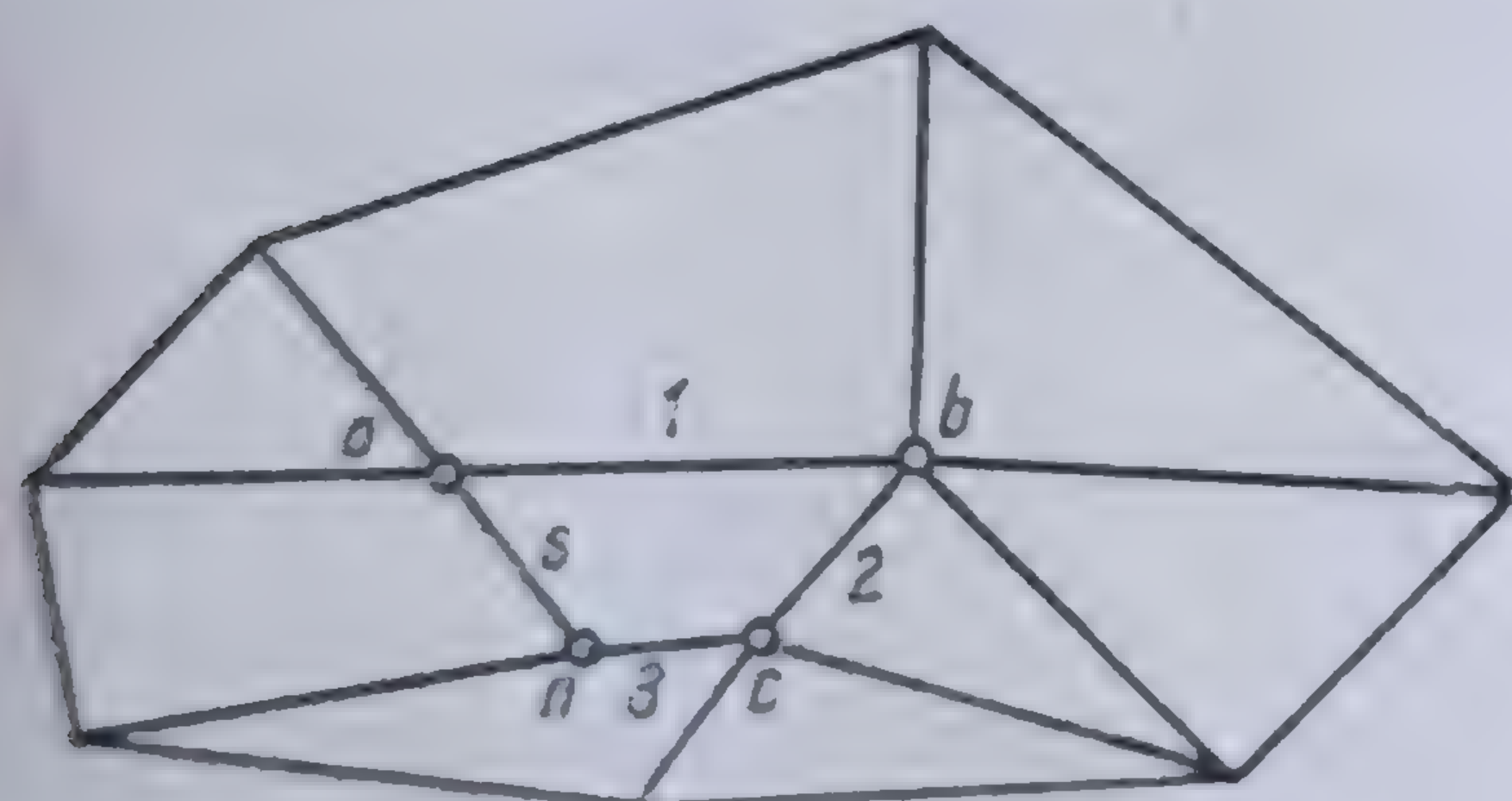


Fig. 9.33. Rețea complexă.

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \beta_n),$$

iar tensiunile  $u$  dintre vîrfurile adiacente ale fiecărei laturi fiind de asemenea nesinusoidale, de forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \alpha_n).$$

Teorema I a lui KIRCHHOFF se transformă, pentru fiecare nod, în  $s$  ecuații de forma  $\sum i'_k = 0$  și în  $n$  ecuații de forma  $\sum i''_k = 0$  în care diverșii curenți sînt:

$$\left. \begin{aligned} i'_k &= I_k \sqrt{2} \cos \beta_k \sin k\omega t \\ i''_k &= I_k \sqrt{2} \sin \beta_k \cos k\omega t \end{aligned} \right\} (k = 1, 2, \dots). \quad (9.82)$$

Se poate deci considera rețeaua ca fiind formată din suprapunerea a  $2s$  rețele, fiecare străbătută de unul din curenții (9.82) și avînd aceleași diferențe de potențial  $u$  la vîrfurile adiacente ale aceleiași laturi  $s$  a fiecărei rețele elementare.

\* Vezi 4.3.7.7.



Pentru fiecare din cele  $2n$  rețele, se poate scrie principiul de *conservare a puterilor instantanee*, obținându-se

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^s ui'_k &= 0; \quad \sum_0^s ui''_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (9.83)$$

Ecuatiile (9.83) trebuind să fie satisfăcute, oricare ar fi timpul  $t$ , rezultă că va trebui să existe identic :

— pentru fiecare pereche de unde de ordinul  $k$

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^s U_k I_k \sin \alpha_k \sin \beta_k &= 0 \\ \sum_1^s U_k I_k \cos \alpha_k \cos \beta_k &= 0 \\ \sum_1^s U_k I_k \sin \alpha_k \cos \beta_k &= 0 \\ \sum_1^s U_k I_k \cos \alpha_k \sin \beta_k &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (9.84)$$

— pentru fiecare grup de unde de ordinul  $k$  și  $l$

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^s U_k I_l \sin \alpha_k \sin \beta_l &= 0 & \sum_1^s U_l I_k \sin \alpha_l \sin \beta_k &= 0 \\ \sum_1^s U_k I_l \cos \alpha_k \cos \beta_l &= 0 & \sum_1^s U_l I_k \cos \alpha_l \cos \beta_k &= 0 \\ \sum_1^s U_k I_l \sin \alpha_k \cos \beta_l &= 0 & \sum_1^s U_l I_k \sin \alpha_l \cos \beta_k &= 0 \\ \sum_1^s U_k I_l \cos \alpha_k \sin \beta_l &= 0 & \sum_1^s U_l I_k \cos \alpha_l \sin \beta_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.85)$$

Din relațiile (9.84), prin adunarea primelor două relații și prin scăderea relației a patra din a treia, sumând apoi pentru toate armonicele, se deduce conservarea algebrică a următoarelor mărimi

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^s \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos (\alpha_k - \beta_k) &= \sum_1^s \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k = \sum_1^s \sum_{k=1}^{\infty} P_k = 0 \\ \sum_1^s \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin (\alpha_k - \beta_k) &= \sum_1^s \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = \sum_1^s \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = 0, \end{aligned} \right\} \quad (9.86)$$

adică, conservarea puterilor activă și reactivă în cazul regimului deformant.



Din relațiile (9.85) se deduce conservarea algebrică în întreaga rețea a mărimilor

$$\left. \begin{aligned} \delta'_{kl} &= U_k I_l \cos(\alpha_k + \beta_l) - U_l I_k \cos(\alpha_l + \beta_k) \\ \delta''_{kl} &= U_k I_l \sin(\alpha_k + \beta_l) - U_l I_k \sin(\alpha_l + \beta_k), \end{aligned} \right\} \quad (9.87)$$

sub forma

$$\sum_1^s \delta'_{kl} = 0 \text{ și } \sum_1^s \delta''_{kl} = 0, \quad (9.88)$$

a căror deducere din relațiile (9.85) este evidentă.

Relațiile (9.87) se numesc *puterile deformante elementare*.

Ecuatiile (9.88) conduc la *conservarea vectorială* a sumei mărimilor  $\delta'_{kl}$  și  $\delta''_{kl}$  considerate ca vectori ortogonali și deci a mărimii

$$\sum_1^s \underline{D}_{kl} = \sum_1^s \delta'_{kl} + j \sum_1^s \delta''_{kl} = \sum_1^s (\delta'_{kl} + j \delta''_{kl}) = 0.$$

Puterile deformante elementare, extinse la toate armonicile, pot fi considerate componentele unui vector  $\underline{D}$  în spațiul cu  $n$  dimensiuni, în care diversele planuri care cuprind aceste puteri deformante elementare sînt toate ortogonale între ele în originea sistemului de referință. Modulul acestui vector este

$$|\underline{D}| = \sqrt{\sum_{k,l}^{\infty} \delta_{kl}'^2 + \sum_{k,l}^{\infty} \delta_{kl}''^2} = \sqrt{\sum_{k,l}^{\infty} (\delta_{kl}'^2 + \delta_{kl}''^2)},$$

sau, ținînd seama de relațiile (9.83), se obține în definitiv

$$|\underline{D}| = \sqrt{\sum_{\substack{k,l \\ k \neq l}}^{\infty} [U_k^2 I_l^2 + U_l^2 I_k^2 - 2 U_k U_l I_k I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)],}$$

adică, tocmai expresia (9.76) a puterii deformante.

Aceasta poate fi arătată și în alt mod. Într-adevăr, ansamblul grupelor de puteri deformante elementare de ordin  $k, l$ , date de relația (9.87), pot fi exprimate global sub forma vectorială într-un plan  $kl$

$$\underline{D}_{kl} = U_k I_l \underline{|\alpha_k + \beta_l|} - U_l I_k \underline{|\alpha_l + \beta_k|},$$

avînd modulul

$$|\underline{D}_{kl}| = D_{kl} = \sqrt{U_k^2 I_l^2 + U_l^2 I_k^2 - 2 U_k U_l I_k I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)}.$$

Date fiind proprietățile mărimilor efective ale curenților și tensiunilor, cît și ale tuturor componentelor armonice, se poate considera că toate planele  $kl$ , conținînd armonicile de curent și de tensiune de ordin  $k$  și  $l$ , sînt normale între ele într-un spațiu multidimensional.



În consecință, toți vectorii de puteri deformante elementare de ordin  $k, l, \dots$ , sînt normali între ei, avînd ca rezultantă

$$D = \sqrt{\sum_{k,l} D_{kl}^2} = \sqrt{\sum_{k,l} [U_k^2 I_l^2 + U_l^2 I_k^2 - 2 U_k U_l I_k I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)]},$$

obținîndu-se din nou relația (9.76).

Rezultă dar, că puterea deformantă se conservă vectorial în întreaga rețea.

Din proprietățile de conservare algebrică ale mărimilor  $P$  și  $Q$  și de conservare vectorială a mărimii  $D$ , rezultă conservarea vectorială a mărimii

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} = U I,$$

adică a puterii aparente, precum și a mărimii

$$P_c = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{Q^2 + D^2},$$

adică, a puterii fictive sau complementare.

**9.3.2.6. Factorul de putere în regim deformant.** Factorul de putere în regimul deformant se definește — ca și în regim sinusoidal — ca fiind raportul dintre puterea reală  $P$  și puterea aparentă  $S$ ,

$$K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}. \quad (9.89)$$

Cum

$$P < \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2},$$

rezultă

$$K < 1.$$

Din relația (9.89) se vede că, în regimul deformant, chiar atunci cînd nu există o putere reactivă,  $Q = 0$ , factorul de putere rămîne mai mic decît 1 din cauza puterii deformante care apare în acest regim.

Factorul de putere este egal cu 1 numai în cazul cînd și puterea deformantă este nulă, ceea ce nu se întîmplă decît în cazul cînd undele de curenți și tensiune sînt asemenea și au același defazaj \*.

În regim deformant, factorul de putere poate fi pus și sub o altă formă. Se definește expresia

$$\rho = \frac{Q}{P}, \quad (9.90)$$

ca *factorul reactiv* al regimului. El reprezintă raportul dintre puterea reactivă și puterea activă din circuit, în momentul considerat. Acest factor este un număr fără dimensiuni.

\* Vezi 9.3.2.3.



De asemenea se definește expresia

$$\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \quad (9.91)$$

ca *factorul deformant* al regimului. El reprezintă raportul dintre puterea totală deformantă și puterea totală nedeformantă; el este de asemenea un număr fără dimensiuni.

Dacă se notează

$$\operatorname{tg} \varphi = \rho = \frac{Q}{P}$$

și

$$\operatorname{tg} \xi = \tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}},$$

se deduce

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}}$$

și rezultă

$$\cos \varphi \cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} = K. \quad (9.92)$$

### 9.3.3. CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM DEFORMANT

**9.3.3.1. Legea lui OHM într-un circuit electric liniar alimentat de o forță electromotoare periodică nesinusoidală.** Fie un circuit compus dintr-o rezistență  $R$ , un condensator imperfect de capacitate  $C$  și o inductanță  $L$  legate în serie, care este alimentat cu o forță electromotoare nesinusoidală  $e$ ,  $R$ ,  $C$  și  $L$  fiind mărimi constante.

Prin aplicarea celei de a doua teoreme a lui KIRCHHOFF, între valorile instantanee ale forței electromotoare și ale curentului rezultat se poate scrie întotdeauna relația

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt; \quad (9.93)$$

funcția  $e$  fiind nesinusoidală, poate fi descompusă în serie FOURIER

$$e = e_1 + e_2 + \dots + e_n = \sum_1^n e_n,$$

$n$  fiind oricât de mare.



Circuitul fiind liniar, dacă fiecare armonică ar fi fost singură, ar fi produs un curent dat de ecuația

$$e_n = Ri_n + L \frac{di_n}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i_n dt,$$

astfel, că adunînd membru cu membru toate ecuațiile care se obțin pentru fiecare armonică în parte, rezultă

$$e = R \sum_1^n i_n + L \frac{d \sum_1^n i_n}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t \sum_1^n i_n dt.$$

Funcția  $\sum_1^n i_n$  este deci o soluție a ecuației (9.93); ea poate reprezenta deci curentul produs de forța electromotoare nesinusoidală  $e$ . Se poate deci enunța următoarea teoremă:

*În cazul cînd o forță electromotoare periodică nesinusoidală acționează într-un circuit liniar format dintr-o rezistență, un condensator și o inductanță în serie, curentul pe care-l produce poate fi considerat ca o suprapunere a tuturor curenților periodici sinusoidali, care ar fi produși separat de fiecare armonică în parte.*

Astfel, dacă forța electromotoare este de forma

$$e = E_0 + E_1 \sqrt{2} \sin \omega t + E_2 \sqrt{2} \sin 2\omega t + \dots$$

curentul rezultat este de forma

$$i = I_1 \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi_1) + I_2 \sqrt{2} \sin (2 \omega t - \varphi_2) + \dots$$

în care

$$\left. \begin{aligned} I_n &= \frac{E_n}{\sqrt{R^2 + \left( L n \omega - \frac{1}{C n \omega} \right)^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_n &= \frac{L n \omega - \frac{1}{C n \omega}}{R} \end{aligned} \right\} \quad (9.94)$$

În cazul cînd condensatorul are pierderi, apare și un termen constant de forma

$$I_0 = \frac{E_0}{R_T},$$

în care  $R_T$  este rezistența totală a circuitului.

9.3.3.2. Rezonanța în regimul deformant. Din relațiile (9.94) rezultă că, dacă

$$n \omega L = \frac{1}{n \omega C}$$



adică, dacă este satisfăcută condiția de rezonanță pentru armonica de ordinul  $n$ , intensitatea acesteia va fi maximă și valoarea relativă a curentului corespunzător în raport cu celelalte armonici va fi cu atât mai mare, cu cât rezistența  $R$  a circuitului este mai mică. În aceste condiții, curentul produs de forța electromotoare nesinusoidală  $e$  de perioadă  $T$  va fi sensibil sinusoidal și de perioadă  $T/n$ . Valoarea sa efectivă va fi egală cu cîtul dintre valoarea efectivă a armonicii de ordinul  $n$  a forței electromotoare și rezistența ohmică a circuitului.

Diferența de potențial la bornele condensatorului sau ale inductanței va deveni de asemenea foarte mare în raport cu forța electromotoare dată, perioada ei fiind tot  $T/n$ .

Rezonanța armonicilor poate explica unele supratensiuni anormale care pot să se producă în rețelele electrice cu cabluri, prezentînd deci o capacitate mare, funcționînd într-un regim deformant. Este unul dintre efectele supărătoare ale regimului deformant.

**9.3.3.3. Studiul circuitelor electrice în regim deformant.** Studiul circuitelor electrice în regimul deformant prezintă unele particularități caracteristice acestui regim. În consecință, metodele folosite în regimul sinusoidal nu pot fi aplicate decît cu oarecare precauție.

În general, metodele de studiu ale regimurilor deformante, utilizate în stadiul actual al cunoștințelor noastre în această chestiune, pot fi grupate după cum urmează :

*a) Metode în care se neglijează complet situația nesinusoidală a undelor de tensiune și curent a regimului energetic respectiv.* Această metodă poate fi aplicată în cazul cînd coeficientul de distorsiune al celor două unde de tensiune și de curent este mai mic sau cel mult egal cu 5%.

În calcule de primă aproximație se poate utiliza această metodă și în cazul cînd acești coeficienți de distorsiune sînt mai mari decît 5%. Trebuie observat însă, că eroarea de calcul crește odată cu creșterea coeficientului de distorsiune, iar concluziile la care se ajunge pot fi false.

*b) Metoda sinusoidelor echivalente.* Această metodă constă în a înlocui undele nesinusoidale de tensiune și curent prin sinusoidale lor echivalente și a studia circuitul electric corespunzător, ca în regim sinusoidal. Metoda conduce însă, în majoritatea cazurilor, la situații total discordante față de realitatea fizică.

Fie, de exemplu, regimul energetic deformant definit de

$$u = 200 \sqrt{2} \sin \omega t,$$

$$i = 100 \sqrt{2} \sin \omega t + 75 \sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Pentru a determina sinusoida echivalentă a curentului, trebuie să determinăm puterea activă absorbită de circuit. Avem :

$$I = \sqrt{100^2 + 75^2} = 125 \text{ A}; S = 200 \times 125 = 25 \text{ kVA};$$

$$D = 200 \times 75 = 15 \text{ kVAD}$$

și deci,

$$P = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \text{ kW}.$$



Factorul de putere al sistemului este

$$k = \frac{P}{S} = 0,8.$$

Pentru sinusoida echivalentă, avem deci,

$$\varphi = \arccos 0,8 = 36^\circ 50'$$

și în consecință, sinusoida echivalentă a curentului este

$$i' = 125 \sqrt{2} \sin(\omega t - 36^\circ 50').$$

Cele două sisteme sînt caracterizate prin aceeași putere aparentă, aceeași putere activă și același factor de putere. Din punct de vedere fizic însă ele sînt complet diferite între ele. Într-adevăr, puterile instantanee în timpul unei perioade sînt în fiecare moment diferite între ele, fiind

$$p = u i$$

în sistemul dat și

$$p' = u i'$$

în cazul utilizării sinusoidelor echivalente.

Pe de altă parte, în sistemul dat, factorul de putere este de natură *deformantă*, pe cînd în cazul utilizării sinusoidelor echivalente este de natură *reactivă*.

Metoda sinusoidelor echivalente reprezintă deci o simplă operație matematică lipsită de bază fizică. Ea poate fi considerată ca o primă aproximație, admisibilă numai în cazul cînd regimul deformant poate fi considerat încă sinusoidal (pentru  $\delta < 5\%$ ).

c) *Metoda analitică*, aplicată la valorile instantanee ale diferitelor mărimi, este singura care corespunde unei situații reale; metoda se utilizează folosind descompunerea în serii FOURIER a undelor de tensiune și curent și lucrînd cu aceste serii. Este evident că metoda este greoaie și devine practic imposibil de aplicat în cazul circuitelor complicate.

d) *Metoda separării puterilor* este o extindere a metodei corespunzătoare din regimul sinusoidal. Ea se utilizează la calculul unor circuite mai complicate, dar la care diversele noțiuni de puteri pot fi ușor determinate. Această metodă este o consecință imediată a teoriei fenomenelor deformante.

e) *Metoda suprapunerii efectelor*. În circuitele cu caracteristici liniare, se poate aplica metoda suprapunerii în sensul că, descompunînd unda periodică nesinusoidală în armonicele sale, se aplică circuitului fiecare armonică în parte, determinîndu-se curentul respectiv, după care se sumează curenții respectivi obținîndu-se curentul rezultat.

Toate metodele de calcul folosite în regimul sinusoidal, și în special reprezentarea mărimilor sinusoidale prin fazori sau prin cantități complexe și calculele făcute cu aceste mărimi, pot fi aplicate *fiecărei armonici luată în parte*. Cum fazorii reprezentînd diversele armonici nu se rotesc cu aceeași viteză, ei nu



pot fi figurați într-o aceeași epură statică; de asemenea diversele cantități complexe reprezentând acești fazori nu trebuie să fie combinate între ele într-un același calcul.

După ce s-a terminat calculul *pentru fiecare armonică* în parte, fie prin metoda geometrică, fie prin metoda analitică, pentru a avea rezultatul se procedează în două moduri diferite, după rezultatul ce se caută :

— dacă este necesar să se cunoască numai valoarea efectivă a rezultantei, atunci se calculează rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor efective ale diverselor armonici ;

— dacă trebuie să se cunoască valoarea instantanee a rezultantei, trebuie să se găsească valoarea instantanee a fiecărui rezultat obținut pentru fiecare armonică în parte și numai după aceea se face suma algebrică a acestora.

*f)* Cauza fenomenelor deformante fiind existența în circuitele electrice a elementelor neliniare, se pot aplica pentru studiul circuitelor în regim deformant metodele de studiu ale circuitelor neliniare. Metodele respective vor fi expuse în capitolul XI.

## 9.4. PRODUCEREA REGIMULUI DEFORMANT

### 9.4.1. GENERALITĂȚI

Aplicarea teoremelor lui KIRCHHOFF unui circuit electric în curent alternativ conduce la ecuații integro-diferențiale de forma

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt - e = u, \quad (9.95)$$

care se rezolvă imediat dacă coeficienții  $R$ ,  $L$  și  $C$  sînt mărimi constante. În acest caz, dacă forța electromotoare din circuit și tensiunea aplicată la borne sînt mărimi sinusoidale, soluția ecuației, curentul din circuit, este o mărime sinusoidală de aceeași formă cu a tensiunii aplicate, avînd un defazaj oarecare față de aceasta.

În cazul cînd coeficienții ecuației (9.95) nu sînt mărimi constante, ci sînt funcții de timp, rezolvarea ecuației este mai dificilă și soluția se obține sub forma unei serii armonice. Rezultă dar că, într-un asemenea circuit curentul este întotdeauna periodic nesinusoidal, chiar dacă forța electromotoare din circuit sau tensiunea aplicată la borne sînt perfect sinusoidale.

Asemenea circuite formează aparate deformante de prima categorie și care sînt cauza inițială și unică de producere a regimului deformant \*.

Această categorie de circuite aparține clasei de circuite neliniare și se întîlnesc foarte des în practică. Astfel, rețelele electrice, care conțin nenumărate transformatoare cu fier saturat, constituie un exemplu de asemenea circuite neliniare.

În consecință, orice circuit neliniar poate fi considerat ca un generator de regim deformant.

\* Vezi 9.1.



## 9.4.2. BOBINA CU MIEZ DE FIER

9.4.2.1. Bobina cu miez de fier alimentată cu o tensiune periodică sinusoidală. În cazul unei bobine cu miez de fier, raportul dintre flux și curent nu mai este constant, chiar dacă fierul nu este saturat. Într-adevăr, din cauza fenomenului de histerezis, acest raport este diferit pentru valorile crescătoare și descrescătoare ale curentului. Legătura dintre flux și curentul de magnetizare, oricare ar fi starea de magnetizare a fierului, este dată de relația

$$N\varphi = Li,$$

din care rezultă

$$L = \frac{N\varphi}{i}.$$

Dacă variația fluxului în raport cu curentul de magnetizare nu este liniară, inductanța  $L$  nu mai este o constantă și bobina respectivă este un aparat deformant.

Fie o bobină cu miez de fier, al cărei miez se presupune a fi format din tole subțiri, bine izolate între ele, astfel, încât curenții FOUCAULT să fie complet evitați. Fie  $\mu$  permeabilitatea fierului. Relația dintre fluxul  $\varphi$  și curentul  $i$  nu este liniară, ci are o formă oarecare corespunzând curbei de magnetizare a fierului. Pe porțiunea rectilinie a caracteristicii de magnetizare, și neglijând fenomenele de histerezis, se poate scrie

$$N\varphi = Li$$

și dacă fluxul este periodic sinusoidal, atunci și curentul respectiv este periodic sinusoidal și în fază cu fluxul.

Pentru porțiunea neliniară din caracteristică, ecuația generală de funcționare a bobinei se poate scrie

$$u = Ri + N \frac{d\varphi}{dt}, \quad (9.96)$$

$N$  fiind numărul de spire și  $\varphi$  fluxul produs.

Neglijând căderea de tensiune ohmică  $Ri$  față de forța electromotoare de inducție, și dacă se alimentează bobina cu o tensiune periodică sinusoidală

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t,$$

atunci fluxul căutat este dat de relația

$$d\varphi = \frac{u}{N} dt = \frac{U\sqrt{2}}{N} \sin \omega t dt,$$

de unde,

$$\varphi = \frac{U\sqrt{2}}{N} \int_0^t \sin \omega t dt = -\frac{U\sqrt{2}}{N\omega} \cos \omega t = \frac{U\sqrt{2}}{N\omega} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$



Rezultă dar, că dacă tensiunea aplicată bobinei cu miez de fier este periodică sinusoidală, fluxul rezultat este și el periodic sinusoidal, însă este defazat cu  $\frac{\pi}{2}$  în urma tensiunii.

Pentru a găsi forma curentului de magnetizare, întrucît nu se cunoaște ecuația curbei de magnetizare

$$\varphi = f(i),$$

se va proceda pe cale grafică. Se face la început ipoteza, că ciclul histerezis este redus la zero, ceea ce este tot una cu a considera curba mediană a ciclului, care coincide cu curba de magnetizare a fierului.

Se construiește curba de magnetizare dedusă pe cale experimentală, curba tensiunii aplicate și a fluxului rezultat (fig. 9.34). Fiecărei valori  $AA'$

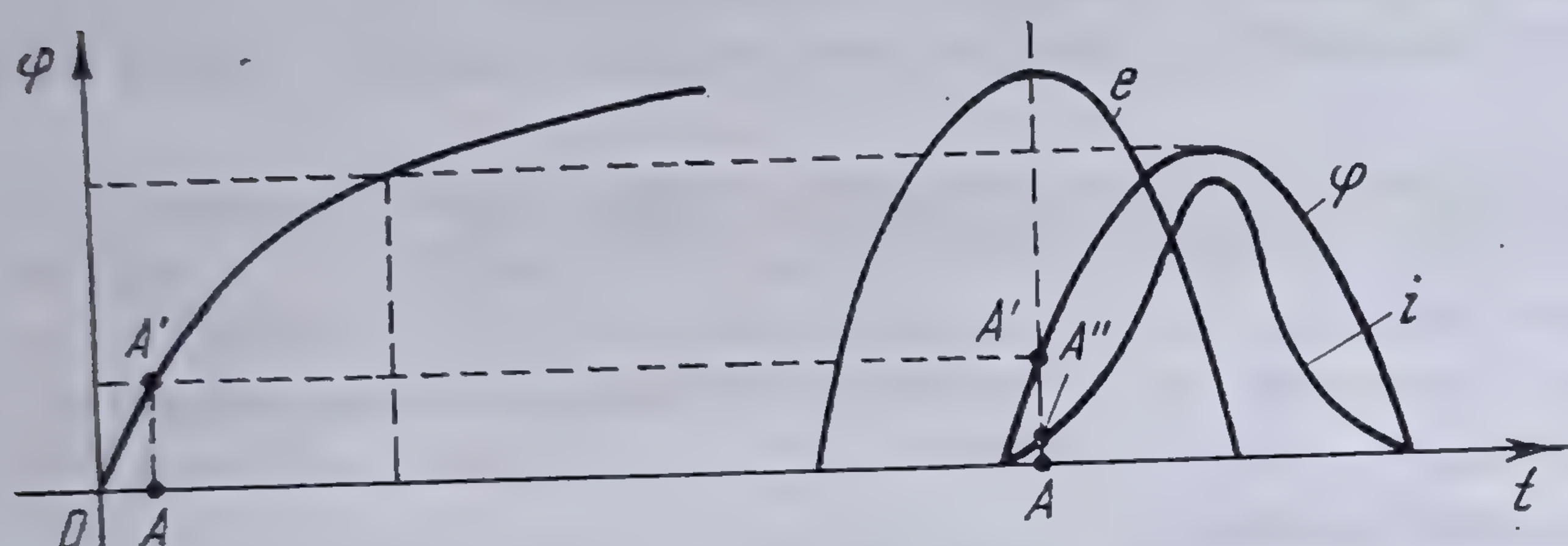


Fig. 9.34. Determinarea formei curentului de magnetizare.

a fluxului, îi corespunde o valoare  $OA$  a curentului. Ducînd această valoare pe ordonata punctului  $A'$  de pe curba  $\varphi = f(t)$ , se obține punctul  $A''$  al curbei  $i = f(t)$ . Procedînd în același mod se obține curba căutată, care este simetrică față de ordonata punctului  $\frac{T}{4}$  și în fază cu  $\varphi$ , dar care este deformată.

Făcînd analiza armonică a acestei curbe, se va constata că unda pe care o reprezintă conține numai armonici impare în sinus și că dintre acestea, în afară de armonica fundamentală, armonica trei este foarte pronunțată și în opoziție cu armonica fundamentală. Luînd ca origine de fază originea de fază a fluxului, ecuația curbei curentului este

$$i = I_1 \sqrt{2} \sin \omega t - I_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t + \sum_{n=2}^{\infty} I_{2k+1} \sqrt{2} \sin (2k+1) \frac{\pi}{2} \sin (2k+1) \omega t.$$

Calculînd puterea consumată în bobina cu miez de fier, în cazul în care s-a presupus  $Ri = 0$ , se obține

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n = U_1 I_1 \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Bobina absoarbe numai putere reactivă

$$Q = U_1 I_1 \sin \frac{\pi}{2} = U_1 I_1$$



și puterea deformată

$$D = U_1 I_d,$$

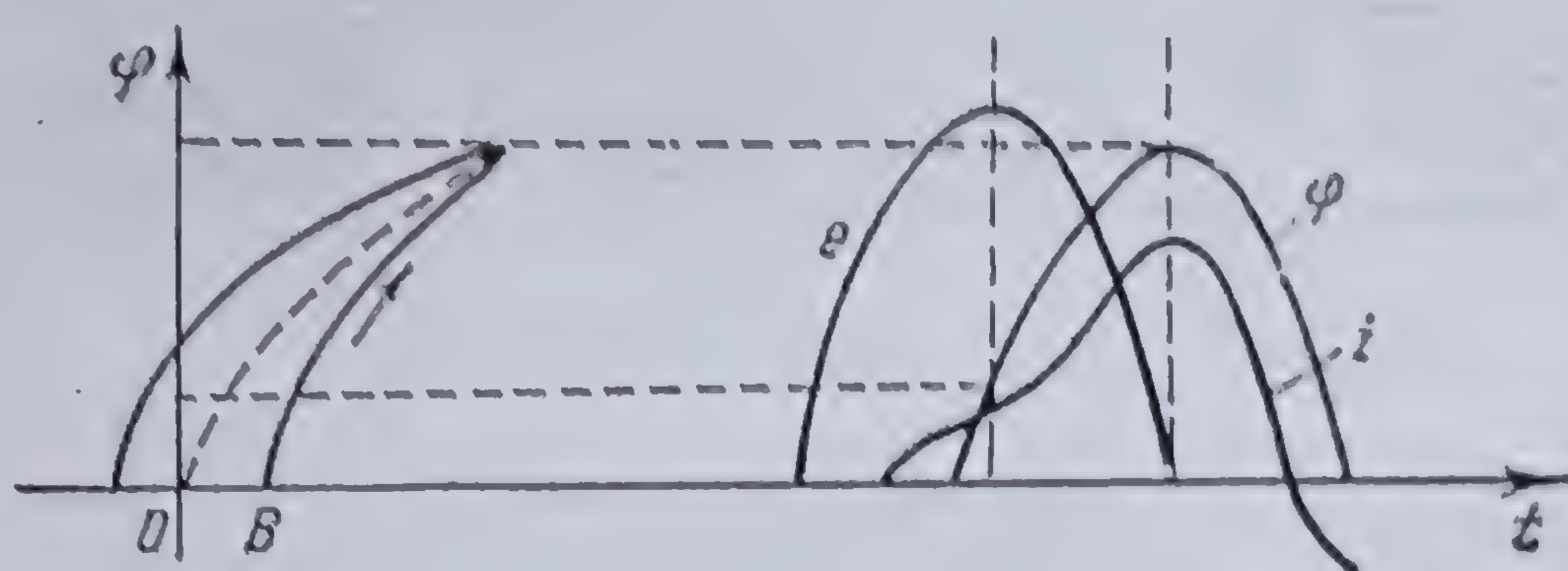
tensiunea fiind perfect sinusoidală.

Fie acum cazul cînd ciclul de histerezis nu mai este neglijabil (fig. 9.35). Curba  $i = f(t)$  se construiește în același mod. Se obține de data aceasta o curbă deformată, care nu mai este simetrică și nici în fază cu fluxul, însă maximum său este în același timp cu maximum fluxului. Valoarea maximă a curentului reprezentat de această curbă se poate determina prin calcul. Fie  $I_m$  această valoare. Cîmpul de magnetizare este

$$H_m = \frac{N I_m}{l} \text{ As/m},$$

$l$  fiind lungimea bobinei.

Fig. 9.35. Determinarea formei curentului de magnetizare în cazul cînd există fenomene de histerezis.



Inducția  $B_m$  va fi

$$B_m = \mu \frac{N I_m}{l} \text{ T}$$

și deci

$$I_m = \frac{l B_m}{\mu N} \text{ A.}$$

Inducția maximă  $B_m$  corespunde vârfului ciclului de histerezis iar  $\mu$  este permeabilitatea magnetică a materialului, definită pentru această valoare maximă.

Pentru calcule este util uneori a se determina sinusoida echivalentă a curentului de magnetizare.

În cazul cînd se neglijează fenomenul de histerezis, puterea activă absorbită pe circuit este nulă și unghiul de defazaj este  $\frac{\pi}{2}$ ; curentul de magnetizare este în fază cu fluxul și în cuadratură în urma tensiunii.

În cazul cînd nu se neglijează fenomenul de histerezis, curentul de magnetizare este defazat înaintea fluxului cu un unghi  $\alpha$ , numit *unghi de avans histerezis*. Rezultă dar că defazajul curentului față de tensiune este  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Puterea activă absorbită de circuit este

$$P = UI \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = UI \sin \alpha.$$



Ea corespunde pierderilor în fier prin histerezis, care se calculează fie cu ajutorul relației lui STEINMETZ

$$P = f V \eta B_m^2$$

în care  $f$  este frecvența,  $V$  volumul de fier,  $\eta$  coeficientul de histerezis al materialului, fie experimental, din curba de histerezis, cu relația \*

$$P = f V \int_0 H dB.$$

În cazul când căderea de tensiune  $Ri$  nu este neglijabilă, din relația (9.92) rezultă că nici fluxul nu mai este sinusoidal.

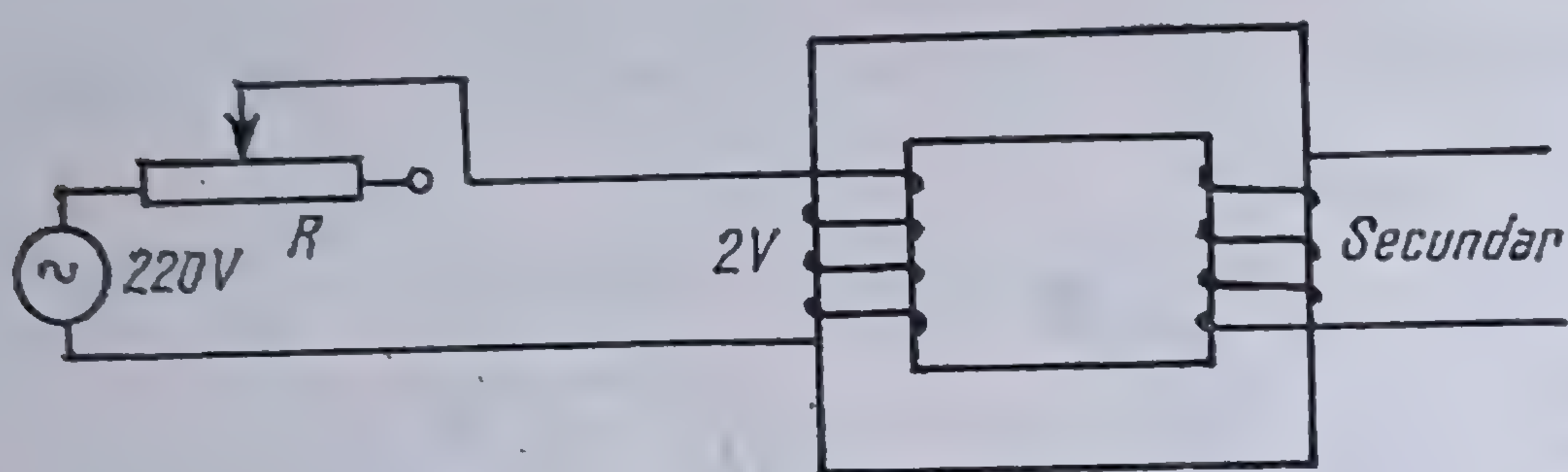


Fig. 9.36. Bobină cu miez de fier alimentată cu curent sinusoidal.

**9.4.2.2. Bobină cu miez de fier alimentată cu un curent periodic sinusoidal.** Fie acum cazul când alimentarea bobinei cu miez de fier se face cu un curent periodic perfect sinusoidal. Aceasta se poate obține, dacă în circuitul de alimentare, se intercalează un rezistor de rezistență foarte mare și tensiunea alternatorului este suficientă pentru ca să dea în aceste condiții, curentul de magnetizare necesar (fig. 9.36).

Făcînd și în acest caz ipoteza că ciclul de histerezis este nul, curba fluxului se determină grafic în același mod ca și în cazul precedent (fig. 9.37). Se obține o curbă turtită, a cărei analiză armonică arată că, în afară de armonica fundamentală, cuprinde o armonică de ordinul 3 în fază cu aceasta, foarte pronunțată; ecuația curbei fluxului poate fi scrisă

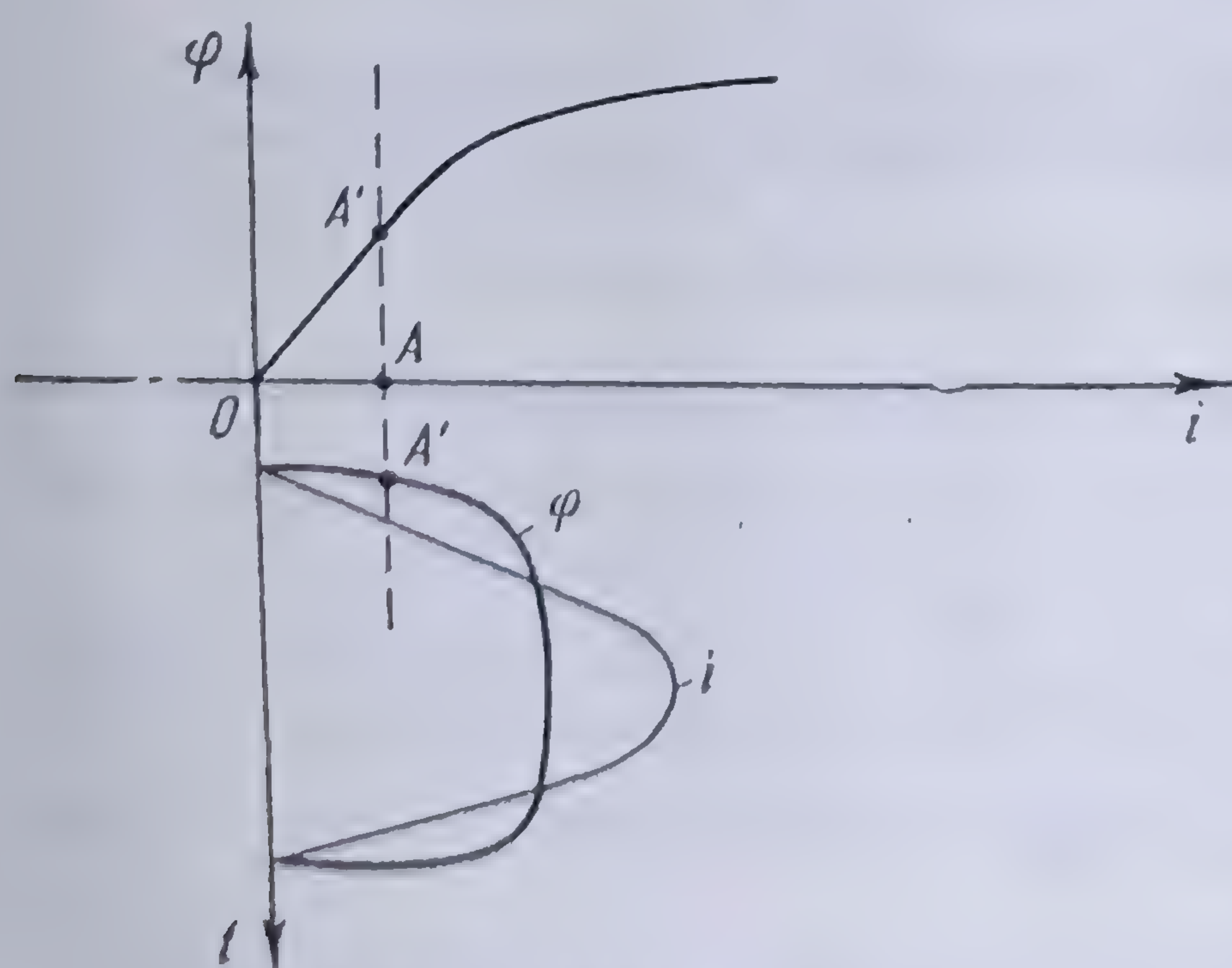


Fig. 9.37. Determinarea fluxului.

\* Vezi 3.7.3.4.

$$\begin{aligned} \varphi = & \Phi_1 \sin \omega t + \Phi_3 \sin 3\omega t + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \Phi_{2k+1} \sin (2k+1) \omega t. \end{aligned} \quad (9.97)$$

Cunoscînd curba fluxului, se poate deduce curba tensiunii la bornele bobinei primare, cu ajutorul relației

$$u = N \frac{d\varphi}{dt}.$$

Această determinare se poate face analitic, dacă se cunoaște ecuația (9.97) a fluxului, dedusă prin analiza armonică sau grafic.



Presupunând că unda de flux nu conține decât armonica 3, se găsește

$$\begin{aligned} u &= N \omega \Phi_1 \sqrt{2} \cos \omega t + 3N \omega \Phi_3 \sqrt{2} \cos 3\omega t = \\ &= U_1 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + U_3 \sqrt{2} \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

în care s-a notat

$$U_1 = N\omega\Phi, \quad \text{și} \quad U_3 = 3N\omega\Phi_3,$$

unda fundamentală a tensiunii fiind defazată cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea undei fundamentale a fluxului.

Luând ca origine de fază originea de fază a armonicii fundamentale a undei de tensiune, ceea ce înseamnă a defaza toate tensiunile cu unghiul  $-\frac{\pi}{2}$ , se obține

$$\begin{aligned} u &= U_1 \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + U_3 \sqrt{2} \sin\left(3\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= U_1 \sqrt{2} \sin\omega t + U_3 \sqrt{2} \sin 3\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = U_1 \sqrt{2} \sin\omega t - U_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t, \end{aligned}$$

adică, se obține o undă de tensiune care are armonica de ordinul 3, în opoziție. Curba aceasta va avea același aspect, ca și curba curentului din cazul precedent.

Pe cale grafică se obține, foarte ușor, același rezultat. Fie curba de flux descompusă în armonica fundamentală și în armonica de ordinul 3 în fază (fig. 9.38). Defazînd armonica fundamentală cu unghiul  $-\frac{\pi}{2}$  față de originea  $O$  și armonica de ordinul 3 cu unghiul  $-\frac{\pi}{6}$  față de aceeași origine, se obține, la altă scară, armonica fundamentală a tensiunii și armonica de ordinul 3 a acesteia în opoziție față de armonica fundamentală. Rezultă imediat că unda rezultantă a tensiunii este o undă ascuțită, asemănătoare cu unda curentului din cazul precedent.

Dezvoltarea în serie FOURIER a funcției reprezentînd această undă este de forma

$$u = U_1 \sqrt{2} \sin \omega t - U_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t + \sum_{n=2}^{\infty} U_{2k+1} \sin (2k+1) \frac{\pi}{2} \sin (2k+1) \omega t.$$

#### 9.4.3. ORIGINEA ARMONICILOR SUPERIOARE

9.4.3.1. Armonica de ordinul 3. Pare paradoxal\*, că aplicînd unui circuit o tensiune periodică perfect sinusoidală, curentul rezultat este periodic nesinu-

\* Vezi 9.3.3.1.

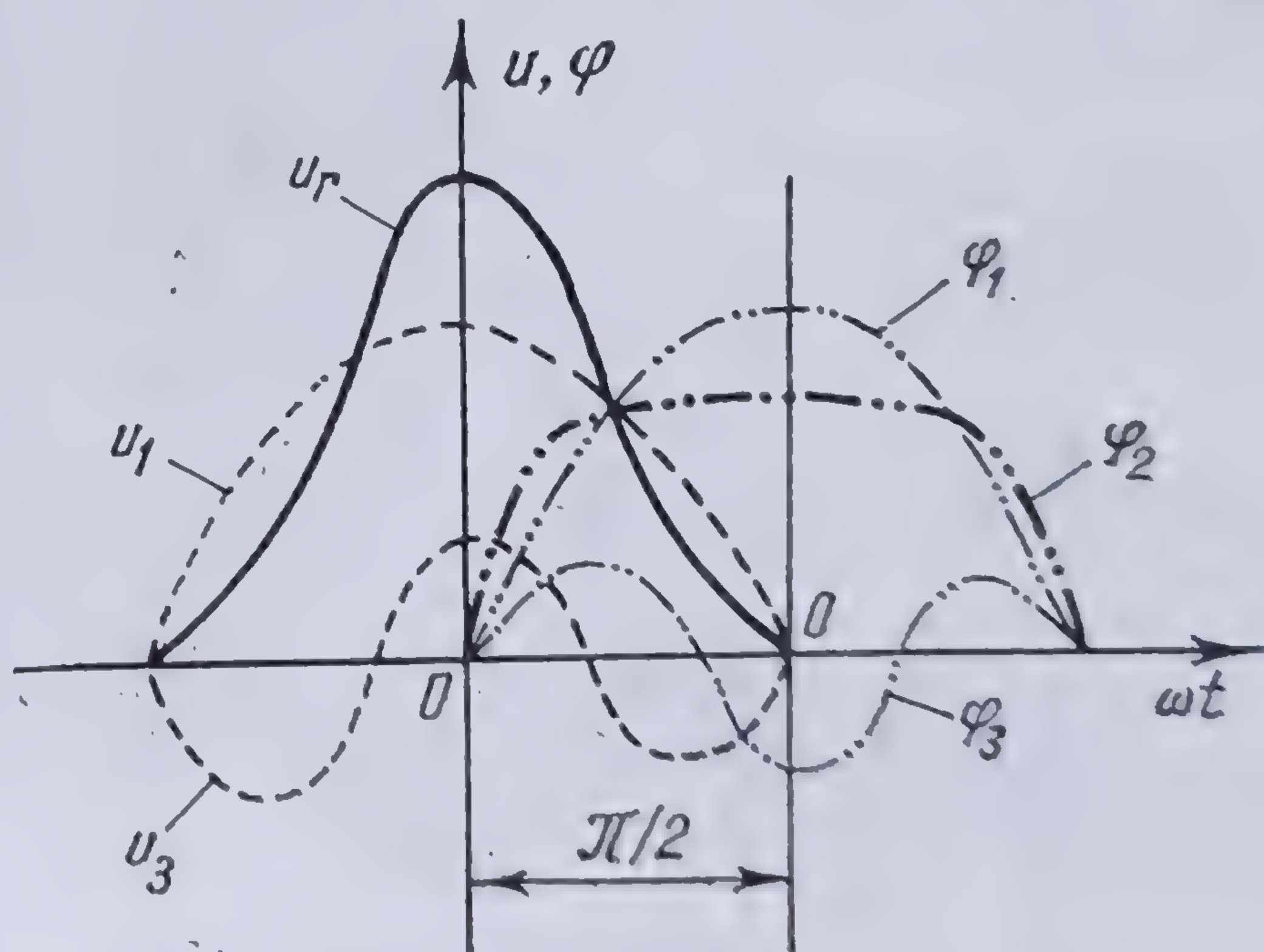


Fig. 9.38. Construcția grafică a curbei tensiunii la bornele bobinei.



soidal. Rezultă dar că originea acestor armonici nu este în unda de tensiune și trebuie căutată în altă parte.

Fie un circuit (fig. 9.39) alimentat de un generator care produce o undă perfect sinusoidală și care are ca utilizare o singură bobină cu miez de fier saturat. Se presupune că în conductoarele de legătură, nu se produce nici un fenomen deformant. Unda de tensiune a generatorului

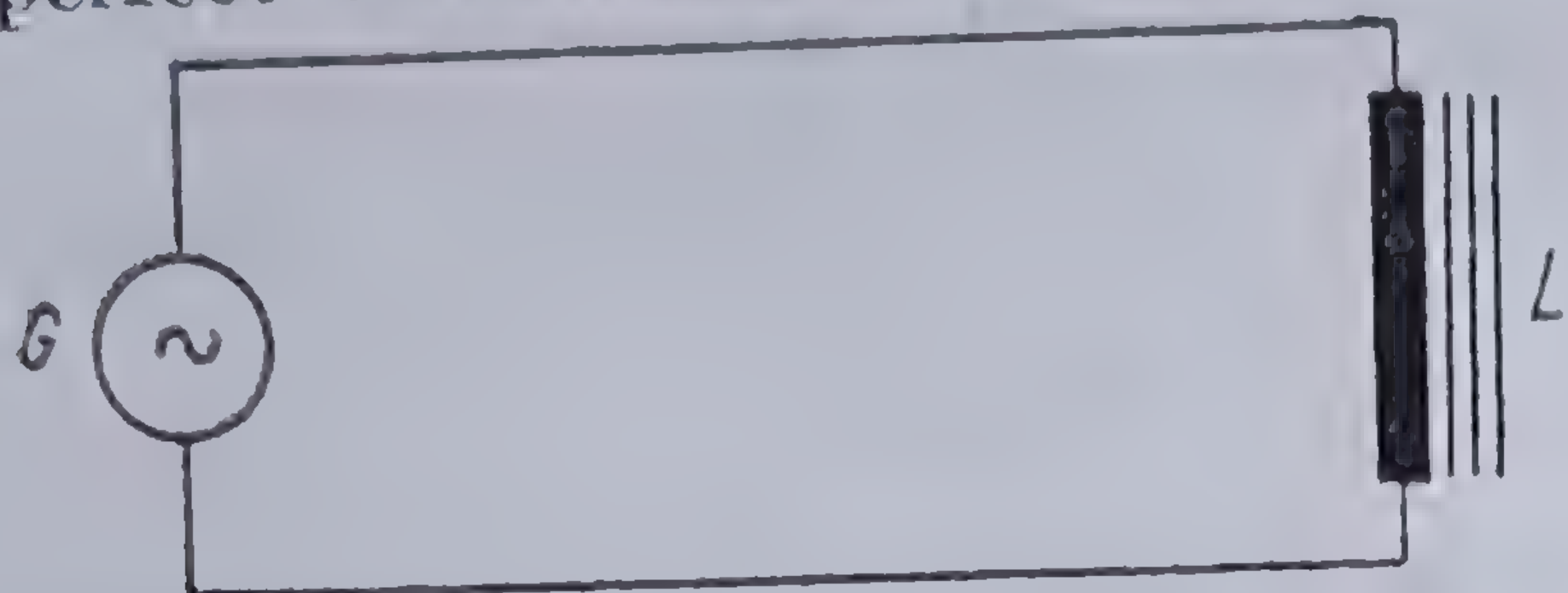


Fig. 9.39. Circuit electric cu bobină cu miez de fier saturat.

$$u_g = U_g \sqrt{2} \sin \omega t,$$

aplicată înfășurării bobinei cu fier, conform legii lui OHM, produce un curent magnetizant  $i_g$ , perfect sinusoidal și defazat cu  $90^\circ$  în urmă (fig. 9.40), a cărui ecuație este

$$i_g = I_g \sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Conform celor ce preced, acesta dă naștere unui flux în fază cu curentul  $i_g$ , dar a cărui undă este turtită. Se presupune, pentru simplificarea expunerii, că unda fluxului nu conține decât armonica de ordinul 3 în fază. Ecuația sa va fi deci de forma

$$\varphi = \Phi_1 \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \Phi_3 \sin 3 \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

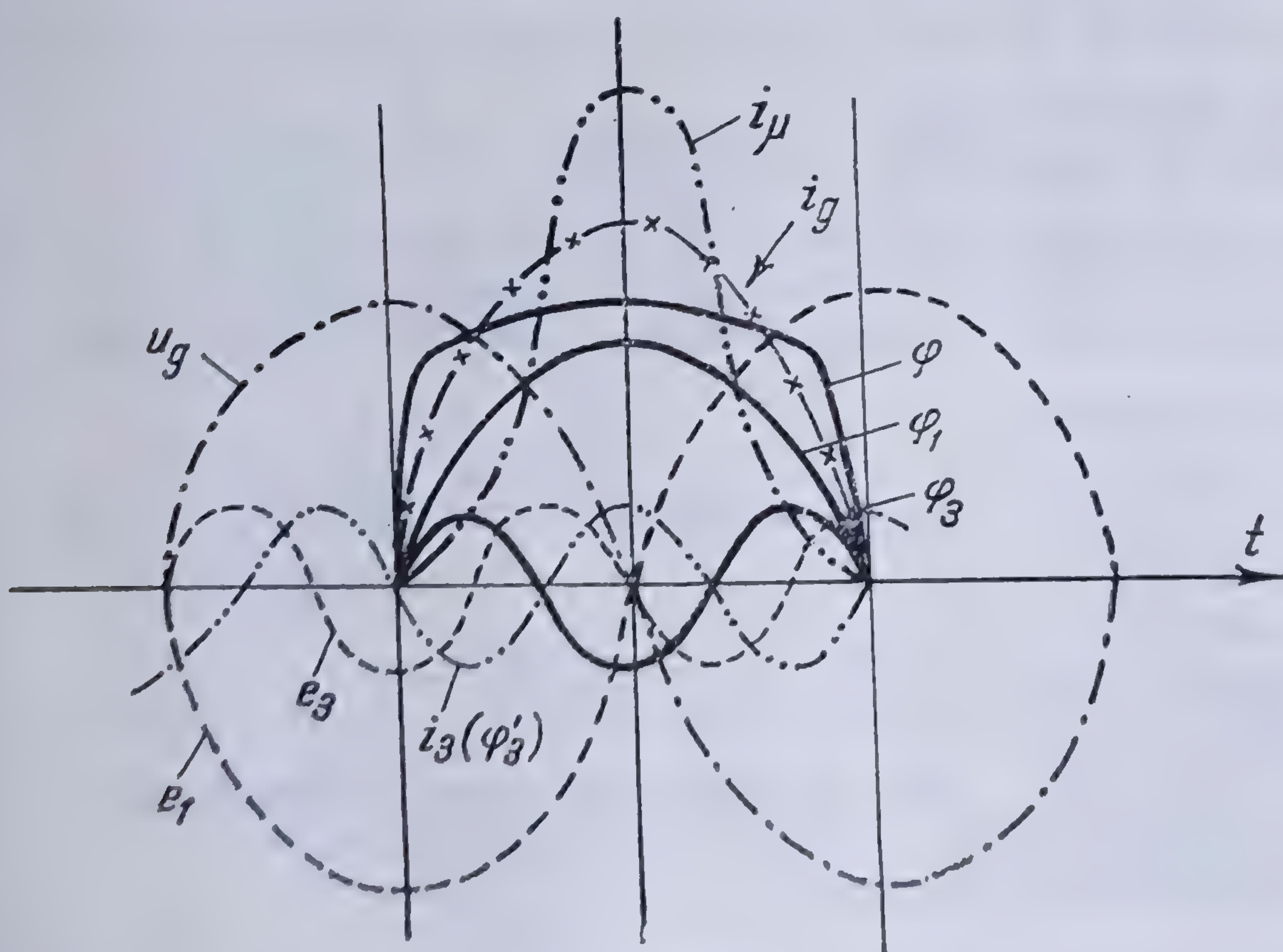


Fig. 9.40. Mecanismul producerii armonicii de ordinul 3.

Fluxul periodic nesinusoidal induce în bobina cu fier, o forță contraelectromotoare de inducție dată de relația

$$\begin{aligned} e &= -N \frac{d\varphi}{dt} = -N \omega \Phi_1 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) - 3N \omega \Phi_3 \cos \left( 3\omega t - \frac{3\pi}{2} \right) = \\ &= -E_1 \sqrt{2} \sin \omega t + E_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t. \end{aligned}$$



Armonica fundamentală a acestei forțe contraelectromotoare este în opoziție cu unda de tensiune  $u_0$  a generatorului, aceste două tensiuni compensându-se.

Armonica de ordinul 3 a acestei forțe electromotoare produce în înfășurarea bobinei cu fier un curent de magnetizare de frecvență triplă, defazat în urma ei cu unghiul  $\frac{\pi}{6}$ .

$$i_3 = -I_3 \sqrt{2} \sin 3 \left( \omega t - \frac{\pi}{6} \right)$$

și care produce un flux în fază cu el

$$\varphi'_3 = -\Phi'_3 \sin 3 \left( \omega t - \frac{\pi}{6} \right).$$

Acest flux este deci în opoziție cu armonica de ordinul 3 a fluxului principal, pe care o anulează.

Fluxul principal rămîne astfel perfect sinusoidal, în schimb curentul de magnetizare va fi egal cu suma  $i_1 + i_3$  a curenților, fiind astfel un curent deformat ascuțit.

Rezultatul coincide astfel cu cele stabilite mai înainte.

Din cele ce preced rezultă că alternatorul furnizează numai armonica fundamentală a curentului de magnetizare precum și curentul necesar pentru acoperirea diverselor pierderi (neglijate în cazul raționamentului de față). Inductanța își produce singură armonicile de curent necesare propriei sale magnetizări; înfășurarea alternatorului face parte însă din circuitul în care circulă acest curent deformant. În acest mod o bobină cu fier este un generator de regim deformant, un aparat deformant de prima categorie.

Se poate vedea de aici și sensul de curgere a energiei. Energia activă și reactivă circulă de la sursă către aparatul deformant, pe undele fundamentale, pe cînd energia deformantă circulă de la aparatul deformant către sursă pe armonicile superioare.

**9.4.3.2. Armonica de ordinul 5 și următoarele.** În raționamentul precedent, s-a făcut aproximația că acest curent periodic sinusoidal de armonică de ordinul 3 produce în circuit un flux *sinusoidal* de armonică de ordinul 3, ceea ce este în contradicție cu cele stabilite anterior. De fapt fluxul produs de acest curent este un flux turtit, care poate fi descompus într-un flux sinusoidal de armonică de ordinul 3 și un flux sinusoidal de armonică de ordinul 5 în opoziție cu acesta.

Raționamentul se face la fel ca și pentru armonica trei și se ajunge astfel, din aproape în aproape, la găsirea originii tuturor armonicilor care compun unda de curent.

**9.4.3.3. Rolul general al saturației fierului și al fenomenului de histerezis.** Modul de generare a armonicilor de ordin superior într-un circuit conținînd o bobină cu miez de fier saturat poate fi arătat și pe o altă cale.

Fie o bobină de inducție cu miez de fier, avînd o rezistență  $R$  și o inducțanță de dispersiuni  $\lambda$ . Se alimentează această bobină cu o forță electromotoare periodică  $e$  și fie  $N\varphi$  fluxul total produs de cele  $N$  spire ale bobinei; ecuația de funcționare a bobinei este

$$e = Ri + \lambda \frac{di}{dt} + N \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9.94)$$



Curba de magnetizare a bobinei corespunde relației

$$N\varphi = f(i).$$

Dacă nu ar fi existat saturație sau histerezis, această curbă ar fi fost dreapta  $OA$  (fig. 9.41), avînd coeficientul unghiular  $L$ ,  $L$  fiind inductanța totală a circuitului. Într-un punct oarecare al caracteristicii reale, curentul poate fi descompus în două părți: o parte  $M'M'' = N\varphi/L$ , corespunzînd prelungerii dreptei  $OA$  și a doua  $M''M = \mathfrak{J}$ . Curentul total va fi deci

$$i = \frac{N\varphi}{L} + \mathfrak{J}.$$

Ecuația (9.94) poate fi deci, scrisă

$$e = Ri + (\lambda + L) \frac{di}{dt} - L \frac{d\mathfrak{J}}{dt}.$$

Dacă fluxul sau curentul sînt periodici sinusoidali,  $\mathfrak{J}$  nu poate fi sinusoidal; totul se petrece ca și cum saturația fierului și fenomenul de histerezis introduc în circuit o forță contraelectromotoare periodică nesinusoidală

$$e' = -L \frac{d\mathfrak{J}}{dt},$$

rezultat analog cu precedentul.

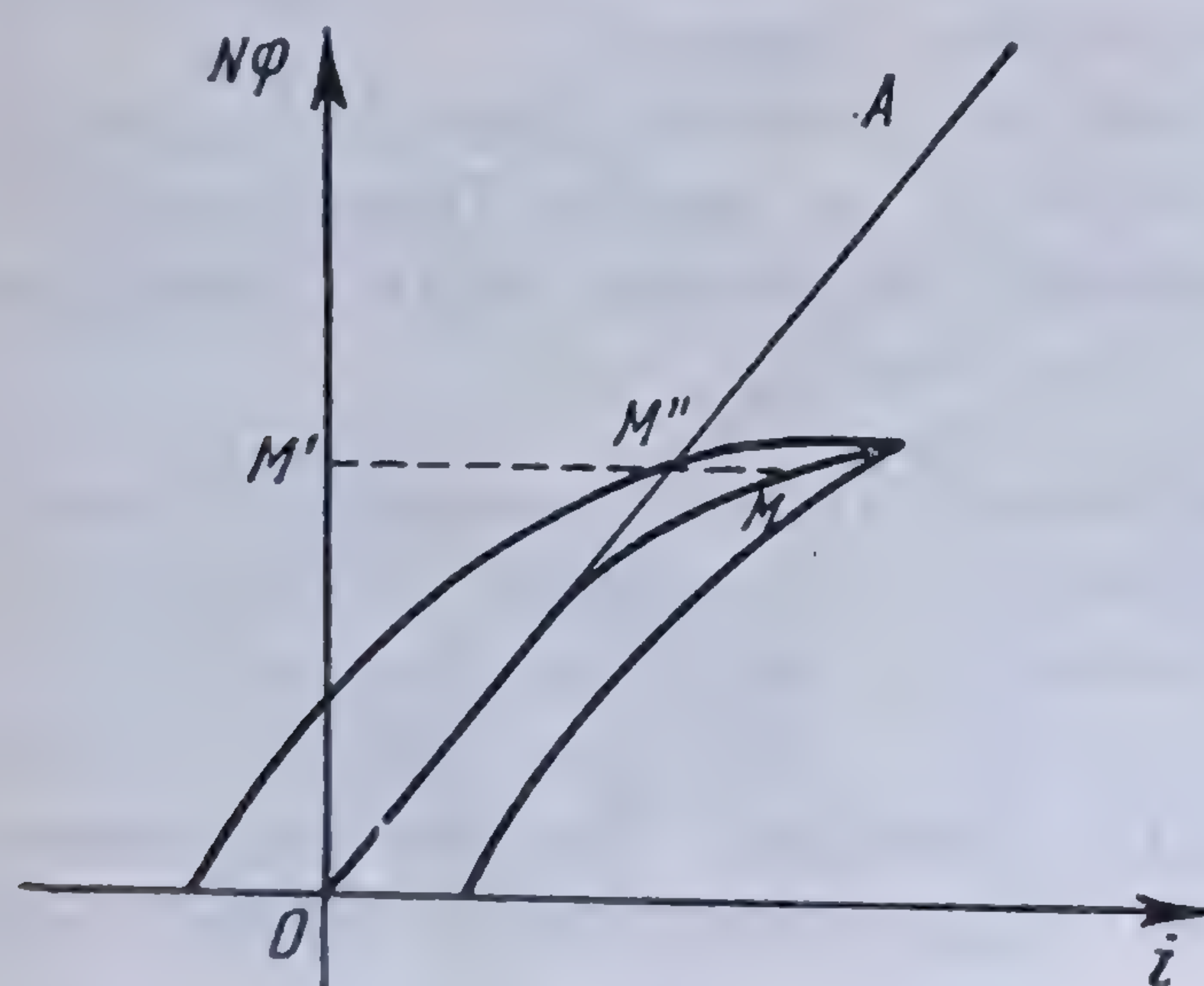


Fig. 9.41. Curba de magnetizare a fierului.

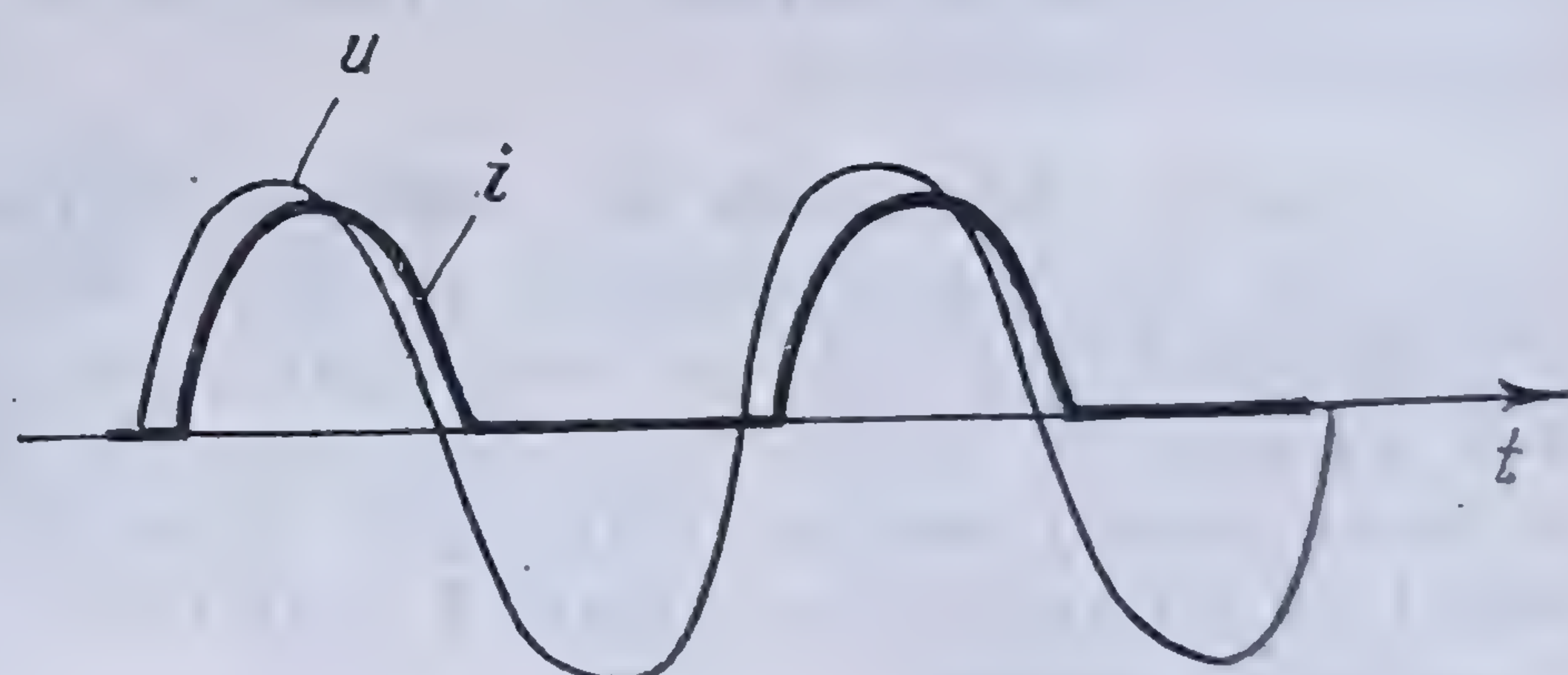


Fig. 9.42. Unda de curent redresat.

#### 9.4.4. ALTE SURSE DE ARMONICI

**9.4.4.1. Supapele electronice.** O supapă electronică este un aparat deformant prin excelență. Se cunoaște funcționarea sa : dacă i se aplică la borne o diferență de potențial sinusoidală, ea nu lasă să treacă decît curentul avînd un anumit sens. Unda de curent va fi formată deci numai din jumătăți de undă, avînd aceeași formă cu unda de tensiune pentru prima jumătate de perioadă și confundîndu-se cu axa timpurilor pentru cealaltă jumătate de perioadă (fig. 9.42). O supapă electronică poate fi considerată ca un circuit format cu o rezistență neliniară, variabilă în timp și anume, pentru o jumătate de perioadă  $R = \text{Const.}$  și pentru cealaltă jumătate de perioadă  $R = \infty$ .



Teoretic curba curentului este în fază cu curba tensiunii. Din cauza montajului însă, și anume din cauza transformatorului care se folosește, ea va avea un defazaj oarecare, în general inductiv. Descompunerea în armonici a acestei unde dă o serie FOURIER completă, adică cu termen liber și cu armonici pare și impare.

**9.4.4.2. Fenomenul corona.** La liniile de transmitere de energie electrică de mare tensiune se observă în jurul izolatoarelor, la locul de legare a conductorului și chiar în jurul conductorului, efluvii de culoare violacee. Aceste descărcări se produc mai ales, atunci când aerul este umed; ele apar totuși și pe vreme uscată. Fenomenul, deși foarte mult studiat, nu este definitiv cunoscut. El se produce în felul următor: din cauza câmpului electric din jurul conductorului aerul se ionizează și la un moment dat dielectricul format din aer este străpuns. Efectul corona produce pierderi de energie care pot ajunge la valori destul de mari și produce, prin fenomenele deformante, efecte supărătoare mai ales asupra liniilor de telecomunicație învecinate.

Efectul deformant poate fi atribuit variației capacității sistemului care variază ciclic după o relație de forma

$$C = C_1 (1 + \alpha \cos 2\omega t).$$

Pînă la ionizarea aerului capacitatea sistemului este constantă și aplicîndu-i o tensiune sinusoidală se obține un curent sinusoidal (fig. 9.43, a). La tensiunea critică, și în momentul producerii descărcării, capacitatea nu mai este constantă, ea urmînd legea indicată mai sus, curentul rezultat va fi deformat (fig. 9.43, b și c).

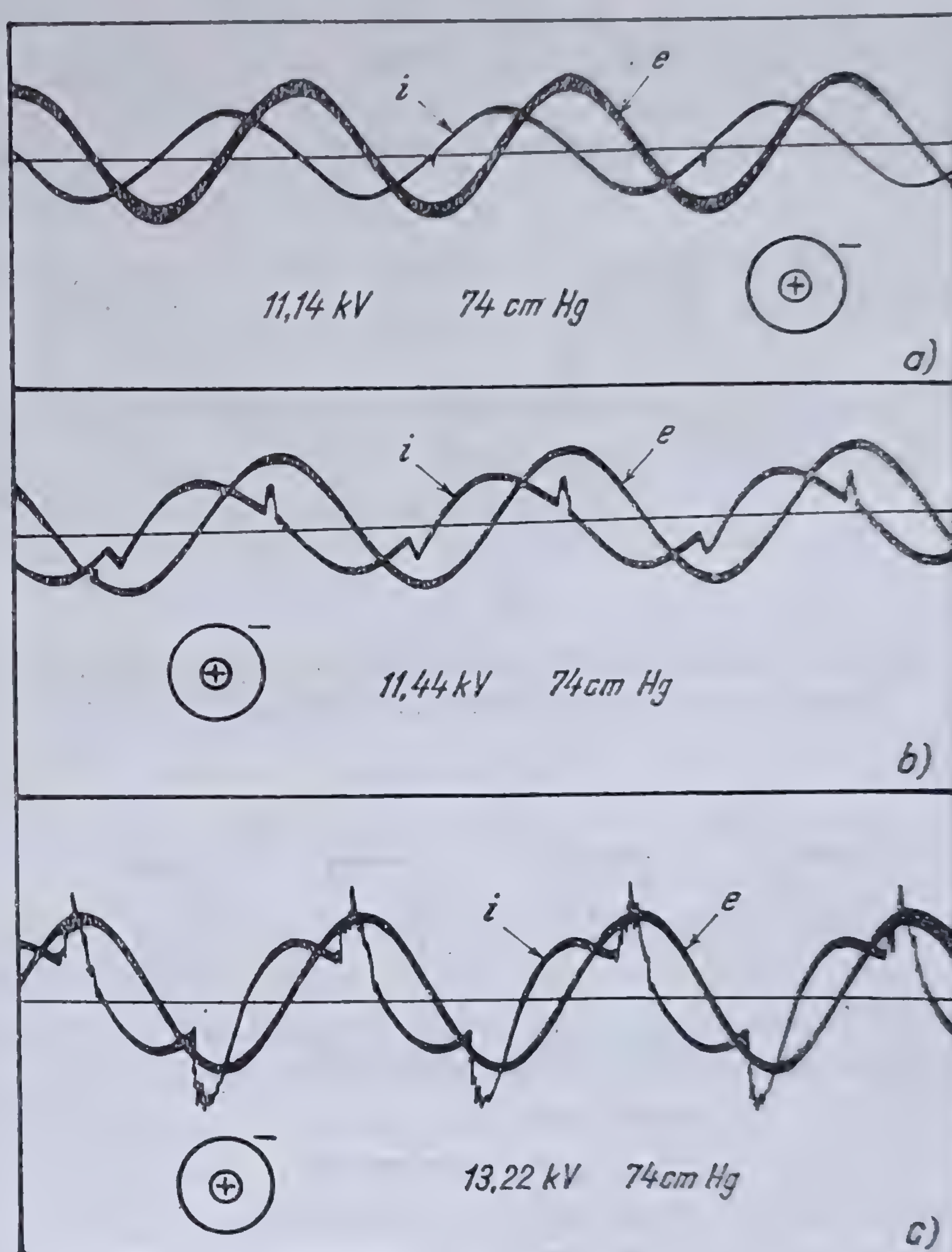


Fig. 9.43. Undele de tensiune și curent în efectul corona: a) înainte de ionizarea aerului; b) și c) după ionizarea aerului

**9.4.4.3. Alternatorul cu unda de tensiune periodică nesinusoidală.** Prin însăși construcția lui, unda de tensiune a unui alternator este periodică nesinusoidală.

Eforturile constructorilor de mașini electrice se concentrează în special în a obține o undă periodică de tensiune cât mai sinusoidală, întrebuintînd pentru aceasta diverse artificii constructive.

Armonicile unde de tensiune la bornele unui alternator pot avea trei surse:

- a) armonicile unde cîmpului;
- b) armonicile de dantură;
- c) armonicile reacției indusului.



Nu vom intra în amănunte, aceste chestiuni ieșind din cadrul lucrării de față\*.

De asemenea, felul înfășurării induse a alternatorului poate fi o cauză importantă a producerii unei nesinusoidale a alternatorului. Fie un alternator cu indusul presupus fără creștături\*\*, la care lățimea  $c$  a bobinei poate fi mai

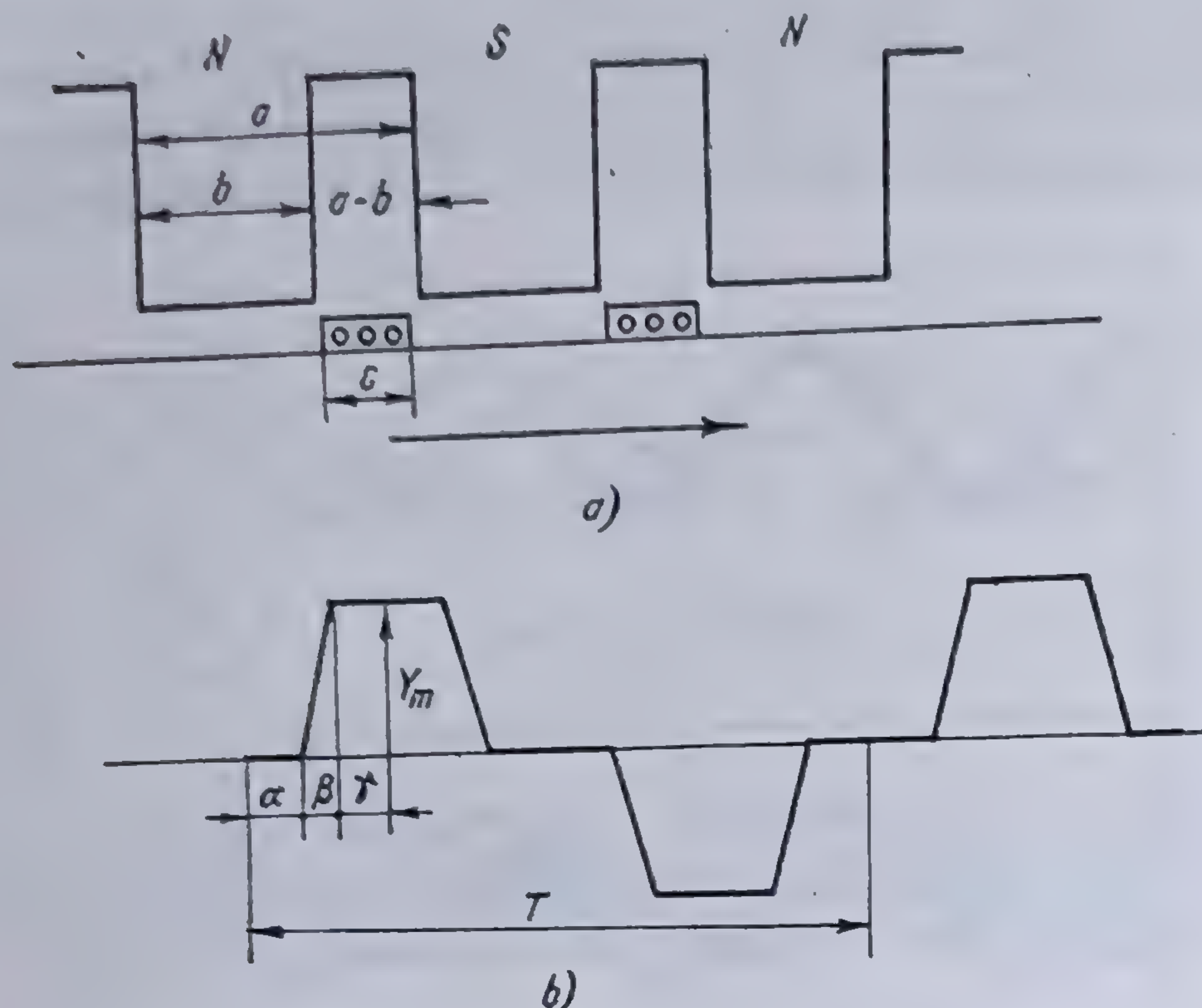


Fig. 9.44. Înfășurare de alternator, a cărei lățime de bobină este mai mică decât un interval interpolar.

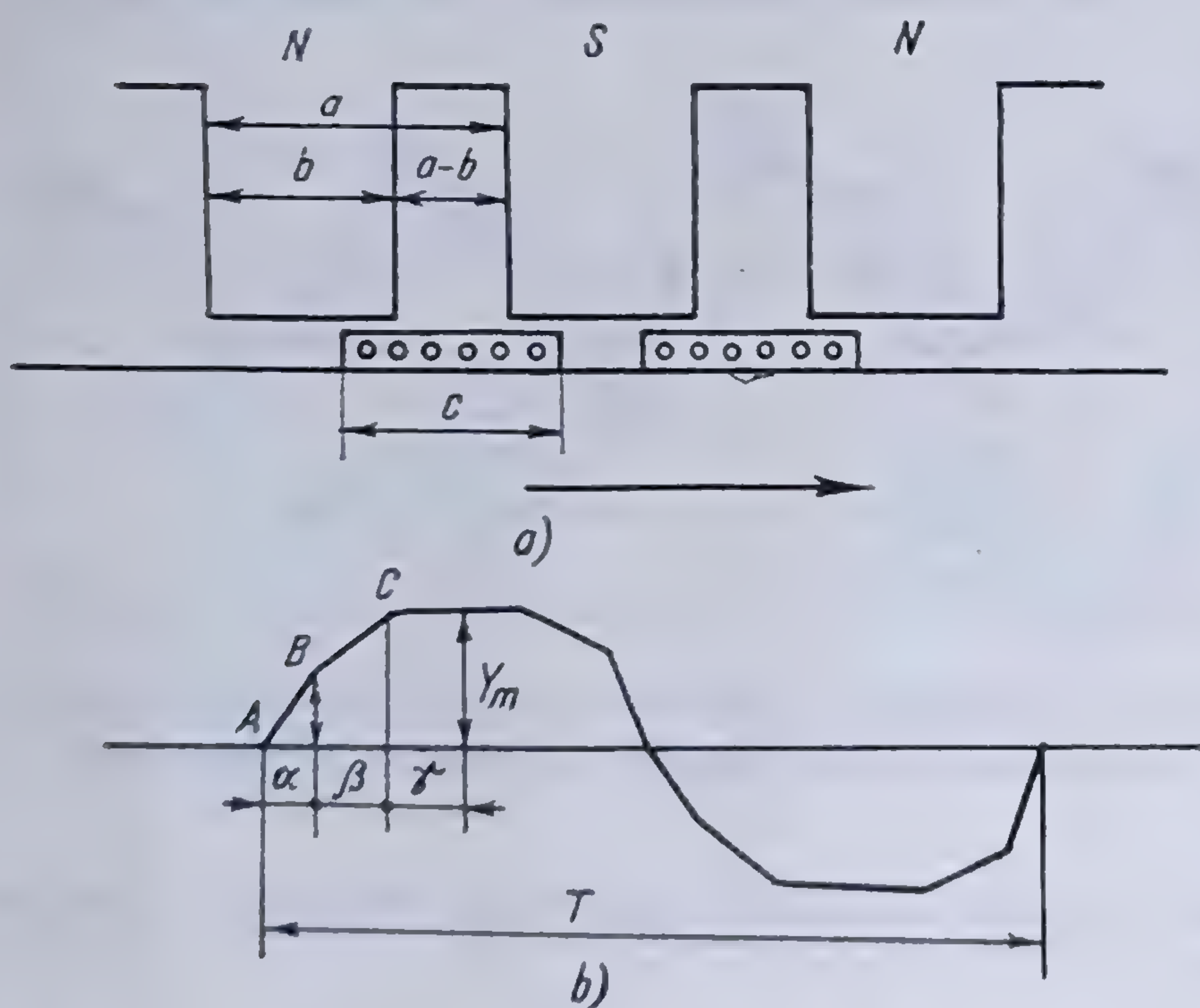


Fig. 9.45. Înfășurare de alternator, a cărei lățime de bobină este mai mare decât un interval interpolar.

mică sau mai mare decât distanța dintre doi poli succesivi (fig. 9.44 și 9.45). Fie  $a-b$  această distanță. Dacă  $c < (a-b)$ , este evident că unda de tensiune va fi nulă pe o porțiune de perioadă; ea va începe să crească liniar pe măsură ce bobina pătrunde sub piesa polară, rămânând constantă atât timp, cât numărul de conductoare rămâne constant sub acțiunea fluxului emis de pol. Fenomenul se produce apoi în sens invers (fig. 9.44, b).

Dacă  $c > (a-b)$ , bobina este în permanență sub acțiunea polului (fig. 9.45). De data aceasta tensiunea va fi nulă, numai în momentul în care axa bobinei coincide cu axa neutră a polilor. După aceea ea crește liniar, din două motive: mai întâi, deoarece numărul de conductoare care este supus acțiunii polului către care se mișcă bobina crește și apoi, deoarece numărul de conductoare, care sînt supuse influenței polului pe care bobina îl părăsește, scade. Cînd bobina a părăsit complet ultimul pol, forța electromotoare crește numai din prima din aceste cauze: ea va crește deci de două ori mai încet decât în cazul precedent; în sfîrșit, forța electromotoare rămîne constantă atunci cînd numărul de conductoare supuse acțiunii unui pol rămîne con-

stant. Aspectul unei unde de tensiune este arătat în figura 9.45, b.

Dezvoltînd în serie FOURIER aceste unde, se obține

$$e = \frac{16 N f \Phi a^2}{\pi^2 b c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi b}{2a} \sin \frac{(2k+1)\pi c}{2a} \sin (2k+1) \omega t.$$

\* Vezi [41] pag. 293.

\*\* Un asemenea alternator nu se mai construiește astăzi.



După A. POTIER [41] tensiunea unui asemenea alternator cu indusul fără creștături și cu poli alternați este independentă de lărgimea polului, de lărgimea intervalului interpolar și de lărgimea bobinei.

În același mod se arată că și în cazul alternatorului la care bobinajul este așezat în creștăturile indusului, unda de tensiune obținută este periodică nesinusoidală și are curba formată din unul sau mai multe dreptunghiuri cu regiune de ordonată nulă.

În afară de armonicile provenite din cauza cîmpului, se mai produc armonici datorite faptului că aceste creștături sînt deschise și deci se produce o variație a fluxului, precum și din cauza saturației dinților.

În sfîrșit, dacă forța magnetomotoare a indusului, în loc să fie periodică sinusoidală de-a lungul indusului, are armonici, acestea produc cîmpuri învîrtitoare cu viteze de sincronism diferite, care provoacă pulsații ale cîmpului principal și armonici ale forței electromotoare induse.

Sînt o serie întreagă de măsuri care se iau pentru a se micșora efectul tuturor acestor cauze și pentru a se obține la alternator o curbă de tensiuni cît mai sinusoidală posibil.

Este evident că un alternator, a cărui undă de tensiune nu este sinusoidală, este o cauză principală de producere a unui regim deformant. Un asemenea alternator constituie un aparat deformant de prima categorie.

## 9.5. EFECTELE REGIMULUI DEFORMANT

### 9.5.1. GENERALITĂȚI

Un regim deformant poate produce într-o rețea electrică oarecare, efecte de diferite naturi. Astfel, poate lua naștere fenomenul de rezonanță, care se poate produce pentru unele armonici ale regimului deformant, ale cărui efecte pot fi mai mult sau mai puțin grave; un regim deformant poate fi, de asemenea, amplificat din cauza aparatelor deformante de categoria a doua care pot exista într-o rețea. Este suficient a reaminti inductanțele cu fier care, fiind alimentate cu o tensiune periodică pur sinusoidală, curentul de magnetizare produs este deformat, pentru a se vedea cît de importantă poate fi deformația acestui curent dacă însăși tensiunea respectivă este deformată.

Prezența în circuit a aparatelor deformante de categoria a doua poate agrava efectele pe care le produce un regim deformant.

Cunoașterea acestor efecte este necesară pentru a preîntîmpina eventualelor agravare sau pentru a găsi mijloacele de îndreptare.

### 9.5.2. CONDENSATOR ALIMENTAT CU O TENSIUNE DEFORMATĂ

Fie un condensator avînd o capacitate de  $C$  farazi, care este alimentat cu tensiunea

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} (U'_k \sqrt{2} \sin k\omega t + U''_k \sqrt{2} \cos k\omega t). \quad (9.99)$$



Presupunând că acest condensator este perfect, adică nu are pierderi prin dielectric, curentul ce-l străbate este dat de relația (4.59) de unde, ținând seama de expresia tensiunii, se obține

$$\begin{aligned} i &= C\omega \sum_{k=0}^{\infty} k \sqrt{2} (U'_k \cos k\omega t - U''_k \sin k\omega t) = \\ &= C\omega \sum_{k=0}^{\infty} k \sqrt{2} \left[ U'_k \sin \left( k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) + U''_k \cos \left( k\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

În consecință, curentul rezultat este mult mai deformat decât tensiunea care i-a dat naștere, fiecare armonică fiind amplificată de un număr de ori egal cu ordinul său. De asemenea, curentul rezultat este defazat cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea tensiunii.

*Exemple :* 1. Fie un condensator de  $32 \mu\text{F}$  alimentat cu o tensiune nesinusoidală compusă numai din armonica fundamentală și armonica de ordinul 5,

$$u = 100 \sin \omega t + 2 \sin 5\omega t,$$

amplitudinea armonicii 5 fiind 2% din armonica fundamentală.

Se găsește

$$i = 10 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + 1 \sin \left( 5 \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ A.}$$

Se vede că în acest caz amplitudinea armonicii de ordinul 5 a undei de curent a devenit 10% din amplitudinea undei fundamentale. De asemenea, curentul rezultat este defazat cu  $(\pi/2)$  înaintea tensiunii.

2. Se aplică unui condensator o tensiune a cărei undă este reprezentată printr-o curbă formată din triunghiuri și a cărei ecuație este

$$u = \frac{8U}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \sin(2k+1)\omega t; \quad (9.100)$$

curentul rezultat va fi

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du}{dt} = \frac{8C\omega U}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \cos(2k+1)\omega t = \\ &= \frac{8C\omega U}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \sin \left[ (2k+1)\omega t + \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

Se observă ușor că ecuația curentului se aseamănă foarte mult cu ecuația undei formată din dreptunghiuri\*, cu deosebirea că unda curentului obținut este mai deformată, având unii termeni negativi, — acei corespunzători lui  $k$  impar. Rezultă dar, că aplicând unui condensator o tensiune deformată triunghiulară,

\* Vezi [10] pag. 202.



această amplifică deformația și unda curentului respectiv este mai deformată. De asemenea, acest curent este defazat cu  $\frac{\pi}{2}$  înaintea tensiunii respective.

Acest lucru se poate arăta calculând coeficientul de distorsiune al celor două curbe \*. Pentru curba de tensiune

$$U = 0,577 U.$$

Reziduul deformant al curbei de tensiune este

$$U_d = \sqrt{U^2 - \frac{1}{2} U_1^2} = 0,0665 U,$$

de unde, rezultă coeficientul de distorsiune

$$\delta_T = \frac{0,0665}{0,577} = 11,5 \%.$$

Pentru curba de curent se obține la fel valoarea efectivă

$$I = \frac{8C\omega U}{\pi^2 \sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin^2(2k+1) \frac{\pi}{2}} = \frac{2C\omega U}{\pi^2} \sqrt{\pi^2 + 4}$$

și reziduul deformant al undei de curent

$$I_d = \frac{2C\omega U}{\pi^2} \sqrt{\pi^2 - 4},$$

de unde rezultă coeficientul de distorsiune corespunzător

$$\delta_I = 65,47 \%.$$

Se vede imediat că  $\delta_I > \delta_T$  și anume cam de 5,7 ori mai mare. Curentul rezultat este deci mai deformat decât tensiunea.

### 9.5.3. BOBINĂ DE INDUCTANȚĂ ALIMENTATĂ CU O TENSIUNE DEFORMATĂ

Fie cazul unei inductanțe la bornele căreia se aplică tensiunea deformată a cărei undă este reprezentată de o curbă a cărei ecuație este dată de relația (9.99).

Neglijând căderea de tensiune ohmică în această inductanță, curentul rezultat se calculează cu ajutorul relației (4.58) și este

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int_0^t u \, dt = \frac{1}{\omega L} \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{k} U'_k \sqrt{2} \cos k\omega t + \frac{1}{k} U''_k \sqrt{2} \sin k\omega t \right) = \\ &= \frac{1}{L\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k} U'_k \sqrt{2} \sin \left( k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{k} U''_k \sqrt{2} \cos \left( k\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

\* Pentru calcule s-au folosit tabelele lui RIJIK și GRADSTEIN; vezi [244].



Rezultă din această relație, că o inductanță introdusă într-un circuit funcționând în regim deformant *îmbunătățește* regimul deformant, întrucât diversele armonici de curent sînt împărțite prin ordinul lor, ceea ce le micșorează importanța.

Pentru a vedea calitativ importanța acestei îmbunătățiri, să aplicăm unei bobine de inductanță  $L$  aceeași tensiune deformată, a cărei undă este formată din triunghiuri (9.100). Rezultă un curent a cărui undă are ecuația

$$i = \frac{8U}{\pi^2 L \omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \sin \left[ (2k+1) \omega t - \frac{\pi}{2} \right].$$

Se observă ușor că, în acest caz, ecuația undei de curent se aseamănă foarte mult cu ecuația undei formată din arce de parabolă\*, unda de curent fiind însă mai deformată, întrucît termenii seriei pentru care  $k$  este impar sînt negativi.

Dacă se procedează ca mai sus și se calculează coeficientul de distorsiune al curbei curentului obținut, se găsește

$$I = \frac{8U}{\pi^2 L \omega \sqrt{2}} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} \sin^2(2k+1) \frac{\pi}{2}} = 1,000396 \frac{8U}{\pi^2 L \omega \sqrt{2}} \text{ A},$$

$$I_d = \frac{8U}{\pi^2 \sqrt{2} L \omega} \times 0,019903 \text{ A}$$

și deci,

$$\delta_I = 1,99\%;$$

în acest caz

$$\delta_I < \delta_T$$

și anume de 5,77 ori mai mic.

**OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ:** Dacă pentru îmbunătățirea factorului de putere al unei rețele se folosesc condensatoare, fără a se fi examinat în prealabil regimul de funcționare al rețelei, regimul deformant se va accentua și în loc să se îmbunătățească factorul de putere, acesta poate fi înrăutățit.

#### 9.5.4. EFECTE DIVERSE ALE FENOMENELOR DEFORMANTE

În afară de efectele arătate mai sus, fenomenele deformante mai pot produce și alte fenomene, tot atît de supărătoare. Printre acestea se citează *creșterea puterii aparente, creșterea pierderilor de putere activă pe liniile electrice, creșterea impedanței aparente* etc.

**9.5.4.1. Creșterea puterii aparente.** Dacă se notează cu  $S$  puterea aparentă datorită numai armonicii fundamentale și cu  $S'$  puterea aparentă totală din circuit, atunci creșterea de putere aparentă este dată de relația

$$\zeta = \frac{S' - S}{S}. \quad (9.101)$$

\* Vezi [10] pag. 205.



Ținând seama, că

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ și } S' = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2},$$

relația (9.97) poate fi scrisă

$$\zeta = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2} - \sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \sqrt{1 + \frac{D^2}{P^2 + Q^2}} - 1 = \sqrt{1 + \tau^2} - 1,$$

în care  $\tau$  este factorul deformant al regimului\*.

Dezvoltând în serie radicalul și oprind numai primii doi termeni ai dezvoltării, întrucât valoarea lui  $\tau^2$  este în general mică, se obține

$$\zeta' \cong \frac{1}{2} \tau^2.$$

Fie, de exemplu, cazul unei distribuții trifazate\*\* pentru care tensiunea periodică este practic sinusoidală, cu  $U_{ef} = 5,2$  kV și un curent periodic nesinusoidal, avînd amplitudinea armonicii fundamentale de 122,85 A. Pentru acest caz s-a determinat, prin calcul, din oscilograma obținută:  $P = 750$  kW;  $Q = 180$  kVAR;  $D = 212$  kVAD.

Calculînd factorul deformant al regimului, se găsește

$$\tau^2 = \frac{212^2}{750^2 + 180^2} = 0,076$$

de unde, rezultă

$$\zeta = 3,7\%,$$

calculul fiind făcut cu formula exactă, sau

$$\zeta' = 3,8\%$$

calculul fiind făcut cu formula aproximativă.

9.5.4.2. Creșterea pierderilor de putere activă pe linie. În ceea ce privește pierderile de putere activă pe linie, dacă  $R$  este rezistența conductorului, atunci acestea sînt date de relația

$$p' = 3R \frac{P^2 + Q^2 + D^2}{3U^2} \text{ W};$$

în regimul sinusoidal ele se reduc la

$$p = 3R \frac{P^2 + Q^2}{3U^2} \text{ W};$$

\* Vezi 9.3.2.6.

\*\* Vezi [40].



deci, creșterea de pierderi de putere activă este dată de relația \*

$$\xi = \frac{p' - p}{p} = \frac{D^2}{P^2 + Q^2} = \tau^2.$$

În cazul exemplului precedent se găsește

$$\xi = \frac{212^2}{750^2 + 180^2} = 7,60\%.$$

**9.5.4.3. Creșterea impedanței aparente.** Fie un circuit electric format dintr-un rezistor de rezistență  $R$ , o bobină de reactanță  $X_L$  și un condensator de reactanță  $X_C$  în serie. Dacă se măsoară impedanța corespunzătoare în regim sinusoidal, se găsește

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

Dacă se măsoară aceeași impedanță în regim deformant, se va găsi o valoare  $Z'$  care, în general, va fi diferită de  $Z$ .

Se presupune că măsurătorile se fac cu aparate termice, astfel ca să nu se introducă erori prin măsurătoare.

Să vedem care este sporul de impedanță datorit regimului deformant. Fie acest regim deformant, definit de unda de tensiune

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin k \omega t$$

și de unda de curent

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin (k \omega t - \varphi_k).$$

Impedanța corespunzătoare este

$$Z' = \frac{U}{I},$$

dar,

$$U = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$$

---

\* S-a presupus că tensiunea în regim deformant este sinusoidală; în cazul real,

$$\xi = \left( \frac{D^2}{P^2 + Q^2} + 1 \right) \frac{1}{1 + \delta_u^2} - 1,$$

în care  $\delta_u$  este coeficientul de distorsiune al tensiunii și în general,  $\delta_u^2 \ll 1$ .



și

$$I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k}X_C\right)^2}}$$

de unde, rezultă

$$Z' = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k}X_C\right)^2}}}$$

sau

$$Z' = Z \sqrt{\frac{U_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}{U^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R^2 + (X_L - X_C)^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k}X_C\right)^2}}} = Z K,$$

$K$  fiind o constantă.

Se vede imediat că  $Z'$  depinde atât de regimul deformant, cât și de constituția circuitului, raportul  $Z'/Z = K$  putînd fi mai mare sau mai mic decît 1, după cum circuitul este mai inductiv sau mai capacitiv.

**9.5.4.4. Creșterea erorii aparatelor de măsură.** În general, prezența unui regim deformant influențează condițiile de funcționare ale aparatelor de măsură și în special precizia acestora\*.

Această influență este mai puțin importantă la ampermetrele și voltmetrele electromagnetice, electrodinamice și electrostatice, cu condiția ca echipajele mobile să fie practic lipsite de piese magnetice saturate.

Pentru aparatele de inducție această concluzie este valabilă, numai dacă unda de curent sau de tensiune nu conține termenul constant. În cazul cînd acest termen există, aparatul va înregistra întotdeauna în minus. Eroarea corespunzătoare, avînd caracterul unei erori sistematice, va fi dată de relația

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{Y^2 - Y_0^2} - Y}{Y}.$$

Influența este mai mare asupra wattmetrelor electrodinamice și asupra contoarelor de aceeași clasă (de tipul contorului THOMSON). Un regim deformant produce o mărire a erorilor acestor aparate. Aceste erori pot atinge în practică o valoare negativă de ordinul 7% pentru regimurile inductive.

Experiența ne-a arătat că aceste erori devin pozitive pentru regimurile capacitive\*\*.

\* Vezi [5] pag. 75.

\*\* Vezi [5] pag. 76.



Aceste situații sînt teoretic explicabile, dat fiind că erorile acestor aparate sînt datorite, în primul rînd, reactanței circuitului derivație. Astfel, pentru armonicile de ordinul  $k$ , ar trebui să acționeze asupra wattmetrului un cuplu proporțional cu puterea dată de aceste armonici,

$$P_k = U_k I_k \cos \varphi_k.$$

În realitate, curentul care traversează bobina voltmetrică a wattmetrului și care este proporțional cu tensiunea  $U_k$  este mai mic decît curentul normal, deoarece impedanța circuitului de tensiune

$$Z_k = \sqrt{R^2 + L^2 k^2 \omega^2}$$

este, în acest caz, mai mare decît impedanța normală din cauza frecvenței corespunzătoare.

Rezultă deci, că puterea dată de fiecare grupă de armonici contribuie la formarea cuplului activ total al wattmetrului cu cantități mai mici decît acelea care contribuie la formarea puterii totale în circuit.

Pentru contoarele de inducție, regimul deformant poate să mărească erorile pînă la aproximativ 30% în minus.

Măsura energiei electrice cu un contor electric este egală cu numărul total de rotații efectuat de disc într-un anumit timp

$$W_t = \int_{t_1}^{t_2} \omega' dt.$$

În cazul unui regim deformant, viteza de rotație a discului este dată de relația\*

$$\omega' = (K_1 - K_2) P + K_2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 - k^2) P_k + K_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{k} - \frac{F}{B^2}$$

în care  $K_1$ ,  $K_2$  și  $K_3$  sînt factori depinzînd de elementele constructive ale contorului,  $F$  un factor ce caracterizează frecările în contor,  $B$  inducția magnetică a magnetului permanent,  $k$  ordinul armonicii,  $P$  puterea totală din circuit,  $P_k$  puterea produsă de o pereche de armonici și  $U_k$  valoarea efectivă a armonicii de tensiune de ordinul  $k$ .

Ținînd seama că un contor nu poate fi reglat decît pentru o singură armonică, funcționînd într-un regim deformant, indicațiile sale vor fi întotdeauna eronate.

Neglijînd diferența

$$K_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{k} - \frac{F}{B^2},$$

care, în general, este mică, eroarea unui contor de inducție funcționînd în regim deformant este dată de relația

$$\epsilon = \frac{K_2}{K_1 - K_2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - k^2) \frac{P_k}{P}.$$

\* Vezi [11].



Nu se poate spune nimic apriori asupra acestei expresii a erorii contorului. Într-adevăr, ea poate avea termeni pozitivi sau negativi, în raport cu puterea  $P_k$  al cărei semn depinde de defazajul dintre undele de curent și de tensiune corespunzătoare; ea mai depinde și de semnul expresiei  $K_1 - K_2$ , care depinde numai de elementele constructive ale contorului și deci este independentă de regimul deformant corespunzător. Ținând însă seama de faptul că ordinul unei armonici superioare este un număr întreg, întotdeauna mai mare ca unitatea ( $k > 1$ ), este foarte probabil ca, în general, eroarea contorului să fie negativă și, deci, un contor reglat în regim sinusoidal și funcționând în regim deformant va indica în *minus* \*.

Dacă în regimul deformant ambele curbe — de curent și de tensiune — au termeni constanți, contoarele de inducție nu vor înregistra energia corespunzătoare și eroarea suplimentară, avînd caracterul unei erori sistematice, va fi

$$\varepsilon' = - \frac{U_0 I_0}{U_0 I_0 + P}.$$

Aparatele termice cu fir cald sînt singurele aparate a căror funcționare nu este influențată de regimul deformant \*\*.

## 9.6. REGIMUL DEFORMANT ÎN SISTEMELE TRIFAZATE ECHILIBRATE

### 9.6.1. FORȚA ELECTROMOTOARE PE FAZĂ A UNUI ALTERNATOR

Într-un sistem trifazat echilibrat cele trei tensiuni produse de un alternator sînt identice, însă defazate între ele în timp cu  $\frac{T}{3}$  din perioadă. Diagrama fazorială a acestor trei tensiuni se reprezintă prin trei fazori egali, avînd aceeași origine și defazați între ei cu  $120^\circ$ . Acești fazori se rotesc cu viteza de sincronism  $\omega$ , și succesiunea lor normală este aceea a acelor unui ceasornic.

Forța electromotoare produsă de alternator este în general periodică nesinusoidală. Dacă se dezvoltă în serie FOURIER fiecare curbă de forță electromotoare produsă pe cele trei faze, se obține:

$$\text{— pentru faza I} \quad e_I = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega t,$$

$$\text{— pentru faza II} \quad e_{II} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left( t - \frac{2\pi}{3\omega} \right),$$

$$\text{— pentru faza III} \quad e_{III} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left( t + \frac{2\pi}{3\omega} \right).$$

în care  $k$  este un număr oarecare întreg și pozitiv.

\* Fapt confirmat de experiență; vezi [11].

\*\* Vezi [5] pag. 12.



Introducînd pe  $k\omega$  în interiorul parantezelor, se obține

$$e_I = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin k\omega t,$$

$$e_{II} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin \left( k\omega t - k \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$e_{III} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sqrt{2} \sin \left( k\omega t + k \frac{2\pi}{3} \right).$$

Valoarea acestor expresii diferă după valoarea lui  $k$ .

a) Fie  $k$  de forma

$$k = 3\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

Se obține :

$$e_I = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t,$$

$$e_{II} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin (3\alpha\omega t - 2\alpha\pi) = \sum_0^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t,$$

$$e_{III} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin (3\alpha\omega t + 2\alpha\pi) = \sum_0^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t.$$

Rezultă dar că toate armonicile de ordinul 3, sau multiplu de 3, pe toate cele trei faze, sînt în fază. Ele formează un sistem *homopolar*.

b) Fie acum  $k$  de forma

$$k = 3\alpha + 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots).$$

Se obține :

$$e_I = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin (3\alpha + 1) \omega t,$$

$$e_{II} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin \left[ (3\alpha + 1) \omega t - \frac{2\pi}{3} \right],$$

$$e_{III} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \sin \left[ (3\alpha + 1) \omega t + \frac{2\pi}{3} \right].$$

De aici rezultă că toate armonicile de ordinul  $k = 3\alpha + 1$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ) vor avea succesiunea fazelor normală, adică aceea a mișcării acelor unui ceasornic; ele formează sisteme *directe*.



Dând lui  $\alpha$  diverse valori particulare, se va găsi că armonicile de ordinul 1, 7, 13, 19, ... (luînd în considerare numai armonicile impare care se întîlnesc în electrotehnică) satisfac acestei condiții, deci formează sisteme directe.

c) Fie acum cazul cînd

$$k = 3\alpha - 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots).$$

Se obține

$$e_I = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \sin (3\alpha-1)\omega t,$$

$$e_{II} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \sin \left[ (3\alpha - 1) \omega t + \frac{2\pi}{3} \right],$$

$$e_{III} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \sin \left[ (3\alpha - 1) \omega t - \frac{2\pi}{3} \right].$$

Din aceste expresii rezultă că armonicile de ordinul  $k = 3\alpha - 1$  ( $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ), adică de ordinul 5, 11, 17, ... (luînd în considerare, ca mai sus, numai armonicile impare) formează sisteme trifazate a căror succesiune de faze este *inversă* decît aceea a undei fundamentale, sau aceea a sistemului trifazat considerat. Aceste armonici formează un sistem *invers*.

Cele de mai sus pot fi rezumate în următoarea schemă în care nu se iau în considerare decît armonicile impare, singurele care apar în sistemele de tensiuni produse de alternatoarele trifazate:

Ordinul armonicii	Ordinul sistemului trifazat
1 <del>4</del> 7 <del>10</del> 13 <del>16</del> ... $(3\alpha + 1)$	direct
<del>2</del> 5 <del>8</del> 11 <del>14</del> 17 ... $(3\alpha - 1)$	invers
3 <del>6</del> 9 <del>12</del> 15 <del>18</del> ... $3\alpha$	homopolar

#### 9.6.2. TENSIUNEA DE LINIE LA BORNELE UNUI ALTERNATOR CU FORȚA ELECTROMOTOARE PE FAZĂ NESINUSOIDALĂ

Dacă

$$e_I = e_{II} = e_{III} = e$$

este forța electromotoare pe fază, atunci tensiunea de linie este dată de relația

$$e_I - e_{II} = e_{I-III} = e \sqrt{3}.$$

Fie de calculat expresia acestei tensiuni în cazul regimului nesinusoidal. Se obține

$$\begin{aligned} e_I - e_{II} &= \sum_{k=1}^n E_k \sqrt{2} \sin k \omega t - \sum_{k=1}^n E_k \sqrt{2} \sin \left( k \omega t - k \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n E_k \sqrt{2} \cdot 2 \sin \left( k \omega t - k \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \sin k \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$



Valoarea acestei expresii este diferită pentru diversele armonici. Astfel:

a) Pentru armonicile de ordinul

$$k = 3\alpha \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

se obține

$$e_I - e_{II} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} 2 \cdot 2 \sin \left( 3\alpha \omega t - \alpha\pi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \alpha\pi = 0.$$

b) Pentru armonicile de ordinul

$$k = 3\alpha + 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

se obține

$$e_I - e_{II} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha+1} \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \sin \left[ (3\alpha + 1) \omega t + \frac{\pi}{6} \right].$$

c) Pentru armonicile de ordinul

$$k = 3\alpha - 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

se obține

$$e_I - e_{II} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \sin \left[ (3\alpha - 1) \omega t - \frac{\pi}{6} \right].$$

Din examinarea expresiilor de mai sus rezultă:

a) Curba tensiunii între faze (tensiunea de linie) nu cuprinde armonica 3 sau multiplu de 3.

b) Armonicile de ordinul  $3\alpha + 1$  (armonicile 1, 7, 13, ...) sînt defazate înaintea armonicii corespunzătoare pe fază cu unghiul  $\frac{\pi}{6}$ .

c) Armonicile de ordinul  $3\alpha - 1$  (armonicile 5, 11, 17, ...) sînt defazate în urma armonicii corespunzătoare pe fază cu același unghi  $\frac{\pi}{6}$ .

În regim deformant, raportul dintre valorile efective ale tensiunii de linie și ale tensiunii pe fază este diferit de acela din regimul sinusoidal, pentru care acest raport este egal cu  $\sqrt{3}$ .

În cazul unui regim nesinusoidal, valoarea efectivă a tensiunii pe fază este

$$E_I = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots},$$

iar valoarea efectivă a tensiunii de linie este

$$E_{I-II} = \sqrt{(E_1\sqrt{3})^2 + (E_3\sqrt{3})^2 + (E_7\sqrt{3})^2 + (E_{11}\sqrt{3})^2 + \dots} = \sqrt{3} \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots}.$$

Rezultă

$$\frac{E_{I-II}}{E_I} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{E_1^2 + E_3^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \dots}{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_9^2 + E_{11}^2 + \dots}},$$



de unde, se vede că în cazul regimului deformant, raportul dintre tensiunea compusă și tensiunea stelată este egal cu  $\sqrt{3}$  numai dacă alternatorul nu conține armonici 3 sau multiplu de 3 pe nici una din faze. În caz contrar, acest raport este mai mic decât  $\sqrt{3}$ .

Cazul examinat în cele ce preced corespunde la cuplarea în stea a înfășurărilor unui alternator.

### 9.6.3. CUPLAREA ÎN TRIUNGHI A ÎNFĂȘURĂRILOR UNUI ALTERNATOR TRIFAZAT.

Dacă se leagă în serie cele trei înfășurări ale alternatorului, ca și cum s-ar face o conectare în triunghi a celor trei înfășurări fără însă a închide triunghiul, se va obține la cele două extremități libere o diferență de potențial  $u$  egală cu suma forțelor electromotoare dată de cele trei înfășurări :

$$u = e_I + e_{II} + e_{III} = \sum_{k=1}^n E_k \sqrt{2} \sin k \omega t \left( 1 + 2 \cos k \omega \frac{2\pi}{3} \right),$$

Este ușor de văzut că pentru

$$k = 3\alpha \pm 1 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

suma

$$1 + 2 \cos (3\alpha \pm 1) \frac{2\pi}{3} = 0,$$

iar pentru  $k = 3\alpha$ , paranteza este egală cu 3. Obținem deci

$$u = 3 \sum_{\alpha=0}^{\infty} E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha \omega t,$$

adică o undă formată numai din armonici de ordinul 3 sau multiplu de 3.

Dacă se închide triunghiul, aceste armonici de ordinul 3 sau multiplu de 3 se vor găsi închise în scurtcircuit, însă nu vor produce o intensitate de curent prea mare din cauza reactanței interioare a alternatorului, care pentru aceste frecvențe, este cel puțin de trei ori mai mare decât pentru armonica fundamentală.

Pentru a se evita această circulație parazită de curent, care are ca efect o mărire a pierderilor prin efect JOULE, alternatoarele se leagă în general în stea, astfel încât armonicile de ordinul 3 sau multiplu de 3 să se anuleze.

În cazul transformatoarelor mari, se folosește această proprietate a legării în triunghi a înfășurărilor unei armături tocmai pentru ca, prin producerea armonicilor de ordinul 3 sau multiplu de 3, să se creeze un flux care să distrugă armonicile 3 sau multiplu de 3 ce ar putea apărea în înfășurările transformatorului. În acest scop transformatorul se construiește cu o înfășurare terțiară, legată în triunghi, fie direct, fie prin intermediul unui aparat de măsură, iar transformatoarele cu trei înfășurări au întotdeauna o înfășurare în triunghi.



#### 9.6.4. EFECTELE FIERULUI IN REȚELELE ELECTRICE TRIFAZATE

Fie un alternator legat direct cu un transformator trifazat cu conexiunea în stea pe ambele înfășurări (fig. 9.46). Fie  $v_A, v_B, v_C$  potențialul la bornele de intrare ale transformatorului și  $v_N$  potențialul punctului neutru. Tensiunea pe fiecare fază a transformatorului este

$$v_{A_1} - v_N = v_1; v_{B_1} - v_N = v_2; v_{C_1} - v_N = v_3.$$

Presupunând că între alternator și transformator nu există nici o cădere de tensiune și că sarcina este echilibrată pe toate fazele, deci,

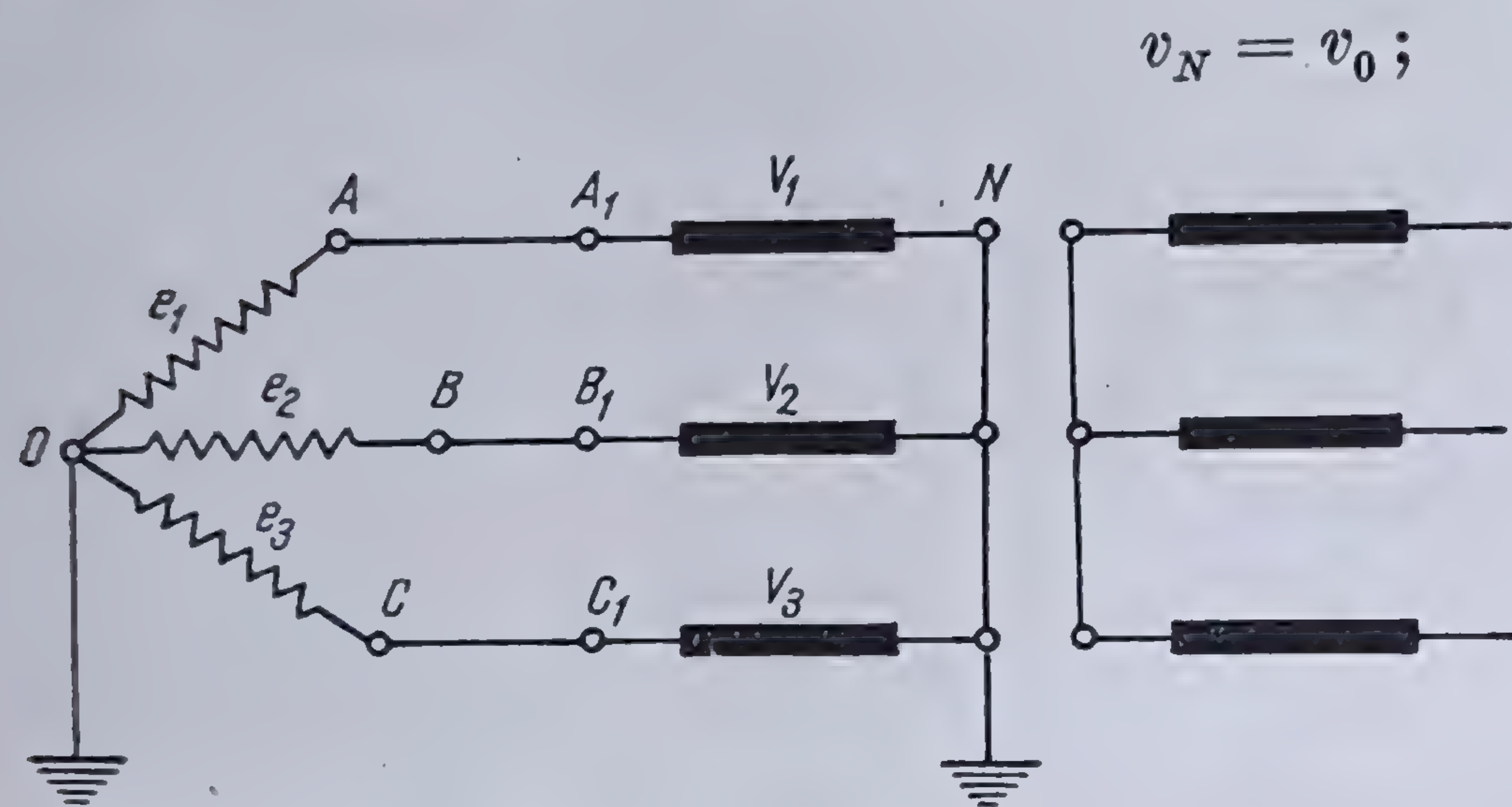


Fig. 9.46. Sistem trifazat.

rezultă

$$v_1 = e_1; v_2 = e_2; v_3 = e_3;$$

ceea ce înseamnă, că dacă tensiunile  $e_1, e_2$  și  $e_3$  ale alternatorului sînt periodice sinusoidale și tensiunile  $v_1, v_2$  și  $v_3$  de pe fazele transformatorului sînt periodice sinusoidale. În acest caz, fluxurile produse  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , sînt periodic sinusoidale.

Din cauza magnetizării fierului, curenții  $i_1, i_2$  și  $i_3$  sînt deformați\*, în undele respective predominînd armonica de ordinul 3. În sistemul trifazat, echilibrat însă, aceste armonici formează un sistem homopolăr

$$(i_3)_I = (i_3)_{II} = (i_3)_{III} = i_3/\sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Teorema I a lui KIRCHHOFF, aplicată punctului neutru al transformatorului, trebuie să dea

$$(i_3)_I + (i_3)_{II} + (i_3)_{III} = 0$$

ceea ce, în acest caz, nu este îndeplinit. Rezultă dar că ipoteza care a fost făcută nu este exactă și deci

$$v_0 \neq v_N.$$

Pentru ca ipoteza făcută să fie satisfăcută, este necesar ca undele de curent pe cele trei faze să nu conțină armonica de ordinul 3 sau multiplu de 3, ceea ce nu este posibil.

Să presupunem atunci curenții  $i$  ca fiind periodici sinusoidali. Va rezulta pentru flux o curbă turtită și tensiunea resultantă va fi deformată\*\*.

Tensiunea între faze este

$$v_I - v_{II} = e_I - e_{II}; \quad (9.102)$$

\* Vezi 9.4.2.1.

\*\* Vezi 9.4.2.2.



rezultă că ea trebuie să fie periodică sinusoidală, căci s-a presupus că forța electromotoare a alternatorului este periodică sinusoidală. Tensiunile pe fază la transformator însă nu sînt sinusoidale. Rezultă de aici că  $v_I$  este diferit de  $e_I$ . Luînd

$$v_I = V_1 \sqrt{2} \sin \omega t - V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t$$

și

$$v_{II} = V_1 \sqrt{2} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{2} \right) - V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t,$$

se va obține

$$v_I - v_{II} = V_1 \sqrt{2} \sqrt{3} \sin (\omega t + 30^\circ);$$

cum

$$e_I - e_{II} = E \sqrt{2} \sqrt{3} \sin (\omega t + 30^\circ),$$

din relația (9.102) rezultă

$$V_1 = E,$$

adică, armonicile fundamentale de tensiune sînt aceleași și deci,

$$V_1 = E \sqrt{2} \sin \omega t - V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Diferența de potențial între punctele neutre ale alternatorului și transformatorului,  $(v_0 - v_N)$ , se obține aplicînd teorema a II-a a lui KIRCHHOFF circuitului  $OAA'NO$  (fig. 9.46) și este

$$(v_0 - v_A) + (v_A - v_N) + (v_N - v_0) = 0;$$

rezultă, că

$$(v_0 - v_N) = (v_0 - v_A) + (v_A - v_N) = -e + v = -V_3 \sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

În consecință, punctul neutru al transformatorului nu se mai află la același potențial cu punctul neutru al alternatorului și nici la un potențial constant; el se găsește la un potențial oscilant nesinusoidal datorit armonicilor de ordinul 3 sau multiplu de 3.

Din cauza acestei diferențe de potențial, în cazul cînd între cele două puncte neutre există o legătură galvanică oarecare, între alternator și transformator se va produce o circulație de curent cu undă nesinusoidală, formată numai din armonici de ordinul 3 și multiplu de 3, care va avea ca efect, printre altele, perturbarea liniilor de telecomunicație vecine. În afară de aceasta, se va produce un surplus de pierderi pe linia de transmitere a energiei electrice.

De asemenea, acești curenți parazitari care circulă în mod permanent pot produce declanșarea intempestivă și dezordonată a releelor de punere la pămînt a liniei.



Suprimarea armoniei de ordinul 3 și multiplu de 3 se face adăugând transformatorului un bobinaj terțiar legat în triunghi deschis (fig. 9.47).

Să presupunem, pentru simplificare, că tensiunile nesinusoidale de pe fazele alternatorului nu conțin decât armonicile de ordinul 1 și 3. Tensiunile fiind deformate, rezultă că și fluxurile induse vor fi deformate. Aceste fluxuri vor induce în bobinajul terțiar, pe fiecare fază, tensiunile  $v'_1$ ,  $v'_2$  și  $v'_3$  de aceeași formă cu tensiunile primare  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , deci deformate și defazate între ele cu  $1/3$  din perioadă. În înfășurarea specială (terțiară) va rezulta tensiunea

$$v'_1 + v'_2 + v'_3 = 3V' \sqrt{2} \sin 3\omega t.$$

Când se închide întreruptorul  $K$  în bobinaj se va produce un curent care, în virtutea legii lui LENZ, se va opune cauzei care i-a dat naștere: tensiunea  $v'_2$

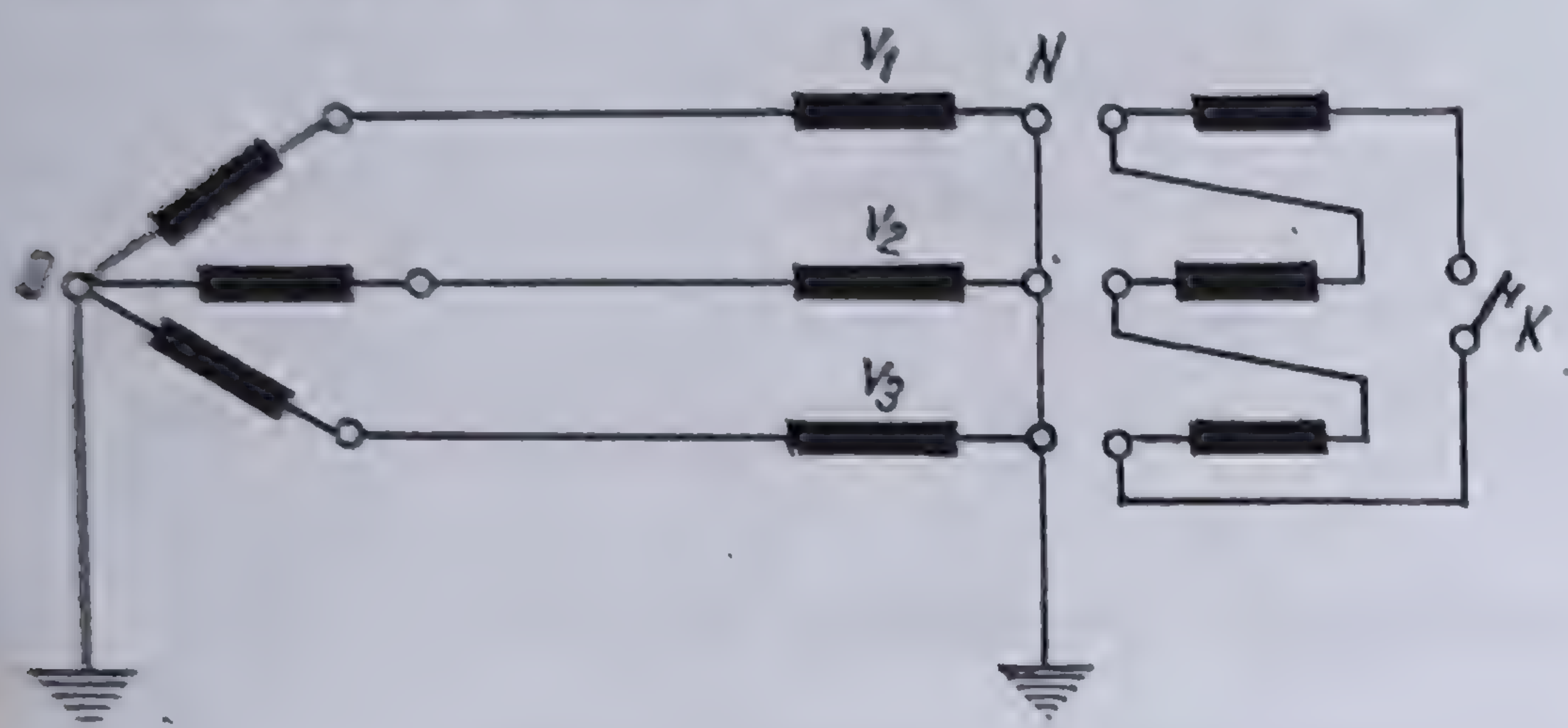


Fig. 9.47. Suprimarea armonicii trei la transformatoare.

și deci fluxul  $\Phi_3$  va produce un flux  $\Phi'_3$  de sens contrar cu  $\Phi_3$ . În cazul când funcționarea transformatorului este perfect echilibrată, aceste fluxuri se vor anula și în consecință vor dispărea armonicile de ordinul 3.

În acest caz tensiunile  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , și deci și curenții respectivi, vor fi practic sinusoidali, iar efectele perturbatoare datorite acestor armonici vor fi aproape complet anihilate.

Raționamentul făcut pentru simplificare, pentru unde de tensiune având numai armonicile de ordinul 1 și 3, poate fi extins pentru orice undă periodică nesinusoidală, care conține armonici de ordin multiplu de 3.



## Capitolul X

### METODE SPECIALE DE CALCUL ALE REGIMULUI TRANZITORIU

#### 10.1. GENERALITĂȚI

Problema rezolvării circuitelor electrice, în special în regimul tranzitoriu, prezintă dificultăți care sînt cu atît mai mari cu cît configurația circuitelor este mai complicată. Într-adevăr, rezolvarea acestor probleme constă în găsirea curentului electric în diversele elemente ale unui circuit electric — *răspunsul circuitului* — atunci cînd la un moment dat — momentul inițial, considerat la timpul  $t = 0$  — se aplică circuitului un *semnal* constînd fie din modificarea structurii acestuia, fie din modificarea forțelor electromotoare care acționează în circuit, fie din ambele simultan.

Pentru aceasta este necesar a se rezolva un sistem de ecuații diferențiale, de ordinul doi, liniare sau neliniare, care se scriu aplicînd circuitului cele două teoreme ale lui KIRCHHOFF, sau teoremele derivate, teorema circuitelor independente (curenții ciclici) sau teorema perechilor de noduri (potențialele la noduri), alegerea metodei depinzînd de simplificările care pot fi aduse calculului. Găsirea soluțiilor acestor ecuații diferențiale și mai ales problema economiei de timp pentru rezolvarea lor, a făcut ca matematicienii — și în special inginerii — să caute metode de rezolvare cît mai expeditive.

Dintre primele lucrări în acest sens trebuie menționate acelea ale lui LAPLACE, care stau la baza calculului operațional modern, și pe acelea ale lui FOURIER.

Introducerea calculului operațional în electrotehnică se datorează lui HEAVISIDE, care l-a expus pentru prima oară în lucrarea sa „Electromagnetic Theory” publicată în 1889 [130]. HEAVISIDE reducea orice problemă de circuit electric în care trebuia rezolvată o ecuație diferențială, la rezolvarea unei ecuații algebrice prin înlocuirea simbolului de derivare  $\frac{d}{dt}$  prin litera  $p$  și acela de integrare prin  $1/p$ ; ecuația algebrică se rezolva în raport cu această literă după care se trece apoi, prin anumite procedee, la variabila inițială  $t$ .

HEAVISIDE s-a mulțumit să dea numai procedeele de calcul fără a arăta justificarea lor și nici sursa de inspirație.

Numeroși au fost cercetătorii care au căutat să dea o justificare matematică a metodei lui HEAVISIDE\*. În 1917 J. CARSON [75] reușește să dea justificarea matematică completă a acestei metode operaționale care se bazează pe transformata LAPLACE

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

\* Vezi [130]



care constă în transformarea unei funcții de variabilă reală  $f(t)$  — funcție ce trebuie să îndeplinească anumite condiții — într-o funcție de variabilă complexă  $\varphi(p)$ .

Tot o consecință a căutării unei justificări a metodei lui HEAVISIDE a fost și introducerea mărimilor complexe generalizate și aplicarea lor la studiul circuitelor electrice în regim tranzitoriu.\*.

Utilizarea calculatoarelor electronice în rezolvarea problemelor complexe puse de funcționarea circuitelor electrice a necesitat realizarea de programări pentru întocmirea cărora calculul operațional sub diverse forme constituie elementele de bază. În afară de utilizarea calculului operațional sub forma dată de HEAVISIDE, a transformării LAPLACE sau FOURIER, a integralelor FOURIER sau DUHAMEL, au mai apărut și alte transformări — bazate în special pe transformarea LAPLACE — care au dat naștere la calcule operaționale sau cu operatori, printre care metoda prof. JAN MIKUSINSKI de la Universitatea din Varșovia\*\*.

Expunerea completă a diverselor metode iese din cadrul acestui tratat și ne vom rezuma a da numai principiile de bază și metodele de lucru respective.

## 10.2 STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU CU AJUTORUL CALCULULUI SIMBOLIC AL LUI HEAVISIDE

### 10.2.1. GENERALITAȚI ASUPRA CALCULULUI SIMBOLIC AL LUI HEAVISIDE

10.2.1.1. **Symbolismul lui HEAVISIDE.** Rezolvarea oricărei probleme de circuit electric constă în rezolvarea sistemului de ecuații (3.194).

În studiul regimului permanent, în cazul curenților periodici alternativi sinusoidali, rezolvarea acestor ecuații se face de obicei folosind fazorii. Transformarea ecuațiilor scrise între valori instantanee în ecuații scrise între fazori constă\*\*\* în a înlocui în ecuația dată simbolul de derivare  $\frac{dt}{d}$  prin  $j\omega$  și simbolul de integrare  $\int ( ) dt$  prin  $(j\omega)^{-1}$ ; sistemul de ecuații integro-diferențiale se transformă într-un sistem de ecuații algebrice ce se rezolvă apoi în raport cu necunoscutele căutate, obținându-se soluțiile sub forma

$$\underline{I}_k = f_k(j\omega) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

de unde, prin transformarea inversă\*\*\*\* se găsește expresia curențului căutat ca funcție de timp.

HEAVISIDE, înainte chiar de a apărea aplicarea calculului cu cantități complexe în electrotehnică\*\*\*\*\* a propus o metodă de rezolvare a sistemelor de ecuații diferențiate prin „algebrizarea” lor cu ajutorul operatorilor  $p$ , care reprezintă simbolul de derivare și  $p^{-1}$ , care reprezintă simbolul de integrare, această operație fiind inversă precedentei; prin înlocuirea simbolurilor respective, ca și în studiul regimului permanent cu ajutorul cantităților complexe, sistemul de ecuații diferențiale devine un sistem liniar de ecuații algebrice în

\* Vezi 7.4

\*\* Vezi [187].

\*\*\* Vezi 4.2.5.5.

\*\*\*\* Vezi [130].

\*\*\*\*\* Metoda HEAVISIDE a fost publicată în 1889, iar metoda cantităților complexe a fost publicată de KENNELLY în 1893.



raport cu necunoscuta ce trebuie determinată, soluțiile căutate obținându-se apoi sub forma

$$i_k = F_k(p) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Din această formă, prin regulile relativ simple date de HEAVISIDE, fără nici un fel de justificare, se trece la funcțiile de timp căutate.

Trebuie observat că prin metoda lui HEAVISIDE soluția obținută pentru problema de regim tranzitoriu studiată este completă, conținând atât regimul liber cât și regimul permanent de funcționare, constantele de integrare fiind perfect determinate; metoda însă nu este aplicabilă decât dacă sistemul are condiții inițiale de funcționare nule.

O metodă operațională pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare, analoagă cu aceea a lui HEAVISIDE, a fost expusă de matematicianul rus M. VAȘCENKO-ZAHARCENCO în anul 1862, în lucrarea sa „Calculul simbolic și aplicarea lui la integrarea ecuațiilor diferențiale liniare“.

Este foarte posibil ca HEAVISIDE să fi avut cunoștință de aceste lucrări cînd a elaborat metoda sa de studiu ale regimurilor tranzitorii.

Utilizînd simbolismul lui HEAVISIDE, sistemul de ecuații (3.194) se scrie

$$\sum_{k=1}^n \left( R_{jk} i_k + p L_{jk} i_k + \frac{i_k}{p C_{jk}} \right) = \sum_{k=1}^n \left( R_{jk} + p L_{jk} + \frac{1}{p C_{jk}} \right) i_k = e_j - \sum_{k=1}^n \frac{q_{jk}}{C_{jk}} = E_j$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

10.2.1.2. Cîteva relații fundamentale ale calculului simbolic a lui HEAVISIDE. Pentru a se putea aplica metoda dată de HEAVISIDE și a determina expresia în funcție de timp a soluției găsite în funcție de  $p$ , este necesar să se stabilească unele relații fundamentale.

a) *Aplicarea operatorului  $p^{-n}$  funcției unitate\**, pentru  $n$  întreg și pozitiv. Avem succesiv

$$\frac{1}{p} Y(t) = \int_0^t dt = \frac{t}{1!};$$

$$\frac{1}{p^2} Y(t) = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p} Y(t) \right] = \frac{1}{1!} \int_0^t t dt = \frac{t^2}{2!};$$

$$\frac{1}{p^3} Y(t) = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{p^2} Y(t) \right] = \frac{1}{2!} \int_0^t t^2 dt = \frac{t^3}{3!};$$

în general, se poate scrie deci

$$\frac{1}{p^n} Y(t) = \frac{t^n}{n!}, \quad (10.1)$$

\* Vezi 3.6.2.3.



b) Aplicarea operatorului  $p^{-n}$  funcției unitate, pentru  $n$  oarecare. Pentru generalizarea cazului precedent se folosește funcția gama\* definită de relația

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

avînd proprietatea funcțională

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

Pentru  $n$  întreg și pozitiv, funcția gama devine funcția factorială

$$\Gamma(n+1) = f(n) = n!,$$

cu

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1.$$

Pentru  $n$  întreg și negativ, funcția gama ia valoarea infinită. Pentru  $n$  fracționar, funcția gama ia valori finite bine determinate.

În aceste condiții se găsește, pentru  $n$  oarecare

$$\frac{1}{p^n} \Upsilon(t) = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \quad (10.2)$$

c) Aplicarea operatorului  $\frac{p}{p+a}$  funcției unitate. Ținînd seama că

$$\frac{p}{p+a} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{p^k}$$

și de relația (10.1), rezultă

$$\frac{p}{p+a} \cdot \Upsilon(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a^k}{p^k} \cdot \Upsilon(t) = e^{-at}. \quad (10.3)$$

Din relațiile lui EULER

$$e^{\pm at} = \operatorname{ch} at \pm \operatorname{sh} at,$$

rezultă imediat

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2}{p^2 - a^2} \cdot \Upsilon(t) &= \operatorname{ch} at, \\ \frac{pa}{p^2 - a^2} \cdot \Upsilon(t) &= \operatorname{sh} at. \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

Punînd în relația (10.3)

$$a = j\omega,$$

\* Vezi exemplu, [244] p. 320.



se deduce

$$\frac{p}{p \pm j\omega} \cdot Y(t) = \varepsilon^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t,$$

de unde rezultă\*

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \cdot Y(t) &= \cos \omega t. \\ \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot Y(t) &= \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Ținând seama de relația (10.3) se poate calcula expresia  $\frac{1}{p+a} \cdot Y(t)$ . Într-adevăr avem

$$\frac{1}{p+a} \cdot Y(t) = p^{-1} \frac{p}{p+a} \cdot Y(t) = p^{-1} \cdot \varepsilon^{-at} = \frac{1 - \varepsilon^{-at}}{a} \quad (10.6)$$

În același mod, oricare ar fi expresia lui  $F(p)$  la care se ajunge, descompunând-o în elemente simple și aplicînd simbolismul lui HEAVISIDE se poate deduce funcția de timp corespunzătoare problemei rezolvate.

**10.2.1.3. Teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE.** Fie expresia

$$\frac{1}{Z(p)}$$

în care  $Z(p)$  este un polinom în  $p$ , avînd rădăcinile  $p_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Presupunînd că termenul cu gradul cel mai ridicat are coeficientul egal cu 1, se poate scrie

$$Z(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_k) \dots (p - p_n).$$

Expresia dată poate fi descompusă în factori simpli

$$\frac{1}{Z(p)} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} + \dots + \frac{K}{p - p_k} + \dots + \frac{N}{p - p_n}, \quad (10.7)$$

coeficienții respectivi determinîndu-se prin regulile binecunoscute\*\* ; se găsește astfel

$$K = \frac{1}{Z'(p_k)},$$

\* La aceleași relații se ajunge și dacă substituția indicată se face în relațiile (10.4).  
 \*\* Aceleași demonstrații se poate face și pentru cazul cînd  $Z(p)$  are rădăcini multiple.



$Z'(p_k)$  fiind valoarea derivatei funcției  $Z(p)$  pentru  $p = p_k$ . Expresia (10.7) se poate scrie deci

$$\frac{1}{Z(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}. \quad (10.8)$$

Să presupunem acum că  $\frac{1}{Z(p)}$  este un operator, pe care să-l aplicăm funcției unitate; ținând seama de relația (10.6) rezultă

$$\frac{1}{Z(p)} \cdot \Upsilon(t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k Z'(p_k)}. \quad (10.9)$$

Făcînd în relația (10.8)  $p = 0$ , rezultă

$$\frac{1}{Z(0)} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k Z'(p_k)},$$

astfel că relația (10.9) devine

$$\frac{1}{Z(p)} \cdot \Upsilon(t) = \frac{1}{Z(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{e^{p_k t}}{p_k Z'(p_k)}, \quad (10.10)$$

care constituie teorema dezvoltării lui HEAVISIDE.

Derivînd expresia (10.10) rezultă

$$\frac{p}{Z(p)} \cdot \Upsilon(t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{p_k t}}{Z'(p_k)}. \quad (10.11)$$

În practică se aplică relația (10.10) atunci cînd polinomul  $Z(p)$  are o rădăcină nulă; în caz contrar se aplică relația (10.11).

## 10.2.2. EXEMPLE DE APLICAȚIE

**10.2.2.1. Stabilirea unui curent electric continuu într-un circuit electric inductiv.** Considerînd un circuit electric format dintr-un rezistor de rezistență  $R$  legată în serie cu o bobină de inductanță  $L$  și alimentat de o sursă avînd forța electromotoare continuă  $E$ , ecuația de funcționare a acestui circuit, scrisă sub forma simbolică, este

$$(R + Lp)i = E,$$

de unde se deduce

$$i = \frac{E}{R + Lp} \cdot \Upsilon(t) = \frac{E}{Lp \left( 1 + \frac{R}{Lp} \right)} \Upsilon(t) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} \cdot \Upsilon(t).$$



Ținând seama că

$$\frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{R^k}{L^k} \cdot \frac{1}{p^k}$$

și de relația (10.1), se obține

$$\frac{1}{1 + \frac{R}{Lp}} \cdot Y(t) = 1 - \frac{R}{L} \frac{t}{1} + \frac{R^2}{L^2} \cdot \frac{t^2}{2!} - \frac{R^3}{L^3} \frac{t^3}{3!} + \dots = e^{-\frac{R}{L}t}$$

Se obține apoi

$$i = \frac{E}{L} \int_0^t e^{-\frac{R}{L}t} \cdot dt = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}),$$

relație binecunoscută și dedusă direct pe altă cale\*.

**10.2.2.2. Stabilirea unui curent alternativ sinusoidal într-un circuit inductiv. Calculul direct.** Fie un circuit format dintr-un rezistor de rezistență  $R$  și o bobină de inductanță  $L$  legate în serie și care se închide pe o sursă de forță electromotoare alternativă sinusoidală\*\*.

$$e = E \sqrt{2} \sin \omega t.$$

Ecuția de funcționare a circuitului este

$$R i + L \frac{di}{dt} = E \sqrt{2} \sin \omega t,$$

sau aplicînd simbolismul lui HEAVISIDE, rezultă

$$(R + Lp)i = E \sqrt{2} \sin \omega t. \quad (10.12)$$

Punînd  $\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ , cum în paranteză avem diferența a două mărimi complex conjugate, se poate găsi soluția ecuației (10.12) dacă se rezolvă ecuația

$$(R + Lp) i = \frac{E}{2j} e^{j\omega t} \quad (10.13)$$

și se ia, din soluția obținută, de două ori partea complexă.

\* Vezi 3.6.2.1.

\*\* Problema se rezolvă în același mod și dacă  $e = E \sqrt{2} \sin (\omega t + \psi)$ , prin descompunerea lui  $e$  în doi termeni, după care se aplică principiul superpoziției.



Din ecuația (10.13) se deduce

$$i = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{p}} e^{j\omega t}.$$

Punind  $\frac{E}{L} \cdot \frac{1}{2j} = A$ ,  $\frac{R}{L} = a$ ,  $j\omega = \lambda$  și ținând seama că

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{p}} = 1 - \frac{a}{p} + \frac{a^2}{p^2} - \frac{a^3}{p^3} + \frac{a^4}{p^4} - \dots,$$

se găsește succesiv\*

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{p}} \cdot e^{\lambda t} = \frac{\lambda}{a + \lambda} e^{\lambda t} + \frac{a}{a + \lambda} e^{-at},$$

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{p}} e^{\lambda t} = \frac{1}{a + \lambda} [\varepsilon^{\lambda t} - \varepsilon^{-at}]$$

și deci :

$$i_1 = \frac{1}{2j} \frac{E\sqrt{2}}{L} \cdot \frac{1}{\frac{R}{L} + j\omega} [\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}] =$$

$$= \frac{1}{2j} \frac{E\sqrt{2}}{L} \frac{L(R - jL\omega)}{R^2 + L^2\omega^2} [\cos \omega t + j \sin \omega t - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}],$$

---

\* Avem  $-\frac{a}{p} \varepsilon^{\lambda t} = -\frac{a}{\lambda} (\varepsilon^{\lambda t} - 1),$

$$\frac{a^2}{p} \varepsilon^{\lambda t} = \frac{a^2}{\lambda^2} (\varepsilon^{\lambda t} - 1) - \frac{a^2}{\lambda} \frac{t}{1!}.$$

$$-\frac{a^3}{p^2} \varepsilon^{\lambda t} = -\frac{a^3}{\lambda^3} (\varepsilon^{\lambda t} - 1) + \frac{a^3}{\lambda^2} \frac{t}{1!} + \frac{a^3}{\lambda} \frac{t^2}{2!},$$

de unde

$$\frac{1}{1 + \frac{a}{p}} \cdot e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \left[ 1 - \frac{a}{\lambda} + \frac{a^2}{\lambda^2} - \dots \right] + \left[ \frac{a}{\lambda} - \frac{a^2}{\lambda^2} + \dots \right] -$$

$$- \frac{at}{1!} \left[ \frac{a}{\lambda} - \frac{a^2}{\lambda^2} + \frac{a^3}{\lambda^3} - \dots \right] + \dots = e^{\lambda t} \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda}} + e^{-at} \cdot \frac{a}{\lambda} \frac{1}{1 + \frac{a}{\lambda}} = \frac{\lambda}{a + \lambda} e^{\lambda t} + \frac{a}{a + \lambda} e^{-at}$$



de unde efectuând produsul și luând de două ori partea complexă, rezultă\*

$$i = \frac{E \sqrt{2}}{Z} \sin [(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t}],$$

adică tocmai relația (7.1).

**10.2.2.3. Stabilirea unui curent alternativ sinusoidal într-un circuit inductiv. Calculul cu ajutorul teoremei dezvoltării.** Ecuația operațională care dă curentul este tot (10.12); pe de altă parte, din relațiile (10.5) rezultă

$$\sin \omega t = \frac{p \omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \Upsilon(t),$$

astfel încât relația (10.12) devine

$$(R + Lp) i = E \sqrt{2} \frac{p \omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \Upsilon(t),$$

de unde rezultă

$$i = E \sqrt{2} \frac{p \omega}{(p^2 + \omega^2)(R + Lp)} \cdot \Upsilon(t).$$

Membrul al doilea al acestei relații este de forma (10.11) așa că i se poate aplica teorema dezvoltării.

Rădăcinile polinomului de la numitor sînt

$$p_1 = +j\omega, \quad p_2 = -j\omega, \quad p_3 = -\frac{R}{L}$$

iar derivata sa

$$Z'(p) = 2p(R + Lp) + L(p^2 + \omega^2).$$

Se găsește astfel,

$$Z'(p_1) = 2j\omega(R + jL\omega), \quad Z'(p_2) = -2j\omega(R - jL\omega),$$

$$Z'(p_3) = L \left( \frac{R^2}{L^2} + \omega^2 \right) = \frac{1}{L} (R^2 + L^2 \omega^2).$$

Cu aceste elemente relația (10.11) ne dă

$$\begin{aligned} i &= E \sqrt{2} \left[ \frac{e^{j\omega t}}{2j(R + jL\omega)} + \frac{e^{-j\omega t}}{-2j(R - jL\omega)} + \frac{L\omega e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2 \omega^2} \right] = \\ &= \frac{E \sqrt{2}}{R^2 + L^2 \omega^2} \left[ R \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} - L\omega \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + L\omega e^{-\frac{R}{L}t} \right] = \\ &= \frac{E \sqrt{2}}{Z} [\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t}], \end{aligned}$$

adică aceeași relație ca mai sus.

\* S-a notat  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$ ,  $Z = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$ .



**OBSERVAȚIE:** Calculul operațional al lui HEAVISIDE nu mai este astăzi utilizat; el nu mai are decât o importanță istorică. Există totuși cazuri în care formulele date de HEAVISIDE sînt încă utilizate, ca de exemplu în programarea matematică a unor procese electrotehnice.

### 10.3. UTILIZAREA CALCULULUI OPERAȚIONAL LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

#### 10.3.1. TEORIA CIRCUITULUI ELECTRIC AL LUI HEAVISIDE

10.3.1.1. Definierea răspunsului tranzitoriu. Problema fundamentală care urmează a fi rezolvată se poate enunța astfel:

Fiind dată o rețea pasivă și disipativă, în echilibru\* în orice moment înainte de momentul  $t = 0$ , dacă la momentul  $t = 0$  i se aplică o forță electromotoare oarecare, se caută distribuția curenților și potențialelor în rețea la un moment  $t > 0$  oarecare.

Fie o rețea buclată oarecare, îndeplinind condițiile indicate, avînd  $n$  bucle. La momentul  $t = 0$  se introduce brusc în circuitul buclei  $k$  o forță electromotoare unitate  $\Upsilon(t)$ . Curentul care va circula în circuitul buclei  $l$  la momentul  $t > 0$  va fi o anumită funcție de timp  $A_{kl}(t)$ . Acest curent se numește\*\* *răspunsul tranzitoriu* al circuitului  $l$  în raport cu circuitul  $k$ .

Aplicînd teorema reciprocității, este ușor de arătat că  $A_{kl}(t) = A_{lk}(t)$ .

Cei  $n$  curenți independenți, constituind răspunsurile tranzitorii ale rețelei sînt de forma

$$A_{kl} = \sum_m \alpha_{km} p_m \varepsilon^{p_m t} [\operatorname{Re}(p_m) < 0] \quad (10.14)$$

și se vede că aceste răspunsuri tranzitorii tind către zero cînd  $t$  tinde către  $+\infty$ ; pentru aceasta este necesar și suficient ca determinantul coeficienților necunoscutelor sistemului de ecuații (3.194) să fie diferit de zero.

10.3.1.2. Teorema lui POMPEY. Cunoașterea răspunsurilor tranzitorii ale unei rețele date este suficientă pentru determinarea curenților care apar în buclele rețelei dacă forța electromotoare aplicată în bucla  $k$  este o funcție de timp oarecare  $e(t)$ .

Funcționarea rețelei fiind liniară, dacă la timpul  $t = 0$  se aplică buclei  $k$  forța electromotoare constantă  $E$ , atunci curentul care apare în bucla  $l$  va fi  $E A_{kl}(t)$ ; dacă însă forța electromotoare constantă se aplică la timpul  $t = \theta$ , atunci curentul corespunzător este  $E A_{kl}(t - \theta)$ .

Acestea fiind stabilite, să presupunem acum că, în locul forței electromotoare constante se aplică o forță electromotoare oarecare  $E(\theta)$ , care acționează în circuit în intervalul de timp  $\theta \in [0, t)$ . Să considerăm curba sa reprezentativă în funcție de timp (fig. 10.1) și să împărțim intervalul de timp  $(0, t)$  în intervalele parțiale  $\Delta_i$

$$(0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_n, t)$$

\* Ceea ce înseamnă că în rețea curenții și sarcinile electrice sînt nule pentru tot intervalul de timp  $t \in (-\infty, 0)$ ; această ipoteză este de rigoare.

\*\* CARSON numește acest curent *admitanța indusă de transfer* a buclei  $l$  în raport cu bucla  $k$ ; dimensional este un curent și nu o admitanță.



și fie

$$E(0) = E_0, \quad E(t_1) = E_1, \dots, E(t_n) = E_n.$$

Intervalele de timp considerate fiind suficient de mici, se poate considera că forța electromotoare  $E(\theta)$  care acționează în circuit în intervalul  $(0, t)$  este egală, între aceste limite, cu suma forțelor electromotoare, sensibil constante  $E_0$  acționând de la 0 la  $\infty$ , nulă pentru  $\theta < 0$ ,

$$\Delta_1 E = E_1 - E_0 \text{ acționând de la } t_1 \text{ la } \infty, \text{ nulă pentru } \theta < t_1,$$

.....

$$\Delta_n E = E_n - E_{n-1} \text{ acționând de la } t_n \text{ la } \infty, \text{ nulă pentru } \theta < t_n.$$

În intervalele de timp de la  $t_i$  la  $t_{i+1}$ , numai primele  $i + 1$  forțe electromotoare sînt diferite de zero și suma lor este

$$E_0 + (E_1 - E_0) + \dots + (E_i - E_{i-1}) = E_i = E(t_i).$$

În fiecare moment  $\theta$ , cuprins între zero și  $t$ , forța electromotoare  $E_0$  produce un curent\*  $E_0 A(\theta)$  și trimite în circuit, în intervalul de timp de la zero la  $t$  o sarcină electrică

$$E_0 \int_0^t A(\theta) d\theta.$$

A doua forță electromotoare  $E_1 - E_0$ , acționînd numai de la momentul  $t_1$  înainte, produce în fiecare moment  $\theta$  din intervalul de timp  $(t_1, t)$ , un curent

$$(E_1 - E_0) A(\theta - t_1)$$

și, în același interval de timp, trimite în circuit cantitatea de electricitate

$$(E_1 - E_0) \int_{t_1}^t A(\theta - t_1) d\theta,$$

sau făcînd schimbarea de variabilă  $\theta - t_1 = u$ ,

$$(E_1 - E_0) \int_0^{t-t_1} A(u) du = (E_1 - E_0) \int_0^{t-t_1} A(\theta) d\theta.$$

\* Au fost suprimați indicii pentru a simplifica scrierea.

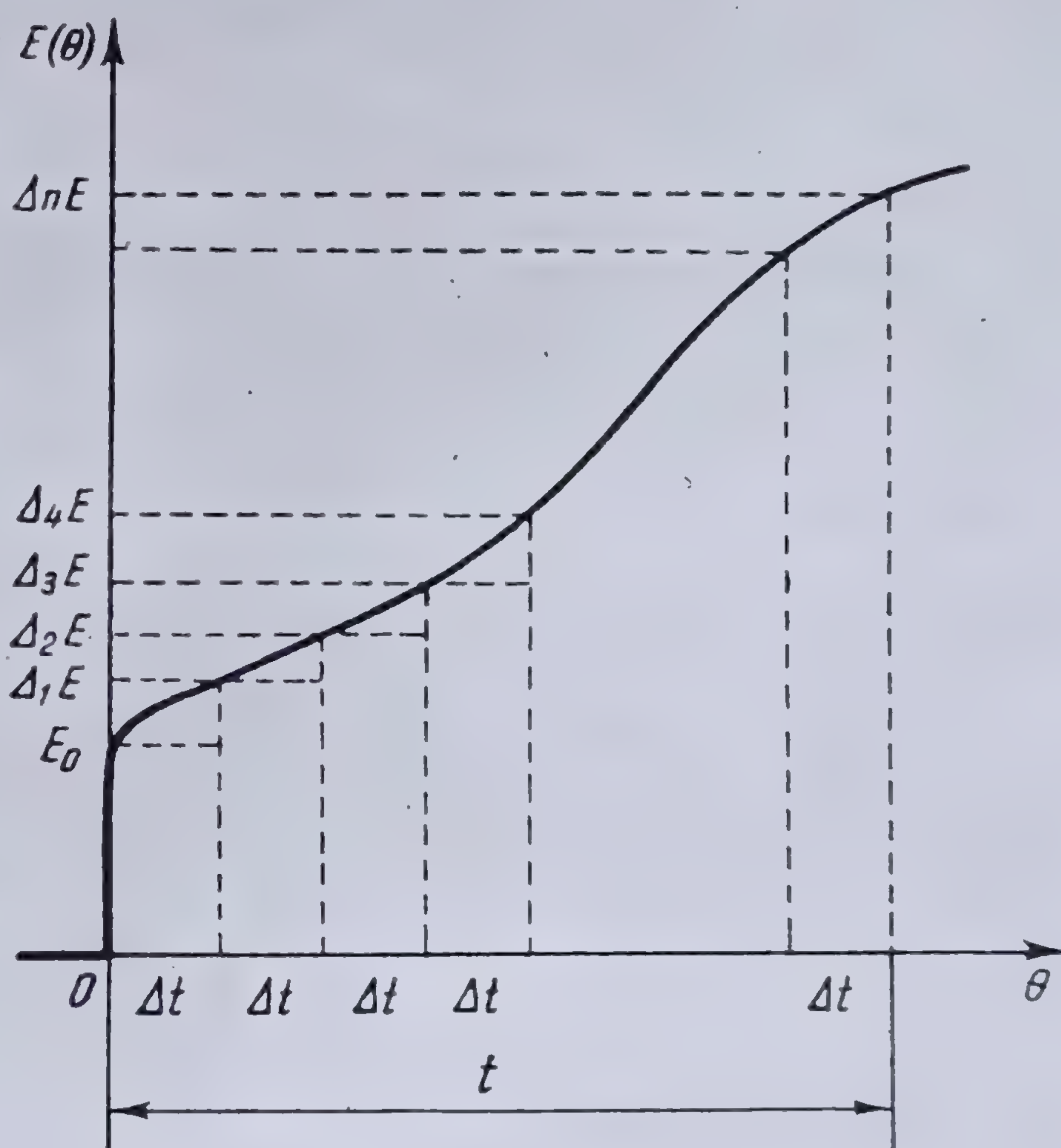


Fig. 10.1. Curba tensiunii aplicate.



Procedînd în același mod, se găsește expresia cantității de electricitate trimisă în rețea de fiecare dintre forțele electromotoare aplicate. Cantitatea de electricitate pe care o primește rețeaua va fi deci

$$Q = E_0 \int_0^t A(\theta) d\theta + (E_1 - E_0) \int_0^{t-t_1} A(\theta) d\theta + \dots + (E_n - E_{n-1}) \int_0^{t-t_n} A(\theta) d\theta,$$

care poate fi pusă sub forma

$$\begin{aligned} Q &= E_0 \left[ \int_0^t A(\theta) d\theta - \int_0^{t-t_1} A(\theta) d\theta \right] + E_1 \left[ \int_0^{t-t_1} A(\theta) d\theta - \int_0^{t-t_2} A(\theta) d\theta \right] + \dots + \\ &+ \dots + E_n \int_0^{t-t_n} A(\theta) d\theta = E_0 \int_{t-t_1}^t A(\theta) d\theta + E_1 \int_{t-t_2}^{t-t_1} A(\theta) d\theta + \dots + E_n \int_0^{t-t_n} A(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Aplicînd teorema mediei fiecăreia din integralele expresiei (10.15), dacă  $\theta_i$  este un moment convenabil ales în intervalul de timp

$$t_{i+1}, t_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

se obține

$$Q = t_1 E_0 A(t - \theta_0) + (t_2 - t_1) E_1 A(t - \theta_1) + \dots + (t - t_n) E_n A(t - \theta_n). \quad (10.16)$$

Dacă facem acum ca numărul de puncte  $t_i$ , în care am împărțit intervalul  $(0, t)$  să tindă către infinit, intervalele corespunzătoare vor tinde către zero și suma (10.16) va tinde către integrala

$$Q = \int_0^t E(\theta) A(t - \theta) d\theta \quad (10.17)$$

iar curentul respectiv\*

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t E(\theta) A(t - \theta) d\theta. \quad (10.18)$$

Făcînd schimbarea de variabilă  $t - \theta = \tau$ , relația (10.18) se poate scrie

$$i = \frac{d}{dt} \int_t^0 E(t - \tau) A(\tau) (d\tau)$$

sau, trecînd la vechile variabile

$$i = \frac{d}{dt} \int_0^t E(t - \theta) A(\theta) d\theta. \quad (10.19)$$

Relațiile (10.18) și (10.19) constituie teorema lui POMEY.

\* Este vorba de curentul produs în bucla  $l$  de forța electromotoare inserată în bucla  $k$ .



10.3.1.3. Alte expresii ale curentului  $i$ . Efectuînd derivarea relațiilor (10.18) și (10.19) se obține

$$i = A(0)E(t) + \int_0^t E(\theta)A'(t - \theta)d\theta, \quad (10.20)$$

$$i = E(0)A(t) + \int_0^t A(\theta)E'(t - \theta)d\theta. \quad (10.21)$$

Făcînd schimbarea de variabilă  $t - \theta = \tau$ , ca mai sus, după revenirea la vechea variabilă, se obține

$$i = A(0)E(t) + \int_0^t E(t - \theta)A'(\theta)d\theta \quad (10.22)$$

$$i = E(0)A(t) + \int_0^t A(t - \theta)E'(\theta)d\theta. \quad (10.23)$$

**OBSERVAȚIE:** Relațiile (10.20) — (10.23) pot fi deduse direct, pe o cale analoagă aceleia care a condus la stabilirea relațiilor (10.18) și (10.19), pornind însă direct de la curenți\*.

10.3.1.4. **Calculul răspunsului tranzitoriu.** Relațiile (10.18), (10.19), (10.20), (10.21), (10.22) și (10.23) arată că pentru determinarea curentului  $i(t)$  este suficientă cunoașterea răspunsului tranzitoriu.

Să considerăm în rețeaua dată circuitele  $k$  și  $l$ ; dacă în circuitul  $k$  se aplică forța electromotoare  $\varepsilon^{pt}$  [ $p$  fiind un număr real sau complex, în ultimul caz îndeplinind condiția  $\text{Re}(p) > 0$ ], *curentul permanent* care va circula în circuitul  $l$  va fi\*\*

$$i_{kl} = \frac{\varepsilon^{pt}}{Z_{kl}(p)}. \quad (10.24)$$

În această relație

$$Z_{kl}(p) = \frac{\Delta(p)}{M_{kl}(p)}$$

este *impedanța de transfer* de la circuitul  $k$  la circuitul  $l$ , unde  $\Delta(p)$  este determinantul impedanțelor rețelei date,  $M_{kl}(p)$ , minorul corespunzător elementului  $Z_{kl}$ , iar impedanțele

$$Z_{kl} = R_{kl} + pL_{kl} + \frac{1}{pC_{kl}}$$

sînt impedanțele proprii și înmutuale (de cuplaj) ale circuitelor\*\*\*.

\* Vezi [4], pag. 454.

\*\* Vezi 4.3.6.1.

\*\*\* Se presupune rețeaua rezolvată prin metoda buclelor, vezi 2.3.6.



În cazul cînd forța electromotoare este aplicată circuitului la un moment dat, atunci în circuitul respectiv va apărea un curent tranzitoriu, a cărui expresie se obține adăugînd curentului permanent, dat de relația (10.24), un curent liber dat de relația (10.14); vom avea deci

$$i = \frac{\varepsilon^{pt}}{Z(p)} + \sum_m \alpha_{km} p_m \varepsilon^{p_m t}. \quad (10.25)$$

Pe de altă parte, relația (10.21) ne dă direct curentul din circuit, cînd se aplică forța electromotoare  $E(t) = \varepsilon^{pt}$ .  
Se găsește astfel

$$i = A(t) + \int_0^t \frac{d\varepsilon^{p(t-\theta)}}{dt} A(\theta) d\theta = A(t) + p\varepsilon^{pt} \int_0^t \varepsilon^{-p\theta} A(\theta) d\theta.$$

Cum acest curent trebuie să fie identic cu curentul dat de relația (10.25), rezultă

$$\frac{\varepsilon^{pt}}{Z(p)} + \sum_m \alpha_{km} p_m \varepsilon^{p_m t} = A(t) + p\varepsilon^{pt} \int_0^t \varepsilon^{-p\theta} A(\theta) d\theta,$$

sau, împărțind ambii membri ai acestei expresii cu  $\varepsilon^{pt}$ ,

$$\frac{1}{Z(p)} + \sum_m \alpha_{km} p_m \varepsilon^{(p_m - p)t} = A(t) \varepsilon^{-pt} + p \int_0^t \varepsilon^{-p\theta} A(\theta) d\theta.$$

Făcînd acum ca  $t$  să tindă către  $+\infty$ , cum  $\Re(p) > 0$  și  $\Re(p_m) < 0$ , se obține

$$\frac{1}{Z(p)} = p \int_0^\infty \varepsilon^{-p\theta} A(\theta) d\theta. \quad (10.26)$$

Rezultă dar, că *răspunsul tranzitoriu*, a cărui cunoaștere este necesară și suficientă pentru determinarea curentului corespunzător aplicării unui circuit o forță electromotoare de o formă oarecare, este legat de impedanța de transfer printr-o ecuație integrală. Această ecuație integrală, numită *integrala lui CARSON*, dă o corespondență între funcția  $A(t)$  și funcția  $\psi(p) = \frac{1}{Z(p)}$ . Funcția  $\psi(p)$  se numește *imaginea* funcției  $A(t)$ , în sensul lui CARSON,  $A(t)$  fiind *originalul* funcției  $\psi(p)$ .

Integrala CARSON reușește să justifice întregul procedeu de calcul al lui HEAVISIDE.

Formula (10.26) este dedusă din formula

$$\varphi(p) = \int_0^\infty f(t) \varepsilon^{-pt} dt \quad (10.27)$$

numită *transformarea lui LAPLACE* și care efectuează aceeași transformare ca și formula (10.26). Bineînțeles că existența transformărilor de mai sus este



condiționată de anumite proprietăți ale funcției  $f(t)$ , condiții ce sînt în general îndeplinite de funcțiile din fizică și în special de acelea întîlnite în electrotehnică. Între formulele (10.26) și (10.27) există relația de legătură evidentă

$$\psi(p) = p \varphi(p). \quad (10.28)$$

Transformarea lui CARSON nu diferă deci de transformarea lui LAPLACE decît prin factorul  $p$ , care a fost introdus de CARSON pentru ca justificarea matematică a regulilor date de HEAVISIDE să fie cît mai corespunzătoare. În special pentru a se obține pentru imaginea funcției unitate a lui HEAVISIDE chiar unitatea.

La început, și mult timp după aceea, s-a utilizat în calculul operațional numai formula de transformare (10.26) a lui CARSON.

În ultimii 20 de ani, foarte mulți autori\* utilizează și recomandă folosirea formulei de transformare (10.27) a lui LAPLACE. În afară de aceasta, secția a 5-a\*\* a Societății electricienilor francezi, după o anchetă susținută, în ședința din 6 iunie 1944, a făcut de asemenea recomandarea utilizării în problemele de electrotehnică a formulei de transformare (10.27). Această recomandare a fost adoptată ulterior și de *Comitetul Electrotehnic Internațional*.

#### 10.4. UTILIZAREA TRANSFORMĂRII LAPLACE ÎN STUDIUL REGIMURILOR TRANZITORII

##### 10.4.1. DEFINIȚII ȘI TEOREME FUNDAMENTALE

Fără a da demonstrațiile matematice corespunzătoare și metodele de stabilire, transformarea lui LAPLACE se bazează pe următoarele definiții și teoreme:\*\*\*

**Definiția 1.** Fie o funcție reală\*\*\*\*  $f(t)$  de variabilă reală  $t$  definită pentru  $t$  pozitiv astfel, încît dacă

a)  $f(t)$  este integrabilă în orice interval finit cuprins între două valori pozitive ale variabilei și dacă

b) integrala  $\int_a^b f(t) dt$  tinde către o limită cînd  $a$  tinde către zero, atunci există integrala

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t) dt = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} \int_a^b e^{-\sigma t} f(t) dt < \infty \quad (10.29)$$

în care  $\sigma$  este un număr real.

Oricare ar fi funcția  $f(t)$  limita inferioară a numerelor reale  $\sigma$  care satisface ecuația (10.29) se numește *abscisa de convergență absolută* a funcției  $f(t)$ . Ea se notează cu  $\sigma_a$ .

Integrala (10.29) se numește integrala lui LEBESGUE și funcția  $f(t)$  se zice că este transformabilă prin transformarea lui LAPLACE.

\* Printre aceștia cităm pe MC. LACHLAN, HUMBERT, PARODI, ANGOT, DOETSCH, PIPES, CHURCHILL, WAGNER, KONTOROVICI, GARDNER și BURNS etc.

\*\* Care se ocupă cu problemele de telegrafie, telefonie și radiocomunicații.

\*\*\* Vezi [116].

\*\*\*\* În cazul cînd  $f(t)$  este o funcție complexă, aceasta se descompune în cele două componente ale sale care pot fi tratate separat ca funcții reale.



**Teorema 1.** Dacă funcția  $f(t)$  satisface ecuația (10.29) integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ a \rightarrow \infty}} \int_a^b e^{-st} f(t) dt, \quad (10.30)$$

în care  $s$  este o variabilă complexă de forma  $\sigma + j\omega$ , pentru orice valoare  $\sigma > \sigma_a$ , se transformă într-o funcție  $\varphi(s)$ , care este analitică în semiplanul  $\sigma_a < \sigma$ .

Integrala (10.30) constituie transformarea lui LAPLACE. Ea asociază funcției  $f(t)$ , de variabilă reală  $t$ , o funcție  $\varphi(s)$ , de variabilă complexă  $s$ . Funcția  $\varphi(s)$  se numește *imaginea* funcției  $f(t)$ , care se numește *originalul* funcției  $\varphi(s)$ .

Transformarea LAPLACE se notează simbolic prin relația

$$\varphi(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad (\sigma_a < \sigma) \quad (10.31)$$

și care se citește  $\varphi(s)$  este *imaginea* funcției  $f(t)$ ,  $\mathcal{L}$  fiind simbolul care indică acest fapt.

Funcția  $\varphi(s)$  este o funcție *asociată* funcției  $f(t)$  și nicidecum o funcție care să reprezinte aceeași mărime.

**Definiția 2.** Inversa transformării lui LAPLACE este definită prin relația

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}[f(t)]\} = f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\varphi(s)], \quad (0 \leq t) \quad (10.32)$$

și care se citește, funcția  $f(t)$  este *originalul* funcției  $\varphi(s)$ .

**Teorema 2.** Dacă  $\varphi(s)$  este imaginea unei funcții  $f(t)$  atunci

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \varphi(s) ds = f(t) \quad (0 \leq t) \quad (10.33)$$

în care  $\sigma \geq \sigma_a$  și  $j = \sqrt{-1}$ .

Ecuația (10.33) constituie reprezentarea explicită a relației (10.32). Ea poartă denumirea de formula lui MELLIN-FOURIER.

**Teorema 3:** *Unicitatea transformării  $\mathcal{L}$ .* Dacă  $f(t)$  satisface ecuația (10.29) și  $\mathcal{L}[f(t)] = \varphi(s)$ ,  $\sigma_a < \sigma$ , imaginea  $\varphi(s)$  a funcției  $f(t)$  este unică.

Această teoremă rezultă din proprietățile integralei definite (10.30).

**Teorema 4.** *Unicitatea transformării  $\mathcal{L}^{-1}$ .* Dacă  $f(t)$  este originalul funcției  $\varphi(s)$ , atunci  $f(t)$  satisface integrala (10.29) și transformarea  $\mathcal{L}^{-1}$  este unică, adică, orice transformare  $\mathcal{L}^{-1}$  a funcției  $\varphi(s)$  este egală cu  $f(t)$  pentru orice valoare a variabilei  $t \geq 0$ .

**Teorema 5.** *Transformarea lui LAPLACE este liniară.* Dacă funcțiile  $f(t)$ ,  $f_1(t)$  și  $f_2(t)$  satisfac ecuația (10.29) și au respectiv imaginile  $\varphi(s)$ ,  $\varphi_1(s)$  și  $\varphi_2(s)$ , dacă  $a$  și  $b$  sînt constante sau variabile diferite de  $t$  și  $s$ , atunci

$$\mathcal{L}[a f(t)] = a \varphi(s)$$

și

$$\mathcal{L}[a f_1(t) \pm b f_2(t)] = a \varphi_1(s) \pm b \varphi_2(s).$$



De asemenea, dacă  $\varphi(s)$ ,  $\varphi_1(s)$  și  $\varphi_2(s)$  sînt respectiv imaginile funcțiilor  $f(t)$ ,  $f_1(t)$  și  $f_2(t)$  și dacă  $a$  și  $b$  sînt constante sau variabile diferite de  $s$  sau  $t$ , atunci

$$\mathcal{L}^{-1} [a \varphi(s)] = a f(t) \quad (0 \leq t),$$

$$\mathcal{L}^{-1} [a \varphi_1(s) \pm b \varphi_2(s)] = a f_1(t) \pm b f_2(t) \quad (0 \leq t).$$

Această teoremă stabilește caracterul de liniaritate a transformării lui LAPLACE și a inversei sale și se deduce din proprietatea de liniaritate a integralelor definite.

**Teorema 6. Imaginea unei derivate.** Dacă funcția  $f(t)$  și derivata sa  $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$  satisfac ecuația (10.29), și dacă  $\varphi(s)$  este imaginea funcției  $f(t)$ , atunci

$$\mathcal{L} [f'(t)] = s \varphi(s) - f(0). \quad (10.34)$$

Pentru demonstrarea acestei teoreme se aplică funcției  $f'(t)$  ecuația (10.30) obținându-se

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt,$$

sau, integrînd prin părți, rezultă

$$\psi(s) = \left| e^{-st} f(t) \right|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Primul termen se reduce la  $-f(0)$ , iar al doilea este egal cu  $s \varphi(s)$  și se obține astfel relația (10.34).

Teorema poate fi extinsă și la calculul imaginilor derivatelor de ordin superior, dacă acestea satisfac ecuației (10.29). Rezultatul se obține aplicînd succesiv relația (10.34).

Se găsește astfel

$$\mathcal{L} f''(t) = s^2 \mathcal{L} f(t) - s f(0) - f'(0) = s^2 \varphi(s) - s f(0) - f'(0);$$

în general se găsește

$$\mathcal{L} f^{(n)}(t) = s^n \varphi(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (10.35)$$

**OBSERVAȚII.** 1. Dacă

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$$

atunci relația (10.35) se poate scrie

$$\mathcal{L} f^{(n)}(t) = s^n \varphi(s).$$



2. Relația (10.35) se poate scrie în general

$$\mathcal{L} f^{(n)} = s^n \varphi(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$$

în care  $f^{(0)}(t) = f(t)$ .

**Teorema 7. Imaginea unei integrale.** Dacă funcția  $f(t)$  satisface ecuația (10.29) și imaginea sa este  $\varphi(s)$ , atunci integrala sa

$$f^{(-1)}(t) = \int f(t) dt$$

satisface de asemenea ecuația (10.29) și

$$\mathcal{L} \left[ \int f(t) dt \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L} f(t) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0), \quad (10.36)$$

unde  $f^{(-1)}(0)$  este valoarea pentru  $t = 0$  a funcției primitive a lui  $f(t)$ .

Pentru demonstrarea teoremei, se aplică funcției  $\int f(t) dt$  ecuația (10.30) și se integrează prin părți.

În general dacă

$$f^{(-k)}(t) = \int \int \int \dots \int f(t) (dt)^k$$

atunci

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \left[ f^{(-1)}(t) \right] &= \frac{1}{s} \varphi(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0) \\ \mathcal{L} \left[ f^{(-2)}(t) \right] &= \frac{1}{s^2} \varphi(s) + \frac{1}{s^2} f^{(-1)}(0) + \frac{1}{s} f^{(-2)}(0) \\ &\dots \dots \dots \\ \mathcal{L} \left[ f^{(-n)}(t) \right] &= \frac{1}{s^n} \varphi(s) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} f^{(-k)}(0). \end{aligned} \right\}$$

În cazul unei integrale definite

$$\int_0^t f(t) dt,$$

aplicând ecuația (10.30) se obține

$$\mathcal{L} \int_0^t f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^t f(t) dt \right] dt = \frac{1}{s} \mathcal{L} f(t) \quad (10.37)$$



În general se găsește

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_1} f(t) dt \right] = \frac{\varphi(s)}{s^n}.$$

Din cele ce preced rezultă că transformarea lui LAPLACE transformă, în esență, operațiile de derivare și de integrare în simple înmulțiri și împărțiri asupra variabilei  $s$ . În aceste condiții, cu ajutorul transformării lui LAPLACE, foarte multe probleme de analiză pot fi transformate în probleme de algebră.

Se ajunge astfel, pe cale riguroasă matematică, la principiile calculului operațional enunțat de HEAVISIDE.

**Teorema 8. Translația variabilei  $s$ .** Dacă se dă o creștere  $\pm \lambda$  variabilei  $s$  și dacă  $\varphi(s) = \mathcal{L} f(t)$ , atunci

$$\varphi(s \pm \lambda) = \mathcal{L} e^{\mp \lambda t} f(t). \quad (10.38)$$

**Teorema 9. Translația variabilei  $t$**  (fig.10.2). Fie  $f(t)$  o funcție care îndeplinește condițiile (10.29) astfel că

$$f(t) = 0 \quad \text{pentru } t < \lambda$$

$$f(t) \neq 0 \quad \text{pentru } t \geq \lambda$$

și fie  $\varphi(s) = \mathcal{L} f(t)$ . Dacă se dă o creștere  $\pm \lambda$  variabilei  $t$ , atunci

$$\mathcal{L} f(t \pm \lambda) = e^{\pm \lambda s} \varphi(s). \quad (10.39)$$

În aplicarea teoremelor 8 și 9 se comit de multe ori erori și anume, se confundă funcțiile

$$f(t - a) \text{ nulă pentru } t < 0$$

și

$$f(t - a) \text{ nulă pentru } t < a,$$

care nu au aceeași imagine. Într-adevăr, fie funcția (fig. 10.3)

$$f_1(t) = t - a \quad \text{pentru } t > 0$$

$$f_1(t) = 0 \quad \text{pentru } t < 0.$$

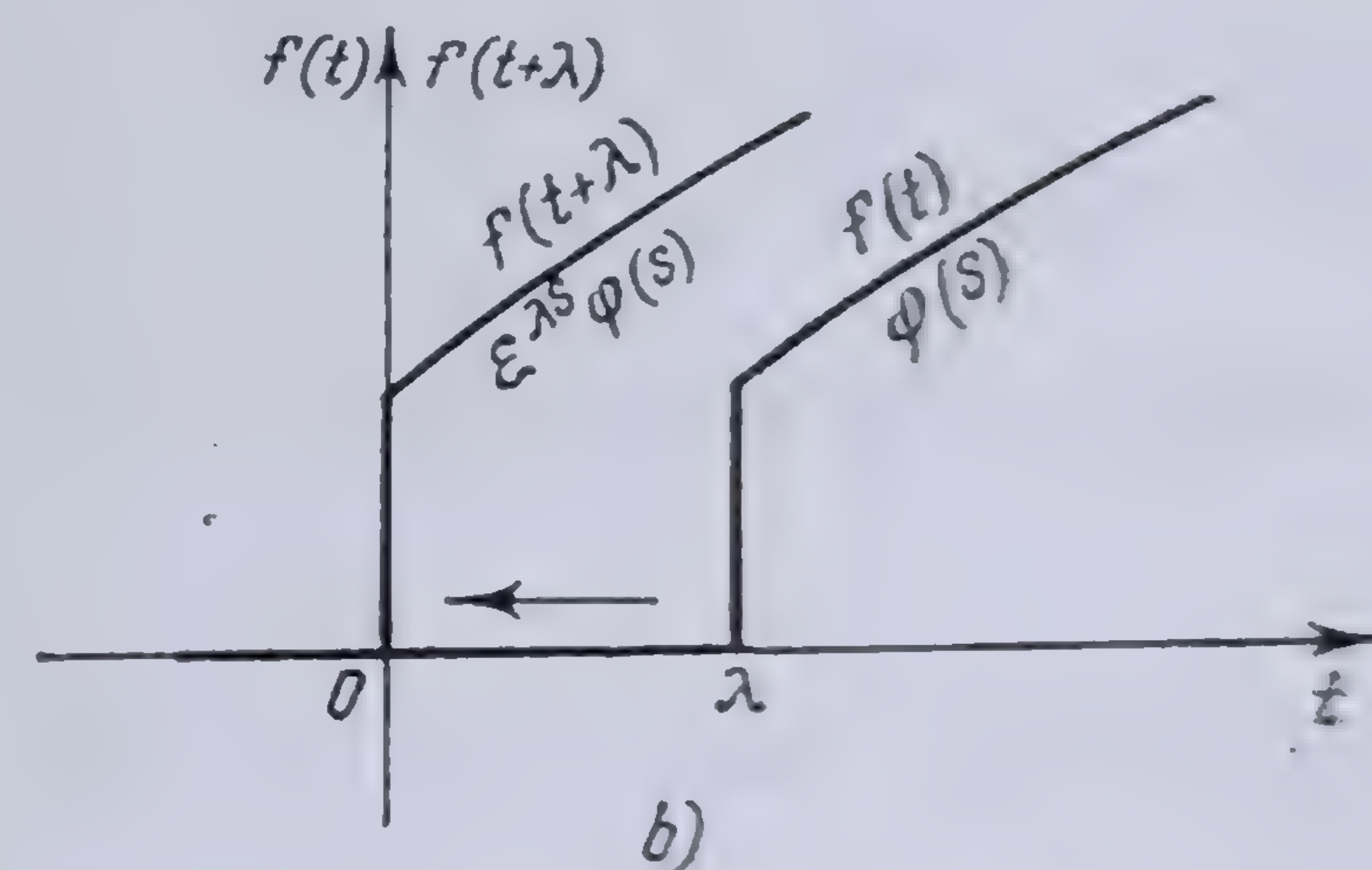
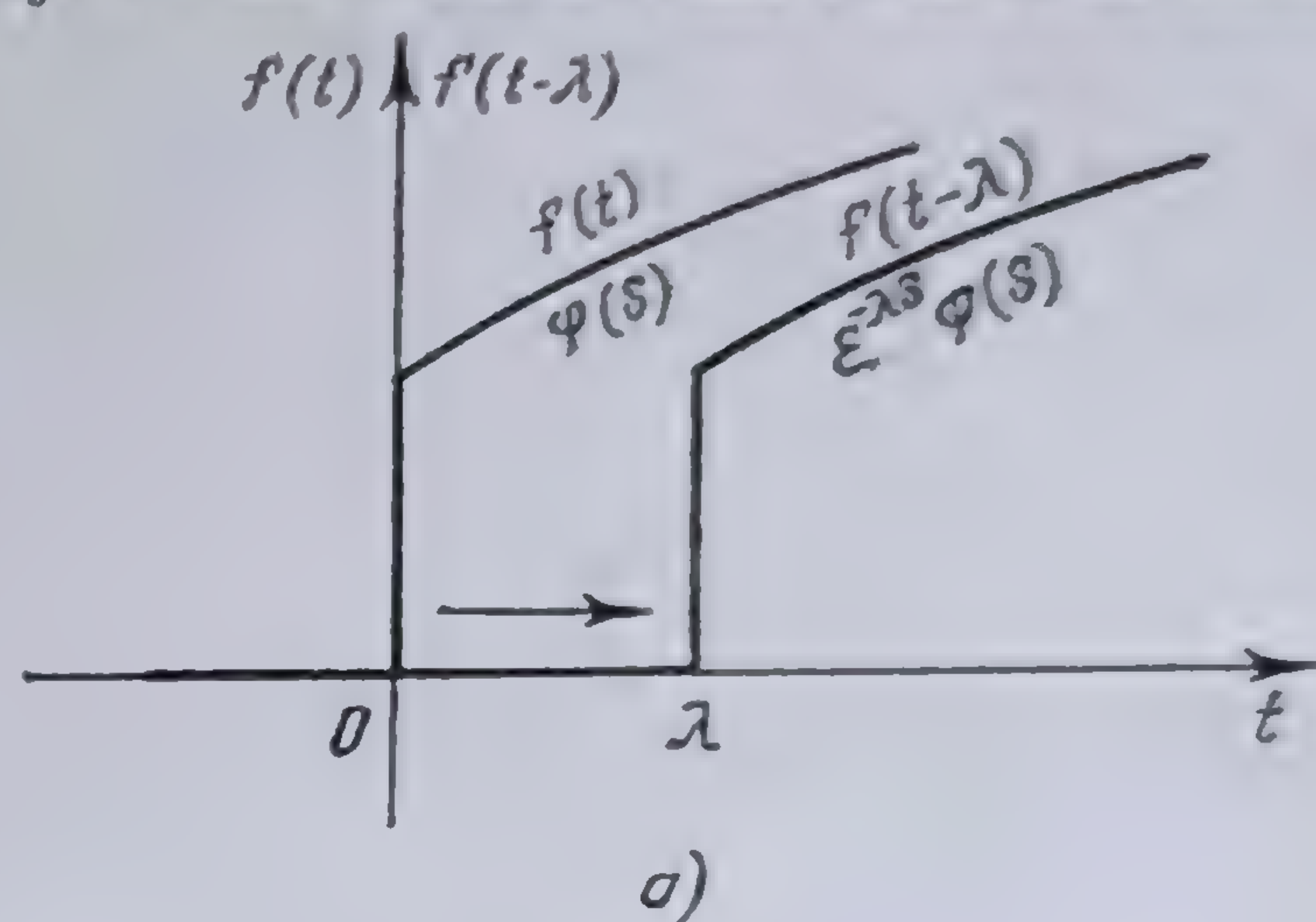


Fig. 10.2. Translația variabilei  $t$ :  
a) spre dreapta ( $\lambda < 0$ );  
b) spre stînga ( $\lambda > 0$ ).

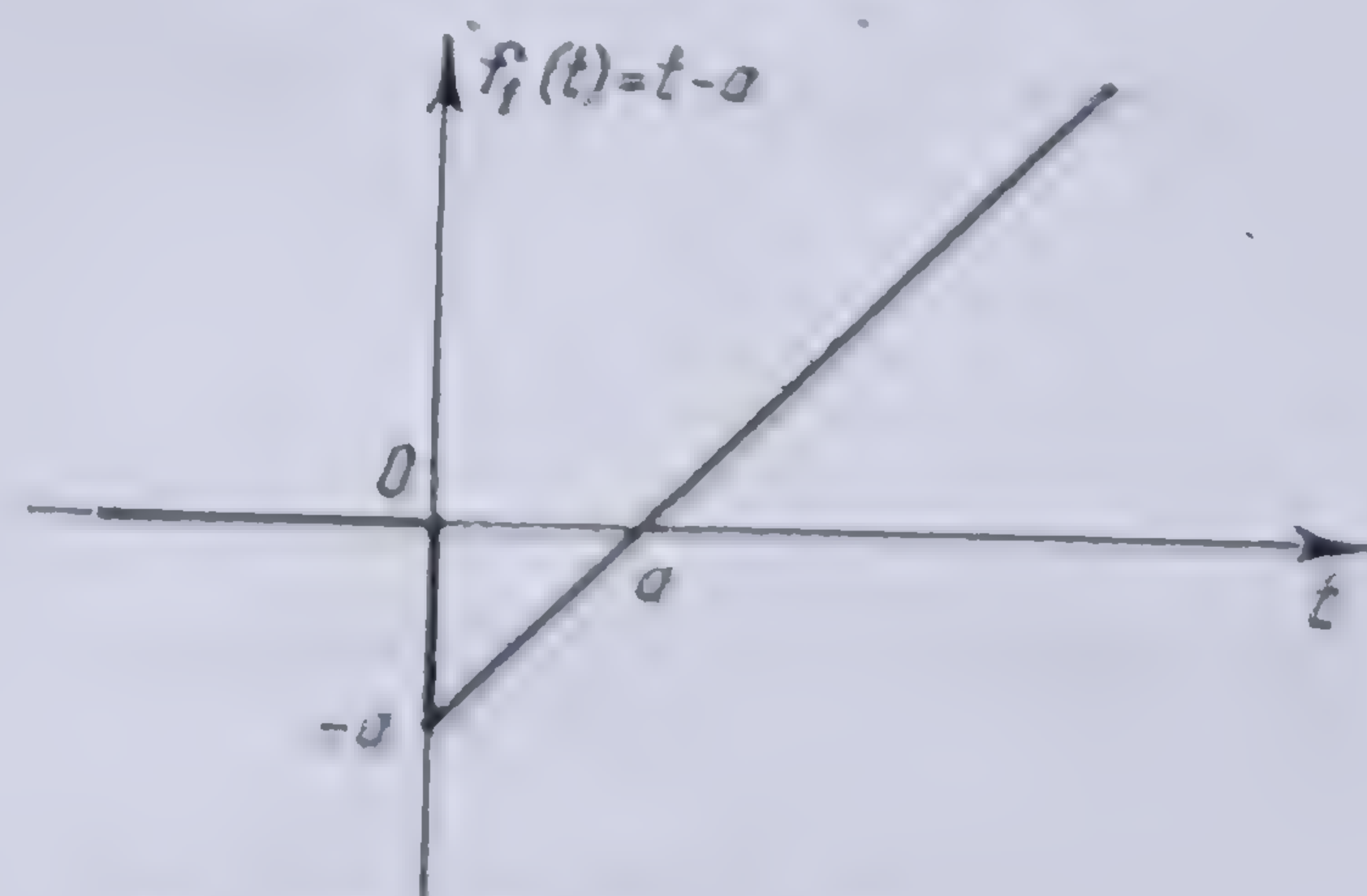


Fig. 10.3. Funcția  $f(t) = t - a$



Imaginea acestei funcții este

$$\varphi_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} (t - a) dt = \frac{1}{s^2} - \frac{a}{s}.$$

Să considerăm acum funcția (fig. 10.4)

$$f_2(t) = t - a \quad \text{pentru } t > a$$

$$f_2(t) = 0 \quad \text{pentru } t < a.$$

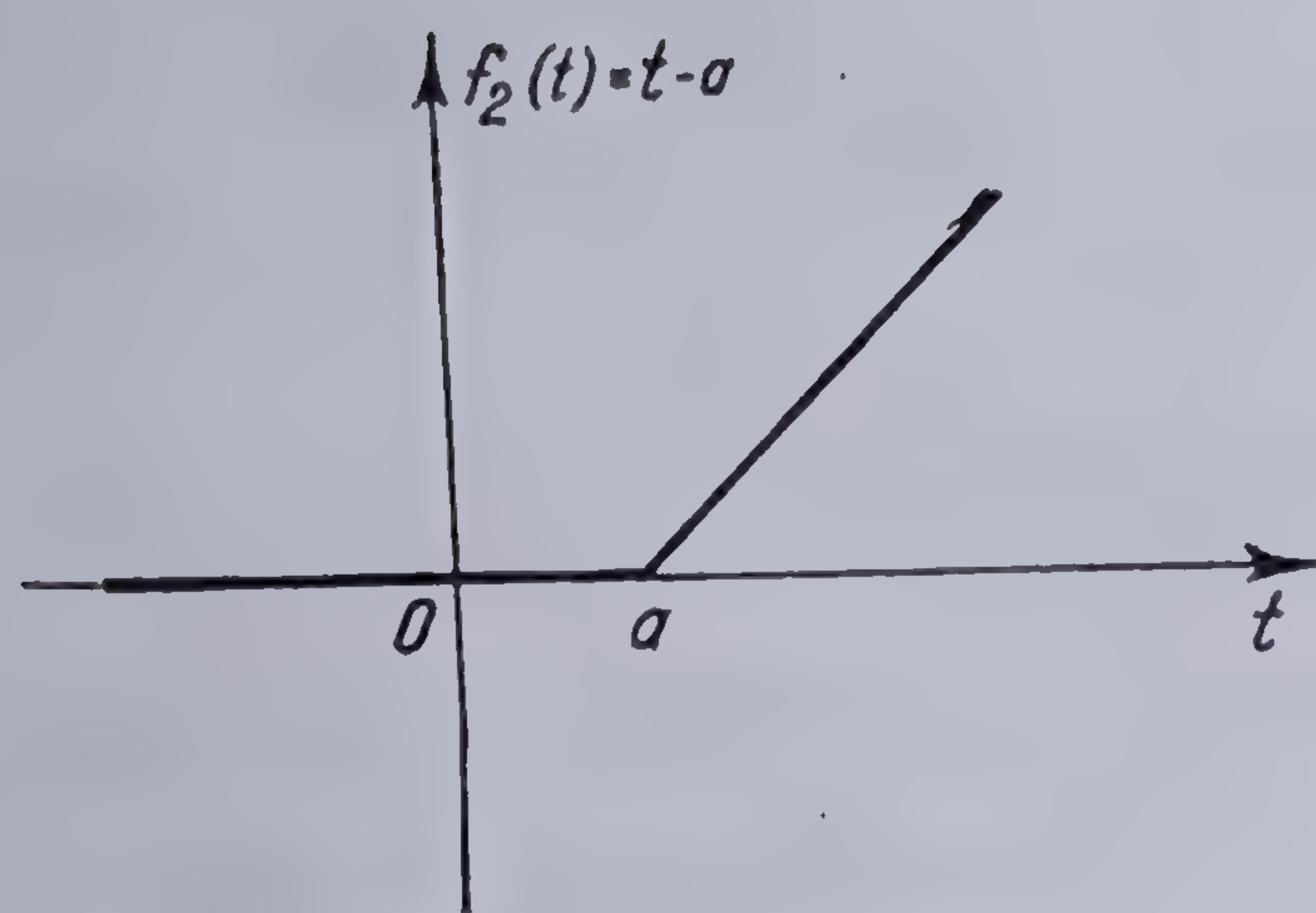


Fig. 10.4. Funcția  $f_2(t) = t - a$

Această funcție nu este alta decât funcția

$$f(t) = t \quad \text{pentru } t > 0$$

$$f(t) = 0 \quad \text{pentru } t < 0$$

căreia i s-a dat o translație către dreapta. Imaginea acestei funcții fiind

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \frac{1}{s^2},$$

imagea funcției  $f_2(t)$  va fi

$$\varphi_2(s) = \frac{e^{-as}}{s^2}$$

și se vede imediat că

$$\varphi_1(s) \neq \varphi_2(s).$$

**Teorema 10. Schimbarea scării timpurilor.** În ipoteza că  $\mathcal{L} f(t) = \varphi(s)$ , imagea funcției  $f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$  este

$$\mathcal{L} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \lambda \varphi(\lambda s). \quad (10.40)$$

Această funcție corespunde unei funcții de timp la care unitatea de timp a fost luată de  $\lambda$  ori mai mică.

Este evident că dacă  $\lambda = \frac{1}{k}$ , atunci relația (10.40) devine

$$\mathcal{L} f(kt) = \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{s}{k}\right).$$

**Teorema 11. Derivarea funcției imagine.** Dacă  $\varphi(s) = \mathcal{L} f(t)$ , atunci

$$\frac{d\varphi(s)}{ds} = -\mathcal{L} tf(t)$$



În general

$$\frac{d^n \varphi(s)}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L} t^n f(t).$$

**Teorema 12.** *Integrarea funcției imagine.* Dacă  $\varphi(s) = \mathcal{L}f(t)$ , atunci

$$\int_s^\infty \varphi(s) ds = \mathcal{L} \frac{f(t)}{t}. \quad (10.41)$$

Integrând de  $n$  ori în raport cu  $s$  și între aceleași limite, se obține

$$\int_s^\infty ds \int_s^\infty ds \int_s^\infty ds \dots \int_s^\infty \varphi(s) ds = \mathcal{L} \frac{f(t)}{t^n}.$$

**Teorema 13.** *Teorema produsului sau teorema lui BOREL.* Dacă  $\varphi_1(s) = \mathcal{L}f_1(t)$  și  $\varphi_2(s) = \mathcal{L}f_2(t)$ , atunci

$$\varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s) = \mathcal{L} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \mathcal{L} \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (t > \tau). \quad (10.42)$$

Se obișnuiește a se numi operația (10.24) un *produs de compoziție* sau o *convoluție* și să se noteze

$$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) dt = f_1(t) * f_2(t)$$

și deci relația (10.42) poate fi scrisă simbolic

$$\varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s) = \mathcal{L} [f_1(t) * f_2(t)] = \mathcal{L} [f_2(t) * f_1(t)].$$

**Teorema 14.** Dacă  $\varphi(s) = \mathcal{L}f(t)$ , atunci

$$\mathcal{L}t \frac{df(t)}{dt} = - \frac{d}{ds} [s\varphi(s)],$$

$$\mathcal{L}t \frac{d^2f(t)}{dt^2} = - \frac{d}{ds} [s^2 \varphi(s) - s f(0)],$$

.....

$$\mathcal{L}t \frac{d^n f(t)}{dt^n} = - \frac{d}{ds} \left[ s^n \varphi(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \right],$$

în care s-a notat  $f^{(0)}(0) = f(0)$ .



De asemenea

$$\mathcal{L}t^2 \frac{df(t)}{dt} = \frac{d^2}{ds^2} [s \varphi(s)],$$

.....

$$\mathcal{L}t^n \frac{df(t)}{dt} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [s \varphi(s)].$$

În general

$$\mathcal{L}t^n \frac{d^n f(t)}{dt^n} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left[ s^n \varphi(s) = \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \right].$$

Această teoremă este utilizată la rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți variabili.

#### 10.4.2. TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ȘI INTEGRO-DIFERENȚIALE

10.4.2.1. Transformarea ecuației diferențiale de ordinul doi. Fie ecuația diferențială

$$A \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + Cy = f(t) \quad (10.43)$$

în care  $A, B, C$  sînt constante cunoscute. Funcția necunoscută  $y$  este o funcție de variabilă  $t$ , ca și funcția cunoscută  $f(t)$ . Funcția necunoscută  $y$  se numește *funcția răspuns*, iar funcția cunoscută se numește *funcția semnal*.

Presupunînd că toate funcțiile ecuației (10.43) satisfac ecuația (10.29) și aplicînd transformarea lui LAPLACE se obține

$$\mathcal{L} \left[ A \frac{d^2 y}{dt^2} + B \frac{dy}{dt} + Cy \right] = A \mathcal{L} \frac{d^2 y}{dt^2} + B \mathcal{L} \frac{dy}{dt} + C \mathcal{L} y = \mathcal{L} f(t).$$

Punînd\*

$$\mathcal{L}f(t) = \varphi(s) \quad \text{și} \quad \mathcal{L}y(t) = \eta(s),$$

și ținînd seama de teorema 6, relația (10.43) devine

$$A[s^2 \eta(s) - sy(0) - y'(0)] + B[s\eta(s) - y(0)] + C\eta(s) = \varphi(s). \quad (10.44)$$

În această expresie  $y(0)$  și  $y'(0)$  reprezintă condițiile inițiale pe care trebuie să le îndeplinească funcția  $y(t)$  și se vede de aici cum se ține seama de aceste condiții chiar în timpul operațiilor de transformare.

\*  $\varphi(s)$  se numește imaginea funcției semnal sau *imaginea semnal* și  $\eta(s)$  se numește imaginea funcției răspuns sau *imaginea răspuns*.



Ecuatia (10.44) poate fi scrisă

$$(As^2 + Bs + C) \eta(s) = \varphi(s) + (As + B)y(0) + Ay'(0), \quad (10.45)$$

care este o ecuație *algebrică* în  $s$  și se numește *ecuația transformată* a ecuației diferențiale (10.43).

Rezolvând ecuația (10.45) în raport cu  $\eta(s)$  se obține

$$\eta(s) = \frac{1}{As^2 + Bs + C} [\varphi(s) + (As + B)y(0) + Ay'(0)]. \quad (10.46)$$

Funcția  $\eta(s)$  este prin definiție *funcția imagine* a funcției  $y(t)$ . Coeficientul funcției  $\eta(s)$  din ecuația (10.45) se numește *funcția caracteristică*, deoarece ea caracterizează complet, fenomenul fizic exprimat prin ecuația diferențială. Egalând cu zero această funcție, se obține *ecuația caracteristică* a ecuației diferențiale.

Inversul funcției caracteristice se numește *funcția sistemului*; în general această funcție poate fi o fracție la care numitorul este funcția caracteristică. Funcția sistemului cuprinde într-o singură funcție toate mărimile care caracterizează sistemul fizic.

Funcția din membrul al doilea al ecuației (10.45) se numește *funcția de excitație*. Ea cuprinde imaginea funcției semnal și condițiile inițiale, acestea din urmă formând *funcția inițială de excitație*. Funcția de excitație conține toate elementele de excitație aplicate sistemului. Ecuația (10.46) se poate exprima astfel

$$(\text{imaginea funcției răspuns}) = (\text{funcția sistemului}) \cdot (\text{funcția de excitație}).$$

Cunoscând funcția imagine  $\eta(s)$ , prin operația inversă se poate găsi funcția original  $y(t)$  aplicându-se transformarea

$$\mathcal{L}^{-1} \eta(s) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\varphi(s) + (As + B)y(0) + Ay'(0)}{As^2 + Bs + C} \right] = y(t),$$

cu condiția  $0 \leq t$ .

**10.4.2.2. Transformarea ecuației integro-diferențială de primul ordin.**  
Fie ecuația integrodiferențială

$$A \frac{dy}{dt} + By + C \int y dt = f(t) \quad (10.47)$$

în care  $y$  este o funcție de timp,  $y(0)$  și  $y^{(-1)}(0)$  fiind valorile inițiale ale sale și ale primei sale integrale.

Presupunând că toate condițiile de posibilitate a transformării lui LAPLACE sint îndeplinite și procedînd ca în cazul precedent, se găsește succesiv

$$\mathcal{L} \left[ A \frac{dy}{dt} + By + C \int y dt \right] = A \mathcal{L} \frac{dy}{dt} + B \mathcal{L} y + C \mathcal{L} \left[ \int y dt \right] = \mathcal{L} f(t)$$

sau

$$A [s\eta(s) - y(0)] + B\eta(s) + C \left[ \frac{1}{s} \eta(s) + \frac{1}{s} y^{(-1)}(0) \right] = \varphi(s),$$



de unde

$$\left(As + B + \frac{C}{s}\right) \eta(s) = \varphi(s) + A y(0) + \frac{Cy^{(-1)}(0)}{s}.$$

Din această ecuație se deduce imaginea funcției răspuns

$$\eta(s) = \frac{\varphi(s) + Ay(0) + \frac{Cy^{(-1)}(0)}{s}}{As + B + \frac{C}{s}},$$

care poate fi scrisă și în acest caz :

(*imaginea funcției răspuns*) = (*funcția sistemului*) · (*funcția de excitație*).  
Cunoscând funcția imagine  $\eta(s)$ , se poate găsi funcția original  $y(t)$  prin operația inversă

$$\mathcal{L}^{-1} \eta(s) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\varphi(s) + Ay(0) + \frac{Cy^{(-1)}(0)}{s}}{As + B + \frac{C}{s}} \right],$$

cu condiția  $0 \leq t$ .

#### 10.4.3. IMAGINEA UNOR FUNCȚII UZUALE

Găsirea imaginii unei funcții oarecare se face aplicând ecuația (10.30) și calculând integrala corespunzătoare.

10.4.3.1. Imaginea unei constante. Fie

$$f(t) = k.$$

Ecuația (10.30) dă imediat

$$\varphi(p) = \int_0^{\infty} e^{-st} k dt = \frac{k}{s}$$

deci

$$\mathcal{L}k = \frac{k}{s}.$$

În cazul când  $k = 1$  se obține

$$\mathcal{L}1 = \mathcal{L} \Upsilon(t) = \frac{1}{s},$$

imaginea funcției unitate \*.

\* Vezi și 10.4.3.5.



### 10.4.3.2. Imaginea funcției exponențiale. Fie funcția

$$f(t) = e^{\pm \lambda t},$$

în care  $\lambda$  este o mărime oarecare, reală sau complexă.  
Introducând-o în ecuația (10.30) se obține

$$\mathcal{L}[e^{\pm \lambda t}] = \frac{1}{s \mp \lambda} \quad (10.48)$$

Pentru aceste transformări, imaginile corespunzătoare au un sens în planul  $s$  numai în cazul când partea reală a mărimilor  $s \pm \lambda$  este pozitivă.

10.4.3.3. Imaginea funcțiilor circulare și hiperbolice. Ținând seama că transformarea lui LAPLACE este liniară, imaginea funcțiilor circulare și hiperbolice se obține scriind expresia lui EULER a acestora. Astfel, pentru funcția  $\cos \alpha t$ , în care  $\alpha$  este un număr real și pozitiv, se obține

$$\mathcal{L} \cos \alpha t = \frac{1}{2} \mathcal{L} e^{j\alpha t} + \frac{1}{2} \mathcal{L} e^{-j\alpha t} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\alpha} + \frac{1}{s + j\alpha} \right) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}. \quad (10.49)$$

În același mod se găsește

$$\mathcal{L} \sin \alpha t = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \quad (10.50)$$

$$\mathcal{L} \cos(\alpha t + \psi) = \cos \psi \mathcal{L} \cos \alpha t - \sin \psi \mathcal{L} \sin \alpha t = \frac{s \cos \psi - \alpha \sin \psi}{s^2 + \alpha^2} = \frac{a_1 s + a_0}{s^2 + \alpha^2}$$

$$\mathcal{L} \sin(\alpha t + \psi) = \frac{\alpha \sin \psi + s \cos \psi}{s^2 + \alpha^2} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + \alpha^2},$$

în care s-a notat

$$a_1 = \cos \psi, \quad b_1 = \sin \psi, \quad a_0 = -\alpha \sin \psi, \quad b_0 = \alpha \cos \psi,$$

$$\mathcal{L} e^{-\alpha t} \cos \beta t = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L} e^{-\alpha t} \sin \beta t = \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

**OBSERVAȚIE.** Aceste relații se obțin imediat aplicând teorema  $S$  a translației variabilei  $s$ .

$$\mathcal{L} \operatorname{ch} \alpha t = \frac{s}{s^2 - \alpha^2}, \quad (10.51)$$

$$\mathcal{L} \operatorname{sh} \alpha t = \frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}. \quad (10.52)$$



10.4.3.4. Imaginea funcției puteri a lui  $t$ . Fie funcția

$$f(t) = t$$

care, introdusă în ecuația (10.30) și efectuând calculul, dă

$$\mathcal{L} t = \frac{1}{s^2}. \quad (10.53)$$

În cazul general, pentru  $f(t) = t^n$ , procedînd ca mai sus și integrînd prin părți, se obține relația de recurență

$$\mathcal{L} t^k = \frac{k}{s} \mathcal{L} t^{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

din care rezultă ușor

$$\mathcal{L} t^n = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (10.54)$$

Aplicînd teorema 8 a translației variabilei  $s$  se găsește

$$\mathcal{L} t^n e^{-\alpha t} = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}. \quad (10.55)$$

10.4.3.5. Imaginea funcției unitate. Funcția  $\Upsilon(t)$  definită astfel încît\*

$$\text{pentru } t < 0 \quad \Upsilon(t) = 0$$

$$\text{pentru } t \geq 0 \quad \Upsilon(t) = 1$$

se numește *funcția unitate* a lui HEAVISIDE.

Aplicînd ecuația (10.30) se găsește imediat imaginea acestei funcții

$$\mathcal{L} \Upsilon(t) = \frac{1}{s}. \quad (10.56)$$

Funcția unitate poate fi definită în raport cu o altă origine. Astfel, de exemplu, ea poate fi definită ca fiind nulă pentru  $t < t_0$  și avînd valoarea egală cu unitatea pentru  $t \geq t_0$ . În acest caz, imaginea ei se obține fie direct, aplicînd ecuația (10.30) cu limitele de integrare  $t_0$  și  $\infty$ , fie aplicînd relația (10.39) a teoremei 9. Se obține

$$\mathcal{L} \Upsilon_1(t) = \frac{e^{-t_0 s}}{s}. \quad (10.57)$$

\* Vezi 3.6.2.3.



Funcția unitate este folosită pentru a se exprima că o funcție  $f(t)$ , reprezentând o anumită excitație este aplicată sistemului la momentul  $t = 0$ , ea fiind nulă înaintea acestui moment. O astfel de funcție se va scrie

$$f(t) \cdot Y(t).$$

În general, funcția  $Y(t)$  este subînțeleasă și nu se mai scrie, însă trebuie ținut seama că, întotdeauna funcțiile care reprezintă anumite excitații ce se aplică sistemului trebuie să fie nule înainte de momentul aplicării lor, adică pentru  $t < 0$ .

**10.4.3.6. Funcția impuls și imaginea ei.** Funcția  $Y'(t)$ , nulă pentru orice valoare a lui  $t$  în afara intervalului

$$0 < t < \xi,$$

$\xi$  fiind oricât de mic voim, se numește *funcția impuls* (fig. 10.5). În afară de aceasta, în intervalul de timp considerat ea are o valoare astfel încât

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{\xi} Y'(t) dt = 1.$$

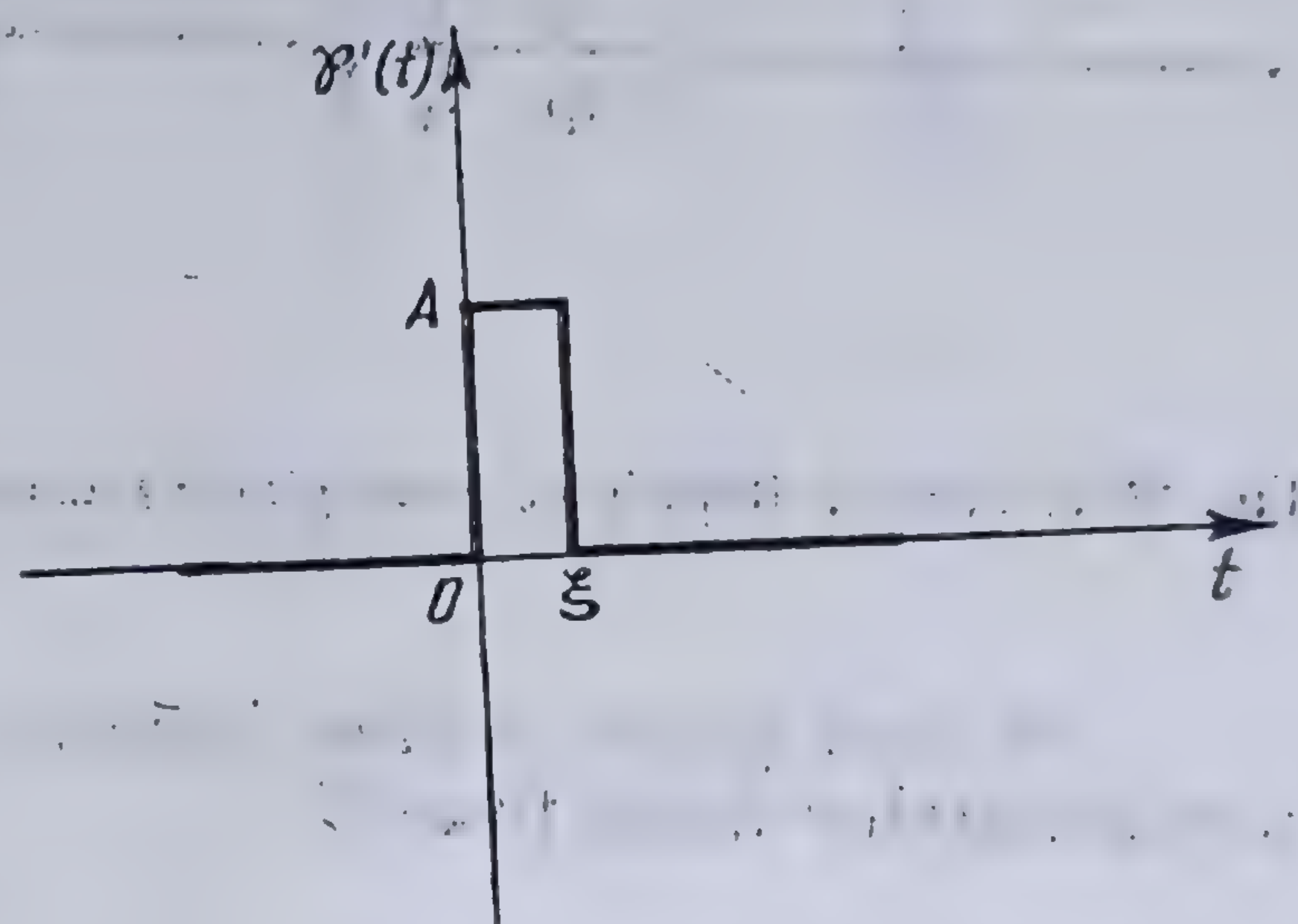


Fig. 10.5. Funcția impuls.

Este vorba deci de o funcție care este foarte mare într-un interval de timp foarte mic și care determină, cu axa absciselor o suprafață a cărei arie este egală cu 1.

Pentru a găsi imaginea acestei funcții să presupunem că în intervalul considerat ea are valoarea  $A$ , astfel încât  $A\xi = 1$ .

Aplicând ecuația (10.30) se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{L} Y'(t) &= \int_0^{\infty} e^{-st} Y'(t) dt = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{\xi} e^{-st} Y'(t) dt = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{\xi} e^{-st} A dt = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{s\xi} (1 - e^{-s\xi}) = 1 \end{aligned}$$

și deci

$$\mathcal{L} Y'(t) = 1. \quad (10.58)$$

Dacă se compară relația (10.58) cu relația (10.56) se vede că

$$\mathcal{L} Y'(t) = s \mathcal{L} Y(t).$$

Rezultă deci că funcția impuls poate fi considerată ca derivata funcției unitate. Pentru aceste motive ea se notează cu  $Y'(t)$ . Funcția impuls se mai numește și *funcția impuls a lui DIRAC*.



Ca și funcția unitate, funcția impuls poate fi definită în raport cu o altă origine. Spre exemplu, ea poate fi definită ca fiind nulă pentru  $t < t_0$  și  $t > t_0 + \xi$  și ca avînd o valoare constantă  $A$  în intervalul  $t_0$  și  $t_0 + \xi$ , astfel încît  $A\xi = 1$  (fig. 10.6).

Imaginea ei se găsește aplicînd transformarea lui LAPLACE (10.30) între limitele  $t_0$  și  $t_0 + \xi$  și calculînd limita cînd  $\xi$  tinde către zero, sau aplicînd relația (10.39) a teoremei 9. Se obține

$$\mathcal{L} \Upsilon'(t) = e^{-st_0}$$

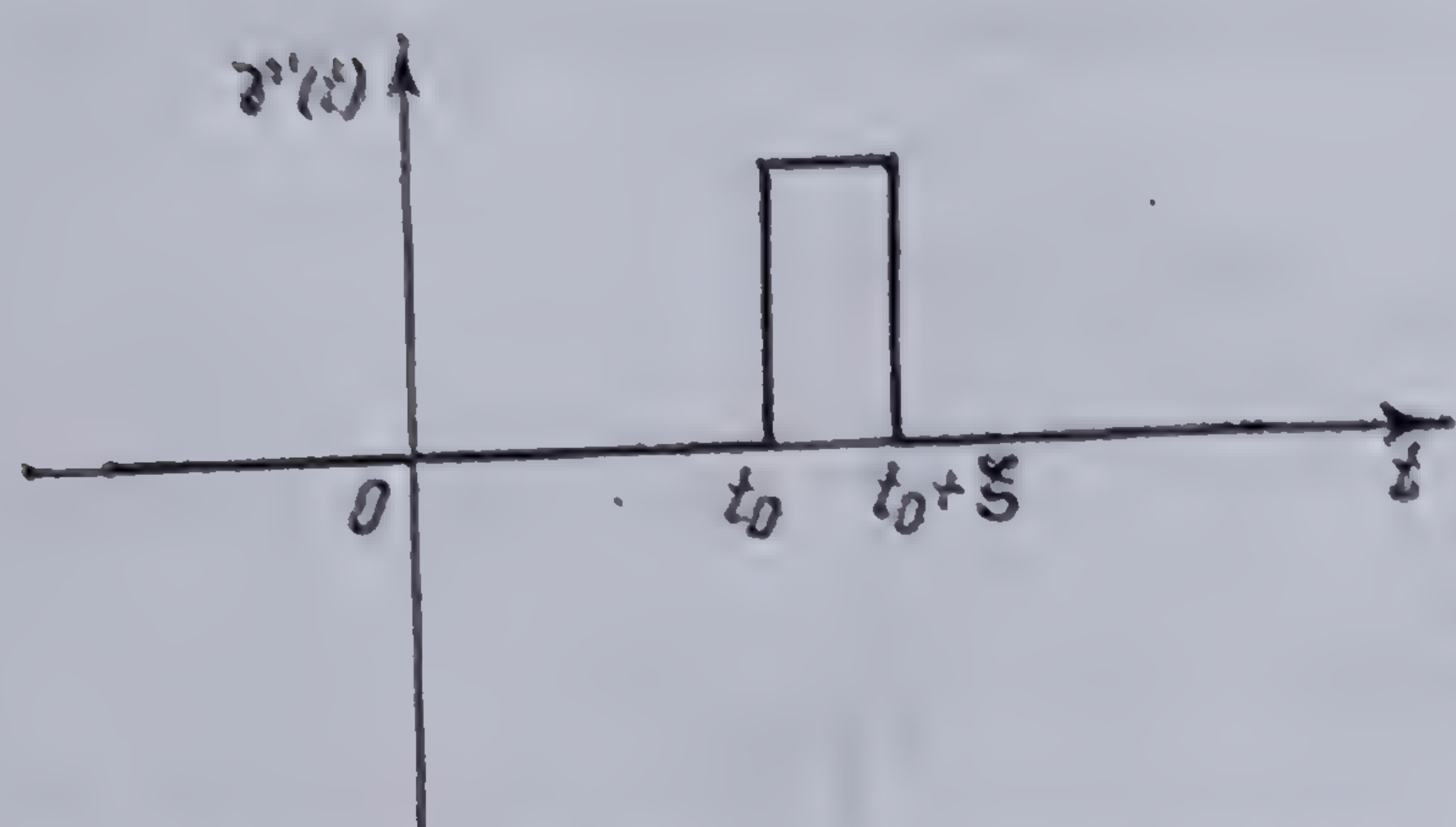


Fig. 10.6. Funcția impuls cu o origine oarecare.

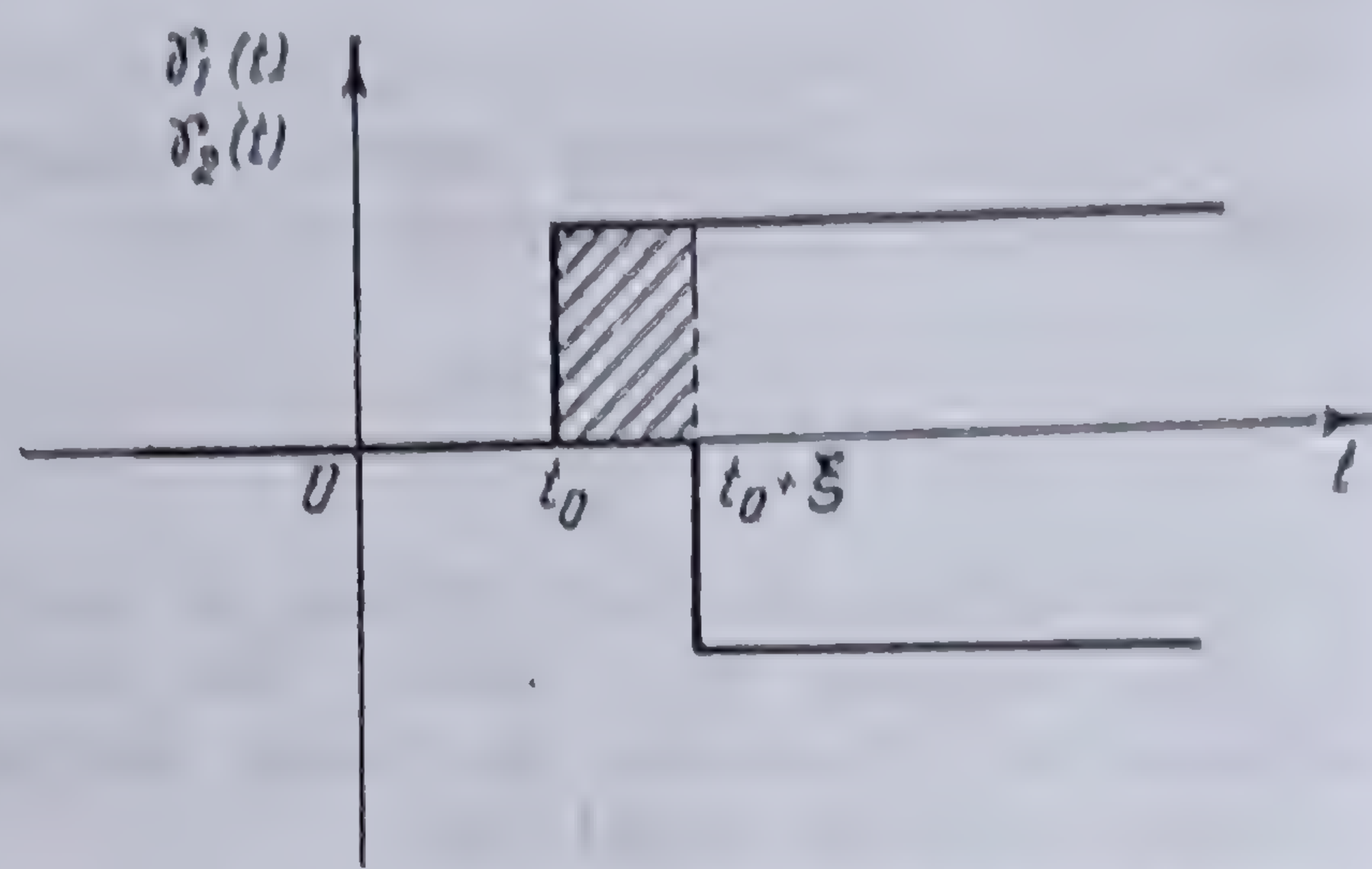


Fig. 10.7. Funcția impuls dedusă din două funcții unitate.

Se mai poate obține funcția impuls definită de figura 10.6 făcînd suma următoarelor două funcții :

$$f_1(t) = 0 \quad \text{pentru} \quad 0 < t < t_0$$

$$f_1(t) = A \quad \text{pentru} \quad t > t_0$$

$$f_2(t) = 0 \quad \text{pentru} \quad 0 < t < t_0 + \xi$$

$$f_2(t) = -A \quad \text{pentru} \quad t > t_0 + \xi$$

se obține curba din figura 10.7, a cărei imagine este egală cu suma celor două imagini. Ținînd seama de relația (10.39) rezultă

$$\mathcal{L} f_1(t) = \frac{A e^{-t_0 s}}{s}$$

$$\mathcal{L} f_2(t) = - \frac{A e^{-(t_0 + \xi)s}}{s}$$

De unde,

$$\mathcal{L} f(t) = \mathcal{L} f_1(t) + \mathcal{L} f_2(t) = \frac{A}{s} e^{-t_0 s} (1 - e^{-\xi s});$$

ținînd seama că  $A\xi = 1$  și trecînd la limită, se obține

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathcal{L} f(t) = e^{-st_0} = \mathcal{L} \Upsilon'(t).$$



### 10.4.3.7. Imaginea funcțiilor periodice nesinusoidale. Fie

$$f(t) = f(t + 2a) = f(t + 2ka), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

o funcție periodică de perioada  $2a$  (fig. 10.8). Pentru a-i găsi imaginea, va trebui să aplicăm relația (10.30); funcția fiind periodică se poate scrie

$$\mathcal{L} f(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \sum_{k=0}^\infty \int_{2ka}^{2(k+1)a} e^{-st} f(t) dt.$$

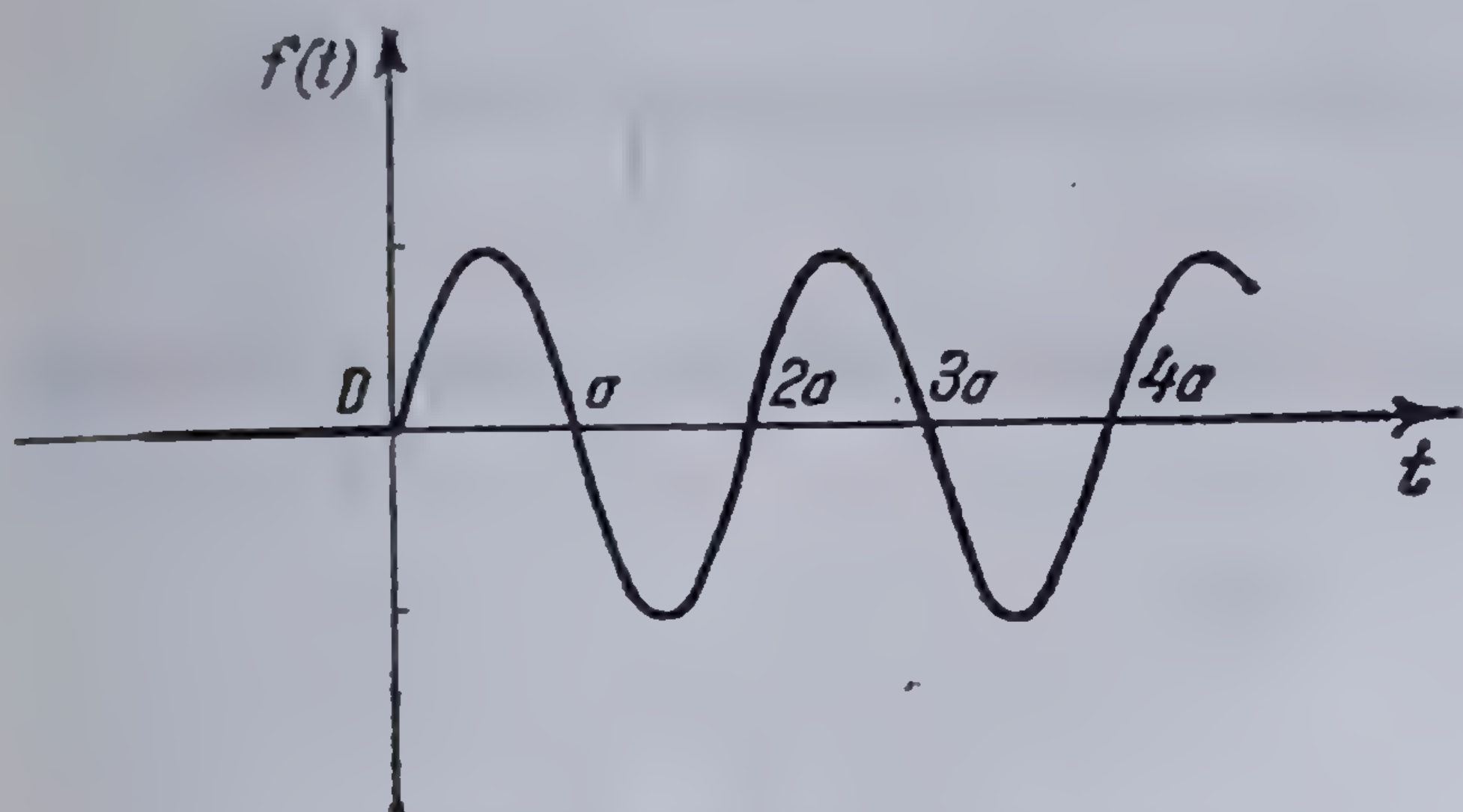


Fig. 10.8. Funcția periodică nesinusoidală.

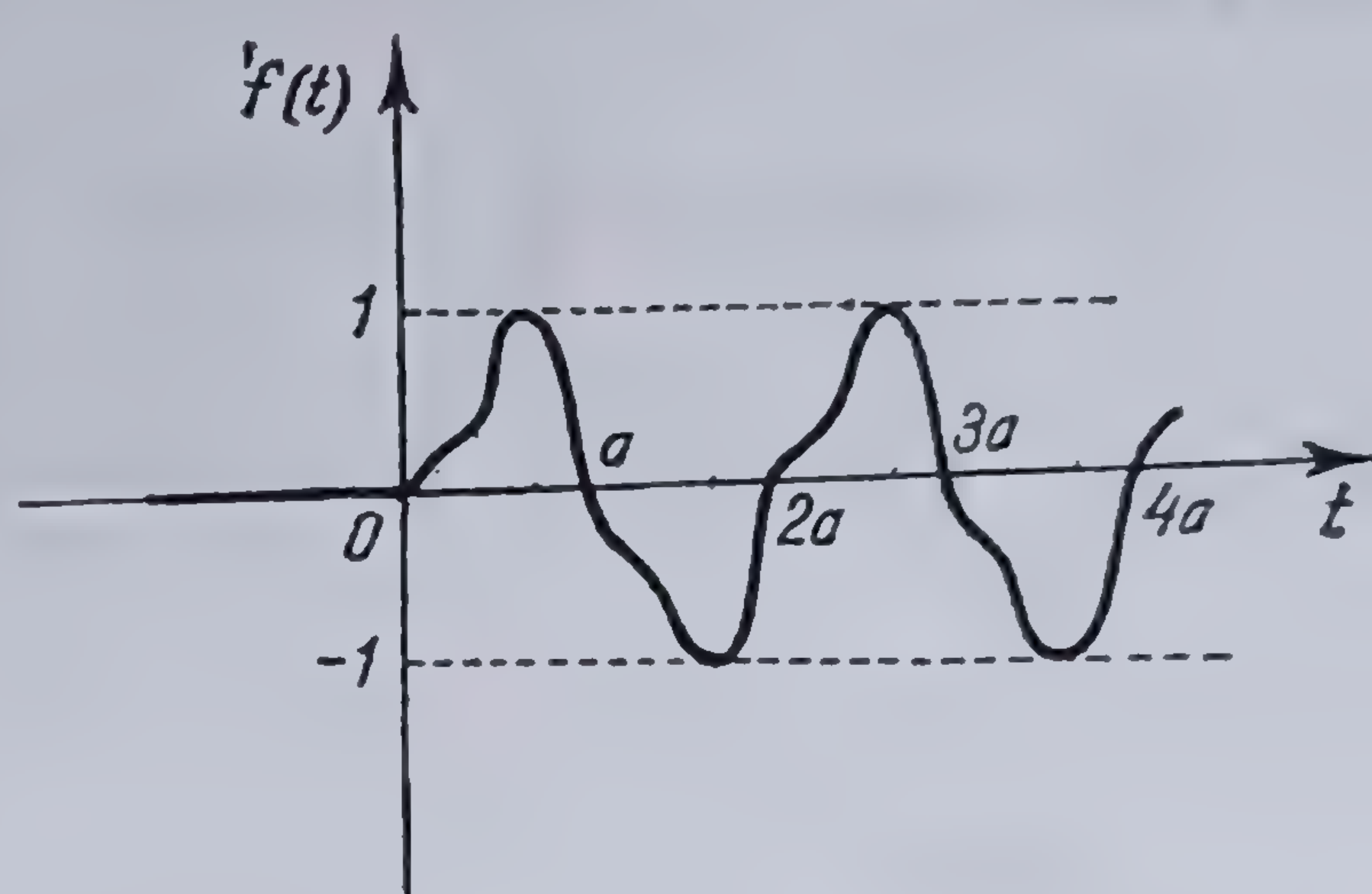


Fig. 10.9. Funcția periodică nesinusoidală cu simetria  $f(t) = -f(t+a)$ .

Făcând schimbarea de variabilă  $t = u + 2ka$ , rezultă

$$f(t) = f(u + 2ka) = f(u),$$

și deci

$$\mathcal{L} f(t) = \sum_{k=0}^\infty \int_0^{2a} e^{-s(u+2ka)} f(u) du = \left[ \sum_{k=0}^\infty e^{-2ska} \right] \int_0^{2a} e^{-su} f(u) du.$$

Dar

$$\sum_{k=0}^\infty e^{-2ska} = \frac{1}{1 - e^{-2sa}};$$

trecînd la vechea variabilă, se obține

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{1 - e^{-2sa}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt. \quad (10.59)$$

În cazul cînd funcția periodică nesinusoidală prezintă simetria  $f(t) = -f(t+a)$ , cele două alternanțe fiind identice (fig. 10.9), imaginea funcției devine

$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1 - e^{-sa}}{1 - e^{-2sa}} \int_0^a e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 + e^{-sa}} \int_0^a e^{-st} f(t) dt. \quad (10.60)$$

În adevăr, în acest caz se poate scrie

$$\int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt = \int_0^a e^{-st} f(t) dt + \int_a^{2a} e^{-s(t+a)} f(t+a) dt = (1 - e^{-sa}) \int_0^a e^{-st} f(t) dt.$$



În cazul cînd din funcția periodică nesinusoidală, cu simetria  $f(t) = -f(t+a)$ , se iau numai o parte din alternanțe, numai cele pozitive sau numai cele negative, se obține o curbă „parțial redresată” (fig. 10.10). Imaginea acestei curbe este

$$\mathcal{L} f_1(t) = \frac{\mathcal{L} f(t)}{1 - e^{-sa}}, \quad (10.61)$$

în care  $\mathcal{L} f(t)$  e dată de relația (10.60); demonstrația este imediată dacă se observă că

$$\int_0^{2a} e^{-st} f_1(t) dt = \int_0^a e^{-st} f(t) dt + \int_a^{2a} e^{-s(t+a)} f(t+a) dt = \int_0^a e^{-st} f(t) dt$$

căci  $f(t+a) = 0$  și se introduce această expresie în relația generală (10.59).

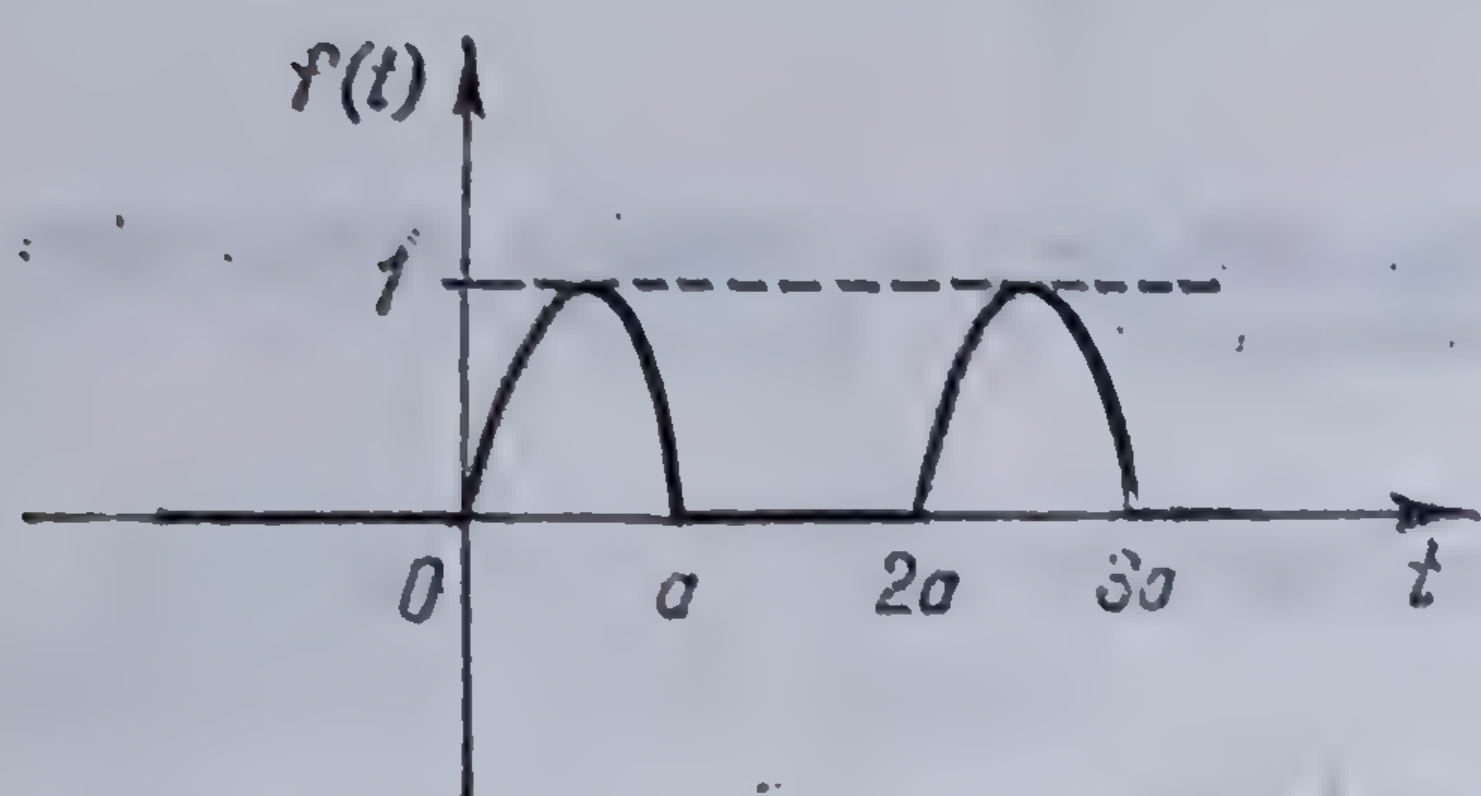


Fig. 10.10. Funcție periodică nesinusoidală parțial redresată.

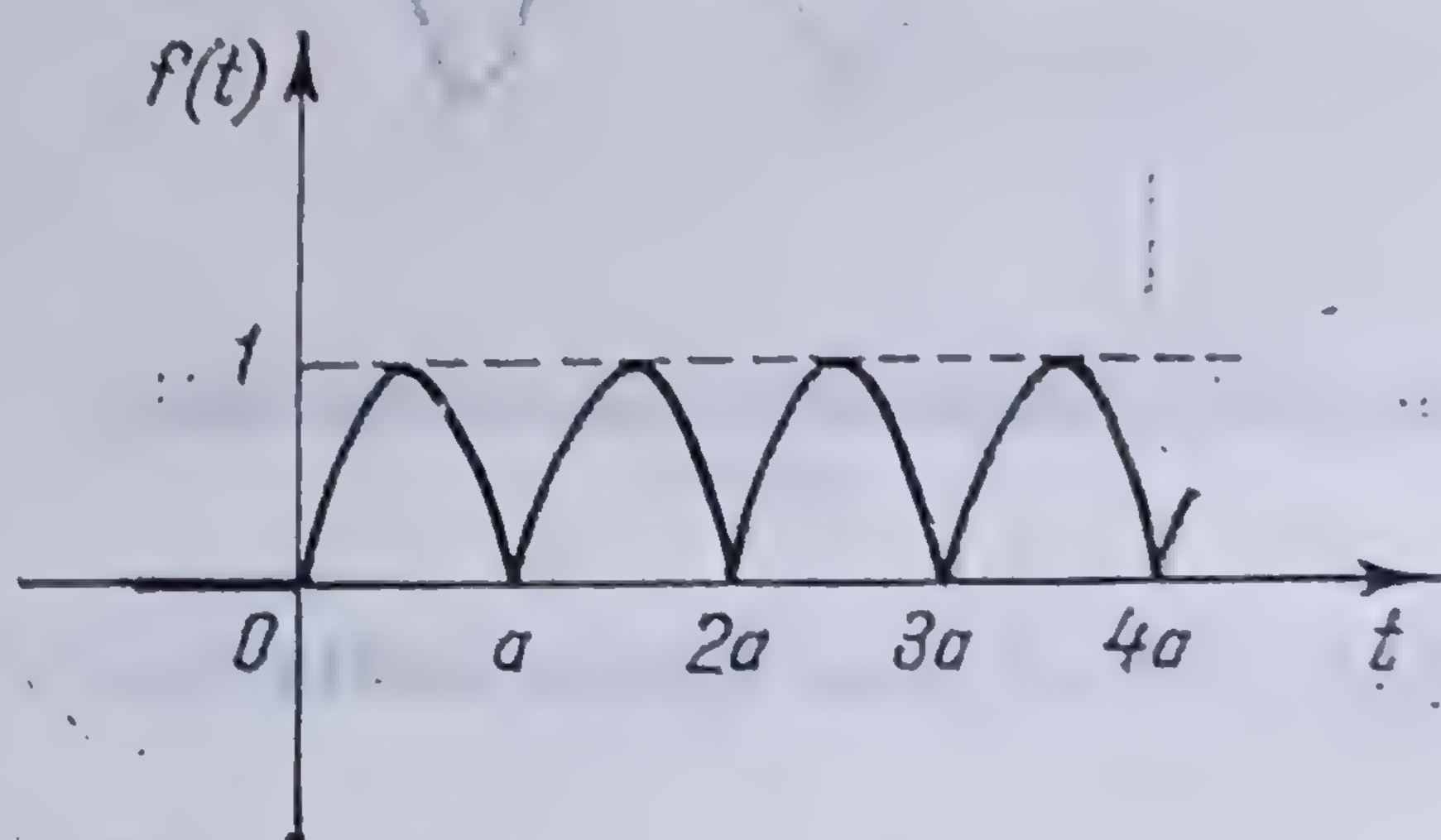


Fig. 10.11. Funcție periodică nesinusoidală total redresată.

În cazul cînd la funcția periodică nesinusoidală, cu simetria  $f(t) = -f(t+a)$  se schimbă semnul uneia din alternanțe, funcția căpătînd simetria  $f(t) = f(t+a)$ , se obține o curbă „total redresată” (fig. 10.11) a cărei imagine este

$$\mathcal{L} f_2(t) = \frac{1 + e^{-sa}}{1 - e^{-sa}} \mathcal{L} f(t) = \operatorname{ctgh} \frac{sa}{2} \mathcal{L} f(t), \quad (10.62)$$

$\mathcal{L} f(t)$  fiind dată de relația (10.60).

Pentru a stabili relația (10.62) se consideră funcția  $f_2(t)$  ca provenind din funcțiile  $f_1(t)$  și  $f_1(t-a)$ , adică  $f_1(t)$  deplasată cu  $a$  spre dreapta

$$f_2(t) = f_1(t) + f_1(t-a).$$

Dar, în conformitate cu relația (10.39),

$$\mathcal{L} f_1(t-a) = e^{-sa} \mathcal{L} f_1(t)$$

și deci

$$\mathcal{L} f_2(t) = (1 + e^{-sa}) \mathcal{L} f_1(t);$$



ținând seama de (10.61) și observând că

$$\frac{1 + e^{-sa}}{1 - e^{-sa}} = \operatorname{ctg} h \frac{sa}{2},$$

se obține relația (10.62).

Ca exemplu de aplicație, fie de calculat imaginea funcției „dinți de ferăstrău” (fig. 10.12). Avem

$$f(t) = E \frac{t}{2a} \quad \text{pentru } 0 < t < 2a.$$

Aplicând relația (10.59) se obține

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{1}{1 - e^{-2sa}} \int_0^{2a} \frac{Et}{2a} e^{-st} dt = \frac{E}{2as^2} - \frac{E}{2} (\operatorname{ctgh} as - 1).$$

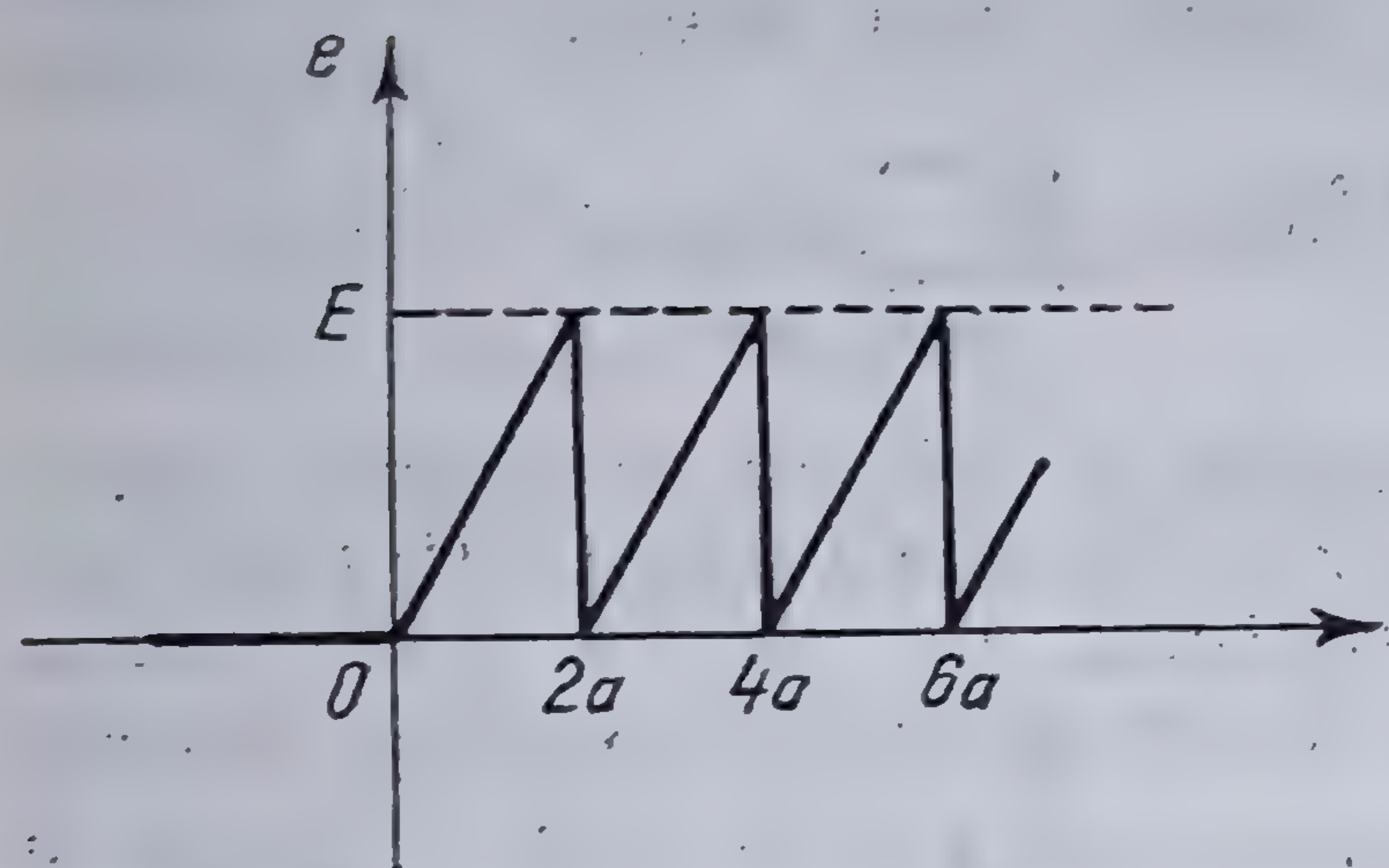


Fig. 10.12. Funcție „dinți de ferăstrău”.

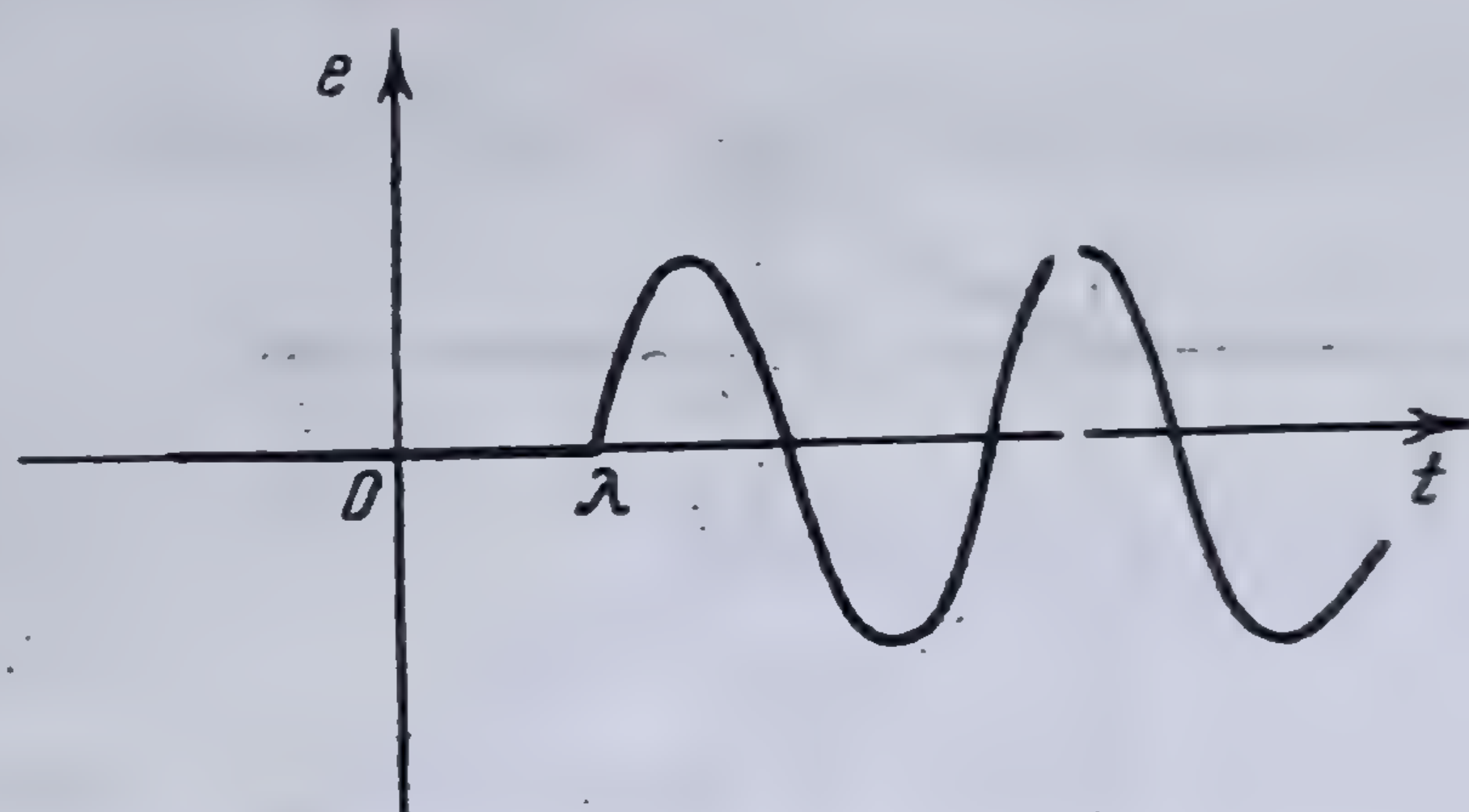


Fig. 10.13. Funcție discontinuă periodică.

**10.4.3.8. Imaginea funcțiilor discontinue.** Teorema 9, care definește translația variabilei  $t$  și relațiile (10.39) corespunzătoare dau posibilitatea calculării imaginii oricărei funcții discontinue pornind de la o funcție de bază oarecare  $f(t) \cdot \gamma(t)$ . Aceasta se va arăta prin următoarele trei exemple:

**Exemplul 1. Funcție discontinuă periodică.** Fie de găsit imaginea funcției  $f(t) = \sin \omega(t - \lambda)$  care are un sens pentru  $t > \lambda$ , fiind nulă pentru  $t < \lambda$  (fig. 10.13). Conform teoremei 9, imaginea acestei funcții este

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{\omega e^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2}.$$

**Exemplul 2. Funcție discontinuă neperiodică.** Să considerăm funcția  $f(t)$  definită după cum urmează (fig. 10.14)

$$\text{pentru } -\infty < t < \lambda, \quad f(t) = 0$$

$$\text{pentru } \lambda < t < \lambda + \frac{2\pi}{\omega},$$

$$f(t) = \sin \omega(t - \lambda)$$

$$\text{pentru } \lambda + \frac{2\pi}{\omega} < t < +\infty,$$

$$f(t) = 0.$$

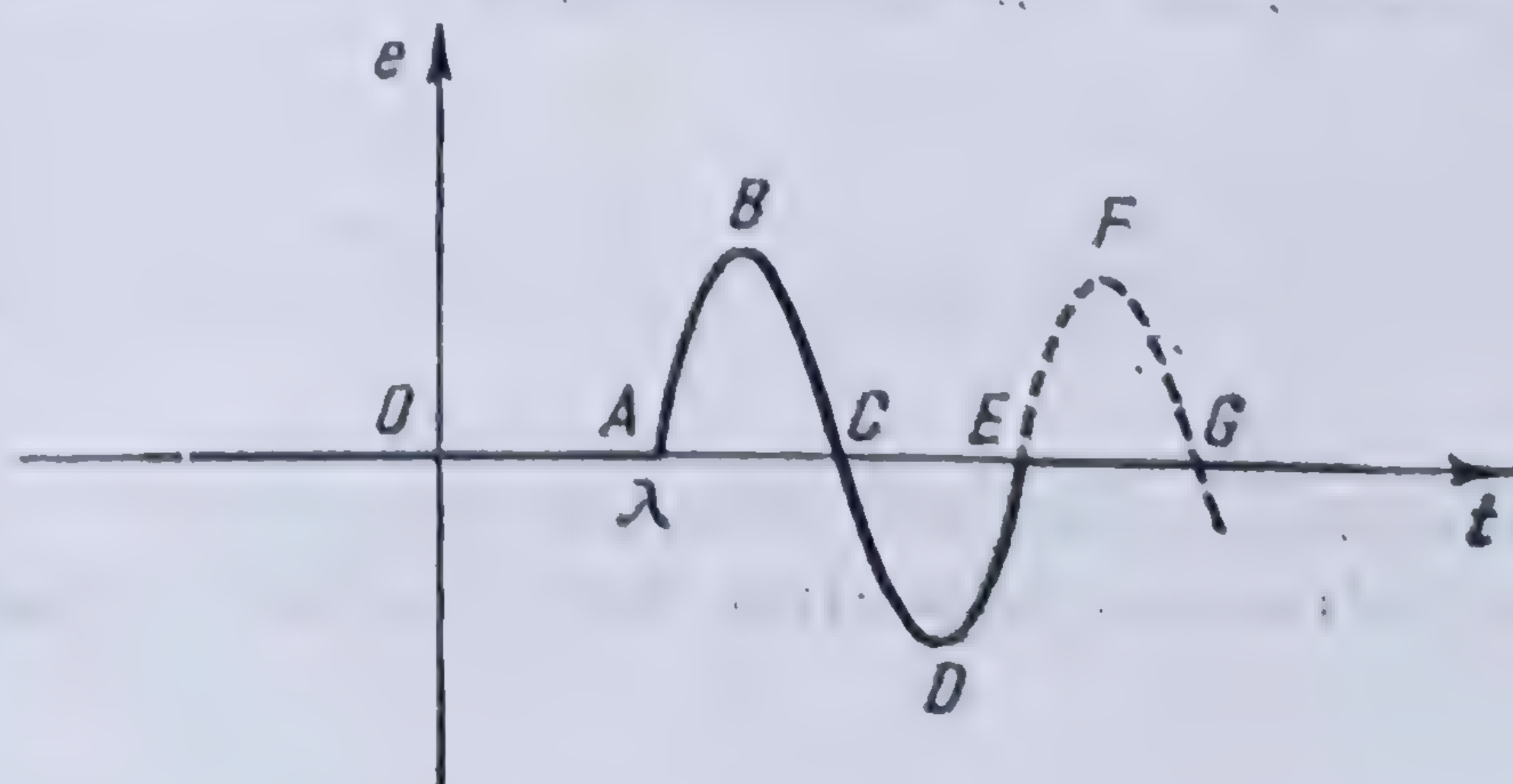


Fig. 10.14. Funcție discontinuă neperiodică.



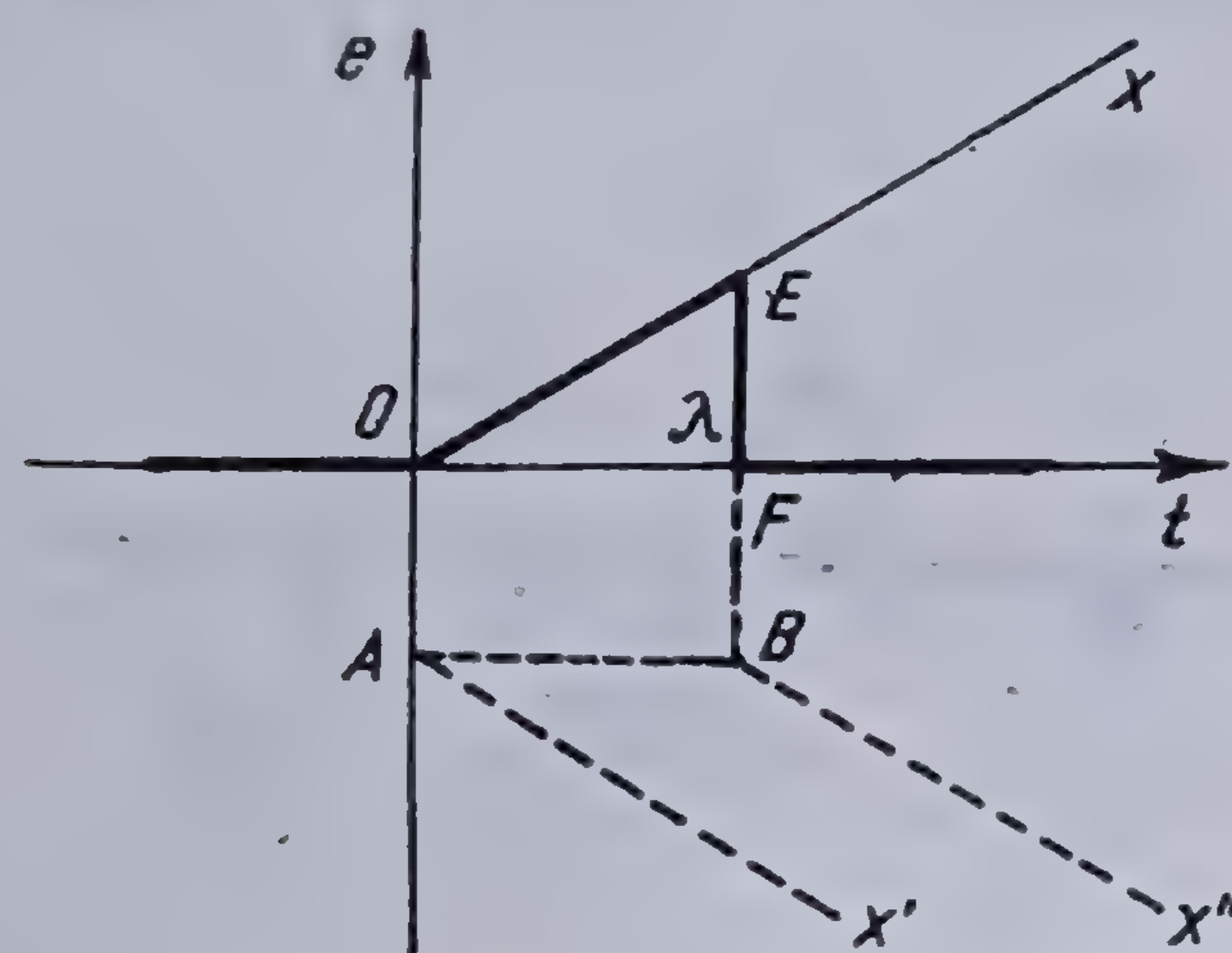
După cum reiese din exemplul 1, imaginea sinusoidei  $A, B, C, D, E, F, G, \dots$ , care începe în momentul  $t = \lambda$ , este

$$\frac{\omega \varepsilon^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2}.$$

Sinusoida  $E, F, G, \dots$ , care începe la timpul  $t = \lambda + \frac{2\pi}{\omega}$ , are imaginea

$$\frac{\omega \varepsilon^{(-\lambda + \frac{2\pi}{\omega})s}}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega \varepsilon^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2} \varepsilon^{-\frac{2\pi}{\omega} s}.$$

Funcția  $f(t)$  fiind egală cu diferența acestor sinusoide va avea drept imagine, diferența acestor două imagini



$$\mathcal{L} f(t) = \frac{\omega \varepsilon^{-\lambda s}}{s^2 + \omega^2} (1 - \varepsilon^{-\frac{2\pi}{\omega} s}).$$

*Exemplul 3. Alt tip de funcție discontinuă neperiodică.* Fie funcția  $f(t)$  reprezentată de conturul din figura 10.15 căreia urmează să i se găsească imaginea. Ecuația semidreptei  $Ox$  fiind  $f_1(t) = \frac{E}{\lambda} t$ , în care  $E$

Fig. 10.15. Alt tip de funcție discontinuă neperiodică.

este ordonata maximă a funcției și  $\lambda$  abscisa corespunzătoare, imaginea sa este

$$\mathcal{L} f_1(t) = \frac{E}{\lambda} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Să considerăm acum semidreapta  $Ax'$  trecând prin punctul de coordonate  $(0, -E)$  și având panta egală și de sens contrar cu aceea a semidreptei  $Ox$ ; ecuația ei este

$$f_2(t) = -\frac{E}{\lambda} t - E$$

și imaginea corespunzătoare

$$\mathcal{L} f_2(t) = -\frac{E}{\lambda} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{E}{s}.$$

Dacă se deplasează această dreaptă cu  $\lambda$  paralel cu axa absciselor și spre dreapta, se obține semidreapta  $Bx''$ , a cărei imagine se scrie imediat

$$\mathcal{L} f_2(t - \lambda) = -E \varepsilon^{-\lambda s} \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{s^2} \right).$$



Funcția dată se obține prin adunarea a două funcții reprezentate prin contururile  $-\infty OEx$  și  $-\infty OFBx''$  și în consecință imaginea sa va fi

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{E}{s} \left[ \frac{1}{\lambda s} - \left( 1 + \frac{1}{\lambda s} \right) e^{-\lambda s} \right].$$

În modul acesta se poate construi imaginea oricărei funcții, ce ar putea apărea în problemele de regim tranzitoriu.

#### 10.4.4. GĂSIREA FUNCȚIEI ORIGINAL A UNEI FUNCȚII IMAGINE

O problemă fiind rezolvată cu ajutorul calculului operațional, rezultatul obținut dă imaginea mărimii căutate. Pentru rezolvarea completă a problemei trebuie găsit originalul funcției imagine obținute. Aceasta se obține calculând integrala (10.33), pe care o vom stabili în cele ce urmează.

10.4.4.1. Stabilirea expresiei integralei MELLIN-FOURIER. Fiind cunoscută integrala dublă FOURIER\*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{j\omega(t-u)} du$$

pentru care se presupune că

- a)  $f(t)$  are un număr finit de maxime, de minime și de discontinuități ordinare;
- b)  $f(t) = 0$  pentru  $t < 0$ ;
- c) integrala  $f(t)$  este uniform convergentă, ceea ce necesită ca

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

În aceste condiții, integrala dublă FOURIER se poate scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_0^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du. \quad (10.63)$$

Să considerăm funcția auxiliară

$$g(t) = e^{-\sigma t} f(t),$$

unde  $\sigma$  este o constantă reală și pozitivă. Aplicând acestei funcții relația (10.63) se obține

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_0^{\infty} f(u) e^{-(\sigma+j\omega)u} du.$$

\* Vezi 9.2.7.1.



Punând  $\sigma + j\omega = s$ ; rezultă  $d\omega = \frac{ds}{j}$  și deci:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-\infty}^{c+\infty} e^{(s-\sigma)t} ds \int_0^\infty e^{-su} f(u) du =$$

$$= \frac{e^{-\sigma t}}{2\pi j} \int_{c-\infty}^{c+\infty} e^{st} ds \int_0^\infty e^{-su} f(u) du,$$

de unde

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-\infty}^{c+\infty} e^{st} \varphi(s) ds,$$

adică tocmai integrala MELLIN-FOURIER dată în relația (10.33).

Integrala MELLIN-FOURIER este mai generală decât integrala FOURIER pentru că, dacă condiția c) de mai sus nu este îndeplinită, avem întotdeauna îndeplinită condiția:

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-\sigma_a t} |f(t)| dt < \infty$$

pentru  $\sigma_a > 0$  și în consecință integrala (10.33) are un sens și este valabilă pentru orice valoare a lui  $\sigma > \sigma_a$ .

**10.4.4.2. Calculul originalelor cu ajutorul integralei MELLIN-FOURIER.** Calculul unui fenomen oarecare ne conduce la o soluție sub forma unei funcții  $\varphi(s)$  de variabilă complexă  $s = \sigma + j\omega$ . Găsirea originalului acestei funcții se face cu ajutorul relației (10.33) efectuând integrala respectivă în planul complex  $s$ , pentru efectuarea căreia se utilizează metoda reziduurilor. Această metodă se bazează pe teorema lui CAUCHY: Fiind dată o funcție de variabilă complexă  $\psi(s)$  avînd un număr de poli  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) de diverse ordine și  $C$  un contur înconjurînd acești poli, parcurs în sensul direct și astfel ales, încît funcția să fie olomorfă în interiorul conturului, cu excepția punctelor  $a_k$ , atunci

$$\int_C \psi(s) ds = 2\pi j \sum \text{reziduuri din interiorul conturului } C. \quad (10.64)$$

Conturul  $C$  poate fi oarecare. Se alege de obicei un contur special numit *conturul lui BROMWICH* (fig. 10.16) și care este constituit dintr-o dreaptă paralelă cu axa complexă de abscisă  $\sigma$  și un semicerc cu centrul în punctul  $(\sigma, 0)$  și de rază  $R$ , tinzînd către infinit, situat în stînga axei complexe. Mărima  $\sigma$  este întotdeauna pozitivă. Rezultă

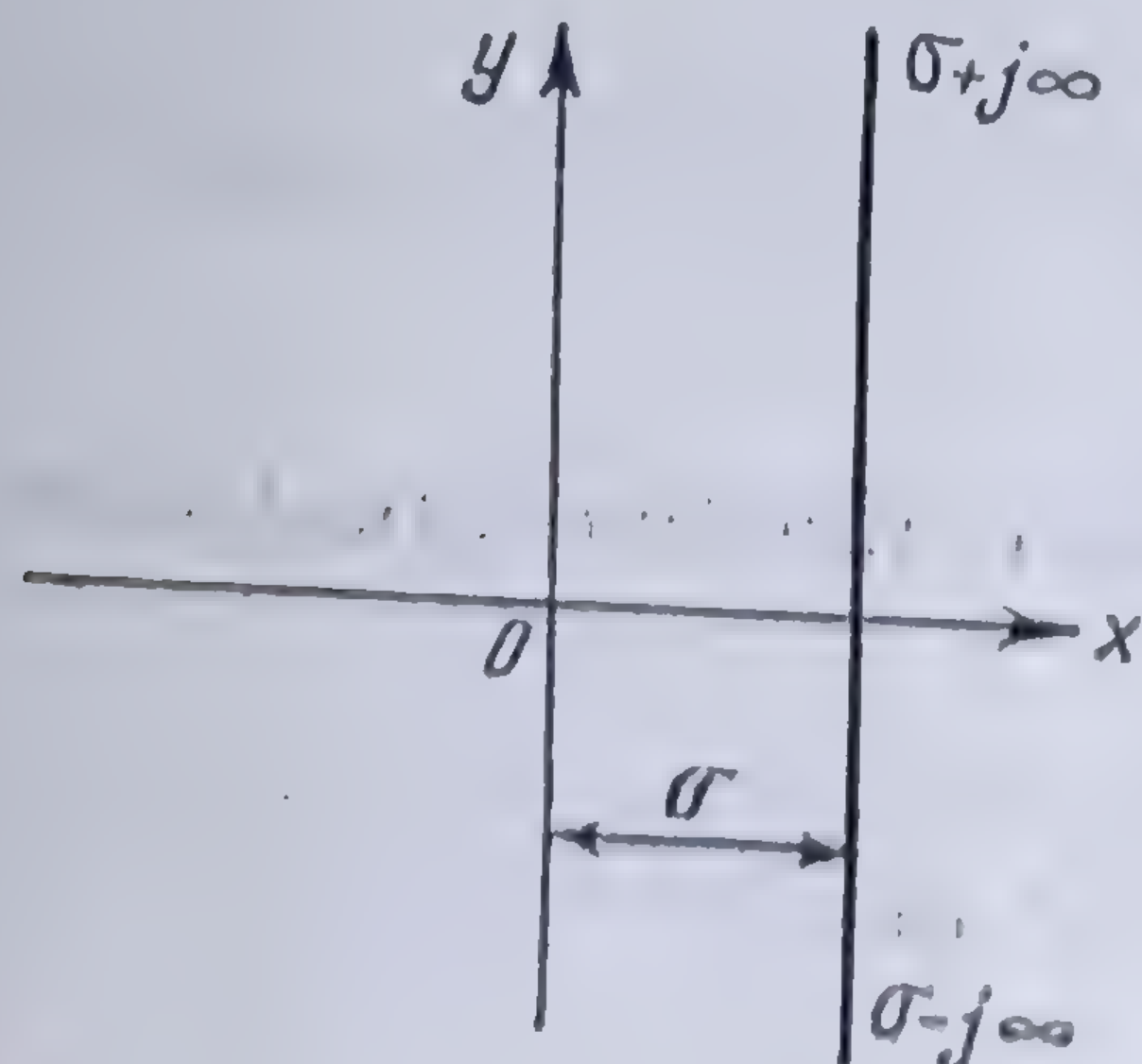


Fig. 10.16. Conturul lui BROMWICH.

$$\int_0^\infty = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} + \int_R^{\sigma-j\infty}$$

Dar, dacă funcția  $\psi(s)$  satisface condițiile lemei lui JORDAN și anume:

- să aibă toate singularitățile la stînga dreptei de abscisă  $\sigma$
- să tindă uniform către zero cînd  $|\sigma| \rightarrow \infty$
- $t > 0$ ,



atunci integrala (10.64) luată de-a lungul semicercului  $\Gamma$  de rază  $R \rightarrow \infty$  este nulă; în consecință, relația (10.64) poate fi scrisă

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \psi(s) ds = 2\pi j \sum \text{reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

Aplicînd cele de mai sus integralei MELLIN-FOURIER, rezultă

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \varphi(s) ds = \sum \text{reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

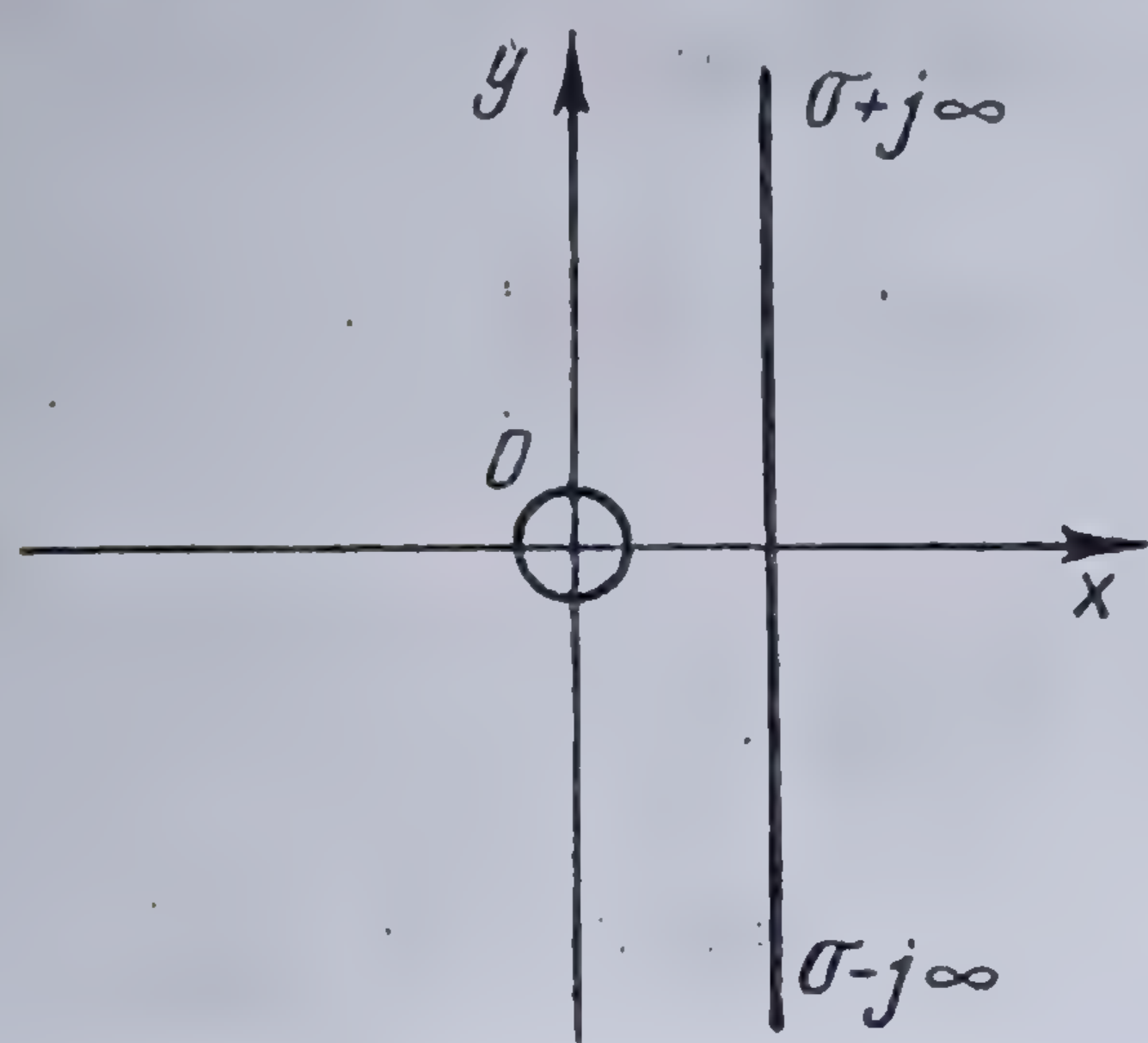


Fig. 10.17. Contur echivalent în cazul polilor.

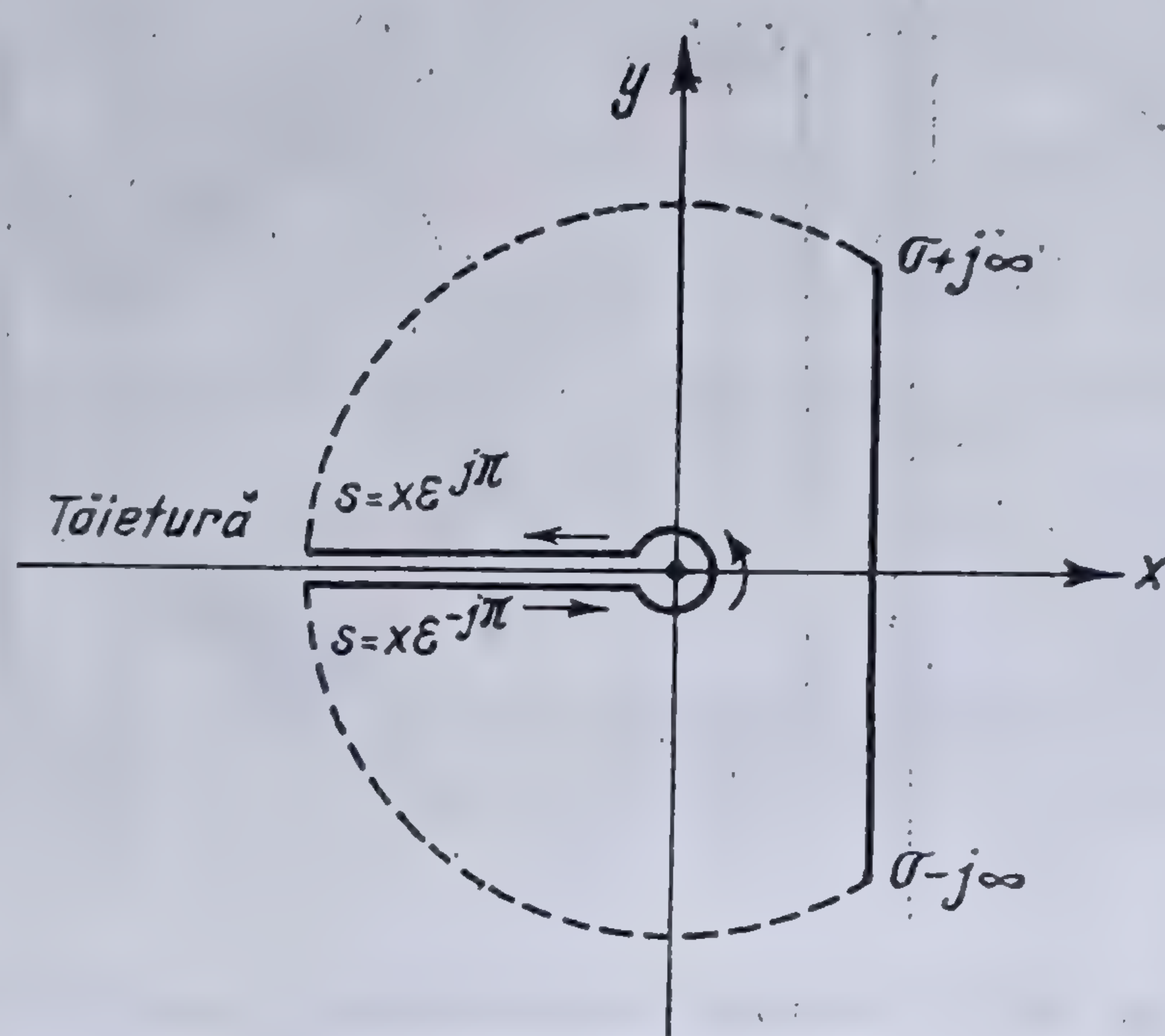


Fig. 10.18. Contur echivalent cu tăietură.

În cazul cînd funcția de variabilă complexă satisface lemei lui JORDAN, integrala ei fiind nulă de-a lungul semicercului de rază infinită sprijinit pe dreapta de abscisă  $c$ , în punctele sale extreme  $\sigma + j\infty$  și  $\sigma - j\infty$ , atunci conturul lui BROMWICH poate fi înlocuit cu un *contur echivalent*, după cum urmează:

1. *Toate singularitățile funcției sînt poli.* În acest caz, orice curbă închisă, fără puncte duble, care înconjură toți polii funcției este un contur echivalent conturului lui BROMWICH și integrala de-a lungul acestui contur este egală cu suma reziduurilor corespunzătoare polilor. Spre exemplu, pentru funcția  $\frac{1}{s^2}$ , un contur echivalent conturului lui BROMWICH este constituit dintr-un mic cerc trasat în jurul originii (fig. 10.17).

2. *Funcția posedă puncte critice.* În acest caz se poate forma un contur echivalent cu conturul lui BROMWICH printr-un mic cerc care să înconjure singularitatea și printr-o tăietură care să lege acest cerc cu semicercul de la infinit din stînga axei complexe. Astfel, pentru funcția  $\frac{e^{st}}{\sqrt{s^2}}$  conturul echivalent este indicat în figura 10.18. Dacă o funcție are mai multe puncte critice, conturul echivalent va fi constituit din cercuri care să înconjure aceste puncte critice și din tăieturi care să le lege cu cercul de rază infinită. Ținînd seama că aceste tăieturi se pot face oricum, pot exista numeroase contururi echivalente cu conturul lui BROMWICH pentru o aceeași funcție. Spre exemplu, pentru



atunci integrala (10.64) luată de-a lungul semicercului  $\Gamma$  de rază  $R \rightarrow \infty$  este nulă; în consecință, relația (10.64) poate fi scrisă

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \psi(s) ds = 2\pi j \sum \text{reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

Aplicînd cele de mai sus integralei MELLIN-FOURIER, rezultă

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} \varphi(s) ds = \sum \text{reziduurile din stînga dreptei de abscisă } \sigma.$$

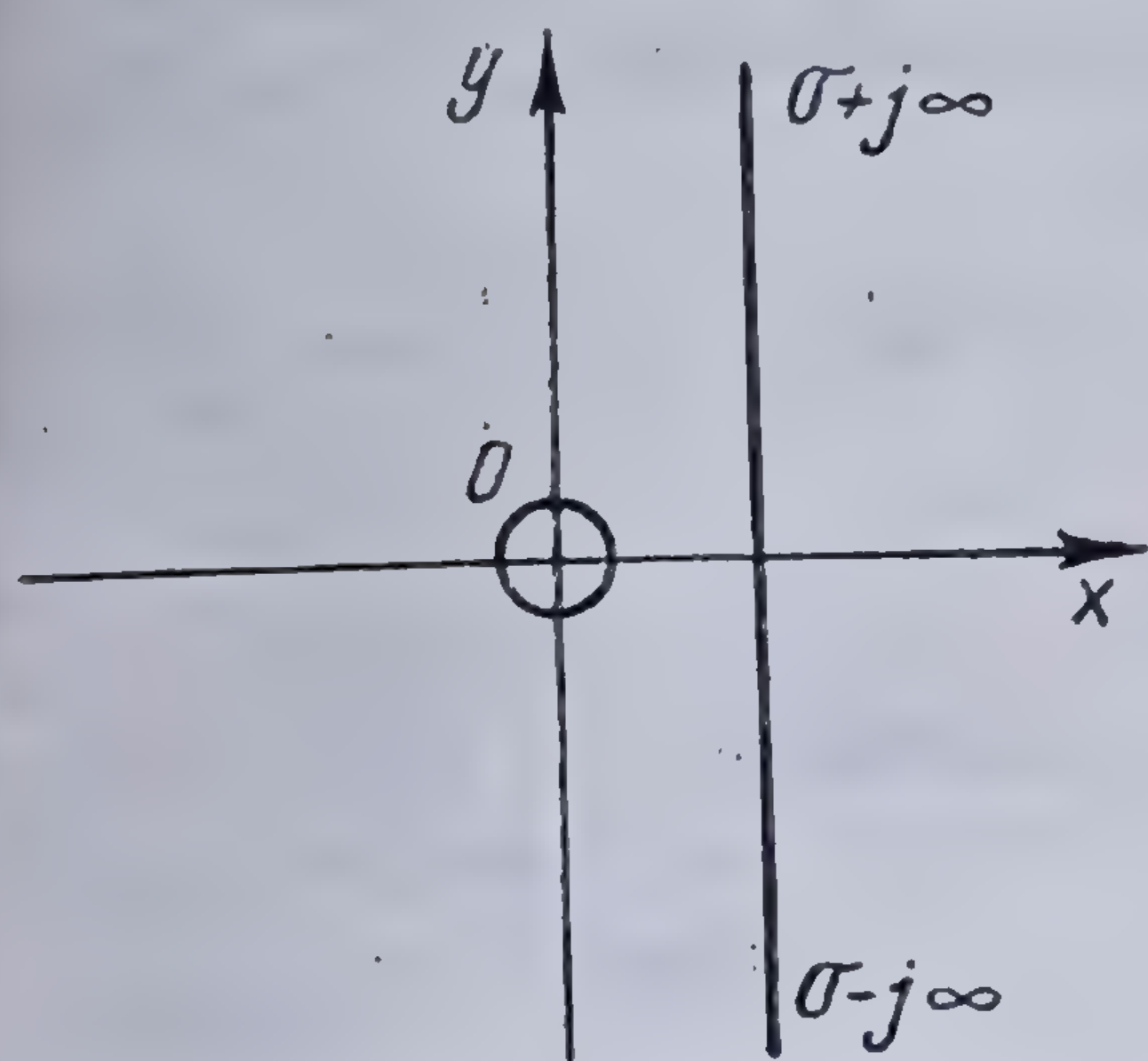


Fig. 10.17. Contur echivalent în cazul polilor.

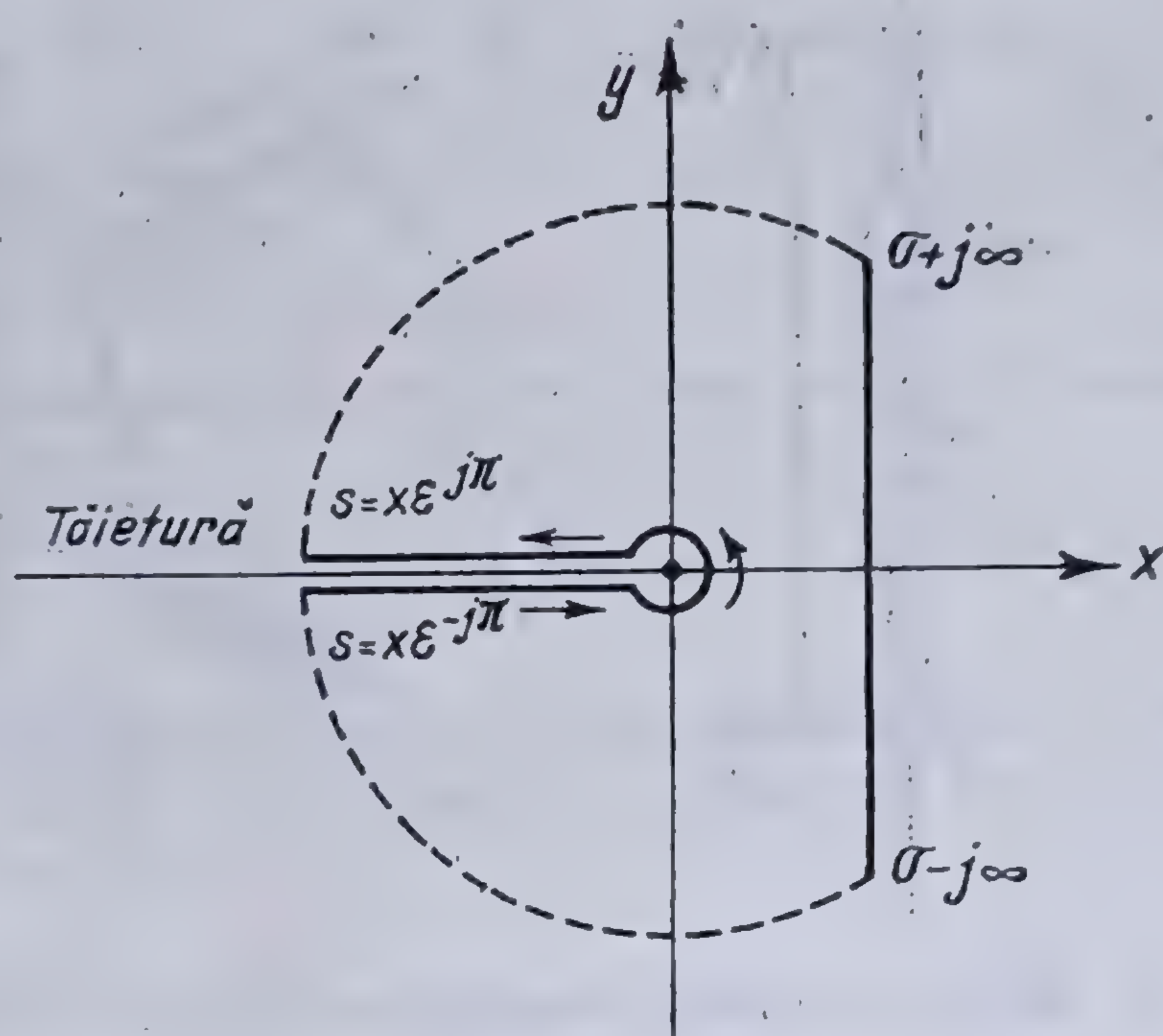


Fig. 10.18. Contur echivalent cu tăietură.

În cazul cînd funcția de variabilă complexă satisface lemei lui JORDAN, integrala ei fiind nulă de-a lungul semicercului de rază infinită sprijinit pe dreapta de abscisă  $c$ , în punctele sale extreme  $\sigma + j\infty$  și  $\sigma - j\infty$ , atunci conturul lui BROMWICH poate fi înlocuit cu un *contur echivalent*, după cum urmează:

1. *Toate singularitățile funcției sînt poli.* În acest caz, orice curbă închisă, fără puncte duble, care înconjură toți polii funcției este un contur echivalent conturului lui BROMWICH și integrala de-a lungul acestui contur este egală cu suma reziduurilor corespunzătoare polilor. Spre exemplu, pentru funcția  $\frac{1}{s^2}$ , un contur echivalent conturului lui BROMWICH este constituit dintr-un mic cerc trasat în jurul originii (fig. 10.17).

2. *Funcția posedă puncte critice.* În acest caz se poate forma un contur echivalent cu conturul lui BROMWICH printr-un mic cerc care să înconjure singularitatea și printr-o tăietură care să lege acest cerc cu semicercul de la infinit din stînga axei complexe. Astfel, pentru funcția  $\frac{e^{st}}{\sqrt{s^2}}$  conturul echivalent este indicat în figura 10.18. Dacă o funcție are mai multe puncte critice, conturul echivalent va fi constituit din cercuri care să înconjure aceste puncte critice și din tăieturi care să le lege cu cercul de rază infinită. Ținînd seama că aceste tăieturi se pot face oricum, pot exista numeroase contururi echivalente cu conturul lui BROMWICH pentru o aceeași funcție. Spre exemplu, pentru



funcția  $\frac{e^{st}}{\sqrt{s^2+1}}$ , care are două puncte critice în  $s = \pm j$ , două oarecare din aceste contururi echivalente au fost arătate în figura 10.19.

În cazul cînd funcția considerată este multiformă în partea planului complex limitată de conturul lui BROMWICH ea se face uniformă într-un contur mai complicat, realizîndu-se tăieturile convenabile și considerînd apoi un contur echivalent conturului lui BROMWICH.

10.4.4.3. **Calculul reziduurilor în cazul polilor simpli.** Din cele ce preced rezultă că, determinarea originalului unei funcții  $\varphi(s)$  oarecare se face cu ajutorul integralei (10.33) și se reduce în cele din urmă la calculul reziduurilor funcției  $e^{st} \varphi(s) = \psi(s)$ . Să presupunem că funcția  $\psi(s)$  poate fi pusă sub forma

$$\psi(s) = \frac{\eta(s)}{\zeta(s)} = \frac{\eta(s)}{(s-a)\zeta(s)}. \quad (10.65)$$

Rezultă

$$\text{Rez}(a) = \frac{\eta(a)}{\zeta'(a)},$$

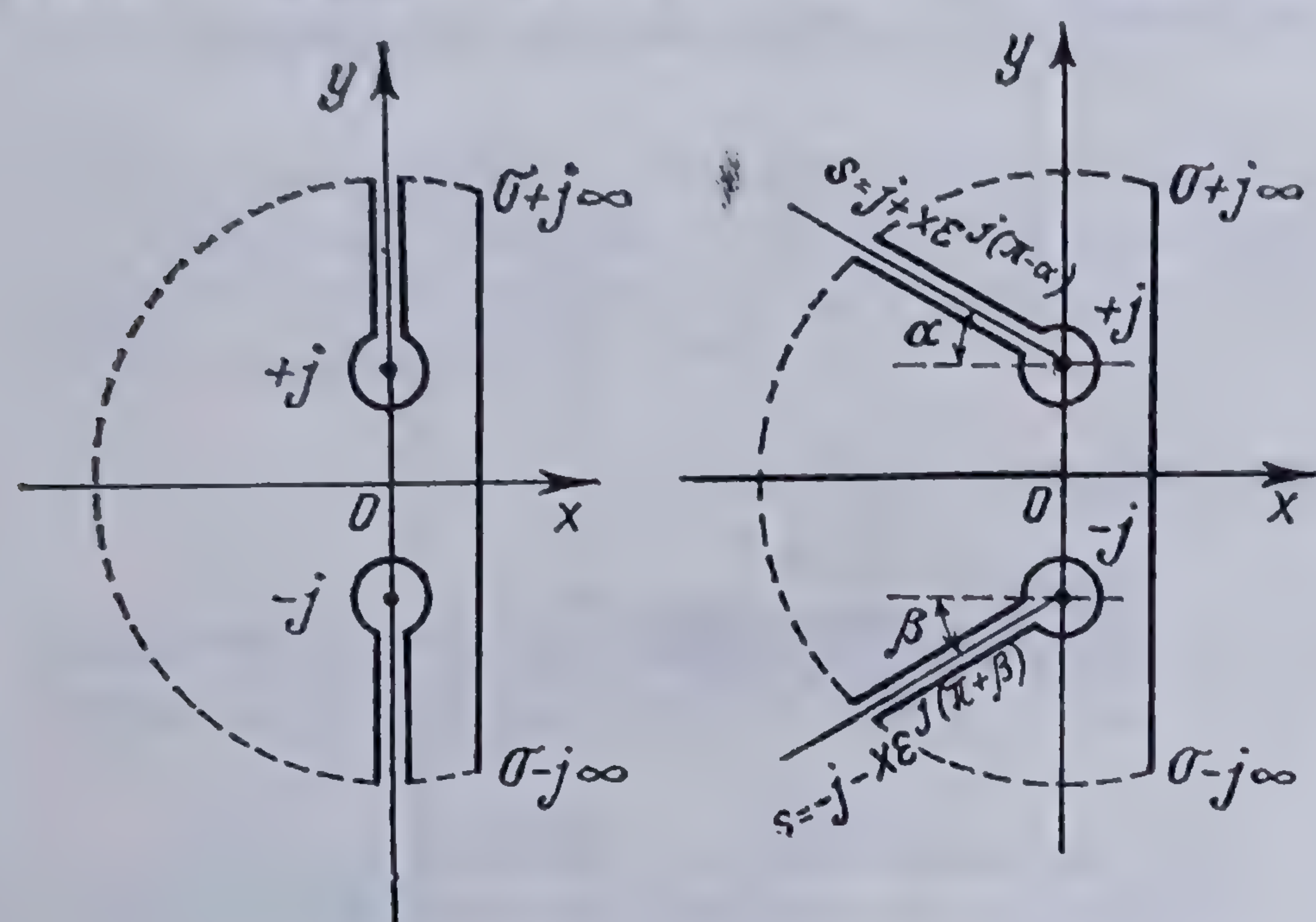


Fig. 10.19. Contururi echivalente cu două tăieturi.

și în consecință, dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sînt poli simpli ai funcției  $\zeta(s)$ , atunci

$$\Sigma \text{reziduurilor} = \sum_{k=1}^n \frac{\eta(a_k)}{\zeta'(a_k)}. \quad (10.66)$$

Dacă funcția de la numitor are o rădăcină nulă,

$\zeta(s) = s \zeta_1(s)$  cu condiția că  $\zeta_1(0) \neq 0$ , atunci

$$\Sigma \text{reziduurilor} = \frac{\eta(0)}{\zeta_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{\eta(a_k)}{a_k \zeta_1(a_k)}. \quad (10.67)$$

după cum se poate arăta ușor.

10.4.4.4. **Calculul reziduurilor în cazul polilor multipli.** În cazul cînd funcția (10.65) are un pol de ordinul  $n$ , determinarea reziduului corespunzător se face cu relația

$$\text{Rez}(a) = A_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[ \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (s-a)^n \frac{\eta(s)}{\zeta(s)} \right]_{s=a}. \quad (10.68)$$

10.4.4.5. **Teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE.** Soluțiile problemelor de regim tranzitoriu apar în general sub forma unor fracții algebrice raționale;



sub acest aspect, problema se simplifică într-o oarecare măsură, găsirea originalului în acest caz fiind mai simplă.

Fie

$$\varphi(s) = \frac{U(s)}{V(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (10.69)$$

o fracție algebrică rațională, în care  $a$  și  $b$  sînt constante reale și  $m$  și  $n$  sînt numere întregi și pozitive.

Dacă  $m < n$  atunci expresia (10.69) se poate scrie

$$\varphi(s) = \sum_{i=0}^k C_i s^i + \frac{U_1(s)}{V(s)}, \quad (k = n - m)$$

în care gradul polinomului  $U_1(s)$  este mai mic cu cel puțin o unitate decît gradul polinomului  $V(s)$ .

Aplicînd transformarea inversă (10.32) se găsește

$$\mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = \mathcal{L}^{-1} \left( \sum_{i=0}^k C_i s^i \right) + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{U_1(s)}{V(s)} \right].$$

Găsirea originalului primului termen al sumei din membrul al doilea nu prezintă nici o dificultate prin aplicarea proprietății de liniaritate (teorema 5) și căutarea în tabele a originalelor expresiilor puterilor lui  $s^*$ .

Rămîne de găsit originalul fracției  $\frac{U_1(s)}{V(s)}$

La aceasta se reduce și cazul cînd  $m > n$ .

Două cazuri se pot prezenta: (a) ecuația  $V(s) = 0$  nu are rădăcini multiple și (b) ecuația  $V(s)$  are rădăcini multiple.

a) Ecuația  $V(s) = 0$  nu are rădăcini multiple

Fie

$s_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) rădăcinile ecuației

$$V(s) = 0 \quad (10.70)$$

și se presupune că  $** U(s) \neq 0$ .

Fracția (10.69) se poate scrie

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \frac{U(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_m)};$$

\* Trebuie observat că puterile lui  $s$  mai mari decî 1 ar reprezenta derivatele de ordin superior ale funcției unitate, care n-au încă un sens fizic. Pe de altă parte, originalele corespunzătoare nu se cunosc și nici nu pot fi determinate prin mijloacele cunoscute astăzi, astfel că, valoarea cea mai mare pe care o poate lua exponentul  $i$ , în relația de mai sus, este 0.

De altfel, în problemele de fizică, în majoritatea cazurilor rezultatele calculelor apar sub forma de fracții la care  $m > n$ ; sînt foarte rare cazurile cînd  $m = n$ .

\*\* S-a suprimat indicele 1 în expresia acestui polinom, aceasta neputînd duce la nici o confuzie, calculul originalului unei fracții algebrice raționale făcîndu-se pentru cazul  $m > n$ , oricare alt caz reducîndu-se la acesta.



care se poate descompune în fracții simple, găsindu-se \*

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \sum_{i=1}^m \frac{U(s_i)}{(s - s_i) V'(s_i)}$$

și rezultă, pe baza proprietății de liniaritate,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{U(s)}{V(s)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{U(s_i)}{(s - s_i) V'(s_i)} \right] = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{U(s_i)}{V'(s_i)} \cdot \frac{1}{s - s_i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{U(s_i)}{V'(s_i)} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s - s_i} \right) = \sum_{i=1}^m \frac{U(s_i)}{V'(s_i)} e^{s_i t} \end{aligned} \quad (10.71)$$

căci, conform relației (10.48),

$$\mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s - s_i} \right) = e^{s_i t}.$$

*Cazuri particulare : 1. Ecuația (10.70) are o rădăcină nulă. În acest caz \*\**

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{U(s)}{V(s)} \right] = \frac{U(0)}{V_1(0)} + \sum_{i=2}^m \frac{U(s_i)}{s_i V_1(s_i)} e^{s_i t}. \quad (10.72)$$

Relațiile (10.71) și (10.72) constituie *teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE*.

*2. Ecuația (10.70) are cel puțin o pereche de rădăcini complexe conjugate. Fie  $s_1 = j\omega_1$  și  $s_2 = -j\omega_1$  cele două rădăcini complexe conjugate. În acest caz \*\*\**

$$\frac{U(s)}{V(s)} = \frac{U(s)}{(s^2 + \omega_1^2) V_2(s)},$$

în care s-a notat

$$V(s) = (s^2 + \omega_1^2) V_2(s);$$

rezultă

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{U(s)}{(s^2 + \omega_1^2) V_2(s)} \right] = \Re e \left[ \frac{U(j\omega_1)}{j\omega_1 V_2(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} \right] + \sum_{i=3}^m \frac{U(s_i)}{[(s_i^2 + \omega_1^2) V_2'(s_i)]} e^{s_i t}, \quad (10.73)$$

\* Vezi [116] pag. 179.

\*\* Vezi [116] pag. 181.

\*\*\* Vezi [116] pag. 182.



$$\Re [2 A_1 e^{j\omega_1 t}] = \Im [2 j A_1 e^{j\omega_1 t}],$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{U(s)}{(s^2 + \omega_1^2) V_2(s)} \right] = \Im \left[ \frac{U(j\omega_1)}{\omega_1 V_2(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} \right] + \sum_{i=3}^m \frac{U(s_i)}{(s_i^2 + \omega_1^2) V_2'(s_i)} e^{s_i t}. \quad (10.74)$$

Tabloul 10.1

## ORIGINALUL FRAȚIILOR ALGEBRICE RAȚIONALE

1. Polinomul de la numitor *nu are* rădăcini multiple

$$\frac{U(s)}{V(s)} \Big| \sum_{i=1}^m \frac{U(s_i)}{V'(s_i)} e^{s_i t} \quad 0 \leq t \quad (10.71)$$

## a) Polinomul de la numitor are o rădăcină nulă

$$\frac{U(s)}{sV_1(s)} \Big| \frac{U(0)}{V_1(0)} + \sum_{i=2}^m \frac{U(s_i)}{s_i V_1'(s_i)} e^{s_i t} \quad 0 \leq t. \quad (10.72)$$

## b) Polinomul de la numitor are o pereche de rădăcini complexe conjugate, pe axa complexă

$$\frac{U(s)}{(s^2 + \omega_1^2) V_2(s)} \Big| \Re \left[ \frac{U(j\omega_1)}{j\omega_1 V_2(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} \right] + \sum_{i=3}^m \frac{U(s_i)}{(s_i^2 + \omega_1^2) V_2'(s_i)} e^{s_i t} \quad (10.73)$$

sau

$$\Im \left[ \frac{U(j\omega_1)}{\omega_1 V_2(j\omega_1)} e^{j\omega_1 t} \right] + \sum_{i=3}^m \frac{U(s_i)}{(s_i^2 + \omega_1^2) V_2'(s_i)} e^{s_i t} \quad (10.74)$$

2. Polinomul de la numitor *are* rădăcini multiple

$$\frac{U(s)}{V(s)} \Big| \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} \frac{K_{ik}}{(q_i - k)!} t^{q_i - k} e^{s_i t} \quad 0 \leq t, \quad (10.75)$$

în care

$$K_{ik} = \frac{1}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{(k-1)}}{ds^{k-1}} \left( \frac{(s - s_i)^{q_i} U(s)}{V(s)} \right) \right]_{s=s_i}$$

$$V(s) = (s - s_1)^{q_1} (s - s_2)^{q_2} \dots (s - s_m)^{q_m}$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_m = m.$$



3) Ecuația  $V(s) = 0$  are rădăcini multiple. În aceste condiții ecuația (10.70) poate fi pusă sub forma

$$V(s) = (s - s_1)^{q_1} (s - s_2)^{q_2} \dots (s - s_r)^{q_r},$$

cu restricția  $q_1 + q_2 + \dots + q_r = m$  și  $U(s_k) \neq 0$ .

În acest caz \*

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{U(s)}{V(s)} \right] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{q_i} \frac{K_{ik}}{(q_i - k)!} t^{q_i - k} e^{s_i t} \quad (10.75)$$

în care coeficienții  $K_{ik}$  sînt dați de relația

$$K_{ik} = \frac{1}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \cdot \frac{(s - s_i)^{q_i} U(s)}{V(s)} \right]_{s=s_i}$$

Rezultatele obținute sînt rezumate în tabloul 10.1.

10.4.4.6. **Exemple de aplicații.** Pentru ilustrarea metodelor de calcul ale originalelor se vor trata în cele ce urmează cîteva exemple.

**Exemplul 1.** Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{s}{(s^2 + \beta^2)(s^2 + \lambda^2)}.$$

Expresia dată are patru poli simpli:  $s_1 = j\beta$ ,  $s_2 = -j\beta$ ,  $s_3 = j\lambda$ ,  $s_4 = -j\lambda$ . Se va aplica, în consecință relația (10.66). Vom avea deci

$$\mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{s_k t}}{2\alpha_k^2 + \beta^2 + \lambda^2} = \frac{\cos \beta t - \cos \lambda t}{\lambda^2 - \beta^2}.$$

**Notă.** Teorema dezvoltării, prin aplicarea relației (10.71) dă același rezultat.

**Exemplul 2.** Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}.$$

Expresia dată are trei poli simpli:  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = j\omega$ ,  $s_3 = -j\omega$ . Unul din poli fiind nul, se aplică relația (10.72) a teoremei dezvoltării și se găsește

$$\mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = \frac{1}{\omega^2} + \sum_{k=1}^2 \frac{e^{s_k t}}{s_k \cdot 2s_k} = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

**Notă.** Cu metoda reziduurilor prin aplicarea relației (10.67), se obține același rezultat.

\* Vezi [161] pag. 184.



Exemplul 3. Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{\sqrt{s}}{s^2 + \omega^2}.$$

Expresia dată are doi poli simpli,  $s = \pm j\omega$ , și un punct critic pentru  $s = 0$ . Pentru efectuarea integralei (10.33) se va lua un contur  $\Gamma$  echivalent conturului lui BROMWICH care să înconjure cei doi poli, punctul critic și să aibă o tăietură de-a lungul părții negative a axei  $x$ -lor (fig. 10.20). Este ușor de verificat că cele două contururi sînt echivalente: valoarea integralei de-a lungul arcelor de cerc de rază infinită situate la stînga conturului lui BROMWICH este nulă căci  $\psi(s) = \sqrt{s}$  și  $\xi(s) = \beta^2 + \omega^2$ .

Pe de altă parte, neexistînd singularități ale funcției între conturul  $\Gamma$  și conturul lui BROMWICH, aplicînd formula lui CAUCHY și ținînd seama de sensul de parcurgere a conturului, vom avea

$$\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} + \int_{\Gamma} = 0.$$

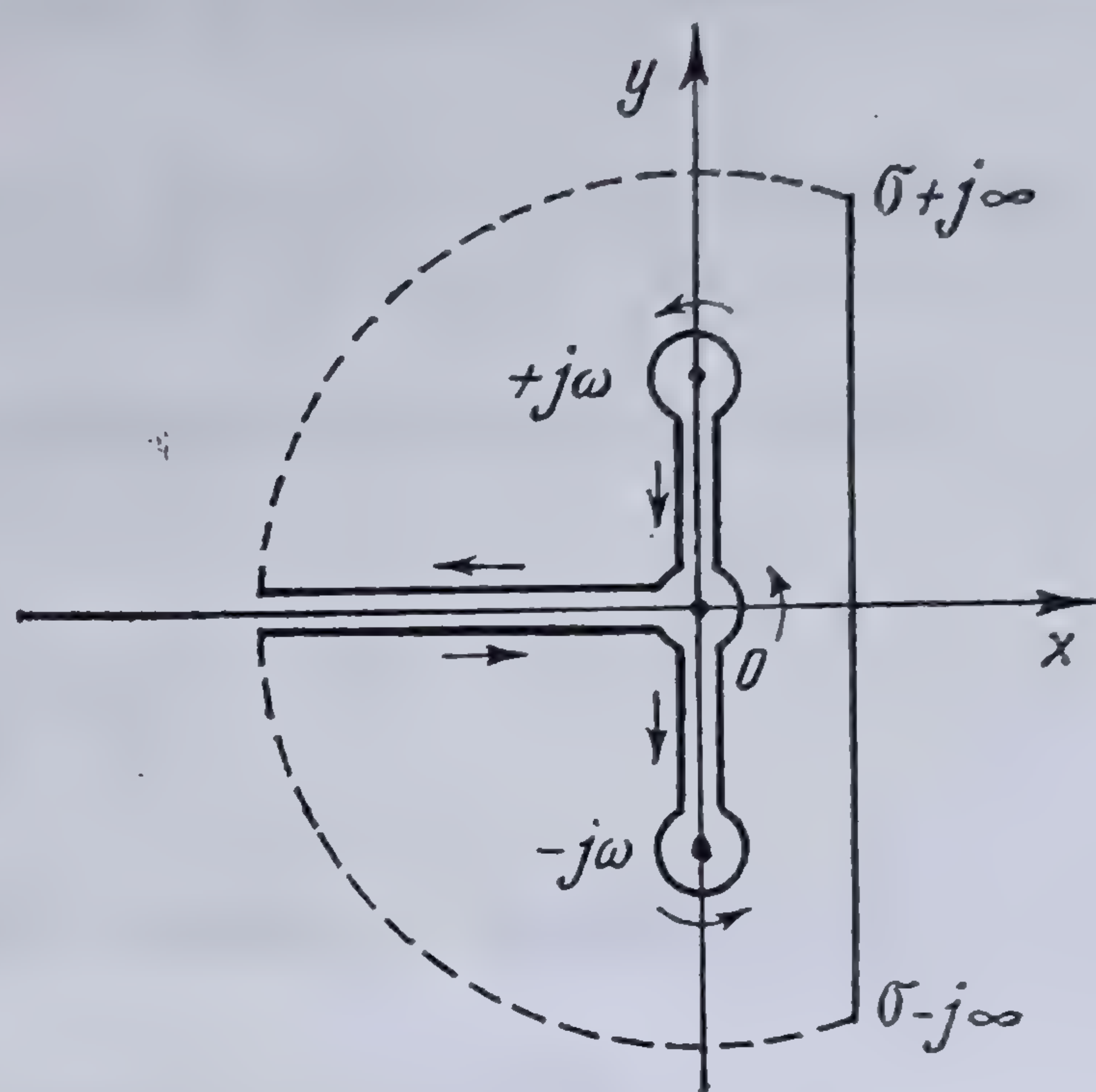


Fig. 10.20. Conturul echivalent.

Observînd că integrala de-a lungul drumului de dus și întors care leagă polii de punctul critic e nulă, vom avea

$$\mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = \Sigma \text{ reziduuri} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3},$$

unde  $\gamma_1$  este un cerc cu centrul în 0 și rază infinit mică

$\gamma_2$  este drumul situat puțin deasupra tăieturii

$\gamma_3$  este drumul situat puțin sub tăietură.

Pentru calculul reziduurilor aplicăm relația (10.66) și se găsește ușor

$$\text{Rez}(j\omega) = \left( \frac{e^{st} \sqrt{s}}{s + j\omega} \right)_{s=j\omega} = \frac{e^{j\omega t} \sqrt{j\omega}}{2j\omega} = \frac{e^{j(\omega t + \frac{\pi}{4})}}{2j\sqrt{\omega}};$$

$$\text{Rez}(-j\omega) = \left( \frac{e^{st} \sqrt{s}}{s - j\omega} \right)_{s=-j\omega} = \frac{e^{-j\omega t} \sqrt{-j\omega}}{-2j\omega} = \frac{e^{-j(\omega t + \frac{\pi}{4})}}{-2j\sqrt{\omega}}$$

și rezultă

$$\Sigma \text{ reziduuri} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$



Pentru calculul integralei de-a lungul cercului de rază  $\rho$  în jurul originii, vom pune  $s = \rho e^{j\theta}$  și cum  $|s| \ll \omega$ , vom avea

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} e^{j\rho(\cos\theta + j\sin\theta)} \rho^{\frac{3}{2}} e^{j\frac{3\theta}{2}} d\theta = 0.$$

Pe drumul imediat de deasupra tăieturii vom pune  $s = |x| e^{j\pi}$  și deci

$$\int_{\gamma_2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} \sqrt{x} dx}{x^2 + \omega^2}.$$

Pentru drumul imediat dedesubtul tăieturii vom pune  $s = |x| e^{-j\pi}$  și deci

$$\int_{\gamma_3} = \frac{1}{2\pi} \int_\infty^0 \frac{e^{-xt} \sqrt{x} dx}{x^2 + \omega^2}.$$

În consecință, originalul căutat va fi

$$\mathcal{L}^{-1} \varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xt} \sqrt{x}}{x^2 + \omega^2} dx.$$

**Exemplul 4.** Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^3 s^2}.$$

Numitorul expresiei avînd rădăcini multiple, se va aplica relația (10.75). Se obține

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \varphi(s) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{K_{11}}{(s - \alpha)^3} + \frac{K_{12}}{(s - \alpha)^2} + \frac{K_{13}}{s - \alpha} + \frac{K_{21}}{s^2} + \frac{K_{23}}{s} \right] = \\ &= \left( \frac{K_{11}}{2!} t^2 + K_{12} t + K_{13} \right) e^{-\alpha t} + K_{21} t + K_{23} \end{aligned}$$

unde

$$K_{11} = \left( \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2} \right)_{s = -\alpha} = \frac{a_2 \alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{\alpha^2},$$

$$K_{12} = \left( \frac{d}{dt} \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2} \right)_{s = -\alpha} = \frac{-a_1 \alpha + 2a_0}{\alpha^3}$$



$$K_{13} = \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2}{dt^2} \cdot \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2} \right)_{s=-\alpha} = \frac{-a_1 \alpha + 3a_0}{\alpha^4}$$

$$K_{21} = \left[ \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^3} \right]_{s=0} = \frac{a_0}{\alpha^3},$$

$$K_{22} = \left[ \frac{d}{dt} \cdot \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)^3} \right]_{s=0} = \frac{a_1 \alpha - 3a_0}{\alpha^4}.$$

**Exemplul 5.** Se poate găsi, în unele cazuri, originalul unei funcții imagine oarecare aplicând relația (10.42) dată de teorema lui BOREL. Fie de calculat originalul expresiei

$$\varphi(s) = \frac{1}{(s + \delta)^2 + \omega^2}.$$

Expresia dată se poate scrie

$$\varphi(s) = \frac{1}{s + \delta + j\omega} \cdot \frac{1}{s + \delta - j\omega} = \varphi_1(s) \cdot \varphi_2(s).$$

Dar

$$\mathcal{L}^{-1} \varphi_1(s) = e^{-(\delta + j\omega)t} \text{ și } \mathcal{L}^{-1} \varphi_2(s) = e^{-(\delta - j\omega)t}$$

Teorema lui BOREL dă imediat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \varphi(s) &= \int_0^t e^{-(\delta + j\omega)\tau} \cdot e^{-(\delta - j\omega)(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{e^{-\delta t}}{\omega} \sin \omega t. \end{aligned}$$

**OBSERVAȚIE.** Rezolvarea problemelor de găsim a originalului funcțiilor imagine este în general o operație dificilă și laborioasă. De aceea au fost întocmite tabele de transformare, al căror calcul a fost efectuat pornind de la determinarea imaginilor funcțiilor uzuale, această operație fiind mai simplă, integrarea făcându-se în domeniul real. Soluția problemei se obține astfel folosind aceste tabele și efectuând diverse transformări asupra funcției imagine în așa fel, încât să se poată găsi corespondentul respectiv\*.

#### 10.4.5. METODA GENERALĂ DE CALCUL A REGIMURILOR TRANZITORII

**10.4.5.1. Reguli generale.** Metoda generală de calcul a regimurilor tranzitorii cu ajutorul calculului operațional comportă următoarele etape:

I. Punerea în ecuație a problemei. Aceasta constă în aplicarea legilor și teoremelor cu ajutorul cărora se poate descrie fenomenul respectiv, scriin-

\* Vezi anexa 10.1.



du-se astfel ecuațiile sau sistemele de ecuații diferențiale și integro-diferențiale corespunzătoare.

**II.** Transformarea ecuațiilor diferențiale și integro-diferențiale, urmîndu-se metoda indicată în paragraful 10.4.2. și aplicînd teoremele cunoscute. Se obține astfel un sistem de ecuații algebrice între imaginile diverselor funcții necunoscute.

**III.** Rezolvarea sistemului de ecuații algebrice în raport cu imaginile funcțiilor necunoscute. Se obțin astfel imaginile tuturor funcțiilor necunoscute sub forma de expresii algebrice în  $s$ .

**IV.** Găsirea originalului funcțiilor imagine obținute. Această operație se face aplicînd una din metodele indicate în paragraful 10.4.4.

**V.** Interpretarea rezultatelor.

De multe ori pentru punerea în ecuație se folosește o schemă echivalentă a sistemului fizic respectiv, înlocuindu-se diversele mărimi componente prin reactanțele și impedanțele operaționale corespunzătoare. Pe această schemă echivalentă se stabilesc apoi ecuațiile de legătură corespunzătoare între diversele imagini ale mărimilor ce intră în joc. Ecuațiile ce se obțin sînt de data aceasta ecuații algebrice, sărindu-se astfel prima etapă de operații indicată mai sus.

Metoda este generală și se aplică oricărui sistem fizic. Ea constituie o rutină de calcul care conduce întotdeauna la soluția completă a problemei. Dificultate mai mare se poate întîlni la calculul originalelor funcțiilor necunoscute căutate.

**10.4.5.2. Exemple de aplicație.** Problemele de regim tranzitoriu în electrotehnică se rezolvă aplicînd metoda indicată în paragraful precedent. Ele se pretează mai ușor la construirea de scheme echivalente. Este necesar, pentru aceasta să se definească în prealabil impedanța operațională. Se va presupune, în exemplele ce urmează că circuitele respective sînt liniare.

Fie un circuit format numai dintr-o bobină de inductanță  $L$ , căreia  $i$  se aplică, la timpul  $t = 0$  o tensiune  $u$  oarecare; se presupune de asemenea că, la momentul inițial,  $i = 0$ . Ecuația de funcționare a circuitului este

$$u = L \frac{di}{dt}$$

Înmulțind ambii membri cu  $e^{-st}dt$  și integrînd între limitele 0 și  $\infty$ , se obține

$$\mathcal{L} u = s L \mathcal{L} i.$$

Se deduce de aici

$$\mathcal{L} i = \frac{\mathcal{L} u}{sL}$$

adică, funcția imagine a curentului se obține împărțind funcția imagine a tensiunii prin  $sL$ , care se numește *reactanța inductivă operațională*.

În același mod, în cazul unui condensator de capacitate  $C$  și în ipoteza  $u_{t=0} = 0$ , se poate scrie

$$u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt.$$



Înmulțind această egalitate cu  $e^{-st}dt$ , integrând de la 0 la  $\infty$  și ținând seama de relația (10.37), se găsește

$$\mathcal{L}u = \frac{\mathcal{L}i}{sC}$$

sau

$$\mathcal{L}i = sC \mathcal{L}u.$$

În această expresie, mărimea  $\frac{1}{sC}$  se numește *reactanța capacitivă operațională*.

În cazul unei rezistențe ohmice se scrie imediat

$$\mathcal{L}u = R \mathcal{L}i.$$

Cu aceste rezistențe și reactanțe operaționale se lucrează întocmai ca și cu rezistențele și reactanțele complexe. Se va putea scrie deci, pentru un circuit serie, impedanța operațională

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}. \quad (10.76)$$

Expresia

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} \quad (10.77)$$

se numește *admitanța operațională*.

În calculul operațional, legea lui OHM se scrie

$$\mathcal{L}u = Z(s) \mathcal{L}i. \quad (10.78)$$

**Exemplul 1.** Închiderea unui circuit oarecare pe o sursă de forță electromotoare constantă. Se presupune că la timpul  $t = 0$  se aplică o forță electromotoare constantă  $E$  unui circuit format dintr-o bobină de inductanță  $L$  în serie cu un rezistor de rezistență  $R$  și un condensator de capacitate  $C$  (fig. 10.21). Se presupune de asemenea, că la momentul inițial curentul din circuit și sarcina electrică a condensatorului sînt nule.

Impedanța operațională a circuitului este (10.76)

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}.$$

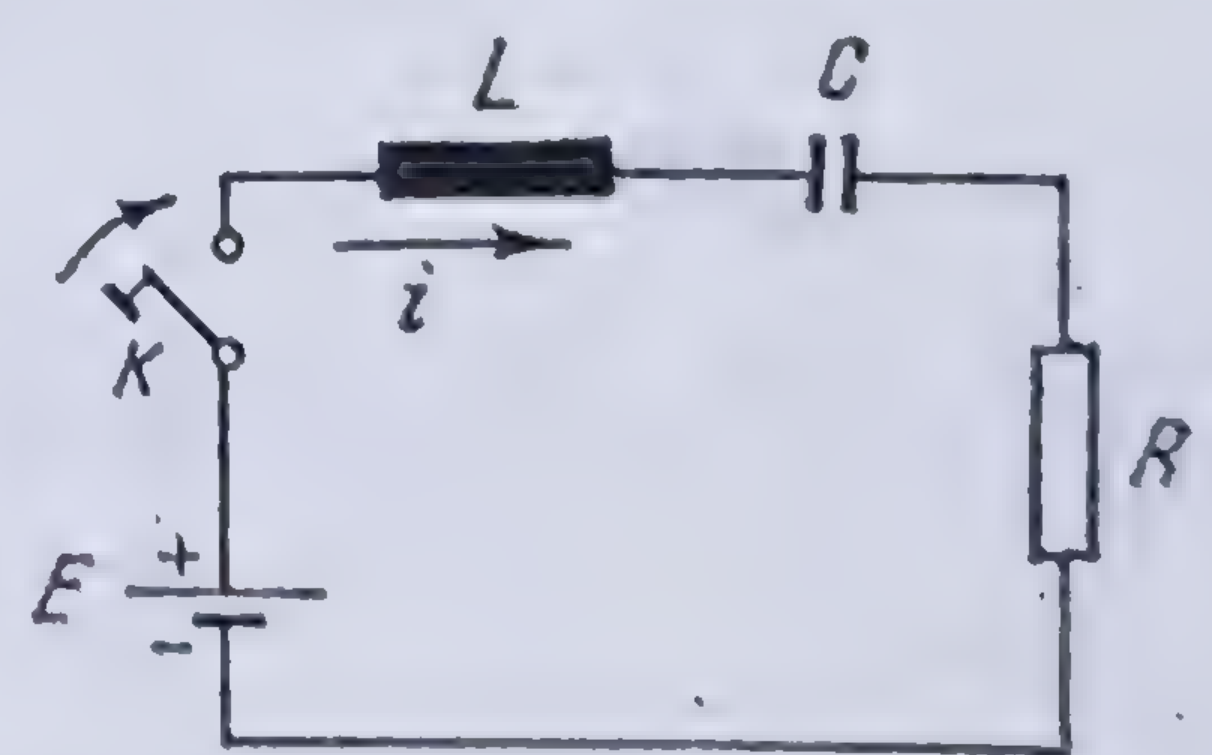


Fig. 10.21. Circuit electric format dintr-un condensator legat în serie cu un rezistor și o bobină.

Forța electromotoare fiind constantă, imaginea ei este

$$\mathcal{L}E = \frac{E}{s}.$$



Aplicând legea lui OHM (10.78) circuitului, se găsește

$$\mathcal{L}i = \frac{E}{s} \cdot \frac{1}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

sau

$$\mathcal{L}i = \frac{E}{L(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} \quad (10.79)$$

Pentru a găsi curentul  $i$ , se aplică relația (10.71) și curentul căutat va avea forma

$$i = \frac{E}{2\Omega' L} \varepsilon^{-\delta t} (\varepsilon^{\Omega' t} - \varepsilon^{-\Omega' t}),$$

sau, ținând seama de expresia sinusului hiperbolic,

$$i = \frac{E}{\Omega' L} \varepsilon^{-\delta t} \text{sh } \Omega' t.$$

Discuția rezultatului se face în raport cu  $\Omega'$ , așa cum s-a arătat în paragraful 3.6.4.

Se poate scrie direct originalul expresiei (10.79) folosind oricare din metodele indicate în paragraful 10.4.4. (metoda reziduurilor, teorema lui BOREL) sau folosind tabelele.

**Exemplul 2.** Aplicarea unei forțe electromotoare constante unui circuit format dintr-o bobină de inductanță  $L$ , în serie cu un condensator de capacitate  $C$ , șuntat cu un rezistor de rezistență  $R$  (fig. 10.22).

La timpul  $t = 0$  se aplică circuitului forța electromotoare constantă  $E$  și se presupune că, pînă în acest moment în sistem nu existau curenți sau sarcini electrice.

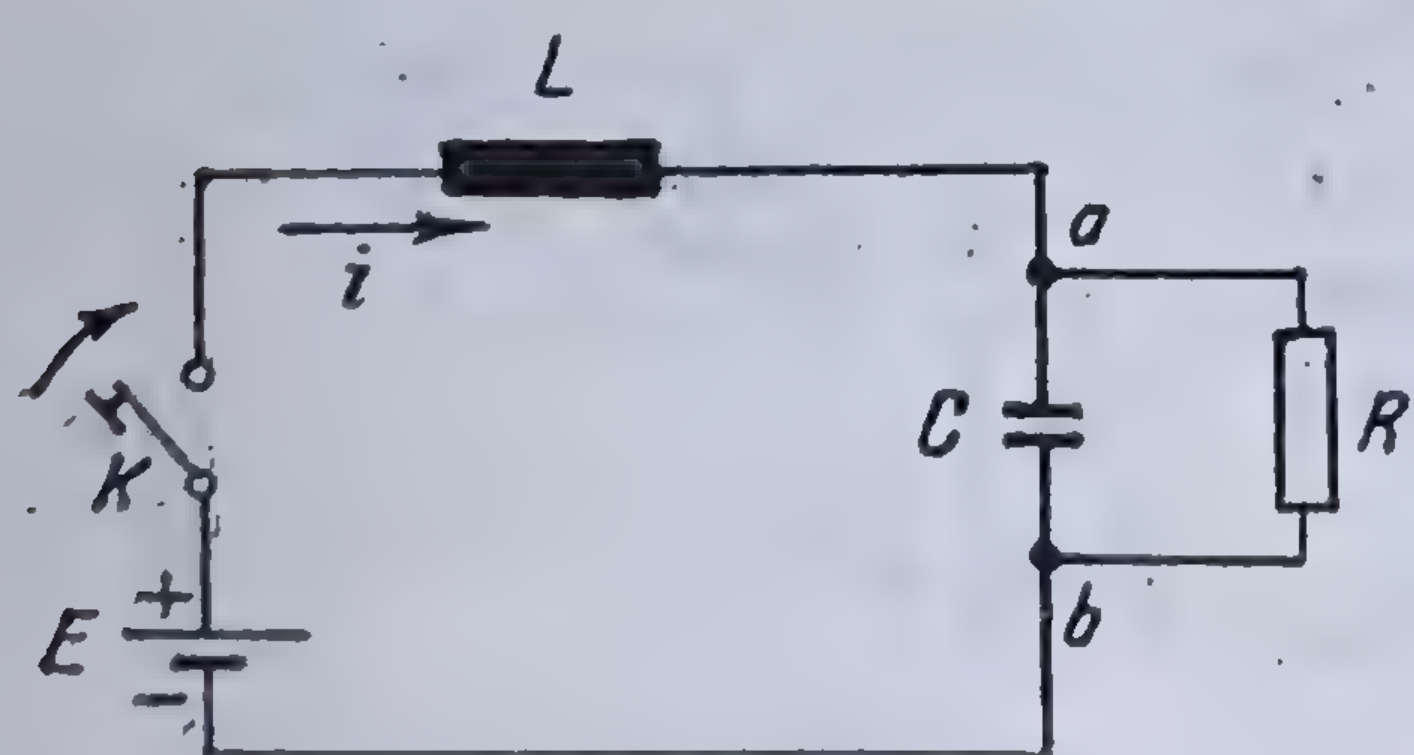


Fig. 10.22. Circuit electric format dintr-o inductanță în serie cu un condensator imperfect.

Impedanța operațională a circuitului se poate determina ușor, aplicând regulile de compunere a impedanțelor circuitului echivalent corespunzător. Ea este

$$Z(s) = sL + \frac{R \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 L C R + sL + R}{s C R + 1}.$$

Imaginea forței electromotoare fiind

$$\mathcal{L}E = \frac{E}{s},$$



aplicând legea lui OHM (10.78) se găsește

$$\mathcal{L}i = E \frac{sCR + 1}{s(s^2 LCR + sL + R)}.$$

Aplicând relația (10.69) se găsește fără dificultate

$$i = \frac{E}{R} \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[ \operatorname{ch} \beta t + \left( \frac{\alpha}{\beta} - \frac{R}{\beta L} \right) \operatorname{sh} \beta t \right] \right\},$$

în care

$$\alpha = \frac{1}{2CR} \quad \text{și} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC}}.$$

**OBSERVAȚIE.** Această relație este exactă dacă  $\alpha^2 > \frac{1}{LC}$ . Dacă  $\alpha^2 < \frac{1}{LC}$ , atunci  $\beta$  este imaginar. În acest caz punind

$$\beta = j\Omega$$

în care

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4C^2R^2}},$$

relația de mai sus se scrie

$$i = \frac{E}{R} \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[ \cos \Omega t + \left( \frac{\alpha}{\Omega} - \frac{R}{\Omega L} \right) \sin \Omega t \right] \right\}.$$

**Exemplul 3.** Aplicarea unei forțe electromotoare sinusoidale unui circuit format dintr-un rezistor de rezistență  $R$  și o bobină de inductanță  $L$  în serie. Fie

$$e = E \sqrt{2} \sin \Omega t,$$

forța electromotoare care se aplică acestui circuit. Se presupune că, la timpul  $t = 0$ , înainte de închiderea circuitului, curentul în circuit este nul. Aplicând legea lui OHM rezultă

$$\mathcal{L}i = \frac{e}{R + sL}.$$



Pentru a calcula  $\mathcal{E}e$ , se aplică ecuația (10.30) și se obține, ținând seama că

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$

$$\mathcal{E}e = E\sqrt{2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Pentru simplificarea calculului este mai bine a se lăsa  $\mathcal{E}e$  format din doi termeni adică

$$\mathcal{E}e = \mathcal{E}e_1 + \mathcal{E}e_2$$

în care

$$\mathcal{E}e_1 = \frac{1}{2j} \frac{E\sqrt{2}}{s - j\omega} \quad \text{și} \quad \mathcal{E}e_2 = -\frac{1}{2j} \frac{E\sqrt{2}}{s + j\omega}$$

și să se găsească soluțiile corespunzătoare fiecărui termen a lui  $\mathcal{E}e$ . Se vede ușor că este suficient a face calculele numai pentru  $\mathcal{E}e_1$ , deoarece, pentru  $\mathcal{E}e_2$  soluția se obține prin simpla înlocuire a lui  $j$  cu  $-j$ . Cum soluția finală este suma soluțiilor corespunzătoare lui  $\mathcal{E}e_1$  și  $\mathcal{E}e_2$  și ambele soluții sînt funcții complex conjugate, este suficient, să se ia dublul valorii părții reale a soluției corespunzătoare  $\mathcal{E}e_1$ . Astfel

$$i = 2\Re(J_1)$$

unde  $J_1$  este soluția corespunzătoare lui  $\mathcal{E}e_1$ .  
Funcția imagine a lui  $J_1$  fiind

$$\mathcal{E}J_1 = \frac{1}{2j} \frac{E\sqrt{2}}{(s - j\omega)(R + sL)},$$

aplicînd relația (10.71) se găsește :

$$J_1 = \frac{E\sqrt{2}}{2jZ} \left[ e^{j(\omega t - \varphi)} - e^{-\frac{R}{L}t} e^{-j\varphi} \right].$$

Luînd partea reală a acestei expresii și înmulțind-o cu 2 se obține soluția căutată

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \left[ \sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

**Exemplul 4.** Aplicarea unui impuls de tensiune într-un circuit cu un condensator de capacitate  $C$  și rezistor de rezistență  $R$ . Să considerăm un circuit electric format dintr-un condensator legat în serie cu un rezistor neinductiv. Acestui circuit i se aplică la timpul  $t = 0$  o impulsie electrică de forma indicată în figura 10.14. Se cere a se determina curentul ce apare în circuit.



Imaginea acestei tensiuni a fost determinată (par. 10.4.3.8. ex. 3) și este

$$\mathcal{L}u = u(s) = \frac{E}{s} \left[ \frac{1}{\lambda s} - \left( 1 + \frac{1}{\lambda s} \right) \varepsilon^{-\lambda s} \right].$$

Impedanța operațională a circuitului fiind

$$Z(s) = R + \frac{1}{Cs},$$

aplicînd legea lui OHM generalizată, imaginea curentului va fi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}i = \frac{\mathcal{L}u}{Z(s)} &= \frac{E}{s} \left[ \frac{1}{\lambda s} - \left( 1 + \frac{1}{\lambda s} \right) \varepsilon^{-\lambda s} \right] \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \\ &= \frac{E}{R} \cdot \frac{1}{s + \beta} \left[ \frac{1}{\lambda s} - \left( 1 + \frac{1}{\lambda s} \right) \varepsilon^{-\lambda s} \right], \end{aligned}$$

în care am notat  $\frac{1}{RC} = \beta$ .

Pentru calculul originalului curentului, se desfac parantezele, obținîndu-se

$$\mathcal{L}i = \frac{E}{R\lambda} \cdot \frac{1}{s(s + \beta)} - \frac{E}{R} \cdot \frac{\varepsilon^{-\lambda s}}{s + \beta} - \frac{E}{R\lambda} \frac{\varepsilon^{-\lambda s}}{s(s + \beta)},$$

unde, fiecărei imagini  $i$  se poate găsi ușor originalul, pentru ultimii doi termeni aplicîndu-se și teorema 9. Se găsește astfel

$$i = \frac{EC}{\lambda} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad \text{pentru } \lambda > t > 0,$$

$$i = \frac{EC}{\lambda} \varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \left[ \varepsilon^{\frac{\lambda}{RC}} \left( 1 - \frac{\lambda}{RC} \right) - 1 \right] \quad \text{pentru } t > \lambda.$$

Curba curentului în funcție de timp este dată în figura 10.23. Se observă pe curbă discontinuitatea pentru  $t = \lambda$ , care corespunde căderii bruște a tensiunii. Explicația fenomenului este următoarea: Pînă în momentul  $t = \lambda$ , sursa dă o energie, care servește la încărcarea condensatorului. La  $t = \lambda$ , sursa dispare brusc și condensatorul devine el sursă în circuit, debitînd un curent care de data aceasta este de sens contrar curentului de încărcare. Acest curent se stinge în timp, condensatorul rămînînd încărcat cu o anumită sarcină care se calculează ușor

$$q = \int_{\lambda}^{\infty} i \, dt = CE \left[ \frac{RC}{\lambda} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{\lambda}{RC}} \right) - 1 \right].$$

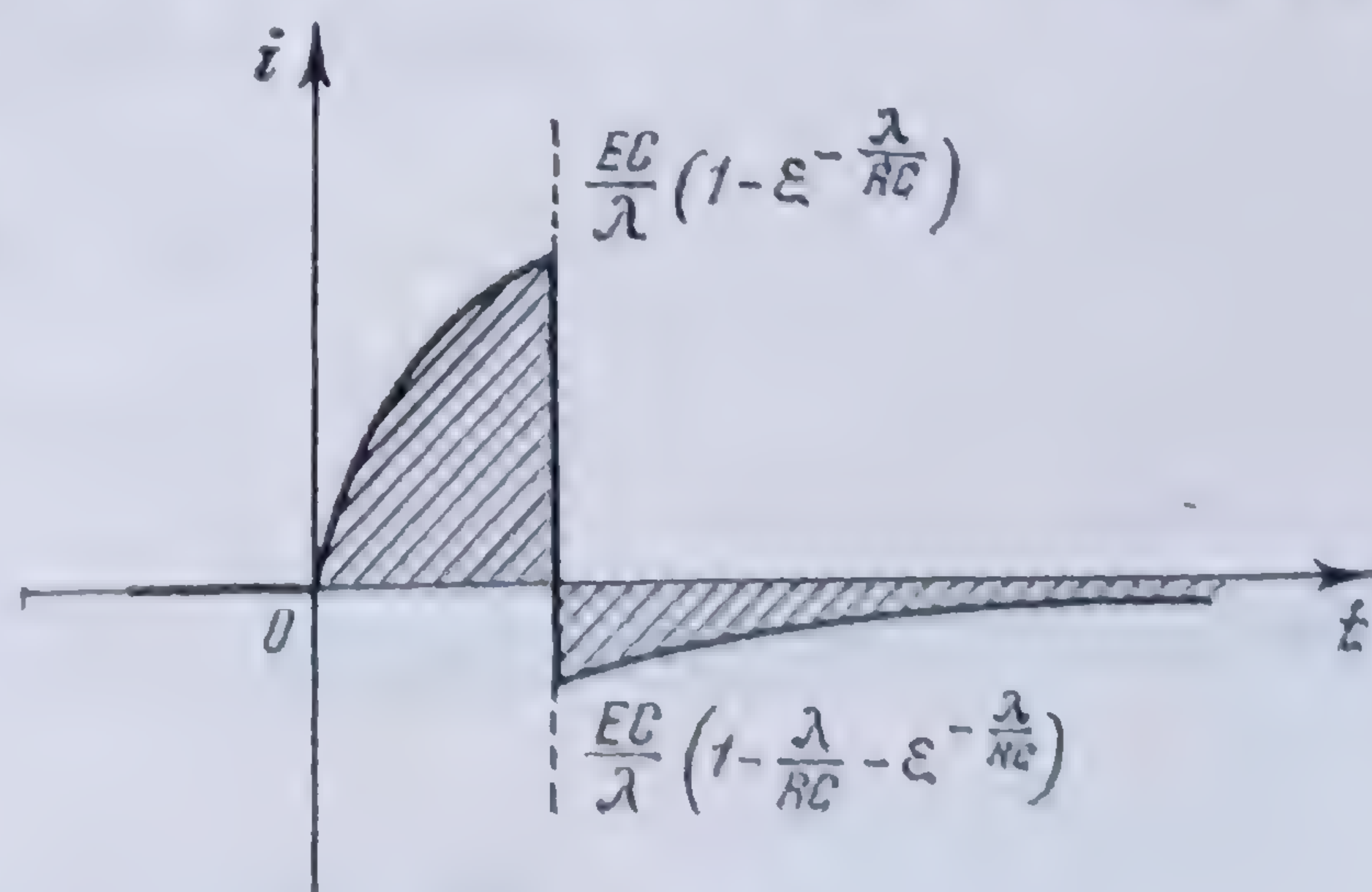


Fig. 10.23. Curba curentului.



Trebuie observat că saltul brusc (discontinuu) al curentului nu are nici o semnificație fizică. El apare numai datorită faptului că s-a neglijat inductanța circuitului.

**Exemplul 5. Studiul galvanometrului balistic.** Fie un galvanometru cu cadru mobil, avînd momentul de inerție  $J$ , prevăzut cu un resort antagonist, avînd coeficientul de elasticitate  $S$ , sistemul fiind cu frecări mecanice, caracterizate prin coeficientul  $A$  (fig. 10.24). Cadrul mobil are rezistența electrică  $R$  și inductanța proprie  $L$ ; el se mișcă între polii unui magnet permanent producînd un cîmp de inducție magnetică  $B_0$ , constant. Prin șuntarea cu un condensator de capacitate  $C$ , galvanometrul este făcut balistic. Se cere funcționarea acestui galvanometru. Se presupune că, pentru toate regimurile de funcționare,  $\Phi_0 = \text{Const.}$

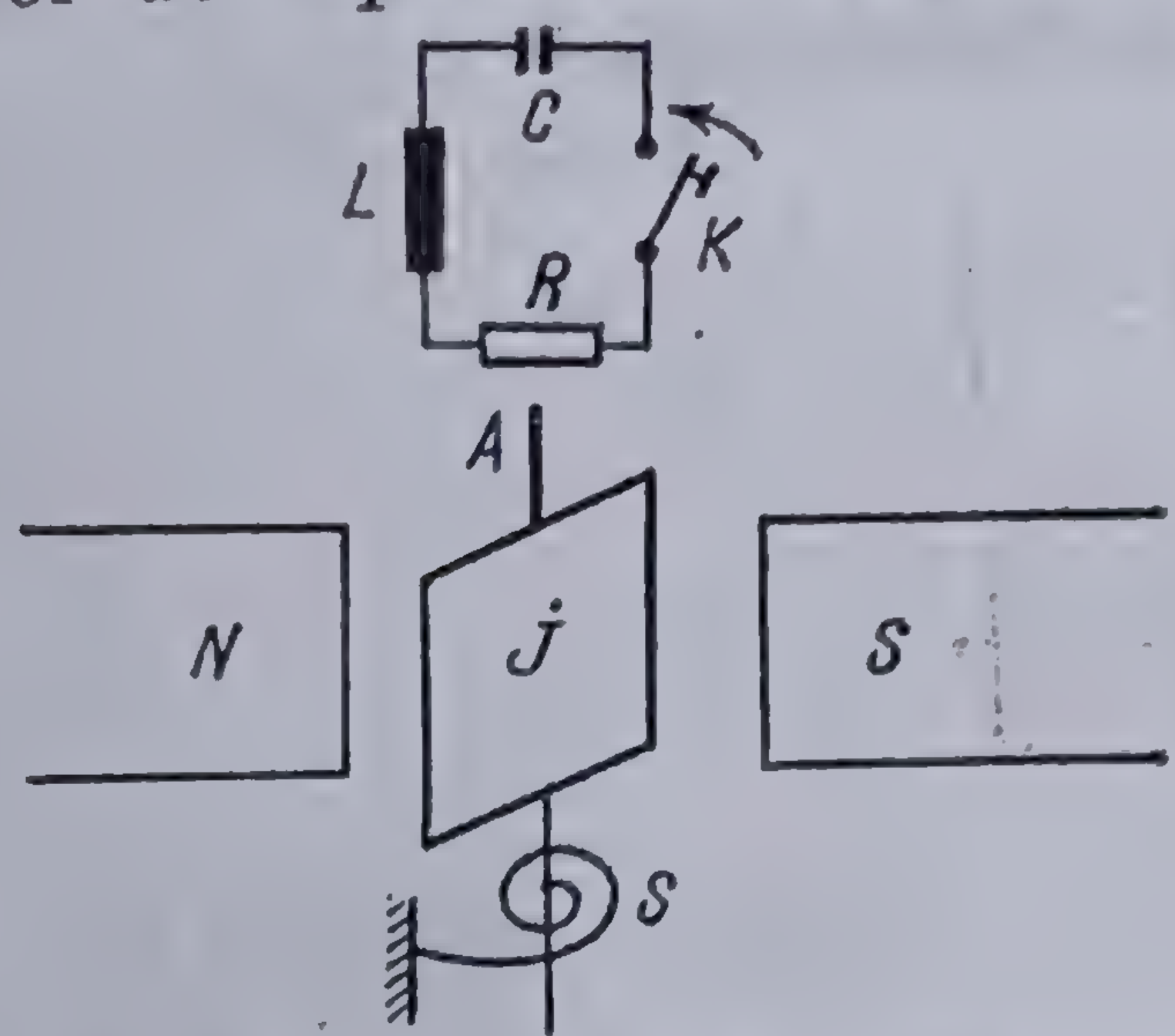


Fig. 10.24. Galvanometrul balistic.

Funcționarea galvanometrului va fi descrisă de următoarele grupe de ecuații diferențiale:

a) ecuații ce descriu fenomene mecanice

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + A \frac{d\theta}{dt} + S\theta = \Phi_0 i,$$

unde  $\theta$  este deplasarea unghiulară a cadrului și  $i$  curentul ce-l străbate;

b) ecuații ce descriu fenomene electrice

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \Phi_0 \frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{C}, \quad i = -\frac{dq}{dt}.$$

Pentru simplificarea problemei neglijăm pe  $L \frac{di}{dt}$  față de  $Ri$  în ecuațiile ce descriu fenomene electrice, ceea ce este posibil în practică. Aplicînd transformarea LAPLACE acestor ecuații și admitînd următoarele condiții inițiale

$$\theta_0 = 0, \quad \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad q_0 = Q_0 \quad \text{și} \quad i_0 = 0,$$

se obține:

$$\left. \begin{aligned} Js^2\mathcal{L}\theta + As\mathcal{L}\theta + S\mathcal{L}\theta &= \Phi_0\mathcal{L}i \\ R\mathcal{L}i + \Phi_0s\mathcal{L}\theta &= \frac{1}{C}\mathcal{L}q \\ \mathcal{L}i &= -s\mathcal{L}q + Q_0 \end{aligned} \right\}$$

Eliminînd între aceste ecuații pe  $\mathcal{L}i$  și  $\mathcal{L}q$ , se obține

$$\mathcal{L}\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{(CRs + 1)(Js^2 + As + S) + C\Phi_0 s^2} \quad (10.80)$$



sau\*

$$\mathcal{E}\theta = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} \cdot \frac{1}{Js^2 + \left( A + \frac{\Phi_0^2}{R + \frac{1}{Cs}} \right) s + S} \cdot \frac{Q_0}{C} \cdot \Phi_0. \quad (10.81)$$

Problema se poate rezolva complet căutînd originalul expresiei (10.80), care prezintă numai dificultatea rezolvării ecuației în  $s$  de la numitor și care, în cazul general, nu se poate face.

Problema poate fi însă discutată după cum urmează, trăgîndu-se concluzii interesante pentru practică:

Să presupunem că, așa cum se întîmplă în practică, constanta de timp  $CR$  a circuitului electric este foarte mică, ceea ce revine a spune că durată de descărcare a condensatorului este foarte scurtă sau  $R \ll \frac{1}{Cs}$ . Vom scrie deci

$$Z_e = \frac{1}{Cs}$$

$$Z_m = Js^2 + (A + \Phi_0^2 Cs) s + S = J's^2 + As + S,$$

în care am notat cu

$$J' = J + \Phi_0^2 C,$$

momentul de inerție aparent al sistemului mobil; în practică

$$J' \cong J.$$

Cu acestea, relația (10.81) devine

$$\mathcal{E}\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{J's^2 + As + S} = \frac{\Phi_0 Q_0}{J'} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{A}{J'} s + \frac{S}{J'}}.$$

Rădăcinile polinomului de la numitor fiind

$$s_{1,2} = -\frac{A}{2J'} \pm j \sqrt{\frac{S}{J'} - \frac{A^2}{4J'^2}}$$

\* În relația (10.81) se notează obișnuit

$$Z_e = R + \frac{1}{Cs} \quad \text{impedanța electrică}$$

$$Z_m = Js^2 + \left( A + \frac{\Phi_0^2}{R + \frac{1}{Cs}} \right) s + S \quad \text{impedanța mecanică}$$

$$Z_{em} = Z_e Z_m \quad \text{impedanța electromecanică.}$$



se găsește ușor că

$$\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{J'} \frac{e^{-\frac{A}{2J'} t}}{\sqrt{\frac{S}{J'} - \frac{A^2}{4J'^2}}} \sin \left( \sqrt{\frac{S}{J'} - \frac{A^2}{4J'^2}} t \right).$$

Notînd

$$\omega_0^2 = \frac{S}{J'} \text{ și } 2a = \frac{A}{J'},$$

și ținînd seama că amortizarea mecanică este în general foarte mică, deci  $\omega_0^2 \gg a^2$ , expresia oscilației galvanometrului devine

$$\theta = \frac{\Phi_0 Q_0}{\sqrt{J' S}} e^{-\frac{A}{2J'} t} \sin \omega_0 t.$$

Elongația maximă se obține pentru valoarea lui  $t$  pentru care  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ .

Se găsește

$$\theta_m = K \frac{\Phi_0}{\sqrt{J' S}} Q_0 = K_1 Q_0,$$

adică este proporțională cu  $Q_0$ .

Este ușor de observat că în funcționarea în balistic a unui galvanometru, prezența unui condensator la bornele sale are ca efect mărirea momentului de inerție al cadrului mobil.

#### 10.4.6. CALCULUL FENOMENELOR TRANZITORII LA INCHIDEREA ȘI DESCHIDEREA UNUI CIRCUIT ELECTRIC

**10.4.6.1. Închiderea unui circuit electric.** Fie o rețea liniară  $R$ , activă și două borne ale sale  $A$  și  $B$ ; bornele  $A$  și  $B$  fiind deschise (circuitul funcționînd în gol prin aceste borne), între ele va exista o diferență de potențial  $\underline{U}$ . Dacă se închide circuitul pe o impedanță  $Z$ , prin această impedanță va circula un curent  $\underline{I}_{AB}$  dat de teorema THÉVENIN\*

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB}},$$

în care  $\underline{Z}_{AB}$  este impedanța rețelei  $R$  pasivizată, văzută prin bornele  $A$  și  $B$ . Aplicînd transformata Laplace relației echivalente în mărimi instantanee și ținînd seama de cele arătate în paragraful 10.4.2., se obține

$$\mathcal{L} I_{AB} = \frac{\mathcal{L} U_{AB}}{Z(s) + Z_{AB}(s)}, \quad (10.82)$$

\* Vezi 6.2.3.4, relația fiind scrisă în cantități complexe.



în care  $\mathcal{L}i$  este imaginea curentului căutat,  $\mathcal{L}U_{AB}$  este imaginea tensiunii inițiale la bornele  $AB$ ,  $Z_{AB}(s)$  este impedanța operațională a rețelei pasivizată văzută prin bornele  $A$  și  $B$  ( $s$ ) este impedanța operațională pe care se închide rețeaua dată.

Pentru exemplificare să considerăm rețeaua din figura 10.25 la care, la timpul  $t = 0_+$  se închide întrerupătorul  $K_1$  aplicându-se tensiunea circuitului tensiunea constantă  $E$ ; la timpul  $t = t_1$  se scurtează rezistența. Se cere să se determine curentul  $i$  de scurtcircuit.

În acest caz impedanța operațională  $Z(s)$  e nulă.

Avem, ușor de stabilit

$$u_{AB}(t) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1} t} \right).$$

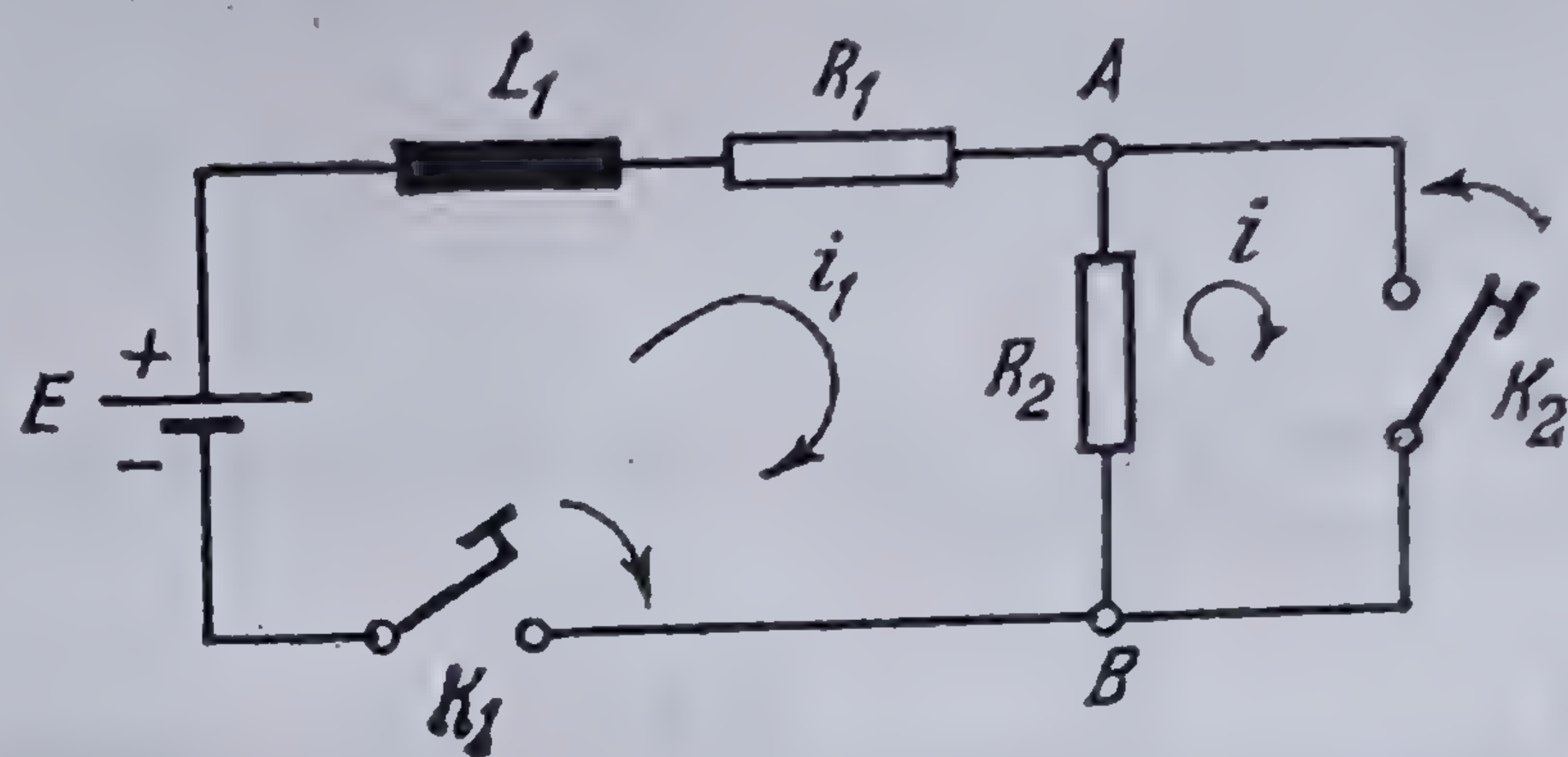


Fig. 10.25. Închiderea unui circuit electric.

imaginea acestei tensiuni la timpul  $t = t_1$  este

$$\mathcal{L}U_{AB} = \int_{t_1}^{\infty} e^{-st} E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1} t} \right) dt = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left[ \frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1} t_1}}{s + \frac{R_1 + R_2}{L_1}} \right] e^{-st_1};$$

impedanța operațională a circuitului pasivizat, văzută prin bornele  $A$  și  $B$ , este

$$\frac{1}{Z_{AB}(s)} = \frac{1}{R_1 + L_1 s} + \frac{1}{R_2} = \frac{s + \frac{R_1 + R_2}{L_1}}{\frac{R_1 R_2}{L_1} + R_1 s}.$$

Aplicând relația (10.82), imaginea curentului căutat este

$$\mathcal{L}i = \frac{E}{R_1 + R_2} \cdot \frac{e^{-st_1}}{\frac{R_1}{L_1} + s} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1} t_1} \right) + \frac{E e^{-st_1}}{R_1 + L_1 s} \cdot \frac{1}{s},$$

a cărui original se determină imediat aplicând teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE și ținând seama de teorema 9 a translației variabilei  $t$ . Se găsește

$$i = \frac{E}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1} t_1} \right) e^{-\frac{R_1}{L_1} (t - t_1)} \Upsilon(t - t_1) + \frac{E}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L_1} (t - t_1)} \right),$$

unde  $\Upsilon(t - t_1)$  este funcția unitate. Este ușor de văzut că la timpul  $t = \infty$ , în regim permanent, curentul  $i$  este curentul din circuit și este egal cu  $\frac{E}{R_1}$ .



10.4.6.2. Aplicarea teoremei lui THÉVENIN la studiul fenomenelor tranzitorii în sisteme trifazate\*. Pentru a arăta modul de utilizare a teoremei lui THÉVENIN la studiul fenomenelor tranzitorii în circuitele trifazate, să considerăm circuitul trifazat din figura 10.26. În acest circuit

$$e_A = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi),$$

$$e_B = E\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \varphi),$$

$$e_C = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3} + \varphi).$$

Se presupune că sursa este de putere infinită și deci impedanța ei internă este considerată nulă.

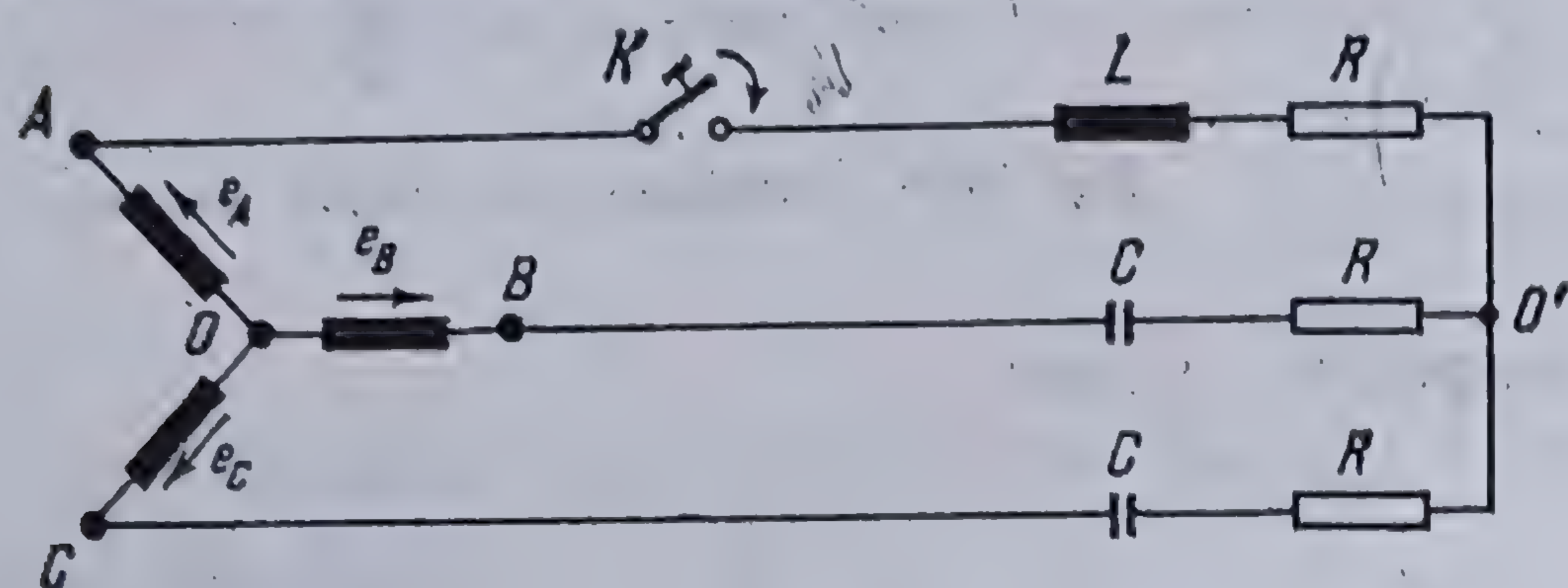


Fig. 10.26. Sistem trifazat.

Se cere să se determine curentul din faza A la închiderea întrerupătorului K.

Conform teoremei lui THÉVENIN curentul din faza A este dat de relația

$$i(s) = \frac{V_{AO'}(s)}{Z_A(s) + Z_i(s)}$$

în care

$$V_{AO'}(s) = \mathcal{L} V_{AO'}(t) = \mathcal{L} \frac{3}{2} E\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi),$$

căci

$$V_{AO'}(t) = \frac{3}{2} E\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi).$$

Într-adevăr, sarcinile pe fazele B și C fiind egale, când faza A este deschisă, tensiunea de linie  $V_{BC}$  se aplică impedanțelor  $Z_B$  și  $Z_C$  legate în serie; deci\*\*, pe fiecare fază se aplică 1/2 din tensiunea de linie și deci (fig. 10.27)

$$V_{AO'} = V_A + \frac{1}{2} V_A = \frac{3}{2} V_A.$$

Imaginea tensiunii  $V_{AO'}(t)$  este

$$V_{AO'}(s) = \frac{3}{2} E\sqrt{2} \frac{1}{s - j\omega} = \frac{3}{2} E\sqrt{2} e^{\varphi} \frac{1}{s - j\omega},$$

luând numai partea pozitivă și rezultatul fiind dat de  $i = 2 \operatorname{Re}(i)$ .

\* Vezi [41] pag. 466.

\*\* Vezi 8.2.2.3.



Impedanța fazei  $A$  este

$$Z_A(s) = R + Ls,$$

iar impedanța sistemului văzută prin bornele  $A$  și  $O'$ , sistemul fiind pasivizat, este egală cu cele două impedanțe de pe fazele  $B$  și  $C$  legate în paralel

$$\frac{1}{Z_i(s)} = \frac{2}{R} + 2Cs \quad \therefore Z(s) = \frac{1}{2} \left( R + \frac{1}{Cs} \right);$$

în consecință,

$$i(s) = \frac{3\sqrt{2} E Cs}{(s - j\omega)(2s^2LC + 3RCs + 1)}.$$

Originalul curentului se determină apoi cu ajutorul teoremei dezvoltării sau cu ajutorul tabelor și se ia

$$i(t) = 2 \operatorname{Re} \underline{i}(t).$$

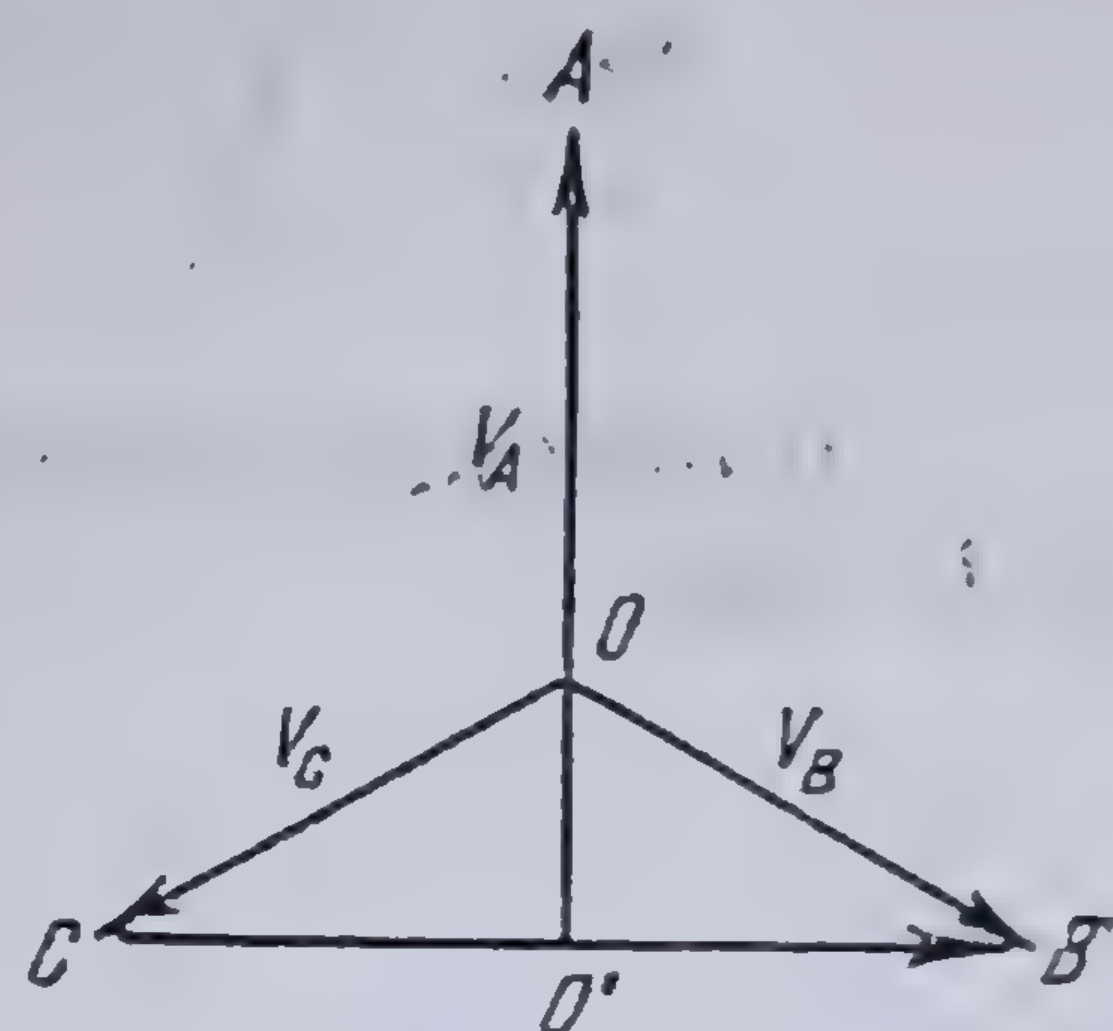


Fig. 10.27. Diagrama tensiunilor.

**10.4.6.3. Deschiderea unui circuit electric.** Se considerăm o rețea electrică liniară, activă,  $R$  avînd două borne  $A$  și  $B$  legate între ele printr-o impedanță  $Z$ , străbătută de curentul  $\underline{I}_{AB}$ . Tensiunea la bornele  $A$  și  $B$  ale acestei impedanțe este dată de teorema NORTON\*

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB}},$$

unde  $\underline{Y}_{AB}$  este admitanța rețelei  $R$  pasivizată și văzută prin bornele  $A$  și  $B$ , iar  $\underline{ZY} = 1$ .

Deschiderea circuitului echivalează cu introducerea unei impedanțe infinite (sau a unei admitanțe nule) între bornele  $A$  și  $B$  și relația teoremei lui NORTON se scrie

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB}}{\underline{Y}_{AB}} = \underline{Z}_{AB} \underline{I}_{AB};$$

aplicînd transformata LAPLACE relației echivalente în mărimi instantanee, se obține

$$\mathcal{L}U_{AB} = Z_{AB}(s)\mathcal{L}i_{AB}, \quad (10.83)$$

cu ajutorul căreia se determină tensiunea la bornele  $A$  și  $B$  ale întrerupătorului.

Ca exemplu, să considerăm același circuit, la care la timpul  $t = 0_+$ , se închide întrerupătorul  $K_1$ , întrerupătorul  $K_2$  fiind închis; la timpul  $t = t_1$  se deschide întrerupătorul  $K_2$  (fig. 10.25).

\* Vezi 6.2.3.5.



La timpul  $t = 0_+$  curentul care se stabilește în circuit se determină ușor și este

$$i = \frac{E}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L_1} t} \right) = i_{AB}.$$

Imaginea acestui curent, corespunzătoare timpului  $t = t_1$  este

$$\mathcal{L}i_{AB} = \int_{t_1}^{\infty} e^{-st} \frac{E}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L_1} t} \right) dt = \frac{E}{R_1} \left( \frac{1}{s} - \frac{L_1 e^{-\frac{R_1}{L_1} t_1}}{R_1 + L_1 s} \right) e^{-st_1}.$$

Impedanța operațională a circuitului pasivizat, văzută prin bornele  $A$  și  $B$  este

$$Z_{AB}(s) = \frac{R_1(R_1 + L_1 s)}{R_1 + R_2 + L_1 s}.$$

Aplicînd relația (10.83), imaginea tensiunii  $U_{AB}$  la bornele întrerupătorului este

$$\mathcal{L}u_{AB} = E \frac{R_2}{R_1} \left[ \frac{R_1 + L_1 s}{s(R_1 + R_2 + L_1 s)} - \frac{L_1 e^{-\frac{R_1}{L_1} t_1}}{R_1 + R_2 + L_1 s} \right] e^{-st_1},$$

a cărei original se determină cu ajutorul teoremei dezvoltării lui HEAVISIDE și a teoremei 9. Se găsește

$$u_{AB} = E \left[ \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - e^{-\frac{R_1}{L_1} t_1} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{L_1} (t - t_1)} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right].$$

În regim permanent, pentru  $t = \infty$ , această tensiune este

$$U_{AB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E,$$

cum se poate determina și direct.

## 10.5. UTILIZAREA INTEGRALEI FOURIER LA STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU ÎN CIRCUITELE ELECTRICE

### 10.5.1. PERECHILE DE FUNCȚII

Să considerăm integrala FOURIER sub forma sa complexă, dată de relația

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} G(j\omega) d\omega$$



în care

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j\omega\tau} f(\tau) d\tau$$

este spectrul funcției  $f(t)$ .

Relațiile de mai sus pot fi deduse și direct, pornind de la expresia seriei FOURIER cu termeni complecși. Într-adevăr, repetînd raționamentul făcut în paragraful 9.2.7.2. vom avea

$$f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k \varepsilon^{jk\omega_1 t},$$

$$\text{în care } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Punînd

$$k\omega_1 = \omega \quad \left\{ \begin{array}{l} k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ \omega = \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \pm 3\omega_1, \dots \end{array} \right\}$$

expresia (9.39) coeficientului termenului general poate fi scrisă

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \varepsilon^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{T} C(j\omega) = \frac{\omega_1}{2\pi} C(j\omega) \quad (\omega = \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \dots).$$

Cu acestea, expresia (9.53) devine

$$f(t) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum \frac{\omega_1}{2\pi} C(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} \quad (\omega = \pm \omega_1, \pm 2\omega_1, \dots).$$

Punînd

$$G(j\omega) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} C(j\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} C(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varepsilon^{-j\omega\tau} d\tau$$

relația (9.54) poate fi scrisă

$$f(t) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum \omega_1 G(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) \varepsilon^{j\omega t} d\omega,$$

adică tocmai expresia (9.52), expresia lui  $G(j\omega)$  de mai sus fiind identică cu expresia (9.51).

Făcînd în relațiile (9.52) și (9.51)  $t = -t$  (respectiv  $\tau = -\tau$ ), se obține

$$\begin{aligned} f(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j\omega t} G(j\omega) d\omega \\ -G(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega\tau} f(-\tau) d\tau. \end{aligned}$$



Cele două funcții  $f(t)$  și  $G(j\omega)$  se corespund una cu cealaltă, în sensul că una din ele poate fi determinată cînd se cunoaște cealaltă.

Funcțiile  $f(t)$  și  $G(j\omega)$  formează *perechi de funcții*\* și pentru ele se pot întocmi tabele de corespondență.

#### 10.5.2. TRANSFORMAREA FOURIER

Înmulțind relația (9.51) cu  $2\pi$  și punînd

$$2\pi G(j\omega) = \Phi(\omega)$$

și revenind la variabila  $t$ , se obține

$$\Phi(\omega) = \int_0^{\infty} \varepsilon_{-j\omega t} f(t) dt, \quad (10.84)$$

în care am limitat domeniul de integrare de la 0 la  $\infty$ .

Funcția  $\Phi(\omega)$  se numește *transformata FOURIER a funcției  $f(t)$* . Ea se mai notează

$$\mathcal{F} f(t) = \Phi(\omega).$$

Transformarea inversă este definită de relația (9.52) sub forma

$$\mathcal{F}^{-1} \Phi(\omega) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{j\omega t} \Phi(\omega) d\omega, \quad (10.85)$$

Ca și pentru transformata LAPLACE și pentru transformata FOURIER s-au construit tabele de funcții echivalente.

De altfel, metoda integralei FOURIER și aceea a transformatei FOURIER sînt atît de strîns legate între ele, încît ele pot fi considerate ca fiind una și aceeași metodă\*\*. Într-adevăr, transformata FOURIER definită prin relația (10.84), și deci funcția  $\Phi(\omega)$  poate fi considerată ca limita către care tinde imaginea  $\varphi(s)$  a funcției  $f(t)$ , obținută prin transformarea LAPLACE, definită de relația (10.30) cînd termenul real al lui  $s$  tinde către zero

$$\Phi(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(s),$$

bineînțeles, cu condiția ca această limită să existe.

În consecință, dacă în expresia lui  $\varphi(s)$  se înlocuiește  $s$  cu  $j\omega$  se obține funcția  $\Phi(\omega)$ , dacă  $\Phi(\omega)$  există.

Astfel, fiind dată funcția

$$f(t) = \varepsilon^{-\alpha t},$$

imaginea ei fiind

$$\varphi(s) = \frac{1}{s + \alpha},$$

\* Vezi [244] pag. 280.

\*\* Vezi [155] pag. 8.



se obține

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha}.$$

### 10.5.3. APLICAREA INTEGRALEI FOURIER LA STUDIUL CIRCUITELOR ELECTRICE

10.5.3.1. **Generalități.** În regimul permanent se definește impedanța complexă a unui circuit, raportul complex care există între forța electromotoare complexă și curentul complex

$$Z(j\omega) = \underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}}.$$

Astfel, pentru un circuit serie cu  $R$ ,  $L$  și  $C$ , expresia acestei impedanțe este

$$\underline{Z} = Z(j\omega) = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}.$$

Din relația de mai sus, dacă se cunoaște forța electromotoare periodică armonică, la care se poate atașa vectorul complex  $\underline{E}$ , cunoscând impedanța  $\underline{Z}$ , se deduce imediat curentul respectiv prin vectorul complex asociat.

Fie o forță electromotoare  $f(t)$ , neperiodică, pe care o presupunem nulă în afara intervalului  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ .

Dezvoltând funcția  $f(t)$  în serie FOURIER complexă în intervalul  $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ , dacă  $Z(jk\omega_1)$  este impedanța complexă a circuitului pentru pulsația  $k\omega_1$ , atunci curentul permanent din circuit va fi

$$i'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\underline{C}_k \varepsilon^{jk\omega_1 t}}{Z(jk\omega_1)}$$

sau, ținând seama de cele stabilite

$$i(t) = \lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\underline{C}_k \varepsilon^{jk\omega_1 t}}{Z(jk\omega_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{Z(j\omega)} \varepsilon^{j\omega t} d\omega. \quad (10.86)$$

Relația (10.86) reprezintă răspunsul pe care îl dă rețeaua când  $i$  se aplică un semnal neperiodic oarecare  $f(t)$ .

Metoda constă deci în a determina spectrul  $G(j\omega)$  al tensiunii date, cu ajutorul relației (9.51); împărțind expresia acestui spectru cu impedanța complexă a circuitului respectiv și calculând integrala din relația (10.86) se obține expresia curentului căutat.

În afară de aceasta, aplicarea integralei FOURIER dă posibilitatea găsirii modului de conectare a elementelor pasive constitutive ale rețelei atunci când se cunoaște tensiunea aplicată rețelei și răspunsul corespunzător al rețelei (efectuarea de sinteză de rețele).



10.5.3.2. Exemple de aplicație. *Exemplul 1.* Fie de determinat curentul care ia naștere într-un circuit serie format dintr-un rezistor de rezistență  $R$  și o bobină de inductanță  $L$ , căruia i se aplică o tensiune continuă  $e(t) = E$  la timpul  $t = 0$ .

Spectrul acestei tensiuni este

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E \varepsilon^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} E \varepsilon^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{E}{2\pi} \cdot \frac{1}{j\omega}.$$

Impedanța complexă a circuitului fiind

$$Z(j\omega) = R + j\omega L,$$

curentul căutat este dat de relația (10.86)

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(j\omega)}{Z(j\omega)} \varepsilon^{j\omega t} d\omega = \frac{E}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{j\omega(R + j\omega L)} d\omega = \frac{E}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\omega t}}{j\omega(R + j\omega L)} d(j\omega).$$

Calculul integralei se face prin metoda reziduurilor. Se găsește

$$i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - \varepsilon^{-\frac{L}{R}t} \right),$$

expresie cunoscută.

*Exemplul 2.* Fie acum același circuit, dar la care se aplică forța electromotoare sinusoidală

$$e(t) = E \sqrt{2} \sin \omega t,$$

și se caută curentul care apare în circuit.

Aplicând identitatea lui EULER, rezultă

$$e(t) = \frac{E \sqrt{2}}{2j} (\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-j\omega t});$$

cum cele două mărimi din paranteză sînt mărimi complex conjugate și soluția finală este reală, este suficient a calcula numai cu una din aceste mărimi și a lua dublul părții reale a rezultatului.

Vom avea deci

$$\begin{aligned} G(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \frac{E \sqrt{2}}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{-j(\Omega-\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{E \sqrt{2}}{2j} \int_0^{\infty} \varepsilon^{-j(\Omega-\omega)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{E \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\omega - \Omega}. \end{aligned}$$

Avem apoi,

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{E \sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\Omega t}}{(\omega - \Omega)(R + jL\Omega)} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{E \sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon^{j\Omega t} d(j\Omega)}{[j\omega - (j\Omega)] [R + L(j\Omega)]}.$$



Integrala se calculează prin metoda reziduurilor.

Punînd  $R + L(j\omega) = Z \angle \varphi$ , unde  $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$  și  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$ ,  
curentul căutat va fi

$$i = 2 \operatorname{Re} i(t) = \frac{E\sqrt{2}}{Z} \left[ \sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi e^{-\frac{R}{L}t} \right],$$

relație de asemenea cunoscută.

*Exemplul 3.* Fiind dat un circuit, cărui aplicîndu-i-se o forță electromotoare constantă  $E$  la timpul  $t = 0$ , răspunde cu un curent de forma  $i = \frac{R}{E}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ , se cere să se determine modul de conectare a elementelor acestui circuit.

Spectrul curentului este

$$\begin{aligned} i(j\omega) &= \frac{G(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{1}{2\pi} \frac{E}{R} \int_0^\infty \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}\tau} \right) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{E}{R} \frac{\frac{R}{L}}{j\omega \left( \frac{R}{L} + j\omega \right)} = \frac{\frac{1}{2\pi} \frac{E}{j\omega}}{R + jL\omega} \end{aligned}$$

și deci, circuitul este format dintr-o bobină de inductanță  $L$  și un rezistor de rezistență  $R$ , legate în serie.



TABLOU DE CORESPONDENȚĂ PENTRU FUNCȚII IMAGINE ȘI ORIGINAL \*

(TRANSFORMAREA LUI LAPLACE)

Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ $(0 \leq t)$
0,00	$\varphi(s)$	$f(t)$
0,01	$a\varphi(s)$	$af(t)$
	$a$ este o constantă sau o variabilă independentă de $t$ și $s$	
0,02	$\varphi_1(s) \pm \varphi_2(s)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$
0,03	$s\varphi(s) - f(0)$	$\frac{df(t)}{dt} = f'(t)$
0,04	$s \left[ \varphi(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{k+1}} \right]$	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$
0,05	$s\varphi(s)$	$f'(t) \quad [f(0) = 0]$
0,06	$\frac{\varphi(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}$	$\int f(t)dt = f^{(-1)}(t)$
0,07	$\frac{\varphi(s)}{s}$	$\int_0^t f(t) dt$
0,08	$\frac{\varphi(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{s^{n-k+1}} f^{(-k)}(0)$	$f^{(-n)}(t)$
0,09	$\lambda \varphi(\lambda s)$	$f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$
	$\lambda$ este o constantă sau o variabilă independentă de $t$ și $s$	
0,10	$e^{-as} \varphi(s)$	$f(t-a)$ dacă pentru $0 < t < a$ $f(t-a) = 0$ $a$ număr real pozitiv

\* În acest tablou  $e$  reprezintă baza logaritmilor neperieni, iar  $\alpha, \beta, \gamma$  și  $\lambda$  sînt numere reale.



Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ ( $0 \leq t$ )
0.11	$\varepsilon^{as} \varphi(s)$	$f(t+a)$ dacă pentru $-a < t < 0$ $f(t+a) = 0$ $a$ număr real pozitiv
0.12	$\varphi(s+a)$	$\varepsilon^{-at} f(t)$ $a$ număr complex cu partea reală pozitivă
0.13	$\varphi(s-a)$	$\varepsilon^{at} f(t)$ $a$ număr complex cu partea reală pozitivă
0.14	$\lim_{a \rightarrow a_0} \varphi(s, a)$	$\lim_{a \rightarrow a_0} f(t, a)$
$a$ o a doua variabilă, independentă de $t$ și $s$		
0.15	$\frac{\partial}{\partial a} \varphi(s, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} f(t, a)$
$a$ o a doua variabilă independentă de $t$ și $s$		
0.16	$-\frac{d}{ds} \varphi(s)$	$tf(t)$
0.17	$\int_s^\infty \varphi(s) ds$	$\frac{1}{t} f(t)$
0.18	$\int_{a_0}^a \varphi(s, a) da$	$\int_{a_0}^a f(t, a) da$
$a$ o a doua variabilă independentă de $t$ și $s$		
0.19	$\Re [\varphi(s)]$	$\left. \begin{array}{l} \Re [f(t)] \\ \Im [f(t)] \end{array} \right\} f(t) \text{ o funcție complexă}$
0.20	$\Im [\varphi(s)]$	
0.21	$\frac{\Lambda(s)}{B(s)}$ Frație algebrică rațională, numitorul cu rădăcini simple.	$\sum_{i=1}^n \frac{\Lambda(s_i)}{B(s_i)} \varepsilon^{s_i t}$



Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ $(0 \leq t)$
0.22	$\frac{A(s)}{B(s)}$ Frație algebrică rațională, numitorul cu rădăcini multiple; cazul general	$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{q_i} \frac{K_{ik}}{(q_i - k)} t^{q_i - k} \varepsilon^{s_i t}$ $K_{ik} = \frac{1}{(k - 1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \cdot \frac{(s - s_i)^{q_i} A(s)}{B(s)} \right]_{s=s_i}$ $B(s) = (s - s_1)^{q_1} (s - s_2)^{q_2} \dots (s - s_i)^{q_i} \dots (s - s_n)^{q_n}$ $q_1 + q_2 + \dots + q_i + \dots + q_n = m$
1.01	1	$\Upsilon'(t)$ funcția impuls la $t = 0$
1.02	s	$\Upsilon''(t)$ funcția impuls de ordinul 2 la $t = 0$
1.03	$\frac{1}{s}$	$\Upsilon(t)$ funcția unitate
1.04	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\varepsilon^{-\alpha t}$
1.05	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{\varepsilon^{-\alpha t} - \varepsilon^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$
1.06	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{(a_0 - \alpha) \varepsilon^{-\alpha t} - (a_0 - \beta) \varepsilon^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$
1.07	$\frac{1}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\alpha \beta} + \frac{\beta \varepsilon^{-\alpha t} - \alpha \varepsilon^{-\beta t}}{\alpha \beta (\alpha - \beta)}$
1.08	$\frac{s + a_0}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{a_0}{\alpha \beta} + \frac{a_0 - \alpha}{\alpha(\alpha - \beta)} \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{a_0 - \beta}{\beta(\beta - \alpha)} \varepsilon^{-\beta t}$
1.09	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{a_0}{\alpha \beta} + \frac{\alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{\alpha(\alpha - \beta)} \varepsilon^{-\alpha t} - \frac{\beta^2 - a_1 \beta + a_0}{\beta(\alpha - \beta)} \varepsilon^{-\beta t}$
1.10	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$	$\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} + \frac{\varepsilon^{-\gamma t}}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)}$
1.11	$\frac{s - a_0}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$	$\frac{a_0 - \alpha}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{(\alpha_0 - \beta)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} \varepsilon^{-\beta t} + \frac{a_0 - \gamma}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \varepsilon^{-\gamma t}$



Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ ( $0 \leq t$ )
1.12	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)(s + \beta)(s + \gamma)}$	$\frac{\alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{\beta^2 - a_1 \beta + a_0}{(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)} \varepsilon^{-\beta t} + \frac{\gamma^2 - a_1 \gamma + a_0}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} \varepsilon^{-\gamma t}$
1.13	$\frac{1}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \sin \beta t$
1.14	$\frac{1}{s^2 - \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta t$
1.15	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$\cos \beta t$
1.16	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$\operatorname{ch} \beta t$
1.17	$\frac{s + a_0}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \sqrt{a_0^2 + \beta^2} \sin(\beta t + \psi_1)$ unde $\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\beta}{a_0}$
1.18	$\frac{1}{s(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{1}{\beta^2} (1 - \cos \beta t)$
1.19	$\frac{s + a_0}{s(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{a_0}{\beta^2} - \frac{\sqrt{a_0^2 + \beta^2}}{\beta^2} \cos(\beta t + \psi_1)$
1.20	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{a_0}{\beta^2} - \frac{\sqrt{(a_0 - \beta^2)^2 + a_1^2 \beta^2}}{\beta^2} \cos(\beta t + \psi_2)$ unde $\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{a_1 \beta}{a_0 - \beta^2}$
1.21	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{a_0 - \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{a_0^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\beta t + \psi_4)$ unde $\operatorname{tg} \psi_3 = \frac{\beta}{\alpha}$ și $\psi_4 = \psi_1 - \psi_3$ .
1.22	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{\alpha^2 - a_0 \alpha + a_0}{\alpha^2 + \beta^2} \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(a_0 - \beta^2)^2 + a_1^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(\beta t + \psi_5)$ unde $\psi_5 = \psi_2 - \psi_3$



Nr.	$\Phi(s)$	$f(t)$ <span style="float: right;">(<math>0 \leq t</math>)</span>
1.23	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)(s^2 + \beta^2)}$	$\frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{\alpha^2 - \beta^2}$
1.24	$\frac{s}{[s^2 + (\alpha + \beta)^2][s^2 + (\alpha - \beta)^2]}$	$\frac{1}{2\alpha\beta} \sin \alpha t \sin \beta t$
1.25	$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$
1.26	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} \sqrt{(a_0 - \alpha)^2 + \beta^2} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \psi_0)$ unde $\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{\beta}{a_0 - \alpha}$
1.27	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$
1.28	$\frac{1}{(s + \alpha)^2 - \beta^2}$	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t$
1.29	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 - \beta^2}$	$e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \beta t$
1.30	$\frac{1}{s^2}$	$t$
1.31	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \quad (n \text{ întreg și pozitiv})$
1.32	$\frac{1}{(s + \alpha)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} + \alpha t - 1)$
1.33	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} [(a_0 - \alpha) e^{-\alpha t} + a_0 \alpha t - (a_0 - \alpha)]$
1.34	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{(s + \alpha)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} [(\alpha^2 - a_1 \alpha + a_0) e^{-\alpha t} + a_0 \alpha t + a_1 \alpha - a_0]$
1.35	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$	$t e^{-\alpha t}$
1.36	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)^2}$	$[(a_0 - \alpha)t + 1] e^{-\alpha t}$
1.37	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t} \quad (n \text{ întreg și pozitiv})$
1.38	$\frac{s^n}{(s + \alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{n! (-\alpha)^k}{(n-k)! (k!)^2} t^k \quad (n \text{ întreg și pozitiv})$
1.39	$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} [1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}]$



Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ ( $0 \leq t$ )
1.40	$\frac{s + a_0}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2} + \left( \frac{\alpha - a_0}{\alpha} t - \frac{a_0}{\alpha^2} \right) \varepsilon^{-\alpha t}$
1.41	$\frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s(s + \alpha)^2}$	$\frac{a_0}{\alpha^2} + \left( \frac{a_1 \alpha - a_0 - \alpha^2}{\alpha} t + \frac{\alpha^2 - a_0}{\alpha^2} \right) \varepsilon^{-\alpha t}$
1.42	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)^2}$	$\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{(\alpha - \beta) t - 1}{(\alpha - \beta)^2} \varepsilon^{-\beta t}$
1.43	$\frac{s + a_0}{(s + \alpha)(s + \beta)^2}$	$\frac{a_0 - \alpha}{(\alpha_0 - \beta)^2} \varepsilon^{-\alpha t} + \left[ \frac{a_0 - \beta}{\alpha - \beta} t + \frac{\alpha - a_0}{(\alpha - \beta)^2} \right] \varepsilon^{-\beta t}$
1.44	$\frac{1}{(s + \alpha)^3}$	$\frac{1}{2} t^2 \varepsilon^{-\alpha t}$
1.45	$\frac{s}{(s + \alpha)^3}$	$t \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha t \right) \varepsilon^{-\alpha t}$
1.46	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} t - \frac{1}{\alpha^3} \sin \alpha t$
1.47	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)s^2}$	$\frac{1}{\alpha^3} \operatorname{sh} \alpha t - \frac{1}{\alpha^2} t$
1.48	$\frac{s^2 + 2\alpha^2}{s^4 + 4\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha} \sin \alpha t \operatorname{ch} \alpha t$
1.49	$\frac{s^2 - 2\alpha^2}{s^4 + 4\alpha^4}$	$\frac{1}{\alpha} \cos \alpha t \operatorname{sh} \alpha t$
1.50	$\frac{1}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2\alpha^3} (\operatorname{sh} \alpha t - \sin \alpha t)$
1.51	$\frac{s}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2\alpha^2} (\operatorname{ch} \alpha t - \cos \alpha t)$
1.52	$\frac{s^2}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2\alpha} (\operatorname{sh} \alpha t + \sin \alpha t)$
1.53	$\frac{s^3}{s^4 - \alpha^4}$	$\frac{1}{2} (\operatorname{ch} \alpha t + \cos \alpha t)$
1.54	$\frac{1}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3} (\sin \alpha t - \alpha t \cos \alpha t)$
1.55	$\frac{1}{(s^2 - \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha^3} (\alpha t \operatorname{ch} \alpha t - \operatorname{sh} \alpha t)$
1.56	$\frac{s}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha} t \sin \alpha t$
1.57	$\frac{s^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{2\alpha} (\sin \alpha t + \alpha t \cos \alpha t)$



Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ ( $0 \leq t$ )
1.58	$\frac{s^2 - \alpha^2}{(s^2 + \alpha^2)^2}$	$t \cos \alpha t$
1.59	$\frac{1}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$\frac{1}{2\beta^3} e^{-\alpha t} (\sin \beta t - \beta t \cos \beta t)$
1.60	$\frac{s + \alpha}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$\frac{1}{2\beta} t e^{-\alpha t} \sin \beta t$
1.61	$\frac{(s + \alpha)^2 - \beta^2}{[(s + \alpha)^2 + \beta^2]^2}$	$t e^{-\alpha t} \cos \beta t$
1.62	$\frac{1}{s(s^2 + \alpha^2)^2}$	$\frac{1}{\alpha^4} (1 - \cos \alpha t) - \frac{1}{2\alpha^3} t \sin \alpha t$
1.63	$\frac{1}{s^3(s^2 + \alpha^2)}$	$\frac{1}{\alpha^4} (\cos \alpha t - 1) + \frac{1}{2\alpha^2} t^2$
1.64	$\frac{1}{s^3(s^2 - \alpha^2)}$	$\frac{1}{\alpha^4} (\operatorname{ch} \alpha t - 1) - \frac{1}{2\alpha^2} t^2$
2.01	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
2.02	$\frac{1}{s \sqrt{s}}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$
2.03	$\frac{\sqrt{s}}{s^{n+1}}$	$\frac{2^n t^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
2.04	$\frac{1}{\sqrt{s + \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha t}$
2.05	$\frac{s}{(s + \alpha) \sqrt{s + \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} (1 - 2\alpha t) e^{-\alpha t}$
2.06	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha) \sqrt{s + \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} [1 + 2(\alpha - \alpha t)] e^{-\alpha t}$
2.07	$\sqrt{\frac{s^2 + \alpha^2 - s}{s^2 + \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin \alpha t$
2.08	$\sqrt{\frac{s^2 + \alpha^2 + s}{s^2 + \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \alpha t$
2.09	$\sqrt{\frac{s - \sqrt{s^2 - \alpha^2}}{s^2 - \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{sh} \alpha t$
2.10	$\sqrt{\frac{s + \sqrt{s^2 - \alpha^2}}{s^2 - \alpha^2}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \operatorname{ch} \alpha t$
3.01	$\frac{1}{s} e^{-\alpha t}$	$\begin{cases} 0 & t < \alpha \\ t & t > \alpha \end{cases}$



Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ ( $0 \leq t$ )
3.02	$\frac{1}{s^2} (1 - e^{-\alpha s})$	$\begin{cases} t & t < \alpha \\ \alpha & t > \alpha \end{cases}$
3.03	$\frac{1}{s + a} e^{-\alpha s}$	$\begin{cases} 0 & t < \alpha \\ e^{-a(t-\alpha)} & t > \alpha \end{cases}$
3.04	$\frac{1}{s^2 + 1} (1 + e^{-\pi s})$	$\begin{cases} \sin t & t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$
3.05	$\frac{s}{s^2 + 1} (1 + e^{-\pi s})$	$\begin{cases} \cos t & t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$
3.06	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\alpha^2}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch} 2\alpha \sqrt{t}$
3.07	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \alpha \sqrt{t}$
3.08	$\frac{1}{s \sqrt{s}} e^{-\frac{\alpha^2}{s}}$	$\frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \operatorname{sh} 2\alpha \sqrt{t}$
3.09	$\frac{1}{s \sqrt{s}} e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	$\frac{2}{\alpha \sqrt{\pi}} \sin \alpha \sqrt{t}$
3.10	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{2s} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \operatorname{ch} \alpha \sqrt{t}$
3.11	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{2s} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	$2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \cos \alpha \sqrt{t}$
3.12	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2} \left( 1 - e^{-\frac{2n\pi s}{\alpha}} \right)$	$\begin{cases} \cos \alpha t & t < \frac{2n\pi}{\alpha} \\ 0 & t > \frac{2n\pi}{\alpha} \end{cases}$
4.01	$\frac{1}{\sqrt{s}} \cos \frac{1}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch} \sqrt{2t} \cos \sqrt{2t}$
4.02	$\frac{1}{\sqrt{s}} \sin \frac{1}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{sh} \sqrt{2t} \sin \sqrt{2t}$
4.03	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha s}} \cos \sqrt{\alpha s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \left( \frac{\alpha}{st} \right)$
4.04	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha s}} \sin \sqrt{\alpha s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \left( \frac{\alpha}{2t} \right)$
4.05	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} \cos \left( \beta + \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{s} \right)$	$\cos (\alpha t + \beta)$



Nr.	$\varphi(s)$	$f(t)$ <span style="float: right;">(<math>0 \leq t</math>)</span>
4.06	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + \alpha^2}} \sin \left( \beta + \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{s} \right)$	$\sin (\alpha t + \beta)$
4.07	$\frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{ch} \frac{1}{s}$	$\frac{1}{2 \sqrt{\pi t}} (\operatorname{ch} 2 \sqrt{t} + \cos 2 \sqrt{t})$
4.08	$\frac{1}{s \sqrt{s}} \operatorname{ch} \frac{1}{s}$	$\frac{1}{2 \sqrt{\pi t}} (\operatorname{sh} 2 \sqrt{t} + \sin 2 \sqrt{t})$
5.01	$\ln \frac{s - \alpha}{s}$	$\frac{1}{t} (1 - e^{\alpha t})$
5.02	$\ln \frac{s + \alpha}{s - \alpha}$	$\frac{2}{t} \operatorname{sh} \alpha t$
5.03	$\ln \frac{s - \beta}{s - \alpha}$	$\frac{1}{t} (e^{\alpha t} - e^{\beta t})$
5.04	$\ln \frac{s^2 - \alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \operatorname{ch} \alpha t)$
5.05	$\ln \frac{s^2 + \alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t} (1 - \cos \alpha t)$
5.06	$\ln \frac{s^2 + \alpha^2}{s^2 + \beta^2}$	$\frac{2}{t} (\sin \alpha t + \sin \beta t)$
5.07	$\ln \left( 1 + \frac{1}{s^2} \right)$	$\frac{4}{t} \sin^2 \frac{t}{2}$
5.08	$\operatorname{sln} \frac{s^2 - \alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t^2} [(\operatorname{ch} \alpha t - 1) + t \alpha \operatorname{sh} \alpha t]$
5.09	$\operatorname{sln} \frac{s^2 + \alpha^2}{s^2}$	$\frac{2}{t^2} [(\cos \alpha t - 1) + t \alpha \sin \alpha t]$
5.10	$\ln \frac{(s + \alpha)^2 + \gamma^2}{(s + \beta^2) + \gamma^2}$	$\frac{2}{t} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) \cos \gamma t$
5.11	$\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{s}$	$\frac{1}{t} \sin \alpha t$
5.12	$\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{s - \beta}$	$\frac{1}{t} e^{\beta t} \sin \alpha t$
5.13	$\operatorname{arctg} \frac{2\alpha s}{s^2 - \alpha^2 + \beta^2}$	$\frac{2}{t} \sin \alpha t \cos \beta t$
5.14	$\operatorname{arctg} \frac{s^2 - \alpha s + \beta}{\alpha \beta}$	$\frac{1}{t} (e^{\alpha t} - 1) \sin \beta t$



## Capitolul XI

### SISTEME ELECTRICE NELINIARE ÎN CURENT ALTERNATIV

#### 11.1. GENERALITĂȚI ȘI DEFINIȚII

##### 11.1.1. GENERALITĂȚI

Considerațiile făcute asupra funcționării unei rețele electrice de curent continuu \*, sînt integral aplicabile și pentru rețelele electrice de curent alternativ. Fenomenele care apar în cazul curentului alternativ sînt însă mai complicate și multiple \*\*. De asemenea, în circuitele de curent alternativ pot fi utilizate nu numai rezistențe cu caracter neliniar, dar și inductanțe și capacități care au caracteristici neliniare.

Utilizarea elementelor neliniare nesimetrice (de exemplu supapele electronice, care prezintă o rezistență foarte mică pentru un sens al curentului și o rezistență foarte mare pentru sensul opus) permit *redresarea* curentului alternativ, adică transformarea acestuia într-un curent electric a cărei valoare medie să nu fie nulă, practic în curent electric continuu.

Existența unui element neliniar într-un circuit electric de curent alternativ, la bornele căruia este aplicată o tensiune electrică alternativă sinusoidală, sau care este străbătută de un curent electric alternativ sinusoidal, are drept consecință faptul, că tensiunea la bornele circuitului, respectiv curentul din circuit, este deformat, rămînînd totuși periodic \*\*\*.

În circuitele de curent alternativ, serie sau derivație, care cuprind elemente oscilante (condensatoare și bobine) cu caracteristici neliniare, se pot produce unele fenomene deosebite asemănătoare rezonanței electrice, numite fenomene de ferorezonanță \*\*\*\*.

De asemenea, circuitele electrice neliniare în curent alternativ pot prezenta, în anumite condiții, stări de nestabilitate adică, în cazul unui proces tranzitoriu, oscilațiile care apar nu se mai amortizează ci dimpotrivă se amplifică \*\*\*\*\*.

Studiul teoretic al fenomenelor care apar în circuitele electrice de curent alternativ neliniare este deci mult mai complicat decît studiul fenomenelor în circuitele electrice liniare sau chiar în cazul circuitelor electrice neliniare de curent continuu.

Ecuatiile diferențiale pentru studiul circuitelor electrice neliniare de curent alternativ se obțin tot cu ajutorul celor două teoreme ale lui KIRCHHOFF; ele sînt ecuații diferențiale neliniare. Pentru rezolvarea acestor ecuații nu există o metodă generală.

\* Vezi 2.5.1.

\*\* Vezi [19].

\*\*\* Vezi 9.4.

\*\*\*\* Vezi 11.3.

\*\*\*\*\* Vezi 11.4.



## 11.1.2. CLASIFICAREA ELEMENTELOR NELINIARE ALE REȚELOR ELECTRICE DE CURENT ALTERNATIV

11.1.2.1. **Circuite electrice ai căror parametri sînt constanți.** 1. Un circuit electric prezintă o rezistență constantă atunci cînd raportul dintre tensiunea la bornele circuitului și curentul care străbate circuitul este constant și independent de alte elemente. Această definiție care se aplică circuitelor de curent continuu (sistemelor staționare), se aplică și circuitelor de curent alternativ (sistemele cuasistaționare). În general, în condiții normale de încălzire, rezistențele metalice îndeplinesc aceste condiții.

Caracteristica *volt-amper* a unei rezistențe constante este o dreaptă care trece prin origine, de coeficient unghiular \* :

$$G = \frac{\Delta i}{\Delta u},$$

$G$  fiind conductanța circuitului respectiv.

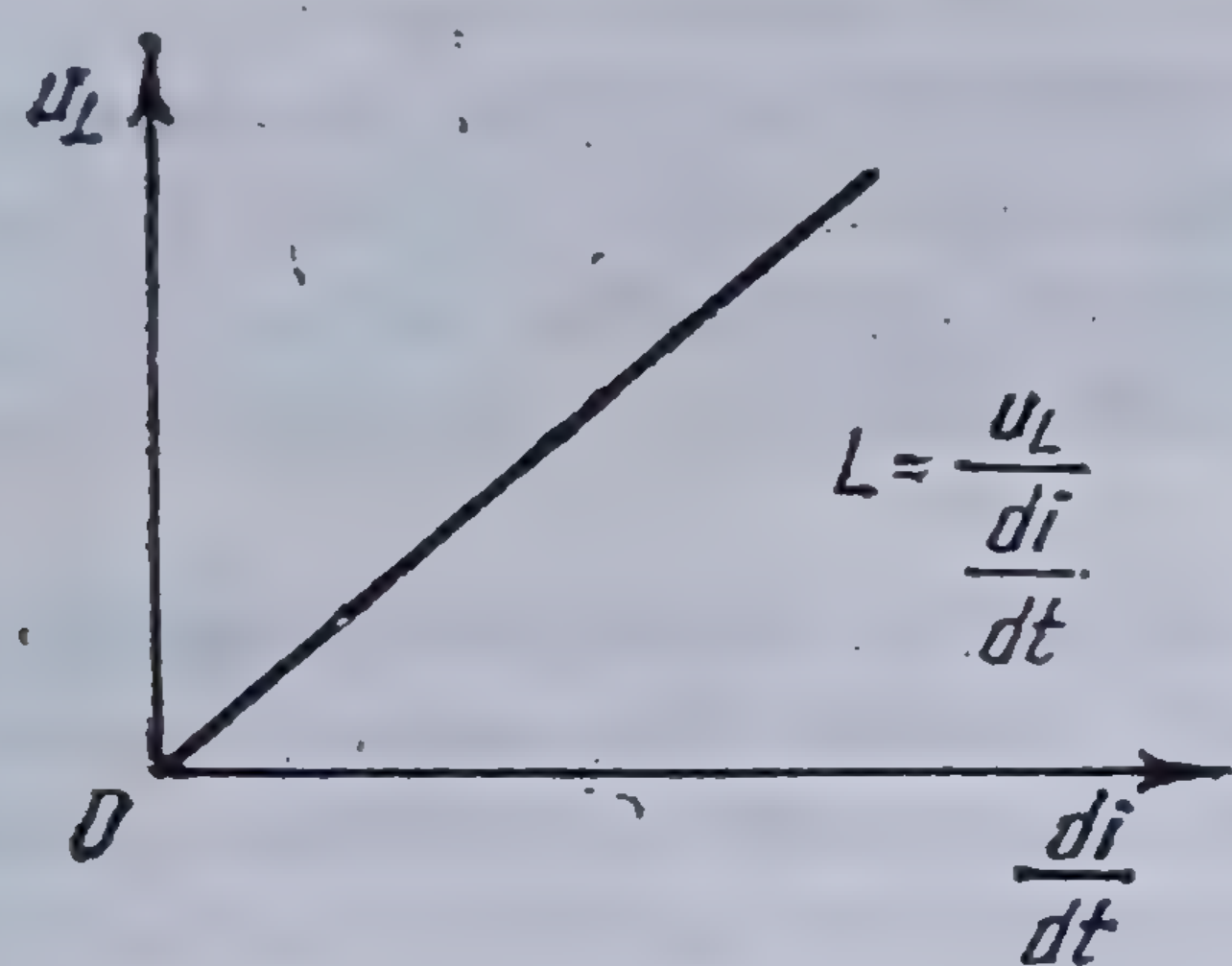


Fig. 11.1. Caracteristica volt-amper a unei inductanțe constante.

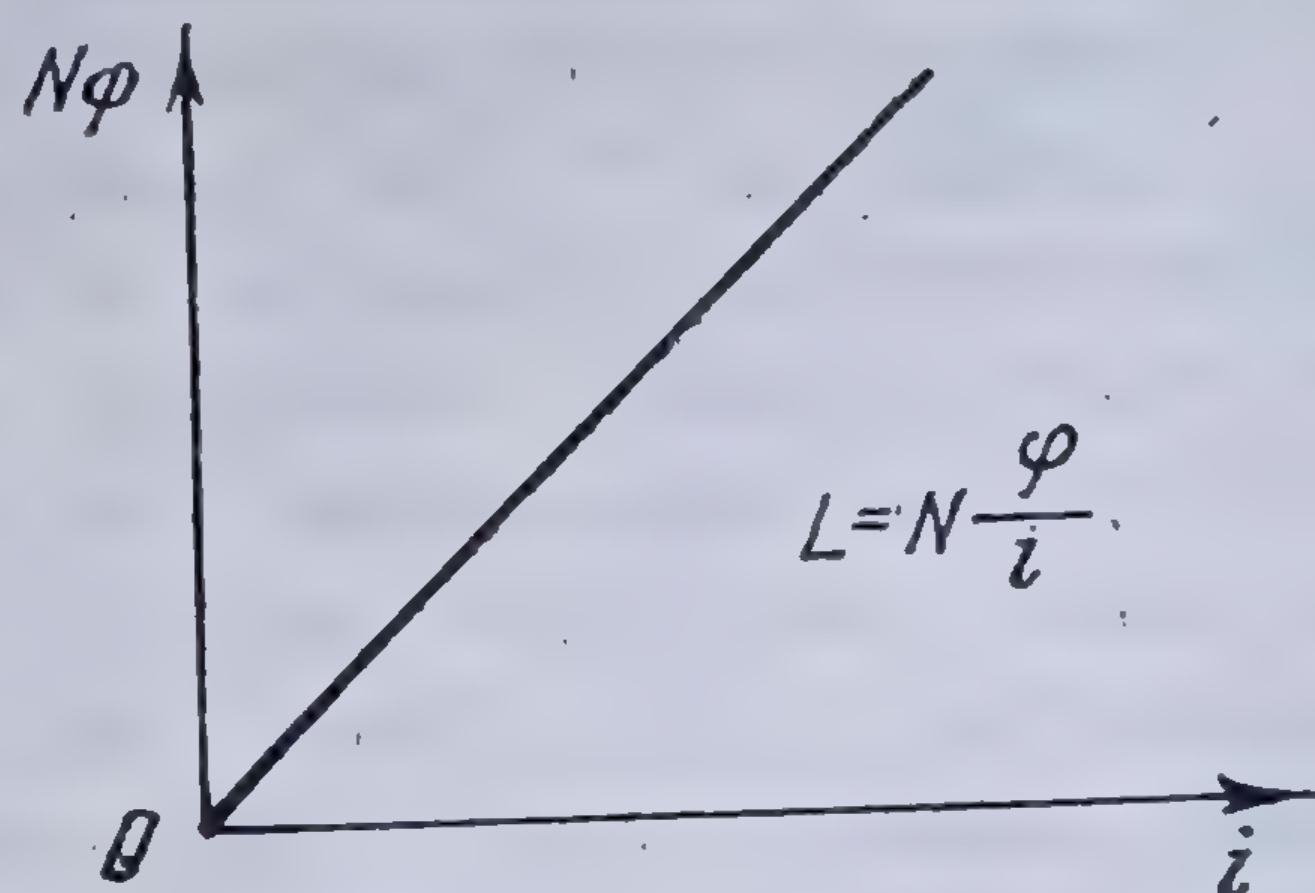


Fig. 11.2. Caracteristica weber-amper a unei inductanțe constante.

2. Un circuit electric prezintă o inductanță constantă atunci cînd raportul dintre forța electromotoare de inducție care apare la bornele circuitului și variația în timp a curentului care străbate circuitul este constant și independent de alte elemente. Această definiție este dedusă din relația

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

și caracteristica sa *volt-amper* \*\* este o dreaptă care trece prin origine (fig. 11.1).

Definirea unui circuit cu inductanță constantă poate fi dedusă și din relația (3.120)

$$L i = N \varphi.$$

În acest caz circuitul este definit ca prezentînd o inductanță constantă, atunci cînd raportul dintre fluxul total al bobinei și curentul care o străbate este constant. Caracteristica *weber - amper* corespunzătoare este de asemenea o dreaptă, care trece prin origine, a cărei coeficient unghiular reprezintă inductanța circuitului (fig. 11.2).

\* Vezi și 2.5.2.

\*\* O caracteristică *volt-amper* propriu-zisă a unei inductanțe nu există, deoarece nu există nici o relație directă între  $u_L$ ,  $i$  și  $L$ . Se păstrează totuși denumirea prin analogie.



3. Un circuit electric prezintă o capacitate sau o elastață constantă, atunci cînd raportul dintre tensiunea la bornele sale și sarcina electrică înmagazinată în circuit este constant și independent de alte elemente. Această definiție este dedusă din relațiile (1.92)

$$u_c = Sq = \frac{q}{C}.$$

Caracteristica *volt-coulomb* corespunzătoare este o dreaptă care trece prin origine avînd coeficientul unghiular egal cu elastață circuitului (fig. 11.3).

Parametrii circuitului îndeplinind condițiile arătate mai înainte formează grupa de *parametri liniari* ai unui circuit electric.

4. Impedanțele, respectiv admitanțele, constituite din rezistențe și reactanțe liniare sînt impedanțe, respectiv admitanțe liniare ale circuitului electric. Ele sînt definite ca raportul dintre tensiunea la bornele sale și curentul care le străbat. Caracteristica lor *volt-amper* este o dreaptă care trece prin origine și al cărei coeficient unghiular este impedanța însăși a circuitului

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

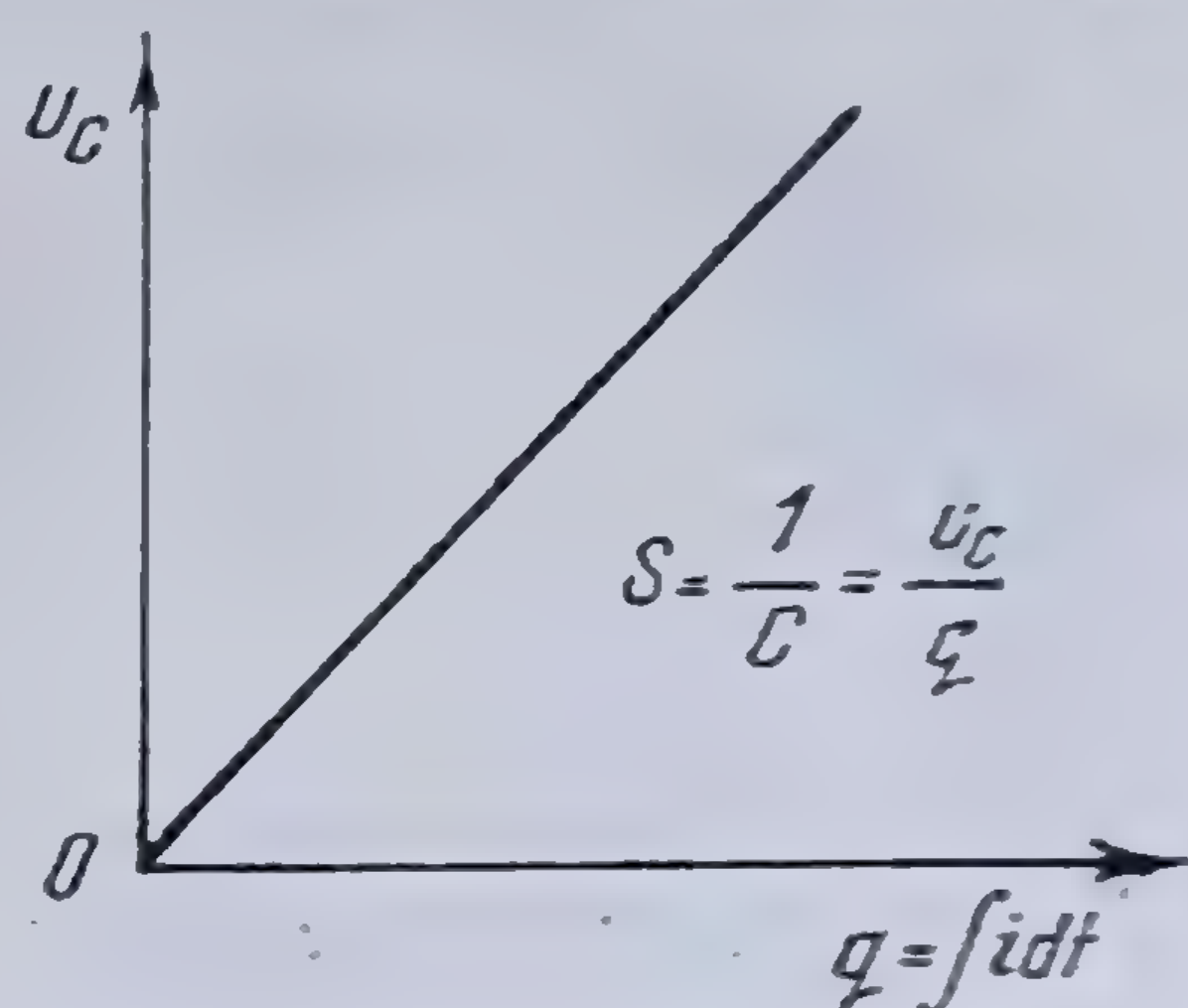


Fig. 11.3. Caracteristica volt-coulomb a unei elastațe constante.

#### 11.1.2.2. Circuite electrice ai căror parametri variază numai cu timpul. Se consideră ca parametri

care variază cu timpul, acei parametri ai unui circuit electric care sînt funcții explicite de timp și independenți de curent și de tensiune. Dacă se notează cu  $R_t$ ,  $L_t$ ,  $S_t$  respectiv  $C_t$ , acești parametri, atunci ecuațiile de funcționare a circuitelor electrice caracteristice speciale sînt:

— pentru circuitul rezistiv  $u_R = R_t i,$

— pentru circuitul inductiv  $u_L = \frac{d(L_t i)}{dt} = L_t \frac{di}{dt} + i \frac{dL_t}{dt},$

— pentru circuitul capacitiv  $u_C = \int S_t i dt,$

respectiv

$$i = \frac{d(C_t u_c)}{dt} = C_t \frac{du_c}{dt} + u_c \frac{dC_t}{dt}.$$

Există numeroase cazuri în care acești parametri sînt funcții de timp, fără a depinde de curent sau de tensiune. Astfel, de exemplu, inductanța înfășurării polifazate a unui alternator față de înfășurarea inductorului este o funcție de poziția acestuia din urmă și deci de timp; de asemenea, rezistența unui microfon cu granule de cărbune este o funcție variabilă de timp deoarece ea depinde de presiune, deci de unda sonoră care este o funcție de timp, și nu depinde de caracteristicile electrice ale microfonului (tensiunea și curentul).



Caracteristicile *volt-ampere* formează o familie de drepte avînd originea ca punct comun; în figura 11.4 este reprezentată o asemenea caracteristică pentru o rezistență variabilă în timp.

În problemele în care apar asemenea parametri, se poate aplica întotdeauna principiul suprapunerii efectelor.

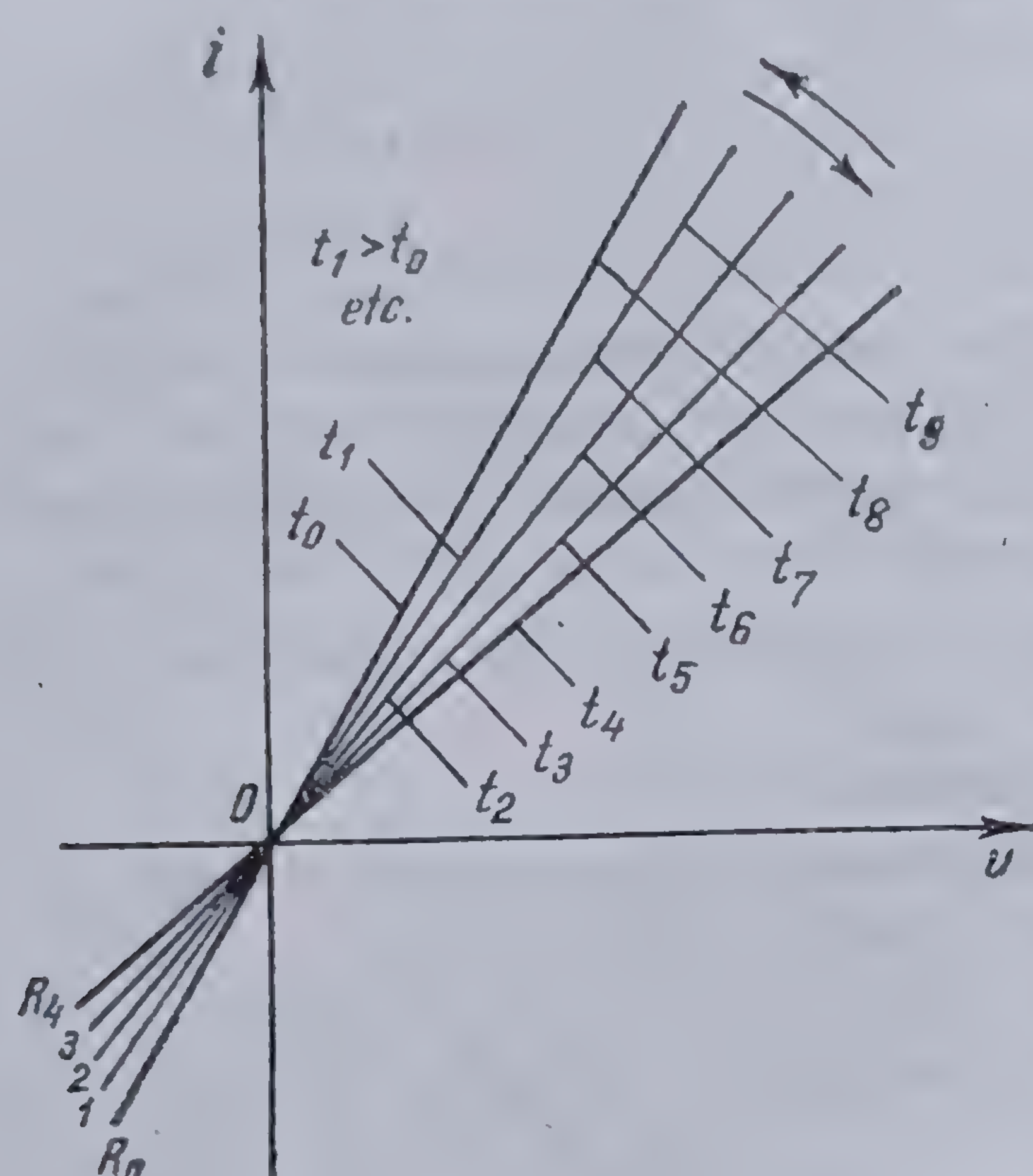


Fig. 11.4. Caracteristica volt-ampere a unei rezistențe variabile în timp.

**11.1.2.3. Circuitele electrice ai căror parametri variază numai cu curentul sau numai cu tensiunea.** Parametrii unui circuit electric, rezistența  $R$ , inductanța  $L$  sau capacitatea  $C$ , care variază în raport cu curentul care îi străbat sau cu tensiunea aplicată la borne, după o lege oarecare, bine definită, dar care nu variază în mod explicit cu timpul, se numesc *parametri liniari*.

Caracteristica de funcționare a acestor elemente nu se poate determina decât experimental, ecuația lor analitică neputînd fi în general stabilită. O asemenea curbă poate fi simetrică sau nu în raport cu originea, iar curbura ei este variabilă.

a) În cazul unei rezistențe neliniare, aceasta este caracterizată prin valoarea

ei care este definită în două moduri (fig. 11.5):

1) *Rezistența statică*, care este raportul dintre diferența de potențial de la bornele rezistenței neliniare și curentul care o străbate

$$R_s = \frac{u}{i}$$

și este definită pe caracteristica volt-ampere a rezistenței neliniare, prin unghiul pe care îl face dreapta ce unește originea axelor de coordonate, cu punctul de funcționare corespunzător cu axa absciselor

$$\operatorname{ctg} \sigma = \frac{u_A}{i_A} = R_s.$$

2) *Rezistența dinamică*, care este raportul dintre variația diferenței de potențial la bornele rezistenței neliniare și variația curentului ce o străbate, cînd aceasta tinde către zero

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{du}{di}.$$

Această mărime este definită pe caracteristica volt-ampere, prin unghiul de înclinare al tangentei la curba caracteristică, în punctul de funcționare, cu axa absciselor

$$\operatorname{ctg} \delta = \left( \frac{du}{di} \right)_A = R_d.$$

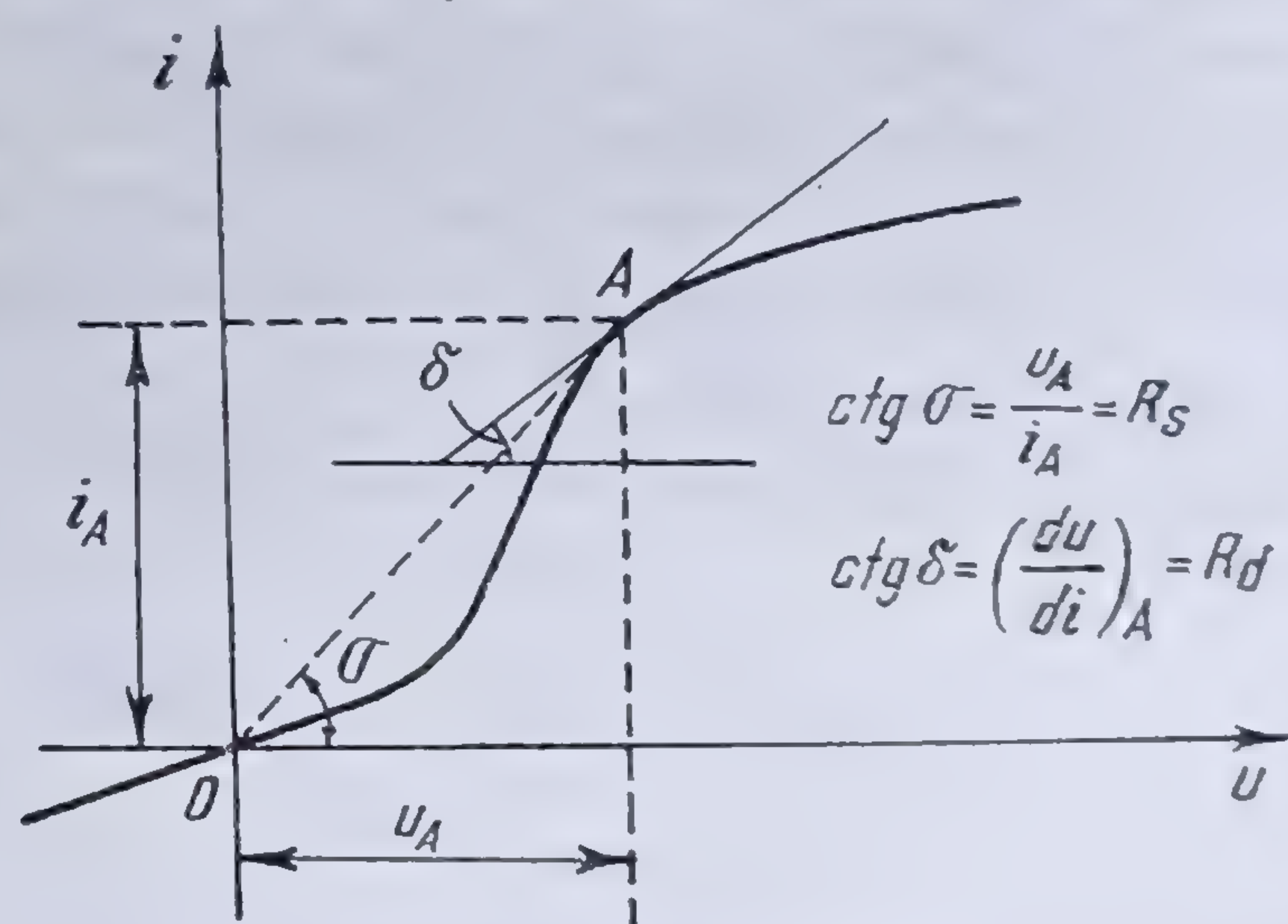


Fig. 11.5. Caracteristica volt-ampere a unei rezistențe neliniare.



Rezistențele statică și dinamică ale unei rezistențe neliniare sînt variabile de-a lungul caracteristicii corespunzătoare și diferite între ele,  $R_s \neq R_d$ ; dacă  $R_s = R_d$ , rezistența este liniară, cel puțin pe porțiunea de caracteristică pentru care această egalitate este satisfăcută. Trebuie observat de asemenea, că rezistența statică e întotdeauna pozitivă, pe cînd rezistența dinamică poate fi pozitivă sau negativă, aceasta depinzînd de poziția concavității caracteristicii față de origine.

Un exemplu de rezistențe neliniare îl constituie redresoarele de orice fel.

b) Caracteristicile inductanțelor neliniare se pot reprezenta de asemenea grafic. Astfel, curbele de magnetizare dau caracteristica *weber-amper* a acestor mărimi. Ținînd seama de relația care definește fluxul în funcție de curent\*

$$Li = N\varphi = \Phi,$$

se poate defini și în acest caz o inductanță statică și una dinamică, însă acestea nu au o utilitate practică.

Ca exemplu de elemente de circuit prezentînd inductanțe neliniare, pot fi date bobinele cu miez de fier cu caracteristică saturată, în categoria cărora intră transformatoarele electrice.

c) Utilizarea capacităților neliniare în circuitele electrice este foarte puțin uzitată; reprezentarea grafică a caracteristicii unei asemenea capacități este în orice caz posibilă, deși obținerea ei este mai dificilă în cazurile practice.

În probleme în care apar parametri neliniari ai unui circuit electric, principiul suprapunerii efectelor nu poate fi aplicat decît în cazuri cu totul particulare.

**11.1.2.4. Circuite electrice a căror parametri variază în același timp cu tensiunea sau cu curentul și cu timpul.** Parametrii unui circuit,  $R$ ,  $L$  sau  $C$ , care variază cu curentul care le străbat sau cu tensiunea la bornele lor și simultan și cu timpul se numesc *parametri neliniari variabili în timp*.

Caracteristica de funcționare a acestor elemente este formată dintr-o familie de curbe trecînd prin origine, fiecare curbă reprezentînd caracteristica neliniară a parametrului considerat pentru o anumită valoare a timpului (fig. 11.6); aceste caracteristici pot fi reprezentate și prin suprafețe în spațiu în

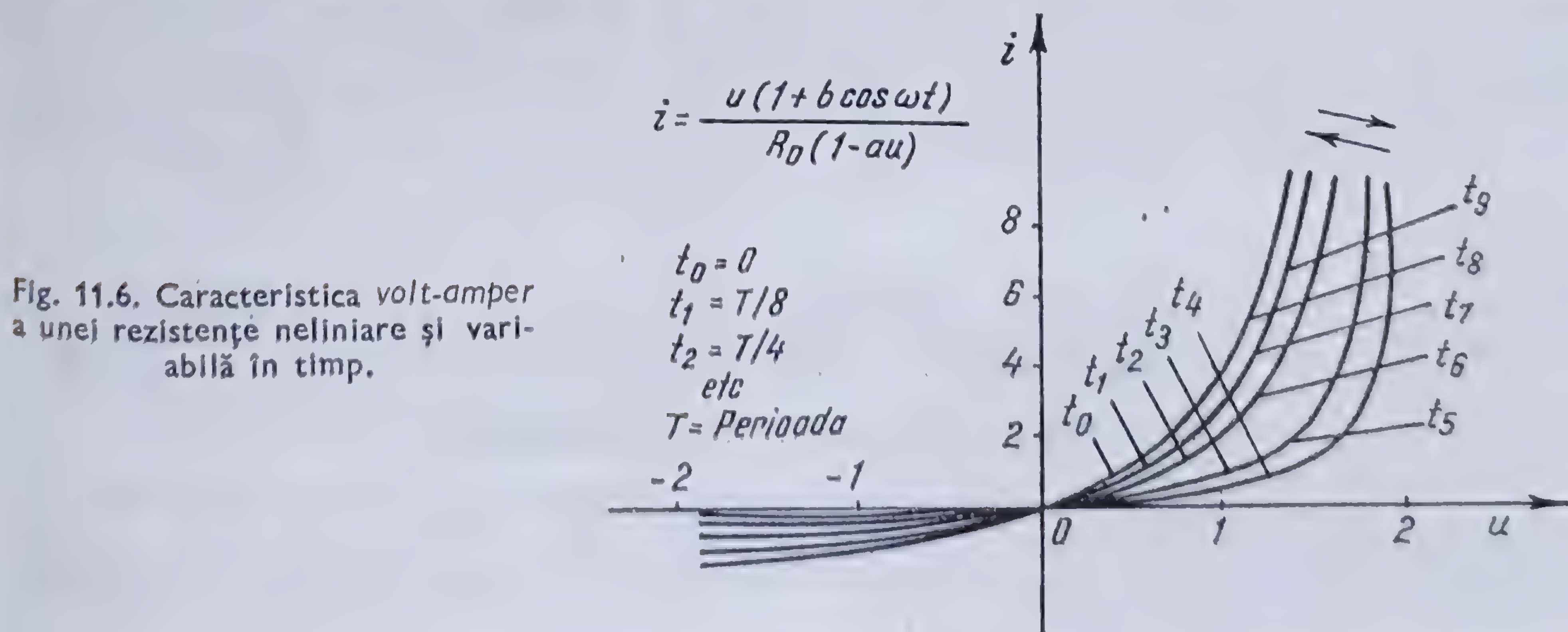


Fig. 11.6. Caracteristica volt-amper a unei rezistențe neliniare și variabilă în timp.

\* Vezi (3.120).



raport cu ambele variabile (fig. 11.7). În figurile indicate sînt redată aceste caracteristici pentru o rezistență neliniară variabilă în timp care poate fi reprezentată prin ecuația

$$R = \frac{R_0 (1 - au)}{1 + b \cos \omega t}$$

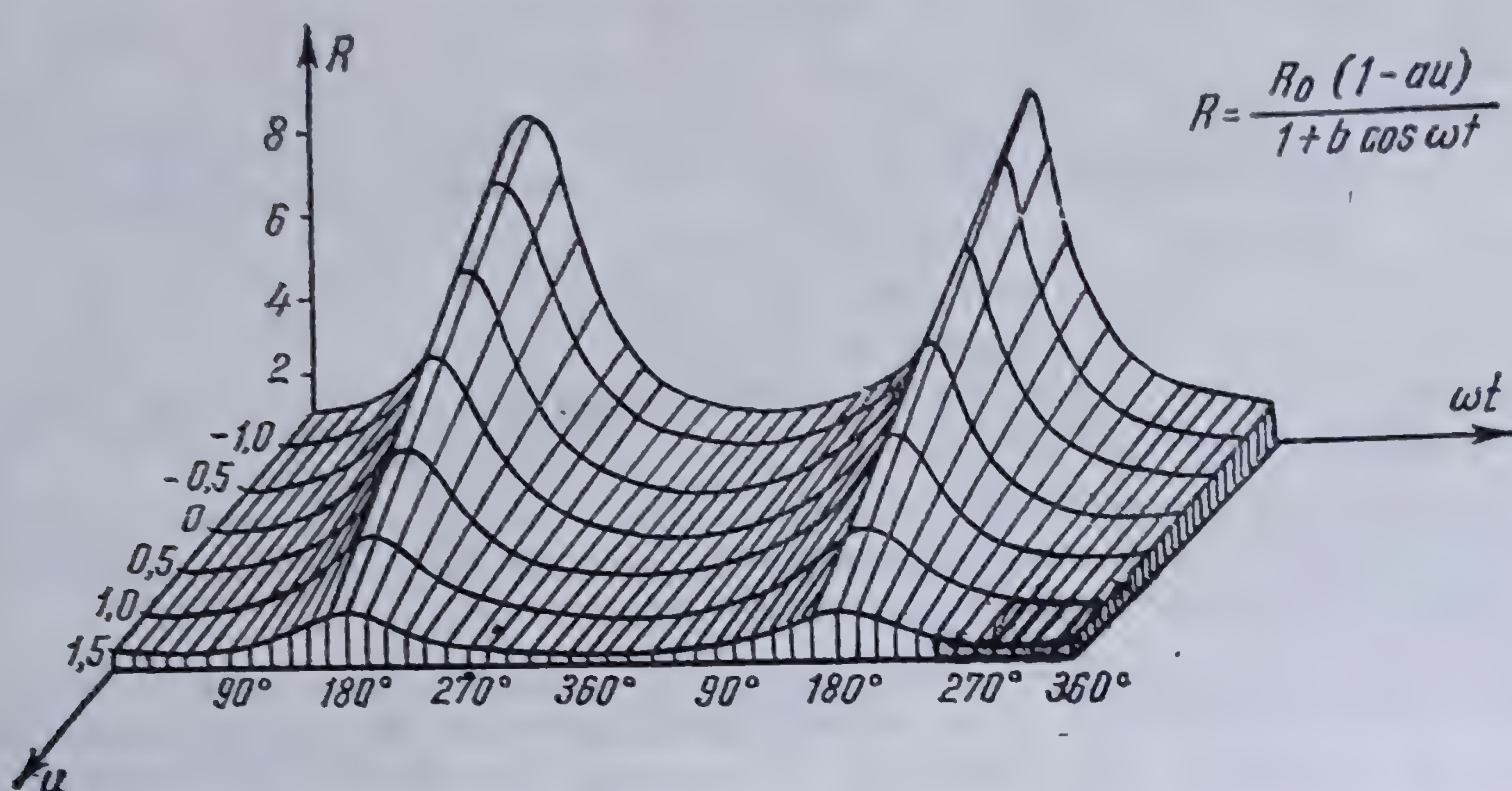


Fig. 11.7. Caracteristica spațială a unei rezistențe neliniare și variabilă în timp.

în care  $R_0$ ,  $a$ ,  $b$ , și  $\omega$  sînt constante. Caracteristica *volt-ampere* corespunzătoare este

$$i = \frac{u}{R} = \frac{u (1 + b \cos \omega t)}{R_0 (1 - au)}$$

Analog, se pot găsi caracteristicile și pentru ceilalți parametri ai unui circuit electric, inductanțe sau capacități.

Pentru circuitele conținînd asemenea parametri, principiul superpoziției nu se poate aplica. Soluția exactă a acestor probleme este în general imposibil de obținut; se obțin soluții aproximative ale acestor probleme prin reducerea circuitului la unul cu parametrii variînd numai în funcție de timp, prin metode grafice de aproximare sau prin modelarea pe calculatoare electronice analoage.

În tabloul 11.1 a fost rezumată discuția precedentă raportată la rezistențe.

## 11.2. METODE GENERALE DE CALCUL ALE SISTEMELOR NELINIARE ÎN CURENT ALTERNATIV


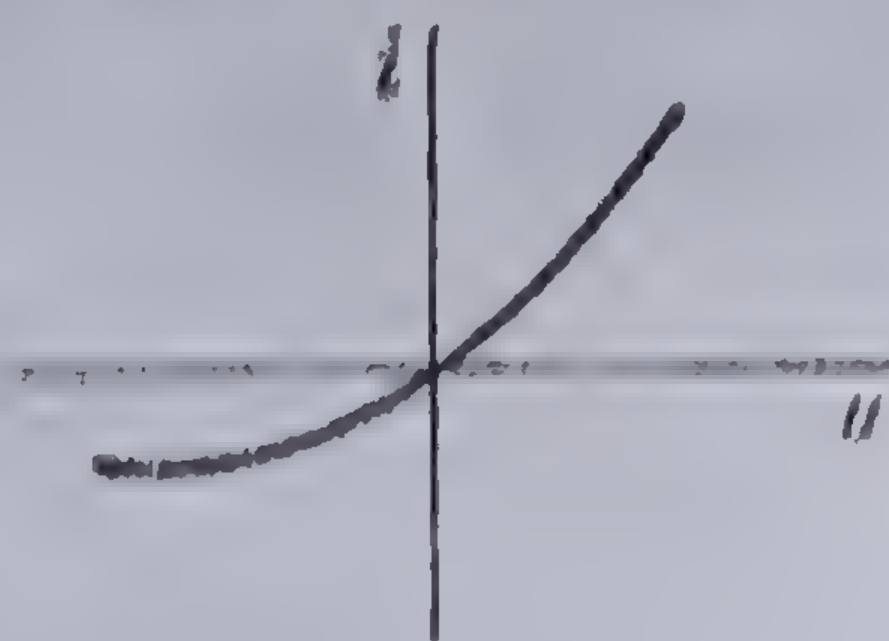
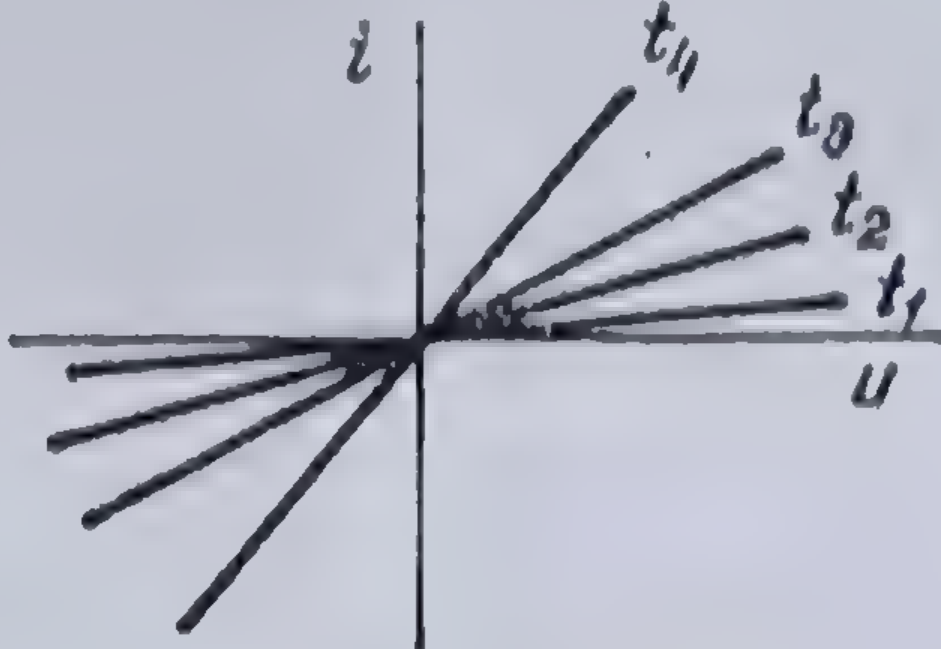
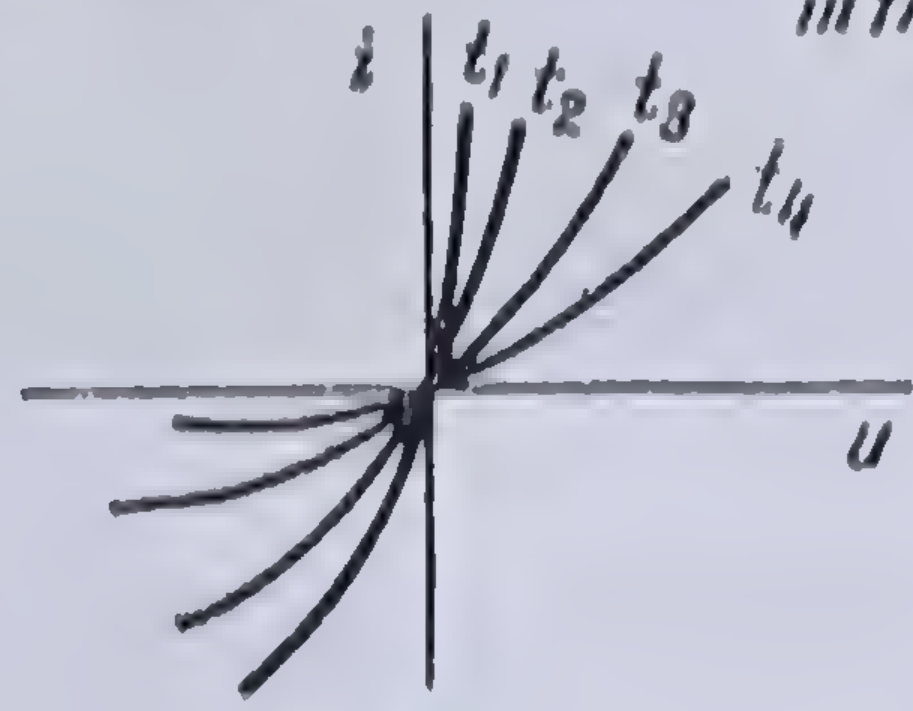
### 11.2.1. METODE DE CALCUL ÎN REGIM PERMANENT

11.2.1.1. **Generalități.** Rezolvarea problemelor de circuite electrice cu elemente neliniare funcționînd în regim permanent se face, ca și în curent continuu\* prin metode care variază de la caz la caz. Reguli generale nu pot fi

\* Vezi 2.5.



Tabloul 11.1

	Elemente cu caracteristică liniară	Elemente cu caracteristică neliniară
Independente de timp	<p>a - Rezistență constantă</p>  <p><math>\frac{u}{i} = R = \text{const}</math></p> <p>Analogs. <math>L = \text{const}</math> <math>S = \text{const}</math></p> <p>Teorema suprapunerii efectelor se aplică Ecuații diferențiale liniare cu parametrii R, L, S, constanți Soluția exactă se obține relativ ușor</p>	<p>c - Rezistență neliniară</p>  <p><math>\frac{u}{i} = R(u) \text{ sau } R(i)</math></p> <p>Analogs. inductanța = <math>L(u) \text{ sau } L(i)</math> elastanța = <math>S(u) \text{ sau } S(i)</math></p> <p>Teorema suprapunerii efectelor <u>nu</u> se aplică Ecuații diferențiale neliniare cu parametrii R, L, S, funcții de tensiune sau curent. Cu excepția unor cazuri particulare, nu este posibilă decât o soluție aproximativă</p>
Variind cu timpul	<p>b - Rezistență variabilă în timp</p>  <p><math>\frac{u}{i} = R(t)</math></p> <p>Analogs. inductanța = <math>L(t)</math> elastanța = <math>S(t)</math></p> <p>Teorema suprapunerii efectelor se aplică. Ecuații diferențiale liniare cu parametrii R, L, S, funcții de timp. Soluția exactă posibilă obținută cu dificultate.</p>	<p>d - Rezistență neliniară variabilă în timp</p>  <p><math>\frac{u}{i} = R(t, u) \text{ sau } (t, i)</math></p> <p>Analogs. inductanța = <math>L(t, u) \text{ sau } L(t, i)</math> elastanța = <math>S(t, u) \text{ sau } S(t, i)</math></p> <p>Teorema suprapunerii efectelor <u>nu</u> se aplică Ecuații diferențiale neliniare cu parametrii R, L, S, funcții de timp și curent sau tensiune Soluția obținută cu dificultate prin aducerea la cazurile a, b, c.</p>

stabilite ca pentru circuitele liniare. Aplicarea celor două teoreme ale lui KIRCHHOFF sub forma

$$\sum i = 0$$

pentru nodurile rețelei și

$$\sum Zi + \sum u = \sum 0$$



pentru bucelele rețelei, în care se reprezintă tensiunea la bornele elementului neliniar — dată de caracteristica volt-ampere corespunzătoare — conduc întotdeauna la găsirea metodei de rezolvare a circuitului respectiv.

În cazul când funcția care reprezintă caracteristica volt-ampere este simplă și circuitul electric este de asemenea simplu, problema se poate rezolva ușor. Astfel, în cazul unui circuit electric format dintr-o simplă rezistență electrică variabilă în timp, de forma

$$R_t = R_0 - R_m \cos t,$$

în care  $R_0$  și  $R_m$  sînt constante, alimentate de o forță electromotoare constantă, valoarea curentului ce se stabilește în circuit este

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{R_0 - R_m \cos t} = \frac{E}{R_0} \left[ 1 + \frac{R_m}{R_0} \cos t + \frac{R_m^2}{R_0^2} \cos^2 t + \dots \right] = \\ &= I_0 + I_1 \cos t + I_2 \cos 2t + I_3 \cos 3t + \dots \end{aligned} \quad (11.1)$$

deoarece

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t,$$

$$\cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t,$$

$$\cos^{2n-1} t = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{2n-1} C_{2n-1}^k \cos (2n-2k-1)t,$$

$$\cos^{2n} t = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cos 2(n-k)t.$$

Metodele de rezolvare ale circuitelor electrice neliniare în regim permanent, în curent alternativ, pot fi grupate în două mari categorii: metode grafice și metode analitice.

**11.2.1.2. Metode grafice.** Ca și în cazul problemelor de curent continuu\*, metoda constă în a găsi forma curentului electric ce străbate circuitul printr-o construcție grafică realizată punct cu punct (fig. 11.8).

În cazul când circuitul este mai complicat, se determină în prealabil caracteristica volt-ampere rezultantă a circuitului după care se construiește diagrama curentului în raport cu această caracteristică printr-un procedeu analog. În

\* Vezi 2.5.4.



figura 11.9 este dată această operație pentru un circuit format dintr-o supapă electronică (o diodă) care funcționează în serie cu o rezistență liniară, fiind alimentată de o sursă de tensiune alternativă sinusoidală (fig. 11.10).

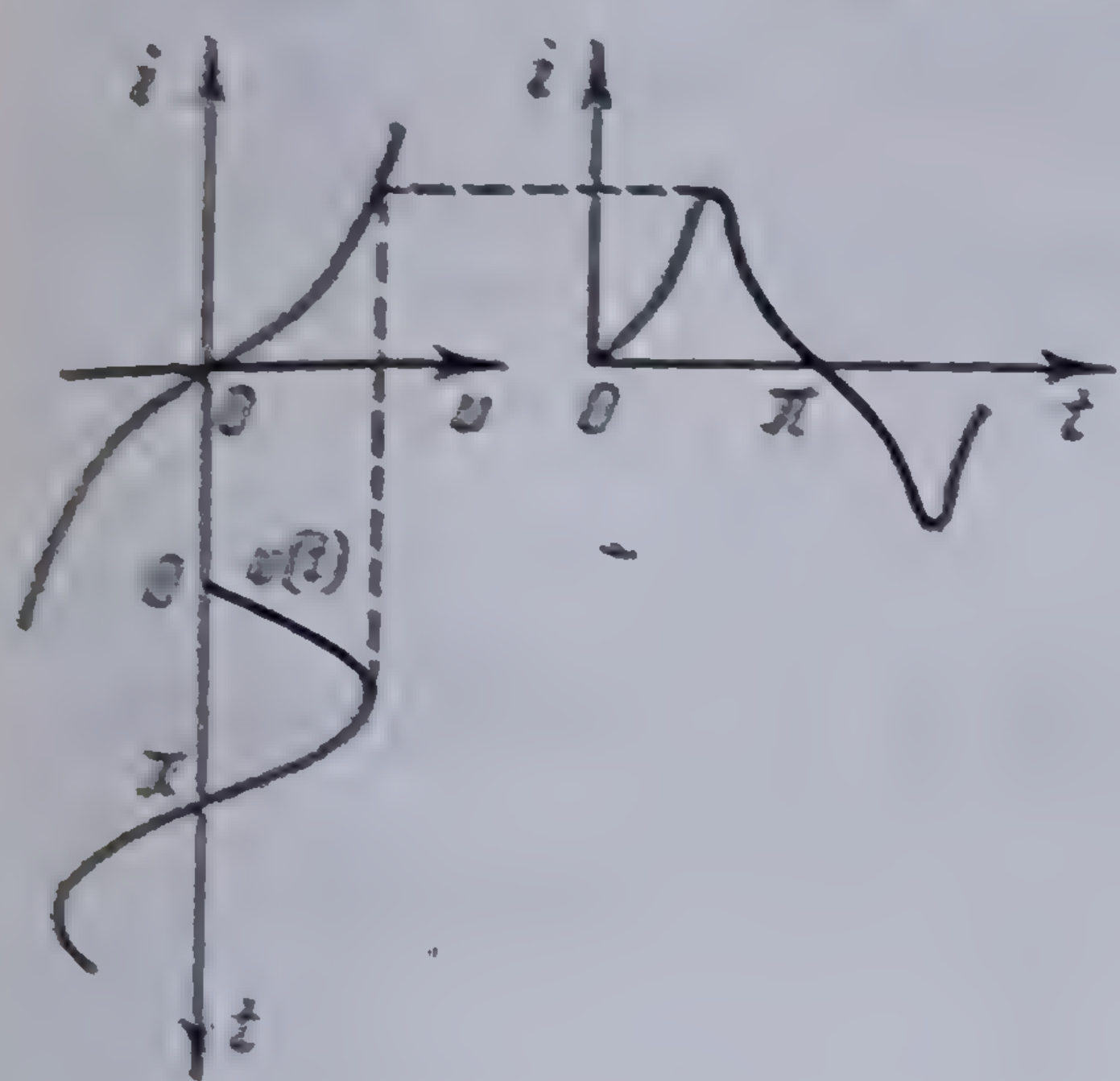


Fig. 11.8. Determinarea curbei de curent într-un element neliniar.

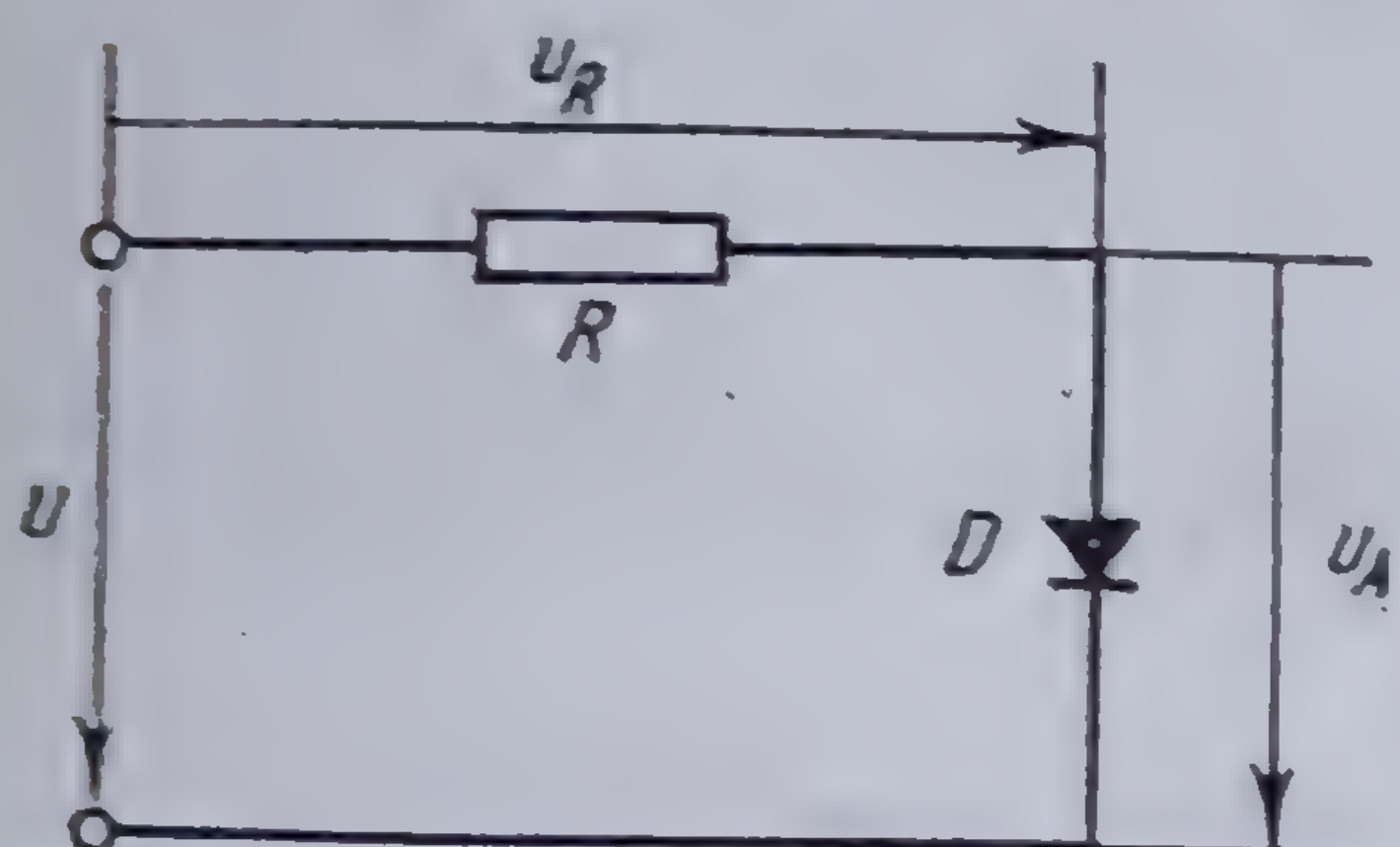


Fig. 11.10. Circuit redresor mono-alternanță.

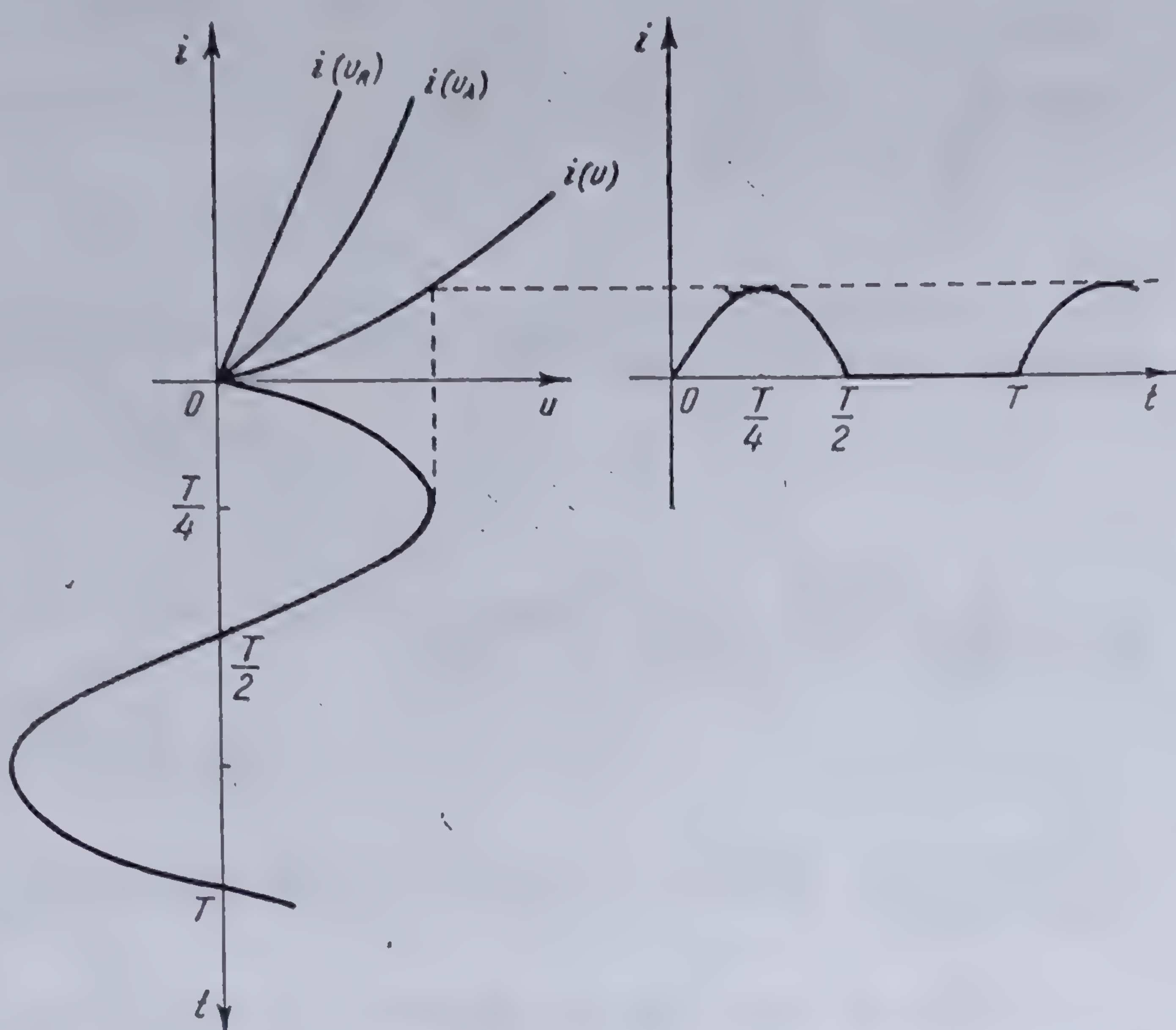


Fig. 11.9. Determinarea curbei de curent absorbit de o diodă.

**11.2.1.3. Metode de aproximare analitice.** Fiind dată caracteristica *volt-amper* a unui element neliniar oarecare, dezvoltînd-o în serie *Taylor* în jurul unei valori  $u_0$  a tensiunii, se obține

$$\begin{aligned} i(u) &= i(u_0) + \frac{u - u_0}{1!} \frac{\partial i}{\partial u} + \frac{(u - u_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 i}{\partial u^2} + \dots = \\ &= a_0 + a_1 (u - u_0) + a_2 (u - u_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (11.2)$$

ceea ce arată că funcția caracteristică volt-amper a elementului respectiv poate fi aproximată, printr-un polinom întreg în  $u$ . Dacă tensiunea de alimentare este alternativă sinusoidală, atunci curentul absorbit de circuit este nesinusoidal\*.

Partea dificilă în aplicarea metodei constă în necesitatea cunoașterii ecuației analitice a curbei caracteristice, ceea ce în general nu se poate obține decît dintr-o prealabilă operație de ajustare a curbei experimentale \*\*. Odată această ecuație cunoscută, expresia curentului se deduce imediat. Astfel, dacă operația de ajustare a condus pentru caracteristica volt-amper la o ecuație de forma

$$i = \left(1 + \frac{u}{a}\right)^{3/2},$$

\* Vezi 9.1.

\*\* Vezi [113].



atunci, expresia curentului din elementul neliniar corespunzător este\*

$$i = 1 + \frac{3}{2a} u + \frac{3}{8a^2} u^2 + \dots;$$

dacă operația de ajustare conduce la o funcție exponențială de forma

$$i = a(\varepsilon^{bu} - 1),$$

prin dezvoltarea în serie a lui  $\varepsilon^{bu}$ , expresia curentului în elementul neliniar respectiv va fi

$$i = a \left( \frac{bu}{1!} + \frac{b^2 u^2}{2!} + \frac{b^3 u^3}{3!} + \dots \right).$$

În ambele cazuri, dacă tensiunea aplicată elementului este periodică alternativă sinusoidală de forma

$$u = U \sqrt{2} \sin \omega t,$$

curentul din element este un curent periodic alternativ *nesinusoidal* de forma (11.1).

**11.2.1.4. Exemplu de aplicație.** Pentru încărcarea unei baterii de acumuloare de la o rețea de curent alternativ, se realizează montajul din figura 11.11, a,

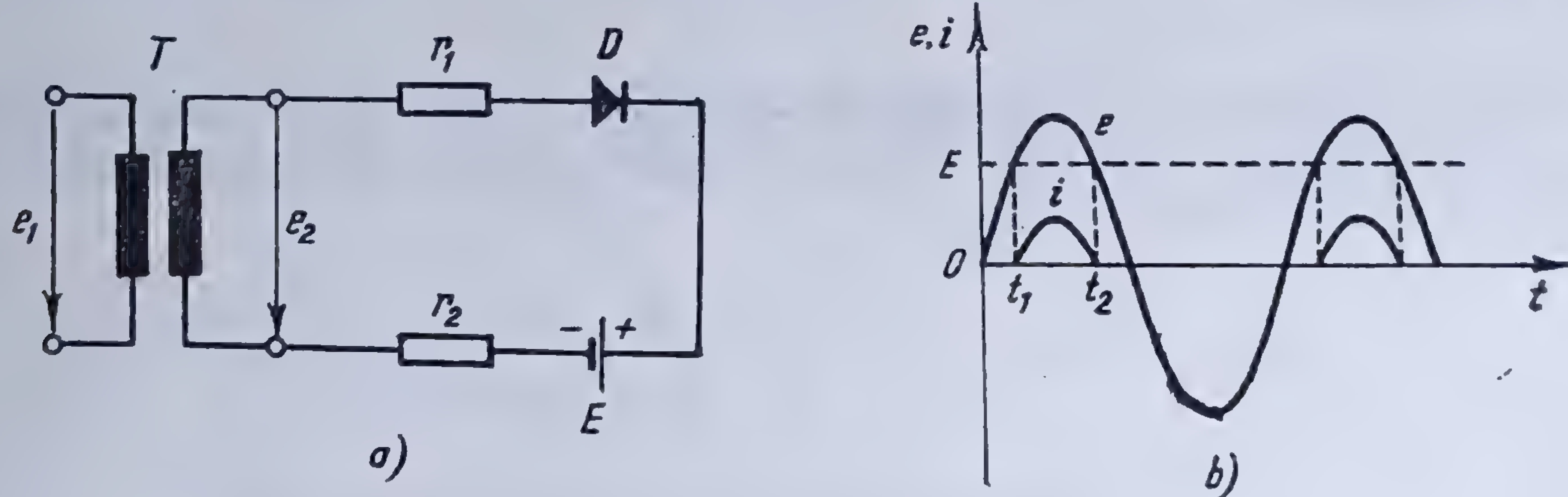


Fig. 11.11. Circuit redresor pentru încărcat acumuloare.  
a) Schema de montaj; b) diagrama tensiunii de alimentare și a curentului

în care  $E$  reprezintă bateria de acumuloare care urmează să fie încărcată și a cărei forță electromotoare este  $E = 7 \text{ V}$ ,  $T$  este transformatorul reductor, avînd tensiunea în secundar  $e_2 = 10 \sin \omega t \text{ V}$ , și  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $D$  — o diodă, presupusă ideală și  $r_1 + r_2 = 1 \Omega$ , rezistența totală a circuitului. Se cere să se determine: 1) Sarcina electrică cu care s-a încărcat bateria de acumuloare după o oră; 2) valoarea maximă a curentului; 3) valoarea maximă a tensiunii pe diodă.

Curentul din circuit va fi dat de legea lui OHM și este

$$i = \frac{e_2 - E}{r_1 + r_2}.$$

\* Vezi [28] p. 9.



Ținând seama de modul de funcționare a diodei\*, curentul va apărea în circuit la timpul  $t_1$  când  $e_2 = E$ , va dura atât timp cât  $e_2 > E$  și va dispărea din circuit la timpul  $t_2$  când din nou  $e_2 = E$ . În aceste condiții, diagrama de funcționare a circuitului este dată în figura 11.11, *b*.

Este ușor de văzut, că într-o perioadă sarcina electrică cu care se încarcă acumulatorul este

$$q_{per} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{e_2 - E}{r_1 + r_2} dt = \frac{1}{\omega(r_1 + r_2)} \left[ 2 E_m \cos \omega t_1 + E \left( 2t_1 - \frac{1}{2} T \right) \right],$$

căci  $t_2 = \frac{1}{2} T - t_1$ ,  $T$  fiind perioada funcției sinusoidale, egală cu 0,02 s.

Timpul  $t_1$  se determină din relația

$$E_m \sin \omega t_1 = E$$

și deci,

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{E}{E_m} = 247 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Cu aceste date,

$$q_{per} = \frac{0,504}{f} \text{ C}$$

$f$  fiind frecvența rețelei de curent alternativ; într-o secundă acumulatorul se va încărca cu o sarcină electrică\*\*

$$q = f q_{per} = 0,504 \text{ C} = 0,504 \text{ As},$$

iar într-o oră

$$Q = 3600 q = 1814,4 \text{ C} = 0,504 \text{ Ah.}$$

Valoarea maximă a curentului este

$$i_m = \frac{E_m - E}{r_1 + r_2} = 3 \text{ A.}$$

Valoarea maximă a tensiunii inversă pe diodă este

$$U_i = E_m - (-E) = 17 \text{ V.}$$

## 11.2.2. METODE DE CALCUL ÎN REGIM TRANZITORIU

**11.2.2.1. Problema generală.** Rezolvarea regimului tranzitoriu de funcționare a unui circuit electric se face găsind soluțiile generale și particulare ale sistemului de ecuații diferențiale care descriu fenomenul corespunzător\*\*.

\* Vezi 11.2.1.2.

\*\* De fapt ar trebui să se scrie

$$q = 0,504 \text{ C/s} = 0,504 \text{ As/s};$$

În această relație  $f$  trebuie privit ca un număr fără dimensiuni.

\*\*\* Vezi 3.6.1.



Dacă sistemul de ecuații diferențiale este liniar, se poate găsi întotdeauna o soluție exactă a problemei fie rezolvând sistemul respectiv prin metode directe, fie utilizând metode speciale de calcul (mărimile complexe, transformata LAPLACE etc.) \*.

În cazul când parametrii circuitului sînt funcție numai de timp, regimurile tranzitorii corespunzătoare pot fi calculate transformînd ecuațiile diferențiale de funcționare ale circuitelor în ecuații integrale a căror rezolvare este posibilă\* ; rezolvarea acestor ecuații integrale devine însă dificilă, dacă se ține seama de fenomenele de ereditate magnetică sau dielectrică.

Dacă parametrii circuitelor electrice sînt neliniari, simpli sau depinzînd de timp, soluția problemei nu se poate găsi, decît făcînd oarecare aproximații și utilizînd metode de calcul grafice sau calculatoare electronice, analogice sau cifrice, pentru fiecare problemă stabilindu-se în prealabil programarea corespunzătoare.

Pentru exemplificare, fie de determinat curentul ce se stabilește într-un circuit electric format dintr-un element prezentînd o rezistență neliniară, legat în serie cu o bobină de inductanță  $L$ , cînd se închide pe o sursă de tensiune constantă (fig. 11.12) ; se presupune, că bobina are inductanța constantă și nu are

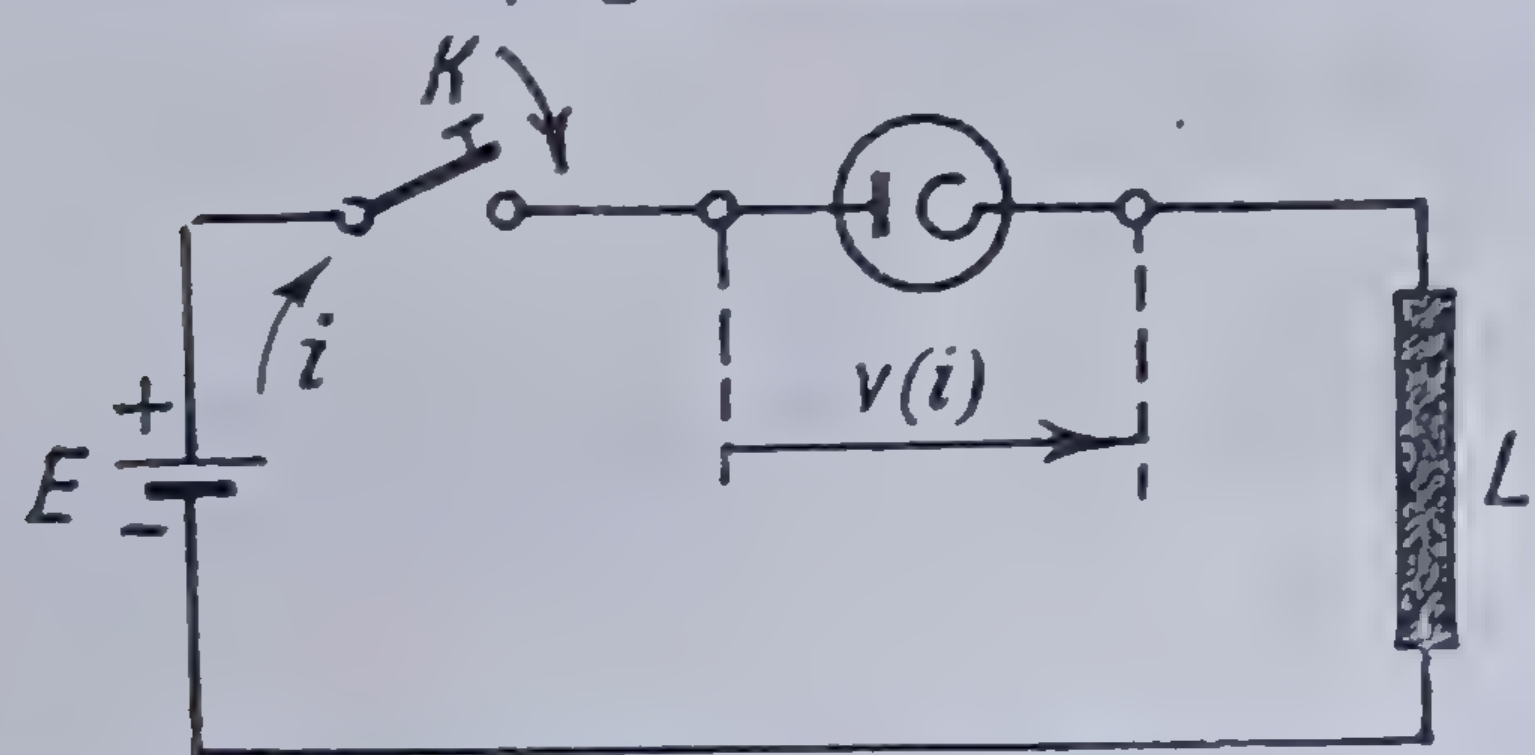


Fig. 11.12. Circuit electric neliniar.

rezistență proprie, ceea ce revine a admite că rezistența acesteia este cuprinsă în valoarea rezistenței neliniare.

Dacă  $v = v(i)$  este caracteristica rezistenței neliniare, atunci ecuația de funcționare a circuitului este

$$L \frac{di}{dt} + v(i) = E, \quad (11.3)$$

care este o ecuație diferențială neliniară, a cărei integrare nu se poate face direct, întrucît funcția  $v(i)$  nu este cunoscută ; în general funcția  $v(i)$  este cunoscută sub forma unei diagrame, caracteristica *volt-amper* a rezistenței neliniare.

Pentru integrarea ecuației (11.3) se folosesc diverse metode ca integrarea grafică, liniarizarea caracteristicii *volt-amper*, aproximarea acestei caracteristici printr-o ecuație analitică etc.

Pentru concretizare, să presupunem că rezistența neliniară din circuitul dat este o diodă cu vid (un kenotron) a cărei caracteristică este dată în figura 11.13.

Se va rezolva această problemă prin toate metodele indicate, căutîndu-se gradul de aproximare obținut.

Metodele de rezolvare ale acestei probleme sînt aplicabile oricărei probleme analoage, oricare ar fi parametrul variabil.

**11.2.2.2. Metoda integrării grafice.** Separînd variabilele în ecuația (11.3) și integrînd se obține

$$\frac{t}{L} = \int_{i_0}^{i_t} \frac{di}{E - v(i)}, \quad (11.4)$$

în care  $i_0$  este curentul la timpul  $t = 0$  și  $i_t$  valoarea curentului la timpul  $t$  oarecare. Calculul acestei integrale se face în modul următor : cunoscînd caracteristica *volt-amper*  $v(i)$  a diodei (fig. 11.14, a) se trasează curba  $E - v(i)$  și se deduce curba inversă  $1/[E - v(i)]$  (fig. 11.14, b, c). Integrala din relația (11.4) reprezintă

\* Vezi 10.4.

\*\* Vezi [164] pag. 14.



Fig. 11.13. Caracteristica volt-ampere a unei diode cu vid.

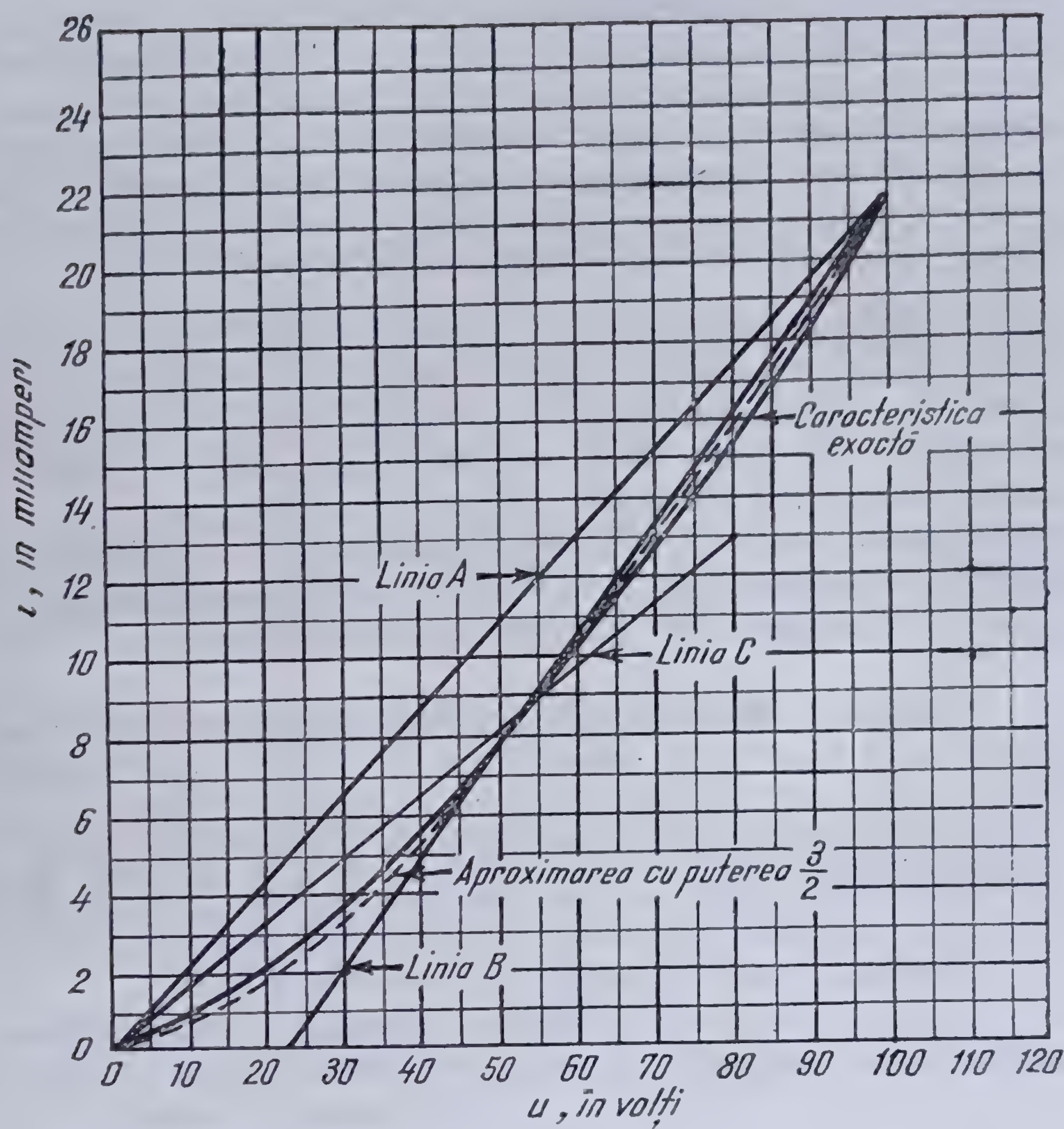
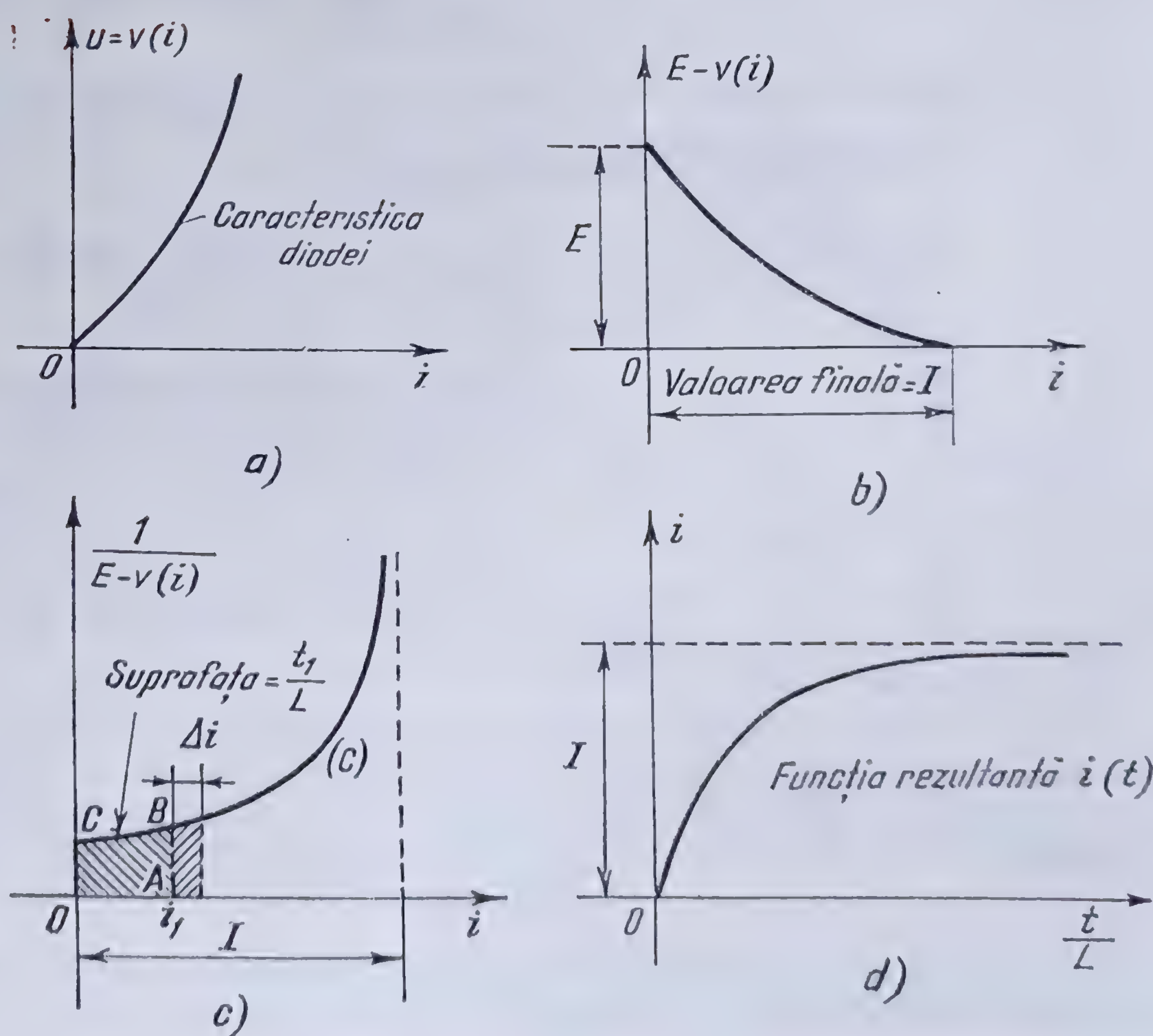


Fig. 11.14. Rezolvarea regimului tranzitoriu prin metoda grafică.





aria suprafeței cuprinsă între curba  $1/[E - v(i)]$ , axa absciselor și ordonatele corespunzătoare pentru  $t = 0$  și  $t = t$  oarecare. Presupunând ca la  $t = 0$  și  $i = 0$ , rezultă că, pentru diverse valori ale lui  $i$ , alese ca limită superioară a integralei, aria suprafeței limitată de ordonata respectivă la dreapta, înmulțite cu  $L$ , dă valoarea corespunzătoare a timpului  $t$ ; astfel, pentru ordonata  $i_1$  (fig. 11.14, c), aria suprafeței  $OABC$  este egală cu  $\frac{t_1}{L}$ . Procedând în același mod

pentru toate punctele curbei ( $C$ ) din figura 11.14, c, se găsește curba integrală căutată (fig. 11.14, d). Singura parte mai dificilă a acestei metode este evaluarea ariei diverselor suprafețe, mai ales atunci când curba corespunzătoare are un traseu neregulat. În acest scop se utilizează hîrtia milimetrică sau planimetrul. O metodă practică constă în desenarea curbei pe o hîrtie calibrată, decuparea ei și cîntărirea diverselor suprafețe cu ajutorul unei balanțe analitice. Constanta de calcul se determină prin cîntărirea unei suprafețe a cărei arie se determină ușor, de exemplu un pătrat cu latura de 1 cm.

**11.2.2.3. Metoda semigrafică.** Această metodă constă în liniarizarea caracteristicii diodei prin înscrierea unei linii poligonale în curba caracteristică (fig. 11.15). Pentru fiecare din aceste coarde, funcția  $v(i)$  este liniară și pentru intervalele corespunzătoare ale lui  $u$  și  $i$  integrala (11.4) se poate efectua analitic. Soluția astfel obținută este valabilă, numai pentru intervalul considerat; pentru a obține relația completă a problemei, se racordează diversele soluții obținute pe intervale, prin condiții comune la limită.

Modul acesta de a rezolva problema constituie metoda *semigrafică*, întrucît se utilizează calculul analitic pentru calculul fenomenului pe porțiunile liniarizate ale caracteristicii.

Fie un interval  $a, b$  (fig. 11.15). Pentru acest interval

$$v(i) = u_p = r_p i_p$$

în care

$$\frac{1}{r_p} = \frac{\Delta i_p}{\Delta u_p}$$

este coeficientul unghiular al coardei considerate. În aceste condiții, integrala (11.4) se poate scrie

$$\frac{\Delta t}{L} = \frac{t_2 - t_1}{L} = \frac{1}{r_p} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{E - u_p} = \frac{1}{r_p} \ln \frac{E - u_1}{E - u_2} . \quad (11.5)$$

Calculul numeric se face pentru fiecare coardă în parte, luînd pentru  $t = 0$ ,  $u = 0$  și  $i = 0$ . Diversele rapoarte  $t/L$ , pot fi calculate cu ajutorul relației de recurență

$$\frac{t_n}{L} = \frac{t_n - t_{n-1}}{L} + \frac{t_{n-1}}{L} ,$$

în care  $t_0 = 0$ .



Rezultatele ce se obțin prin această metodă sînt foarte apropiate de acelea care se obțin prin metoda integrării grafice.

**11.2.2.4. Metoda coardei unice.** În cazul cînd se urmărește o aproximație mai puțin precisă a urmăririi fenomenului în ansamblul său, acesta rămînînd bine determinat pentru un anumit punct de funcționare a sistemului, se înlocuiește caracteristica *volt-amper* a elementului neliniar prin coarda care unește originea cu punctul de funcționare corespunzător (coarda A din figura 11.15). Aceasta revine în a înlocui rezistența neliniară a kenotronului printr-o rezistență constantă a cărei valoare este egală cu inversul coeficientului unghiular, al coardei considerate. Problema se reduce astfel, la o problemă cu elemente liniare.

O aproximație mai bună se poate obține, dacă se înlocuiește caracteristica de funcționare a rezistenței neliniare, printr-o secantă care să se apropie cît mai mult de caracteristica reală dată (dreapta B din figura 11.15). Ecuația acestei drepte fiind

$$u = E_1 + R_1 i,$$

aceasta revine în a înlocui rezistența neliniară printr-o rezistență constantă  $R_1$  și a introduce, în același timp în circuit o forță contraelectromotoare  $E_1$ . Ecuația de funcționare a circuitului devine

$$L \frac{di}{dt} + R_1 i = E - E_1,$$

care este o ecuație diferențială liniară.

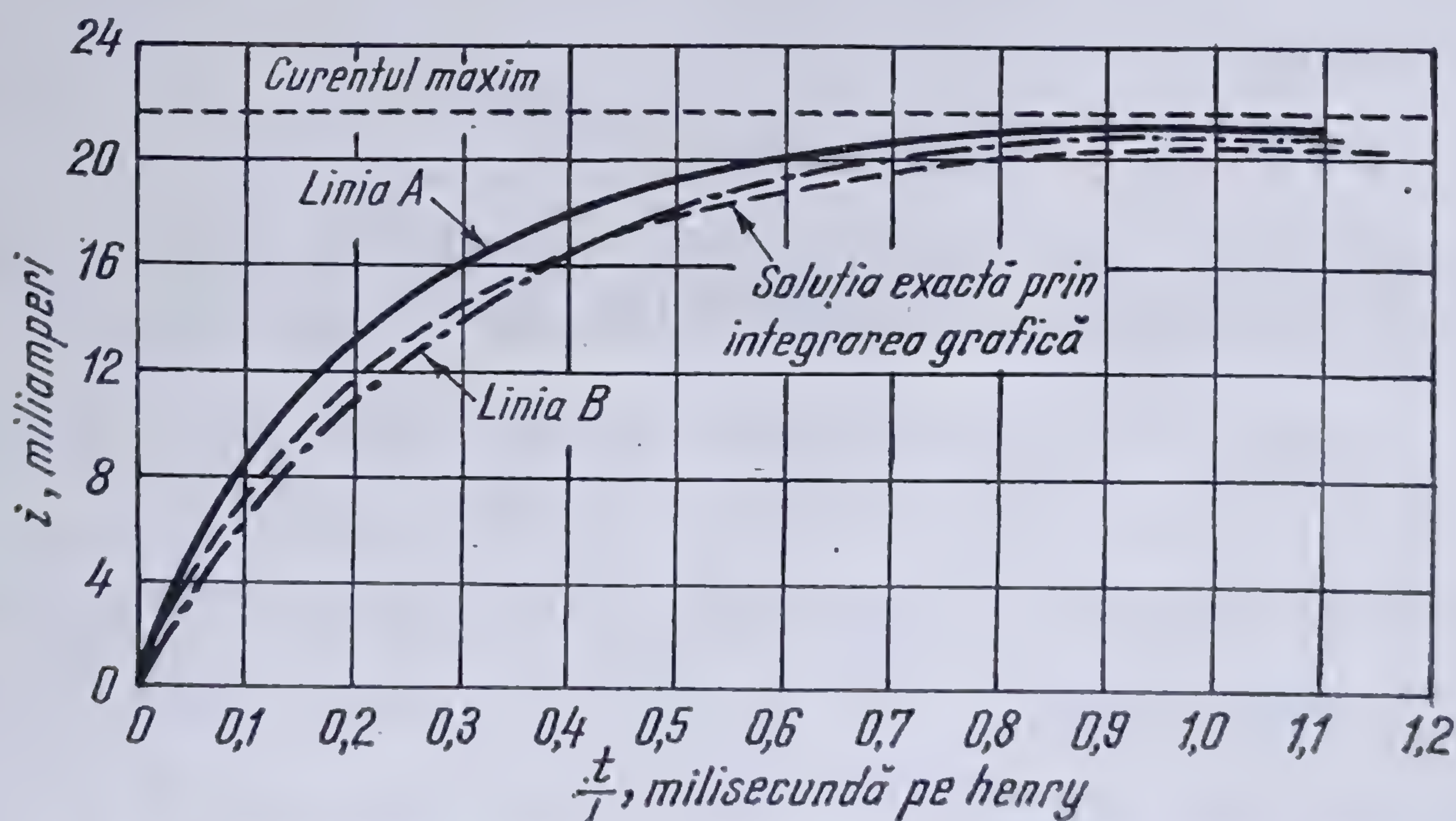


Fig. 11.16. Curbele de curent obținute prin diversele metode de calcul.

Rezultatele ce se obțin cu aceste aproximații sînt foarte apropiate de acelea obținute prin metoda integrării grafice (fig. 11.16).

**11.2.2.5. Metoda curbei analitice.** Sînt cazuri cînd, printr-o anumită metodă de aproximare, se poate construi o funcție de polinoame algebrice care în anu-



mite intervale considerate să convergă către funcția dată obținută experimental\*. Astfel, caracteristica *volt-amper* a unui element neliniar poate lua forma

$$i = a_1 u^{\alpha_1} + a_2 u^{\alpha_2} + \dots + a_n u^{\alpha_n} \quad (11.6)$$

sau

$$u = b_1 i^{\beta_1} + b_2 i^{\beta_2} + \dots + b_n i^{\beta_n}. \quad (11.7)$$

În practică se poate lua, pentru caracteristica *volt-amper*, o expresie de forma

$$i = A u^\alpha \quad (11.8)$$

sau

$$u = B i^\beta. \quad (11.9)$$

Ecuatiile de tipul celor indicate mai sus se pot aplica semiconductorilor a căror rezistență variază în limite foarte largi ca germaniul, siliciul, cuproxidul etc.; pentru tuburile electronice LANGMUIR\*\* a stabilit valoarea coeficientului  $\alpha$  din ecuația (11.8) egală cu 3/2.

Să considerăm cazul când caracteristica *volt-amper* a unui element neliniar este reprezentat printr-o ecuație de tipul (11.8), acesta fiind cazul cel mai frecvent întâlnit în practică. Pentru determinarea constantelor  $A$  și  $\alpha$  se construiește caracteristica elementului neliniar într-un sistem de referință cu coordonate logaritmice și curba obținută se aproximează printr-o dreaptă ai cărei parametri sînt constantele căutate. Într-adevăr, aplicînd logaritmi expresiei (11.8) se obține

$$\log i = \log A + \alpha \log u$$

care este de forma

$$y = M + Nx.$$

Este ușor de văzut, că ordonata la origine îl determină pe  $A$ , iar  $\alpha$  este panta dreptei, față de axa absciselor și e dată de relația

$$\alpha = \frac{\log i - \log A}{\log u} = \frac{\log \frac{i}{A}}{\log u}.$$

Substituind valoarea lui  $i$  din relația (11.8) în ecuația (11.3) se obține:

$$LA\alpha u^{\alpha-1} \frac{du}{dt} = E - u$$

de unde, prin separarea variabilelor și integrarea între limitele 0 și  $u$ , rezultă:

$$\frac{t}{L} = \alpha A \int_0^u \frac{u^{\alpha-1} du}{E - u}. \quad (11.10)$$

\* Vezi [199] pag. 98.

\*\* Vezi [168].



Integrala din această relație se calculează relativ ușor când  $\alpha$  este un număr întreg și pozitiv; astfel, prin efectuarea împărțirii și integrarea polinomului obținut între limitele date, se obține

$$\frac{t}{L} = -\alpha A E^{\alpha-1} \left[ \ln \left( 1 - \frac{u}{E} \right) + \sum_{j=0}^{\alpha-2} \frac{1}{\alpha-j-1} \left( \frac{u}{E} \right)^{\alpha-j-1} \right].$$

În cazul când  $\alpha$  este fracționar, calcularea integralei este mai dificilă, dar nu imposibilă; în cazul particular în care  $\alpha$  este un multiplu *impar* de  $\frac{1}{2}$ , punând

$$\frac{du}{E-u} = \frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{E^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}} - \frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{E^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{2}}}$$

și făcând schimbarea de variabilă

$$E^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}} = x,$$

ecuația (11.10) devine

$$\frac{t}{L} = \alpha A \int_{E^{\frac{1}{2}}-u^{\frac{1}{2}}}^{E^{\frac{1}{2}}+u^{\frac{1}{2}}} \frac{(E^{\frac{1}{2}}-x)^{2(\alpha-1)}}{x} dx,$$

în care, de data aceasta, exponentul  $2(\alpha-1)$  este un număr întreg.

În cazul diodelor  $\alpha = \frac{3}{2}$  se obține

$$\frac{t}{L} = 3A\sqrt{E} \left( \operatorname{cth} \sqrt{\frac{u}{E}} - \sqrt{\frac{u}{E}} \right). \quad (11.11)$$

**OBSERVAȚII.** 1. Considerînd că metoda integrării grafice ar da rezultate exacte, în comparație cu ea metoda curbei analitice dă rezultatele cele mai precise.

2. Pentru o comparare concretă a celor patru metode expuse, în tabloul 11.2 sînt date rezultatele rezolvării problemei propuse, pentru o diodă a cărei caracteristică volt-ampere este dată prin cifre (primele două coloane din tablou); în circuit a fost luat  $E = 100$  V.

3. În metoda semigrafică s-a aplicat relația (11.5).

4. În metoda analitică s-a aplicat relația (11.11), în care s-a luat  $A = 22 \times 10^{-6}$ .

**11.2.2.6. Metoda pas cu pas.** În cazul unor circuite complexe, care conțin în afară de elementele inductive și rezistive și elemente capacitive, problemele de stabilire a regimului tranzitoriu de funcționare a circuitului nu mai pot fi rezolvate prin relații simple — ca în cazurile examinate în paragrafele precedente — problema complicîndu-se foarte mult, chiar dacă numai unul din elementele circuitului este neliniar. În această categorie intră circuitele redresoare, circuitele sistemelor de protecție ale rețelelor electrice etc. Rezolvarea acestor probleme se face prin diverse metode, dintre care cea mai utilizată este metoda *pas cu pas* sau din *aproape în aproape*.



Tabloul 11.2

COMPARAȚIA ÎNTRE REZULTATELE OBTINUTE PRIN DIVERSELE METODE DE CALCUL  
ALE SISTEMELOR NELINIARE

Caracteristica volt-amper a diodel		Metoda integrării grafice $\frac{t}{L}$ ms/II	Metoda semigrafică		Metoda analitică		
			$\frac{t}{L}$ ms/II	Diferență $\mu s/II$	$\frac{t}{L}$ ms/II	Diferență $\mu s/II$	$i$ mA
0	0	0	0		0		0
10	0,9	0,0095	0,00953	+ 0,08	0,00759	-1,86	0,70
20	2,15	0,0242	0,02422	+ 0,02	0,02243	-1,77	1,97
30	3,75	0,0456	0,04559	- 0,01	0,449	-0,70	3,62
40	5,65	0,0751	0,07492	- 0,08	0,746	-0,50	5,75
50	7,80	0,1144	0,11417	- 0,23	0,1148	+0,40	7,78
60	10,20	0,1684	0,16782	- 0,58	0,1705	+2,10	10,23
65	11,50	0,2033					
70	12,90	0,2466	0,24562	- 0,98	0,2469	+0,30	12,88
75	14,25	0,2961					
80	15,68	0,3605	0,35842	- 2,08	0,3615	+1,00	15,74
82,5	16,35	0,3964					
85	17,08	0,4416					
87,5	17,80	0,4945					
90	18,50	0,5575	0,55392	- 3,58	0,5760	+18,50	18,78
92	19,10	0,6250					
94	19,70	0,7126					
96	20,30	0,8376					
98	20,94	1,0776	1,04492	-32,68	1,092	+14,4	21,35
100	21,60	$\infty$	$\infty$		$\infty$		22

- OBSERVAȚII. 1. Diferența s-a făcut în raport cu metoda integrării.  
2. În metoda semigrafică s-a aplicat relația (11.5).  
3. În metoda analitică s-a aplicat relația (11.11) luându-se pentru caracteristica volt-amper ecuația  $i = 22 \times 10^{-6} u^{1,5}$  A.

Fie un circuit electric format dintr-o diodă în serie cu o bobină și cu un condensator (fig. 11.17). Se presupune că rezistența electrică a întregului circuit este cuprinsă în rezistența neliniară a diodei, a cărei caracteristică *volt-amper* este dată în figura 11.14, *a*. Se cere să se determine regimul tranzitoriu de stabilire a curentului electric în circuit, la închiderea întrerupătorului *K*.

Ecuația de funcționare a circuitului este

$$L \frac{di}{dt} = E - u_R - u_C, \quad (11.12)$$

în care s-a notat cu  $u_R$  tensiunea la bornele elementului neliniar, dată de caracteristica *volt-amper* corespunzătoare și cu

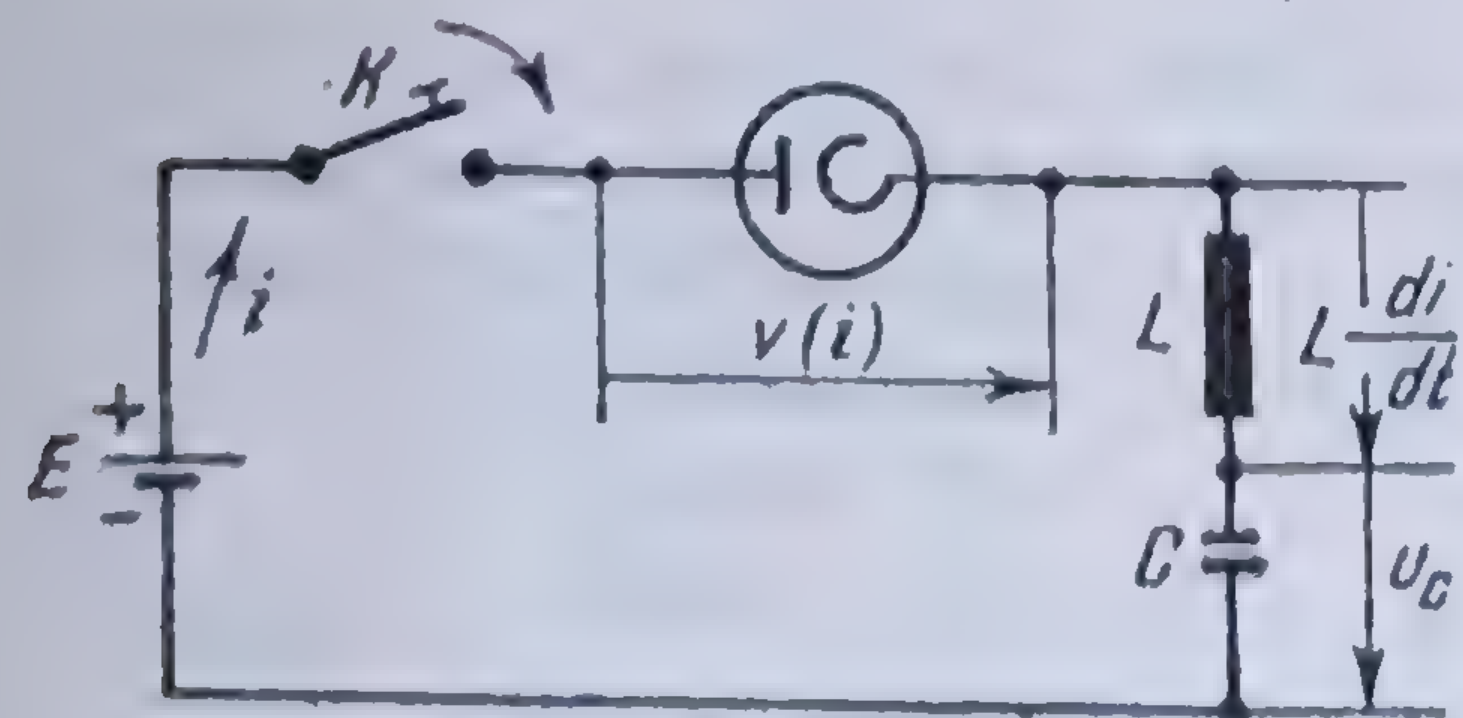


Fig. 11.17. Circuit electric serie, neliniar complet.

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt,$$

tensiunea la bornele condensatorului.  
Separînd variabilele, rezultă

$$di = \frac{1}{L} (E - u_R - u_C) dt.$$



Rezultă dar, că pentru a calcula curentul  $i$ , este necesar să se cunoască valorile tensiunii la bornele elementului neliniar și ale condensatorului. Soluția poate fi obținută presupunându-se că, în intervale de timp  $\Delta t$ , suficient de mici, variația curentului,  $di/dt$ , este constantă în întreg intervalul.

La timpul  $t = 0_+$ , corespunzător momentului imediat după închiderea întrerupătorului  $K$  și care este considerat ca origine de timp, curentul în circuit rămâne egal cu zero, din cauza prezenței inductanței; rezultă dar că și  $u_R = 0$  și  $u_c = 0$ . Din relația (11.12) rezultă

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \frac{E}{L}.$$

Ținând seama de ipoteza făcută, curentul la sfârșitul intervalului de timp  $\Delta t_1$  este

$$i_1 = \left(\frac{di}{dt}\right)_0 \Delta t_1.$$

Cunoscînd valoarea curentului  $i_1$ , din caracteristica *volt-amper* a elementului neliniar se deduce  $u_{R1}$ . Pentru a determina tensiunea la bornele condensatorului la sfârșitul acestui prim interval de timp, se calculează sarcina electrică înmagazinată în acest interval de timp și care este egală cu cea cuprinsă între curba de curent, axa timpurilor și ordonata corespunzătoare timpului  $\Delta t_1$  (fig. 11.18). Pentru primul interval, între 0 și  $\Delta t_1$ , se găsește

$$q_1 = \frac{1}{2} i_1 \Delta t_1$$

și tensiunea la bornele condensatorului este deci

$$u_{c1} = \frac{1}{C} q_1.$$

Pentru al doilea interval de timp  $\Delta t_2$ , variația curentului va fi dată de relația

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_1 = \frac{1}{L} (E - u_{R1} - u_{c1}).$$

În timpul acestui interval, curentul crește de la valoarea  $i_1$ , la valoarea

$$i_2 = i_1 + \Delta i_2,$$

în care

$$\Delta i_2 = \left(\frac{di}{dt}\right)_1 \Delta t_2 = \frac{1}{L} (E - u_{R1} - u_{c1}) \Delta t_2.$$

În același interval de timp, sarcina electrică a condensatorului crește cu

$$\Delta q_2 = \frac{1}{2} (i_1 + i_2) \Delta t_2 = (i_1 + \frac{1}{2} \Delta i_2) \Delta t_2,$$

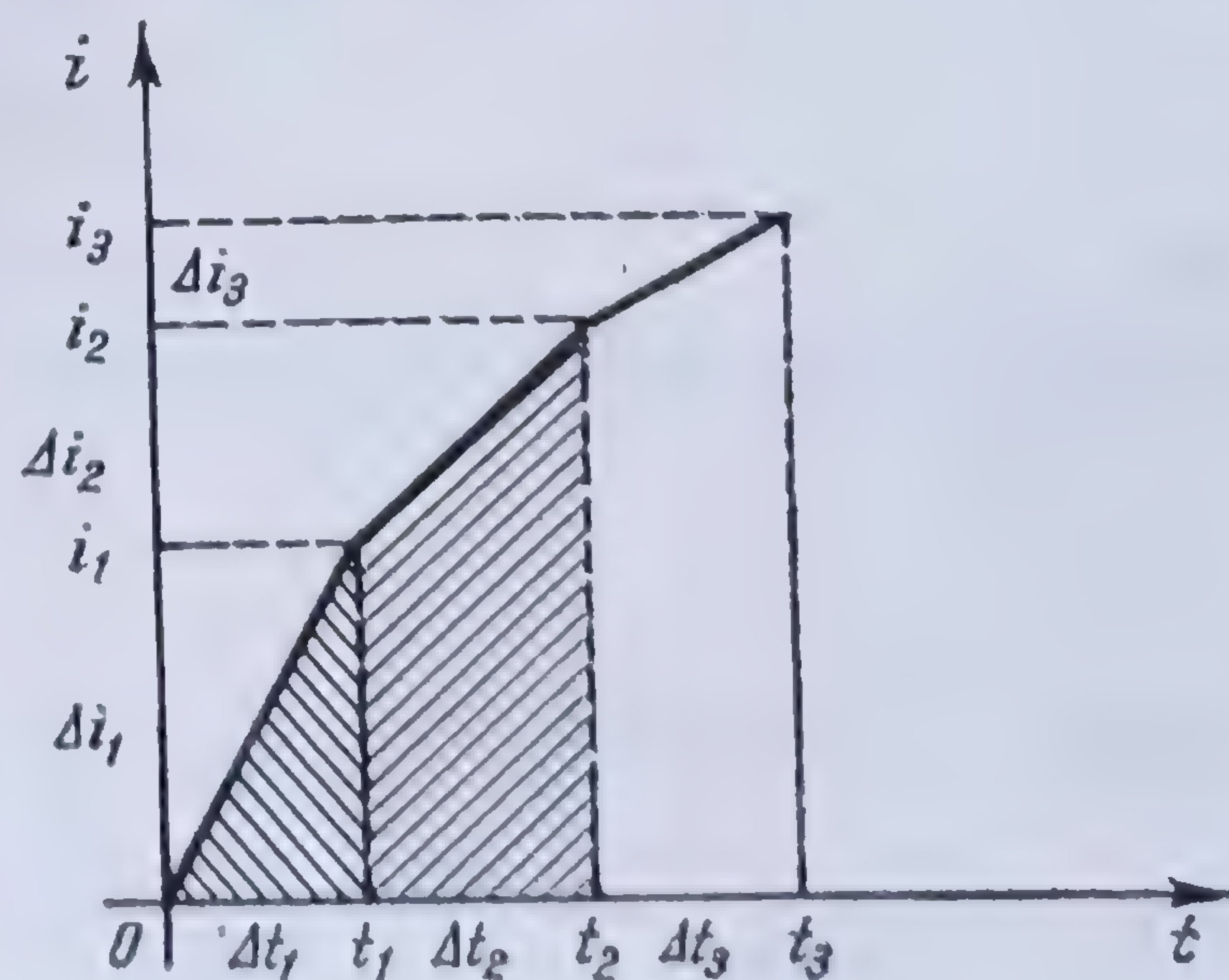


Fig. 11.18. Metoda pas cu pas.



astfel, că sarcina condensatorului la sfârșitul celui de-al doilea interval este

$$q_2 = q_1 + \Delta q_2$$

și tensiunea la bornele condensatorului la timpul  $t_2$  este

$$u_{e2} = \frac{1}{C} q_2.$$

Calculul urmează în același mod pentru orice intervale de timp  $\Delta t$  au fost alese; rezultatul obținut este cu atât mai precis, cu cât intervalele de timp alese sînt mai mici.

**11.2.2.7. Exemplu de aplicație: Punerea bruscă sub tensiune a unui transformator funcționînd în gol.** Elementele neliniare care apar cel mai des în sistemele energetice sînt bobinele de inductanță cu miez de fier, reprezentate prin transformatoarele electrice, numărul acestora fiind destul de mare. Construcția modernă a acestor transformatoare utilizează fierul magnetic în regiunea cotului de saturație și chiar după acesta. În aceste condiții, inductanțele proprii și mutuale ale transformatoarelor nu mai sînt elemente liniare, valoarea lor depinzînd de intensitatea curentului de magnetizare a fierului.

Punerea sub tensiune a unui asemenea circuit constituie un fenomen tranzitoriu foarte complex, cu consecințe importante în practică și care nu se poate rezolva prin mijloace analitice directe.

S-a arătat, că în cazul închiderii unui circuit inductiv liniar, alimentat cu o tensiune electrică alternativă sinusoidală, curentul poate ajunge, la un moment dat, la o valoare maximă egală cu cel mult de două ori valoarea maximă a curentului din regimul permanent\*. În cazul unui circuit neliniar — un circuit care conține o bobină cu miez de fier putînd ajunge la saturație — în regimul tranzitoriu respectiv, pot apărea supraindensități cu mult mai mari.

Ținînd seama că între fluxul  $\varphi$  care străbate bobina cu miez de fier și curentul de excitație  $i$  există relația (3.120), care nu poate fi determinată decît experimental, prin ridicarea curbei de magnetizare a materialului (fig. 11.19), rezultă că

$$L = N \frac{\varphi}{i}$$

este o mărime neliniară și deci ecuația care dă căderea de tensiune în circuit

$$Ri + N \frac{d\varphi}{dt} = U \cos (\omega t + \psi) \quad (11.13)$$

nu se poate integra, deoarece nu se cunoaște expresia analitică a funcției

$$\varphi = f(i).$$

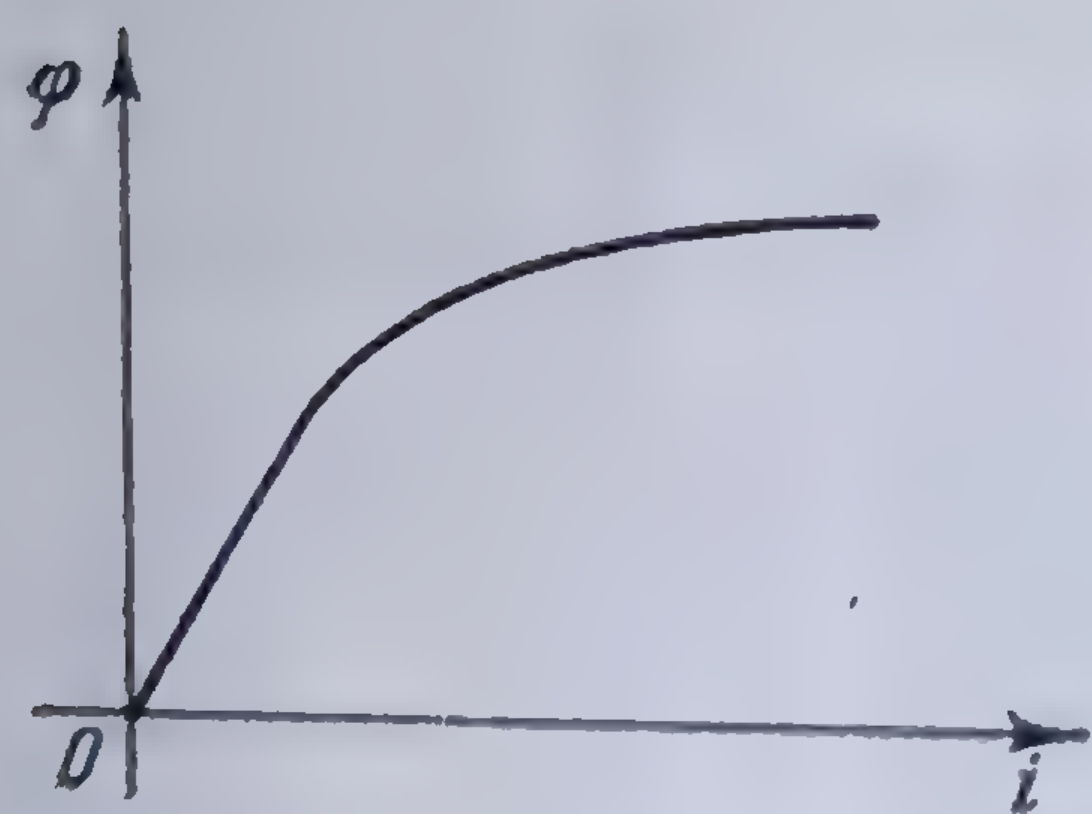


Fig. 11.19. Curbă de magnetizare a fierului.

Un studiu cantitativ și calitativ al fenomenului tranzitoriu care se produce poate fi făcut numai cu oarecare aproximație, numai într-un interval de timp în jurul momentului producerii regimului

\* Vezi 10.2.2.2.



transitoriu ( $t = 0_-$ ) și dacă se neglijează căderea de tensiune în înfășurarea transformatorului, față de căderea de tensiune inductivă corespunzătoare. În aceste condiții, din ecuația (11.13) se deduce

$$d\varphi = \frac{U}{N} \cos (\omega t + \psi) dt,$$

de unde, prin integrare se obține

$$\varphi = \frac{U}{N\omega} \sin (\omega t + \psi) + K$$

în care  $K$  este constanta de integrare.

Pentru determinarea acestei constante de integrare, observăm că la timpul  $t = 0_-$ , înainte de închiderea întrerupătorului, fluxul este nul sau egal cu fluxul remanent  $\Phi_R$  datorit magnetizării fierului; imediat după închiderea întrerupătorului la timpul  $t = 0_+$ , fluxul rămîne tot nul sau egal cu fluxul remanent  $\Phi_R$  întrucît el nu poate varia brusc. În consecință, la  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$  și rezultă

$$K = -\frac{U}{N\omega} \sin \psi + \Phi_R.$$

Expresia fluxului în jurul originii este deci,

$$\varphi = \frac{U}{N\omega} [\sin (\omega t + \psi) - \sin \psi \pm \Phi_R]. \quad (11.14)$$

După un timp suficient de lung, fluxul ia valoarea lui din regimul permanent

$$\varphi_p = \frac{U}{N\omega} \cos (\omega t + \psi); \quad (11.15)$$

termenul

$$-\frac{U}{N\omega} \sin \psi \pm \Phi_R \quad (11.16)$$

se amortizează cu timpul după o lege mai mult sau mai puțin complicată, care nu se poate determina pe cale analitică și care depinde de rezistența  $R$  a circuitului precum și de alte cauze de amortizare\*.

\* Dacă se consideră funcționarea transformatorului numai pe porțiunea dreaptă a caracteristicii de magnetizare, ținînd seama că relația (3.120) este liniară, ecuația (11.13) este de asemenea liniară și are expresia

$$N \frac{R}{L} \varphi + N \frac{d\varphi}{dt} = U \cos (\omega t + \psi)$$



Din relația (11.14) rezultă că, peste fluxul corespunzător regimului permanent din circuit  $\varphi_p$ , a cărei valoare maximă este

$$\Phi_M = \frac{U}{N\omega},$$

se suprapune fluxul aperiodic (11.16), a cărei amplitudine inițială poate varia între zero și  $\pm (\Phi_M + \Phi_R)$ , după momentul în care se face închiderea circuitului.

Curba fluxului apare astfel ca o curbă deformată, a cărei valoare medie e diferită de zero, și care poate să varieze de la  $\Phi_R$  la  $2\Phi_M + \Phi_R$  (fig. 11.20).

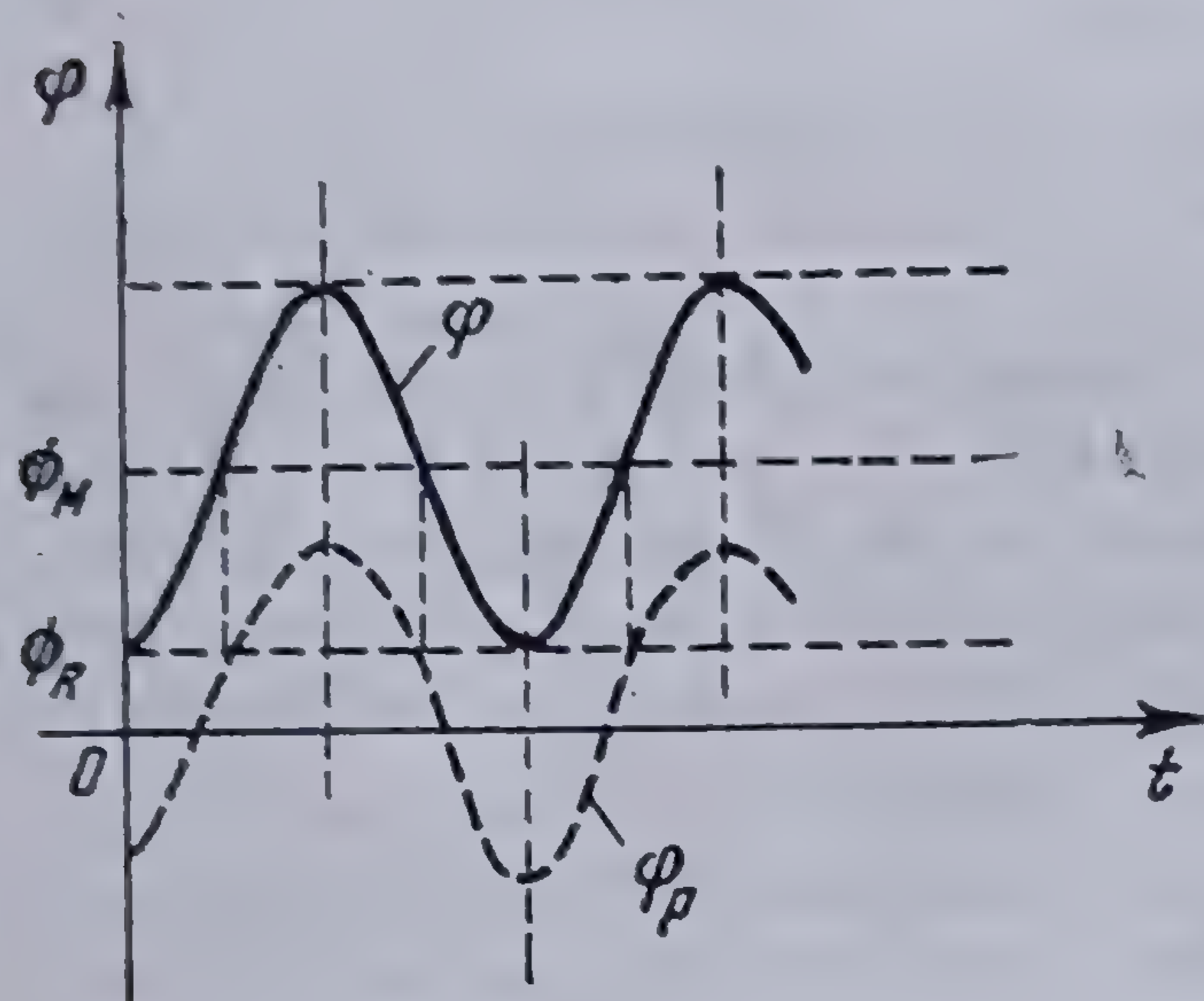


Fig. 11.20. Fluxul rezultat în transformator.

Cunoscînd curba fluxului, precum și curba de magnetizare a fierului, curba curentului de magnetizare care se stabilește în circuit în momentul închiderii acestuia, se determină pe o cale grafică, analoagă cu aceea cu care s-a determinat curentul permanent din circuit, în cazul cînd se ține seama de fenomenul de histerezis din fier\*. În figura 11.21 este arătată forma acestui curent în primele perioade după cuplarea transformatorului în circuit.

**OBSERVAȚIE.** Amplitudinea maximă a curentului de magnetizare depinde de calitatea tolelor miezului de fier. La transformatoarele moderne,

a cărei soluție este

$$\varphi = \Phi_m \left( \cos(\omega t + \psi - \alpha) - \cos(\psi - \alpha) e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

în care

$$\Phi_m = \frac{LU}{N\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{L\omega}{R};$$

pentru  $R = 0$  se obține

$$\Phi_m = \frac{U}{N\omega} \quad \text{și} \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

expresia fluxului fiind în acest caz

$$\varphi = \frac{U}{N\omega} \left[ \sin(\omega t + \psi) - \sin \psi e^{-\frac{R}{L}t} \right].$$

Comparînd această relație cu relația (11.14) se vede că, termenul liber ar trebui să conțină un factor exponențial care să conducă la amortizarea lui, dar care nu poate fi determinat întrucît în cazul general  $L$  este neliniar; experiența confirmă această afirmație.

\* Vezi 9.4.2.1.



se poate obține un curent de magnetizare nominal cît mai redus, folosind tole magnetice de calitate superioară; în acest caz, curba de magnetizare (1) are un cot de saturație foarte pronunțat, ceea ce face, ca la închiderea circuitului, amplitudinea maximă a curentului tranzitoriu să fie mult mai mare decît la vechile transformatoare, construite cu tole magnetice de calitate inferioară (fig. 11.22).

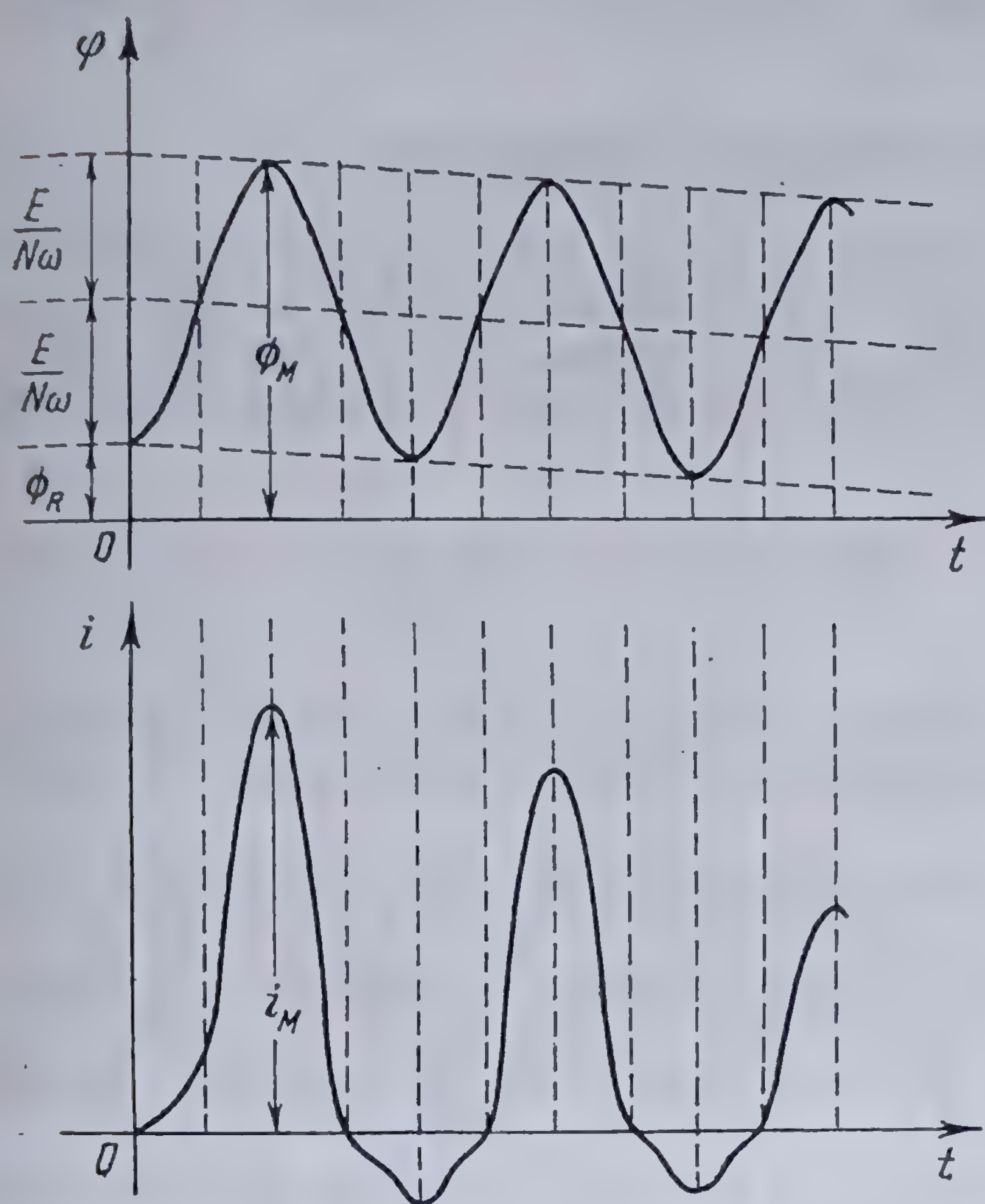


Fig. 11.21. Regimul tranzitoriu al curentului de magnetizare, la punerea în circuit a unui transformator

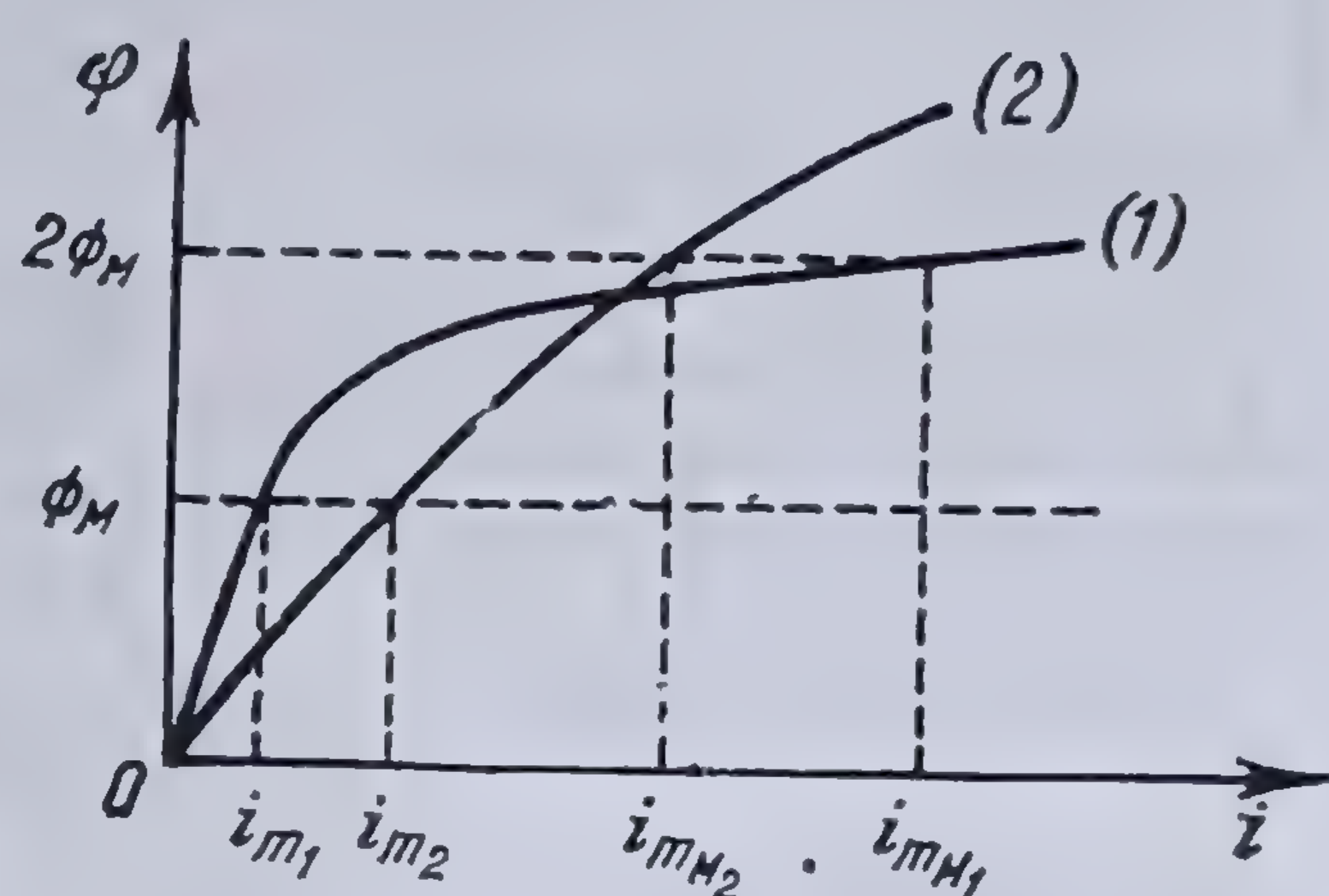


Fig. 11.22. Influența calității tolelor magnetice asupra curentului de magnetizare

### 11.3 FEROREZONANȚA CIRCUITELOR ELECTRICE

#### 11.3.1. GENERALITĂȚI

În rețelele electrice, în care există simultan rezistențe electrice, reprezentate prin rezistența conductoarelor și înfășurărilor mașinilor electrice, inducțanțe, reprezentate prin înfășurările transformatoarelor sau mașinilor rotative și capacități, reprezentate de capacitatea cablurilor sau a liniilor electrice, apar, în anumite condiții, fenomene de supratensiuni sau de supraințensiități cu totul deosebite de acelea examinate pînă aici. Aceste fenomene se datorează în primul rînd faptului, că inductanțele din rețelele electrice, în majoritatea lor, sînt neliniare. Ele sînt cunoscute sub denumirea de *fenomene de ferorezonanță*.

Din cauza caracterului de neliniaritate a inductanțelor care apar în aceste fenomene, și fenomenul de ferorezonanță este un fenomen neliniar. Un calcul precis al acestor fenomene este imposibil de făcut, din cauza fenomenelor conexe ce apar în rețelele electrice, ca deformarea curbelor de curent și de tensiune, disimetrie etc. Se poate totuși face un studiu calitativ suficient pentru a cunoaște anomaliile funcționării unei rețele datorite fenomenelor de ferorezonanță, care, adesea, sînt mult mai periculoase decît acelea datorite



fenomenelor de rezonanță simplă\* ; aceste fenomene se traduc prin supratensiuni sau supracurenți foarte mari, prin producerea de regim deformant în rețea, prin nestabilitatea funcționării rețelei electrice etc.

Studiul fenomenelor de ferorezonanță se face aplicând metodele de calcul, indicate în paragraful 11.2, utilizând în special metodele grafice, acestea fiind mai expeditiv și conducând la rezultate satisfăcătoare din punct de vedere practic.

### 11.3.2. FEROREZONANȚA ÎN CIRCUITELE ELECTRICE SERIE

Fie un circuit electric format prin legarea în serie a unui condensator liniar de capacitate  $C$  și a unei bobine de rezistență liniară  $R$  și de inductanță neliniară  $L$  a cărei valoare variază în funcție de curent (fig. 11.23). Ecuația de funcționare a acestui circuit este

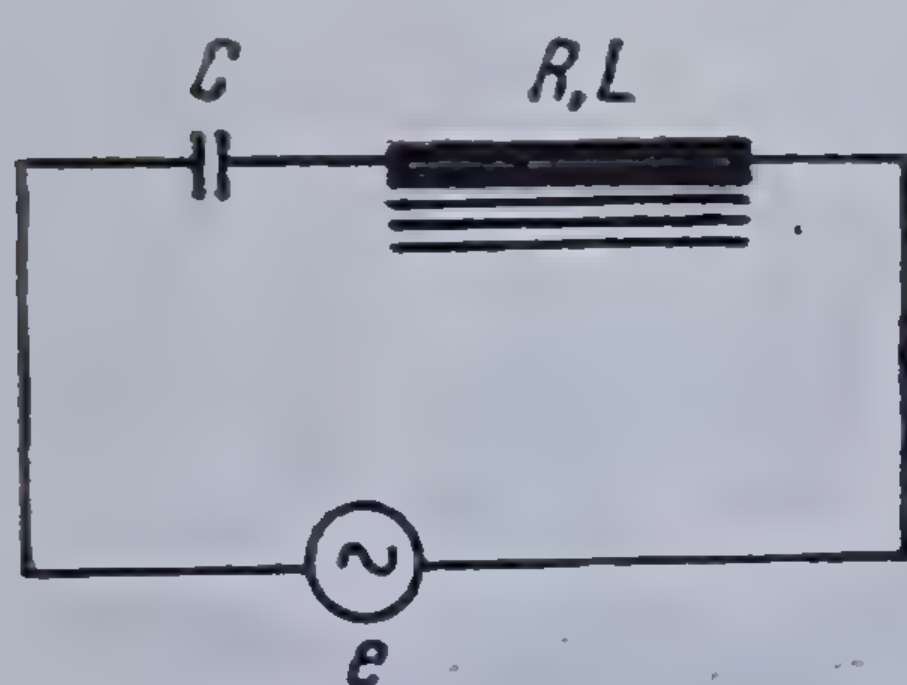


Fig. 11.23. Circuit electric format dintr-o bobină cu inductanță neliniară, legată în serie cu un rezistor și un condensator liniare.

$$e = Ri + \frac{d}{dt}(Li) + \frac{1}{C} i dt. \quad (11.17)$$

Un asemenea circuit corespunde, de exemplu, funcționării unui transformator electric alimentând un cablu subteran.

Luat în toată generalitatea lui, fenomenul este foarte complicat, prin faptul că atât tensiunea, cât și mai ales curentul nu sînt mărimi sinusoidale. Analizarea lui se poate face cu suficientă aproximație, dacă se neglijează armonicile de tensiune și de curent, presupunînd deci că fenomenul se produce într-un regim perfect sinusoidal.

Fie  $U_L = f(I)$  caracteristica *volt-ampere* a bobinei cu miez de fier, care este presupusă a fi trasată la frecvența  $f$  a tensiunii aplicată circuitului.

Ecuația (11.17) poate fi scrisă în valori efective, sub forma

$$E^2 = R^2 I^2 + \left( U_L - \frac{I}{C\omega} \right)^2, \quad (11.18)$$

defazajul curentului față de tensiune fiind dat de relația

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - \frac{I}{C\omega}}{RI}. \quad (11.19)$$

Relațiile (11.18) și (11.19) se deduc din diagrama fazorială de funcționare a circuitului serie și care se construiește în mod obișnuit, considerînd un anumit curent  $I$  căruia îi corespunde pe diagrama *volt-ampere* a elementului neliniar o tensiune la borne bine definită.

Ecuația (11.18) poate fi scrisă sub forma

$$E^2 - R^2 I^2 = \left( U_L - \frac{I}{C\omega} \right)^2 = U^2,$$

\* Vezi 4.3.8.



de unde, rezultă că ea poate fi descompusă în sistemul

$$U = \left| U_L - \frac{I}{C\omega} \right| \quad (11.20)$$

$$U = \sqrt{E^2 - R^2 I^2}. \quad (11.21)$$

Regimul de funcționare al sistemului corespunde punctelor de intersecție a celor două curbe, reprezentate de aceste ecuații.

Pentru aceasta se construiește o diagramă luându-se tensiunea  $U$ , ca axă a ordonatelor, și curentul  $I$ , ca axă a absciselor, în care se trasează curbele (11.20) și (11.21). Curba (11.20) se obține trasând, în valori absolute, diferențele

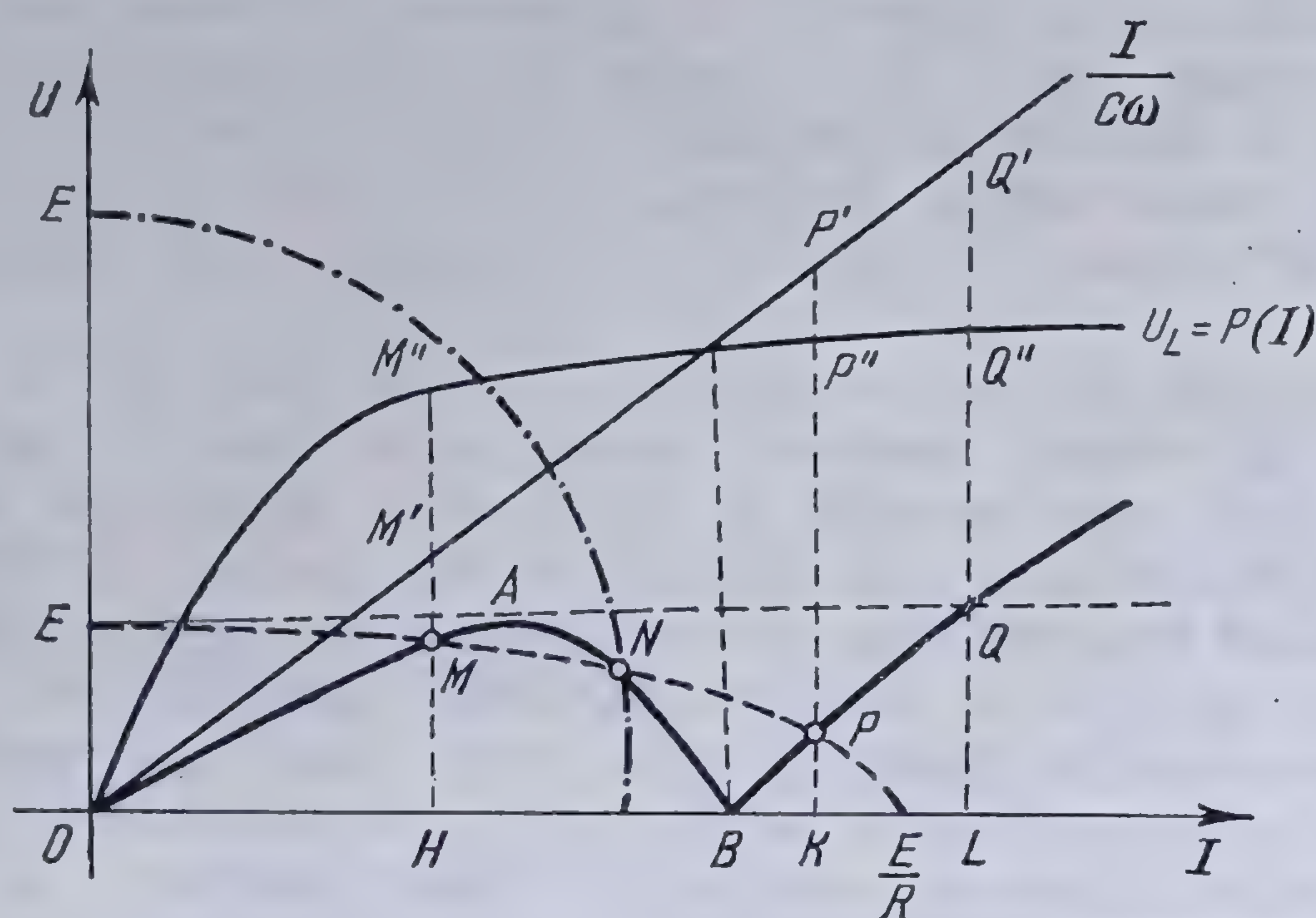


Fig. 11.24. Studiul grafic al ferorezonanței într-un circuit electric serie.

dintre caracteristica *volt-ampere* a inductanței și dreapta  $(I/C\omega)$ . Această curbă, pornind din origine, trece printr-un maxim, corespunzând cotului de saturație a caracteristicii  $U_L$ , trece apoi din nou prin zero în punctul B, corespunzând intersecției dintre dreapta  $(I/C\omega)$  și caracteristica  $U_L$  și curba crește apoi din nou către infinit (fig. 11.24).

Ecuația (11.21) reprezintă un arc de elipsă cu centrul în origine și vîrfurile pe axe, și care intersectează axa ordonatelor în punctul de ordonată maximă  $E$  și axa absciselor în punctul de abscisă maximă  $E/R$ .

În general, arcul de elipsă intersectează curba (11.20) în trei puncte distincte  $M$ ,  $N$  și  $P$ . Punctul  $M$ , cuprins în partea ascendentă  $OA$  a curbei (11.20) corespunde unui punct de funcționare stabilă și care se numește punctul de funcționare în regim de curent redus.

În adevăr, pentru o creștere a sarcinii (curentul  $I$ ) corespunde imediat și o creștere a tensiunii și deci echilibrul se restabilește.

Pe toată această parte a curbei (11.20), tensiunea la bornele bobinei de  $U_L$  este mai mare decât tensiunea la bornele condensatorului  $I/C\omega$ ; rezultă  $\text{tg}\varphi > 0$  și deci curentul este în *urma* tensiunii.

Punctul de funcționare  $N$  corespunde unui regim în general nestabil, căci pe toată porțiunea  $AB$  a curbei (11.20), la o creștere a sarcinii, corespunde o scădere a tensiunii; sistemul se comportă ca o impedanță negativă.



Al treilea punct de funcționare  $P$ , care reprezintă un nou regim de funcționare stabilă, se numește punctul de funcționare în regim de curent intens. Pentru acest punct  $U_L < \frac{I}{C\omega}$ ; rezultă  $\operatorname{tg}\varphi < 0$  și deci curentul este înaintea tensiunii.

Fie un asemenea circuit cărui  $i$  se aplică la borne o tensiune foarte mică, care este mărită progresiv. Arcul de elipsă (11.21), nul atunci când tensiunea aplicată este nulă, crește progresiv rămânând asemenea cu el însuși. Punctul de funcționare  $M$  pornește din origine și se deplasează pe curba (11.20) descriind ramura  $OA$ , pînă în punctul  $A$  ce corespunde unei tensiuni aplicată  $E$  care face ca arcul de elipsă să fie tangent curbei (11.20). Dacă se crește acum tensiunea cu o valoare oricît de mică, astfel încît arcul de elipsă să depășească maximum  $A$  al curbei (11.20), și dacă se presupune că rezistența  $R$  nu este prea mare, punctul de funcționare  $M$  trece de pe ramura  $OA$  pe ramura  $BC$ . Se trece astfel, în mod brusc, de la regimul de funcționare cu curent redus, la regimul de funcționare cu curent intens. Noul regim de funcționare este un regim stabil.

Dacă acum se micșorează tensiunea aplicată, pentru a reveni la regimul de funcționare cu curent redus, aceasta nu mai este posibil, atît timp cît punctul de intersecție al elipsei cu axa  $I$ , de abscisă  $E/R$ , rămîne în dreapta punctului  $B$ .

Pe de altă parte, se vede că pentru o aceeași tensiune  $E$  aplicată circuitului, tensiunea la bornele condensatorului poate avea fie valoarea  $M'H$ , fie valoarea  $P'K$ , după cum punctul de funcționare se găsește în  $M$  sau în  $P$ ; de asemenea, tensiunea la bornele bobinei cu fier poate fi  $M''H$  sau  $P''K$ .

Dacă circuitul funcționează în mod normal în regimul de curent redus, este suficientă o variație de tensiune, datorită unui fenomen tranzitoriu, de exemplu o supratensiune datorită manevrării unui întrerupător, pentru ca punctul de funcționare să treacă din  $M$  în  $P$  și să stabilească astfel, regimul de funcționare în regim intens și care poate dăinui indefinit. În aceste condiții, tensiunea la bornele condensatorului și la bornele bobinei trece brusc de la valorile  $M'H$ , respectiv  $M''H$ , la valorile  $P'K$ , respectiv  $P''K$ ; supratensiunea ce apare poate fi foarte mare și ea poate dura atît timp, cît circuitul nu suferă o modificare importantă.

Acesta este fenomenul de ferorezonanță.

În teoria făcută în cele ce preced au fost neglijate armonicile superioare, precum și pierderile datorite magnetizării fierului. Dacă trecem la cazul real, atunci caracteristica de funcționare a circuitului capătă forma indicată în figura 11.25 cu linie continuă. Din examinarea acestei caracteristici se vede că sistemul

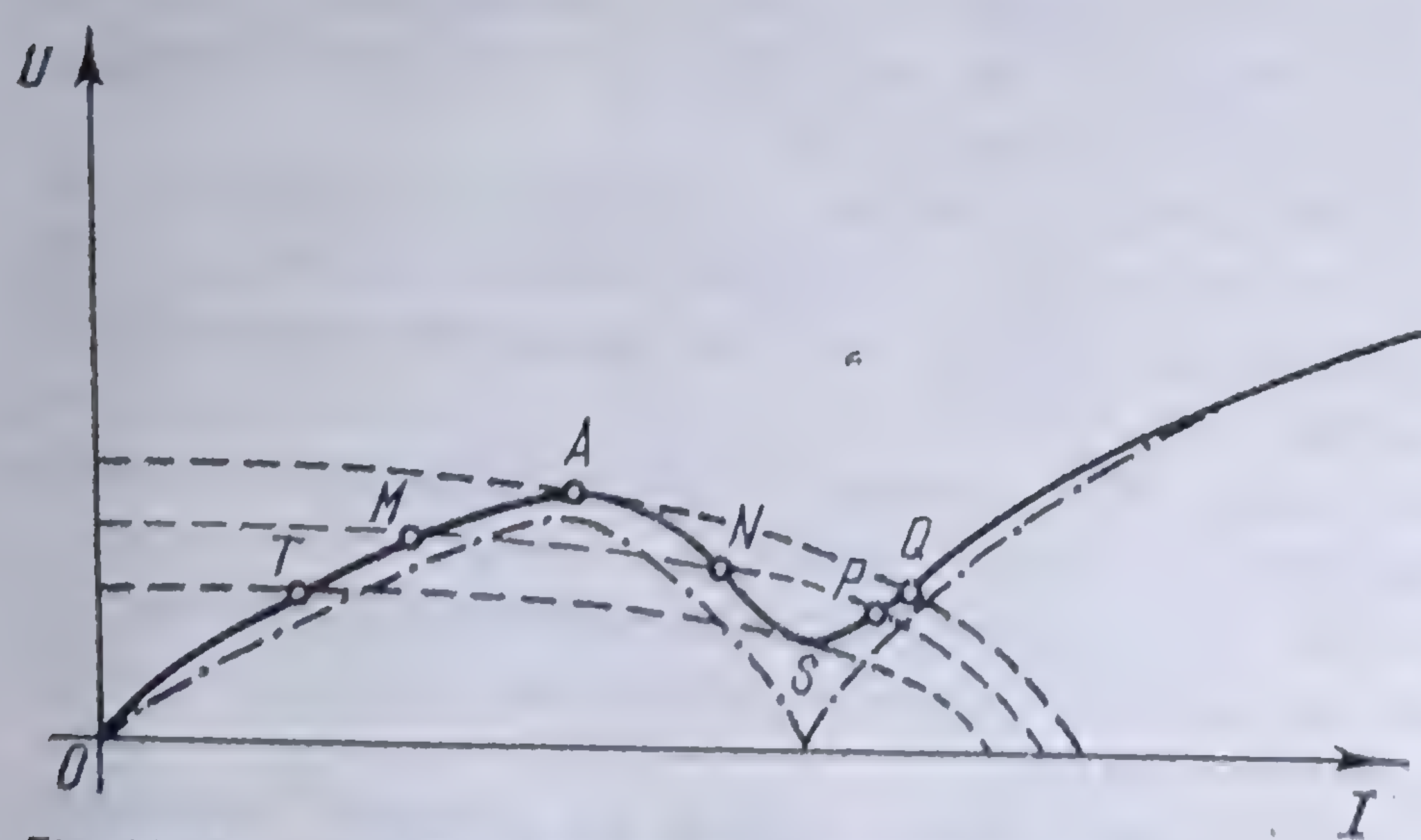


Fig. 11.25. Caracteristica circuitului ferorezonant cînd se ține seama de armonicile superioare și de pierderi.

funcționînd la limită (punctul  $A$  de funcționare), se produce o supratensiune oarecare, punctul de funcționare sare în punctul  $Q$ , pe a doua ramură de funcționare stabilă, curentul crescînd brusc în circuit. Pentru orice creștere de tensiune ulterioară, curentul crește de asemenea. Dacă se micșorează tensiunea, curentul scade continuu pînă în punctul  $S$  al caracteristicii după care, la o scădere oricît de mică a tensiunii, punctul de funcțio-



nare a circuitului să sară în punctul  $T$ , apărînd astfel o scădere bruscă a curentului în circuit. Discontinuitățile corespunzătoare de curent sînt însoțite de schimbarea semnului defazării în circuit.

### 11.3.3. FEROREZONANȚA ÎN CIRCUITELE ELECTRICE DERIVAȚIE

Studiul fenomenului de ferorezonanță într-un circuit electric derivație, format dintr-o bobină cu fier legată în paralel cu un rezistor și cu un condensator (fig. 11.26) se studiază în același mod ca și în circuitul serie.

Ecuția de funcționare a acestui circuit este

$$i_c = \frac{U}{R} + \frac{1}{L} \int u \, dt + C \frac{du}{dt};$$

neglijînd și în acest caz armonicile superioare de curent și de tensiune, precum și pierderile suplimentare, dacă  $I_L = \varphi(U)$  este caracteristica *volt-amper* a bobinei cu fier, trasată la frecvența  $f$  și presupusă cunoscută, ecuația de mai sus poate fi scrisă în valori efective:

$$I_t^2 = \frac{U^2}{R^2} + (I_L - C\omega U)^2,$$

care poate fi descompusă în sistemul

$$I = |C\omega U - I_L|, \quad (11.22)$$

$$I = \sqrt{I_t^2 - \frac{U^2}{R^2}}. \quad (11.23)$$

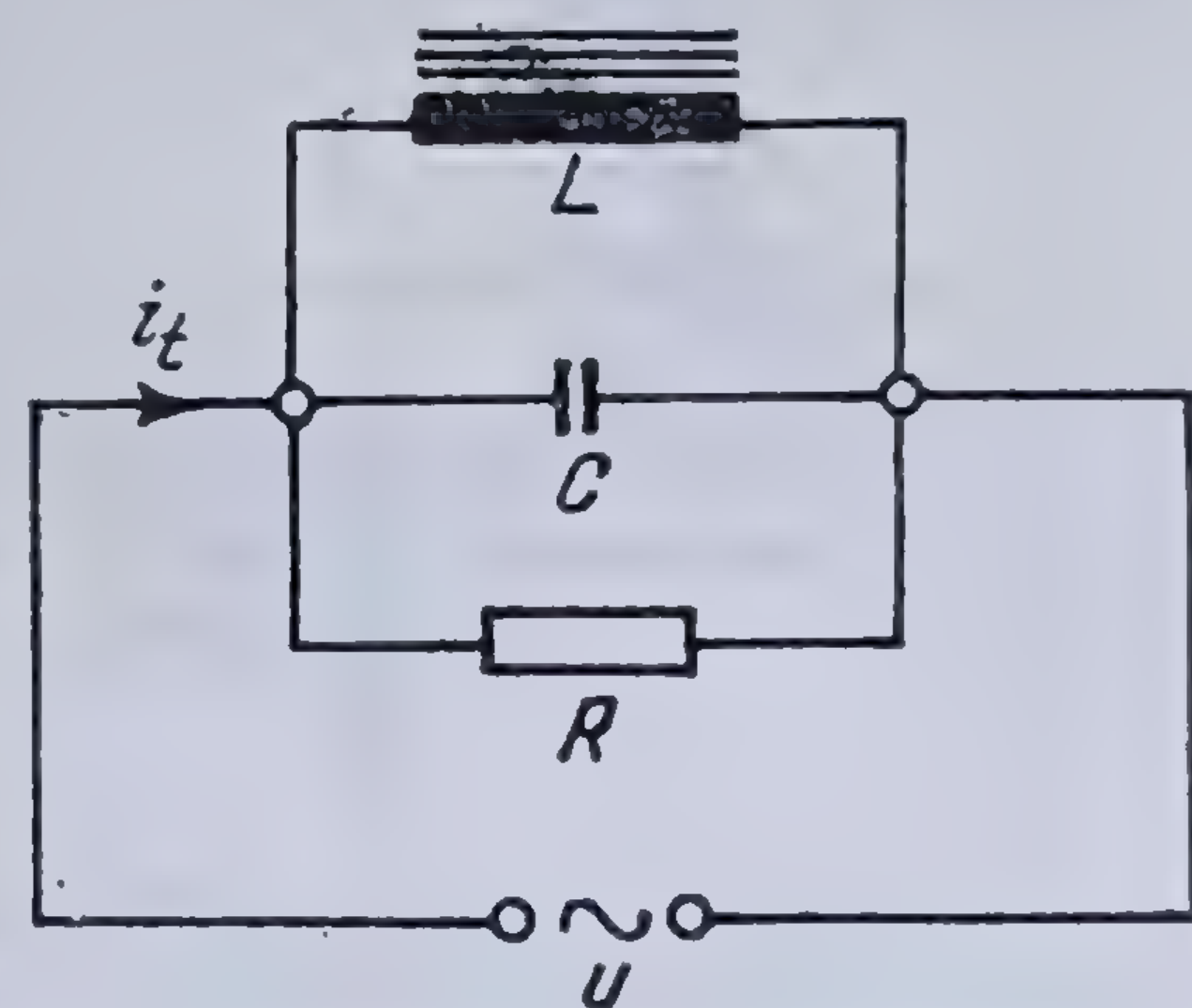


Fig. 11.26. Circuit electric format dintr-o bobină de inductanță neliniară în derivație cu un rezistor și un condensator liniare.

Defazajul curentului față de tensiune este dat de relația

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{R(I_L - C\omega U)}{U}.$$

Punctele de funcționare ale sistemului sînt date de intersecțiile curbelor (11.22) și (11.23). Prima dintre aceste curbe reprezintă variația, în valoare absolută, a diferenței dintre ordonatele caracteristicii  $I_L = \varphi(U)$  și dreapta  $C\omega U$ , iar a doua, reprezintă un arc de elipsă cu centrul în origine, intersectînd axele în vîrfurile sale  $(0, I_t)$  și  $(R I_t, 0)$ , (fig. 11.26).

În cazul general curba (11.22) este intersectată de arcul de elipsă (11.23) în trei puncte  $M$ ,  $N$  și  $P$ . Punctul  $M$ , cuprins în regiunea  $OA$  a curbei (11.22) corespunde funcționării stabile, pentru care  $\operatorname{tg} \psi < 0$  și deci curentul este defazat înaintea tensiunii; punctul  $P$ , cuprins în regiunea  $BC$  a curbei (11.22) corespunde unui al doilea regim stabil de funcționare, în care însă curentul este defazat în urma tensiunii; punctul  $N$ , care se găsește în regiunea  $AB$  a curbei (11.22) corespunde în general unei funcționări nestabile.

Deci, impedanța rezultantă a unui asemenea circuit poate lua două valori diferite după modul de funcționare a circuitului: în cazul cînd circuitul funcțio-



nează la limita de stabilitate (punctul  $A$  pe figura 11.27), un fenomen tranzitoriu oarecare, care poate produce o supratensiune sau o supratensiune oarecare, poate face ca punctul de funcționare  $M$  (funcționare capacitivă subexcitată) să treacă în punctul  $P$  (funcționare inductivă supraexcitată).

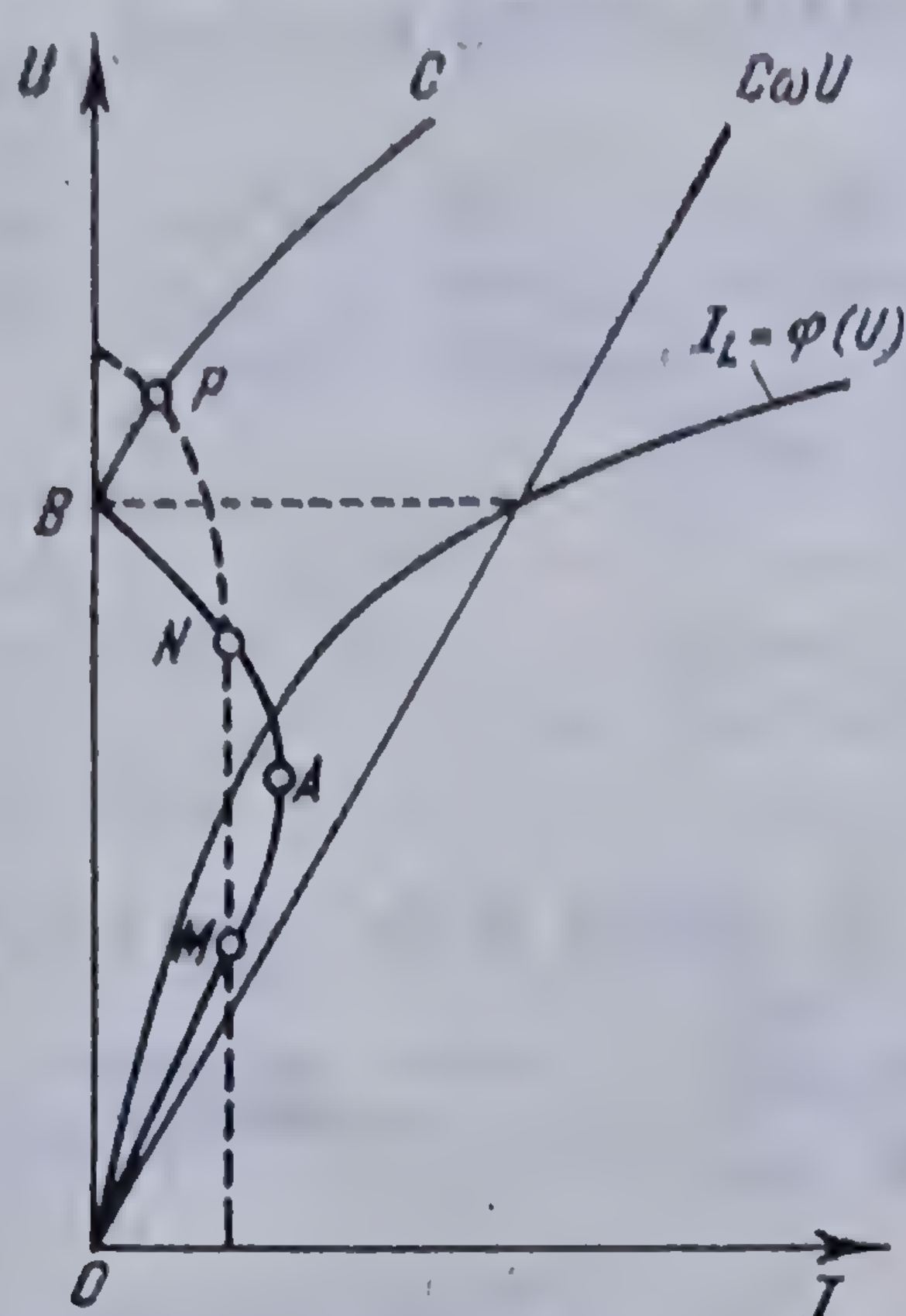


Fig. 11.27. Studiul grafic al fero-rezonanței într-un circuit electric derivație.

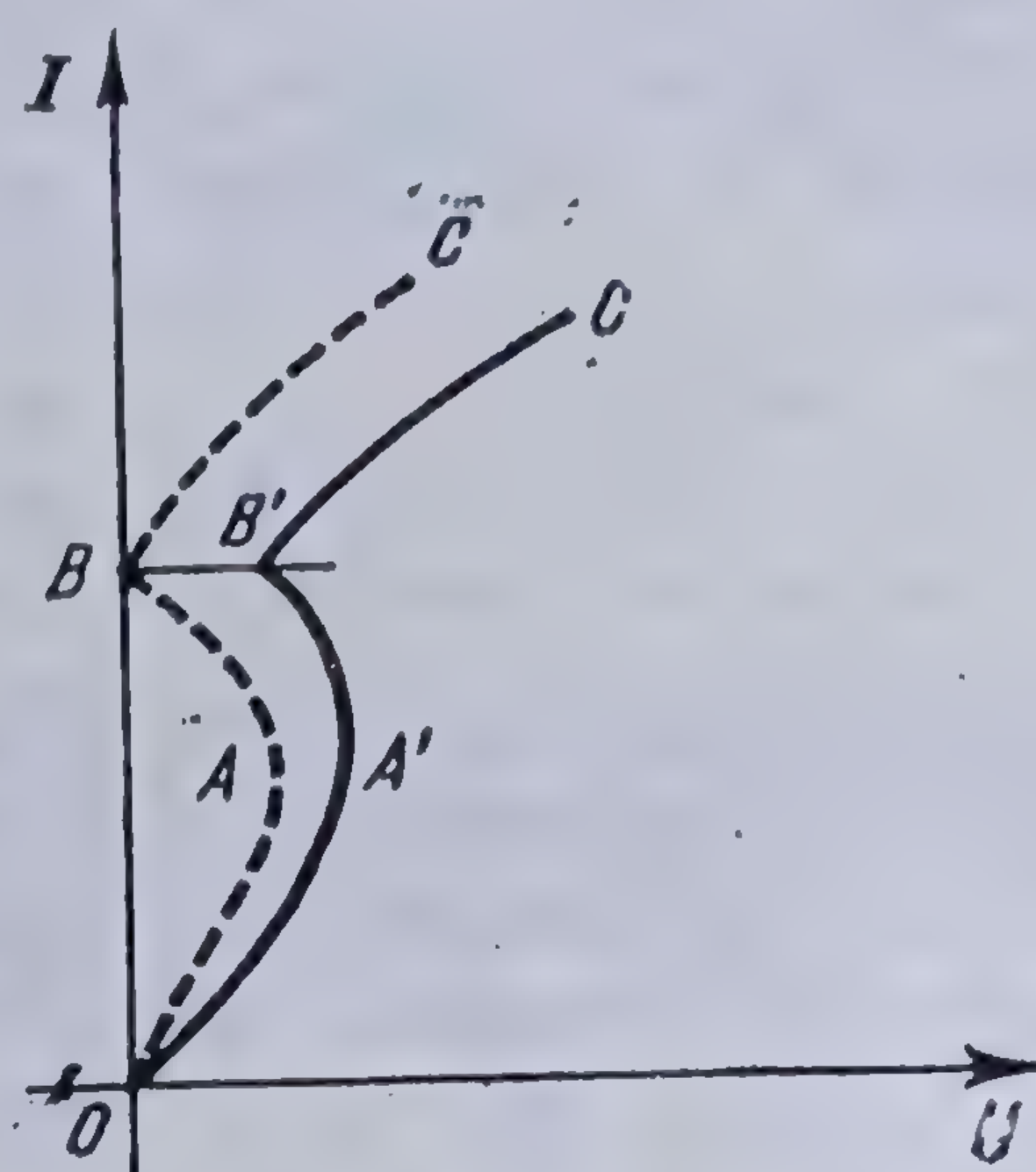


Fig. 11.28. Caracteristica fenomenului fero-rezonant în circuitul derivație cînd se ține seama de armonicile superioare și de pierderi.

Dacă se ține seama de existența armonicilor superioare precum și de pierderile suplimentare, caracteristica de funcționare a circuitului capătă forma din figura 11.28. Rezultă dar, că întocmai ca și în cazul circuitului serie, la creșterea sau la micșorarea curentului se vor produce discontinuități însoțite de modificarea defazajului dintre tensiune și curent, în circuitul respectiv.

#### 11.3.4. CARACTERISTICILE FENOMENULUI DE FEROREZONANȚĂ

Fenomenul de fero-rezonanță se deosebește fundamental de rezonanța obișnuită, atât prin modul de producere cît și prin condițiile care îl provoacă. Din studiul făcut în paragrafele precedente rezultă :

a) Rezonanța obișnuită se produce în cazul cînd este îndeplinită condiția  $LC\omega^2 - 1 = 0$ . Fero-rezonanța poate să se producă chiar în cazul cînd caracteristicile inductanței și capacității sînt foarte diferite unele de altele. Pentru ca să se producă un fenomen de fero-rezonanță este necesar ca dreapta  $\frac{I}{C\omega}$  să intersecteze caracteristica  $U_L = f(I)$ , adică valoarea reactanței capacitive să fie cuprinsă între valorile extreme ale reactanței inductive a bobinei, înainte și după saturație. Domeniul periculos al fero-rezonanței este cu mult mai întins decît acel al rezonanței obișnuite.

b) În cazul unei rezonanțe obișnuite, intensitatea curentului în circuit este limitată de rezistența  $R$  a acestuia ; în cazul fero-rezonanței, această rezistență nu are decît un rol secundar ; saturația circuitului magnetic produce supratensiunea, limitînd în același timp și amplitudinea acesteia. Într-adevăr, dacă  $R = 0$ , atunci arcul de elipsă (11.21) se înlocuiește cu tangenta în origine la elipsă și punctul de funcționare trece din  $P$  în  $Q$  (fig. 11.24), astfel, că tensiunea la bornele condensatorului nu depășește tensiunea  $LQ'$ .



c) În rezonanța obișnuită, regimul tranzitoriu face ca valoarea periculoasă să fie atinsă după un anumit timp, depinzând de constanta de timp a circuitului; în cazul ferorezonanței supratensiunea se produce brusc și apare cu toată valoarea ei la cea mai mică creștere a tensiunii peste tensiunea critică.

d) Aceleași considerații sînt valabile și în cazul fenomenului de ferorezonanță care apare în circuitele derivație.

### 11.3.5. EXEMPLE DE FENOMENE DE FEROREZONANȚĂ

11.3.5.1. **Considerații generale.** Fenomenele de ferorezonanță nu pot fi prevăzute și ele apar în rețeaua electrică datorită unor circumstanțe fortuite, producînd astfel fenomene de supratensiuni, supracurenți, modificări de impedanțe etc. Cazurile de ferorezonanță de acest fel apar destul de rar în rețelele electrice, de aceea ele sînt semnalate și urmărite cu mult interes.

În afara de acestea, fenomenul de ferorezonanță este utilizat și pentru realizarea de aparate sau dispozitive avînd diferite utilizări tehnice cum sînt stabilizatoarele de tensiune, multiplicatoare de frecvență etc.

În cele ce urmează se vor da cîteva exemple de fenomene de ferorezonanță, întîmplăte în practică precum și modul cum se poate realiza un stabilizator ferorezonant de tensiune.

11.3.5.2 **Cabluri armate.** Un cablu armat poate fi considerat ca o inductanță cu fier, acesta fiind constituit din armătura de oțel de protecție. În cazul unei centrale electrice, avînd punctul neutru izolat de pămînt, care debitează pe un număr mare de cabluri subterane legate în paralel, dacă o fază a unui cablu se pune la pămînt, circuitul echivalent al rețelei poate fi reprezentat prin schema din figura 11.29.

În această schemă, bobina cu miez de fier  $S$  reprezintă inductanța circuitului constituită de faza avariata a cablului armat și din pămînt care servește ca conductor de întoarcere; circuitul este alimentat de alternatoarele  $A$  și curenții produși se închid la pămînt prin capacitatea  $C$  a celorlalte faze.

S-a calculat că, în acest caz, deși lungimea cablului nu atinge valori prea mari, totuși tensiunea ce apăsă la bornele capacității  $C$  atinge valori de 4—5 ori tensiunea normală a instalației.

11.3.5.3. **Transformatoare de tensiune.** Un transformator de tensiune este un element, care poate produce cu multă ușurință fenomene de ferorezonanță. În adevăr, asemenea aparate funcționează cu înfășurarea secundară deschisă, sau închisă pe o impedanță foarte mare, constituind astfel o încărcare extrem de redusă; în aceste condiții, înfășurarea de înaltă tensiune constituie bobine cu miez de fier cu o inductanță foarte mare, capabilă să intre în rezonanță cu capacități mici.

Fie un asemenea transformator, legat la bornele unui alternator trifazat, avînd neutrul legat la pămînt (fig. 11.30). În cazul cînd capacitățile  $C_1$  și  $C_2$

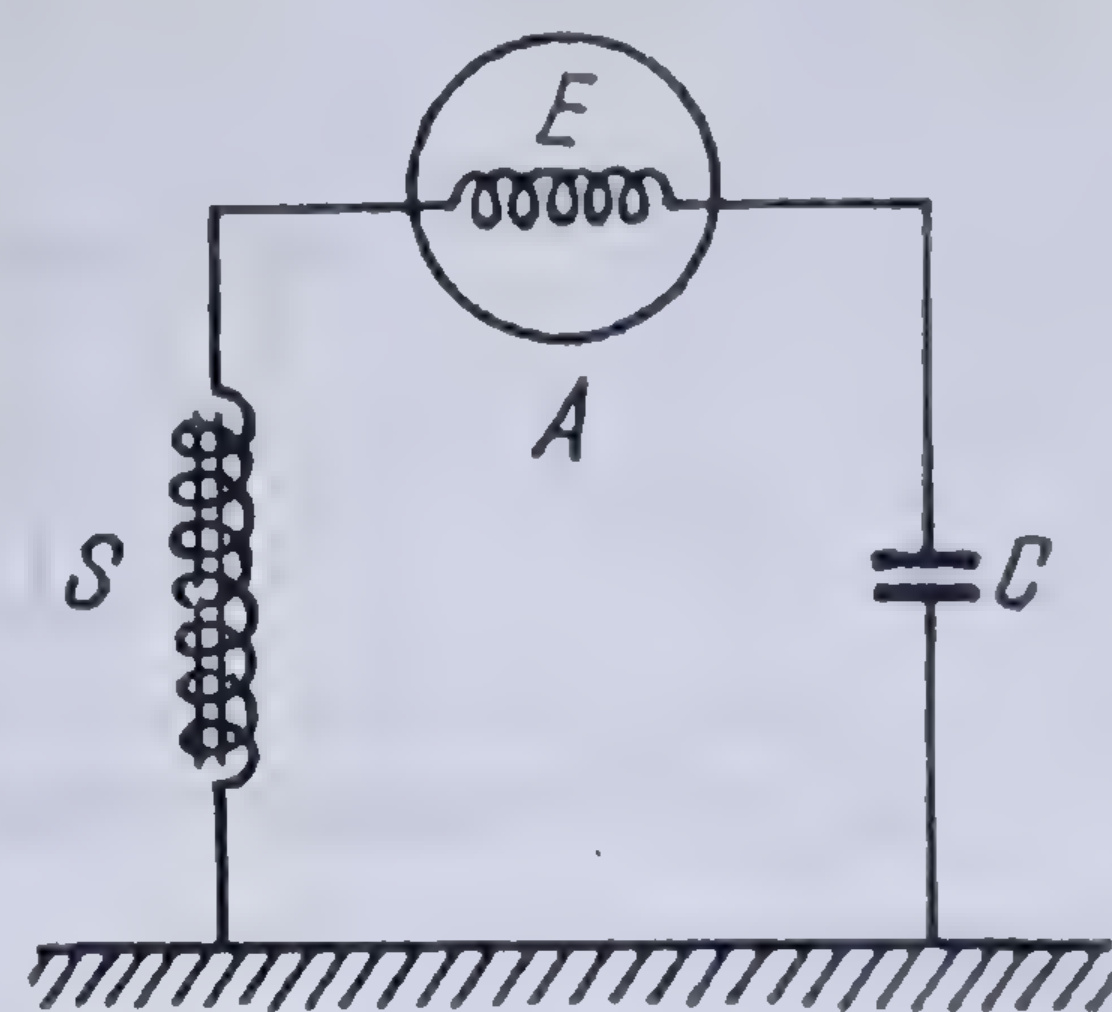


Fig. 11.29. Schema unui circuit ferorezonant serie, obținută prin punerea la pămînt a unei faze a unui cablu armat.

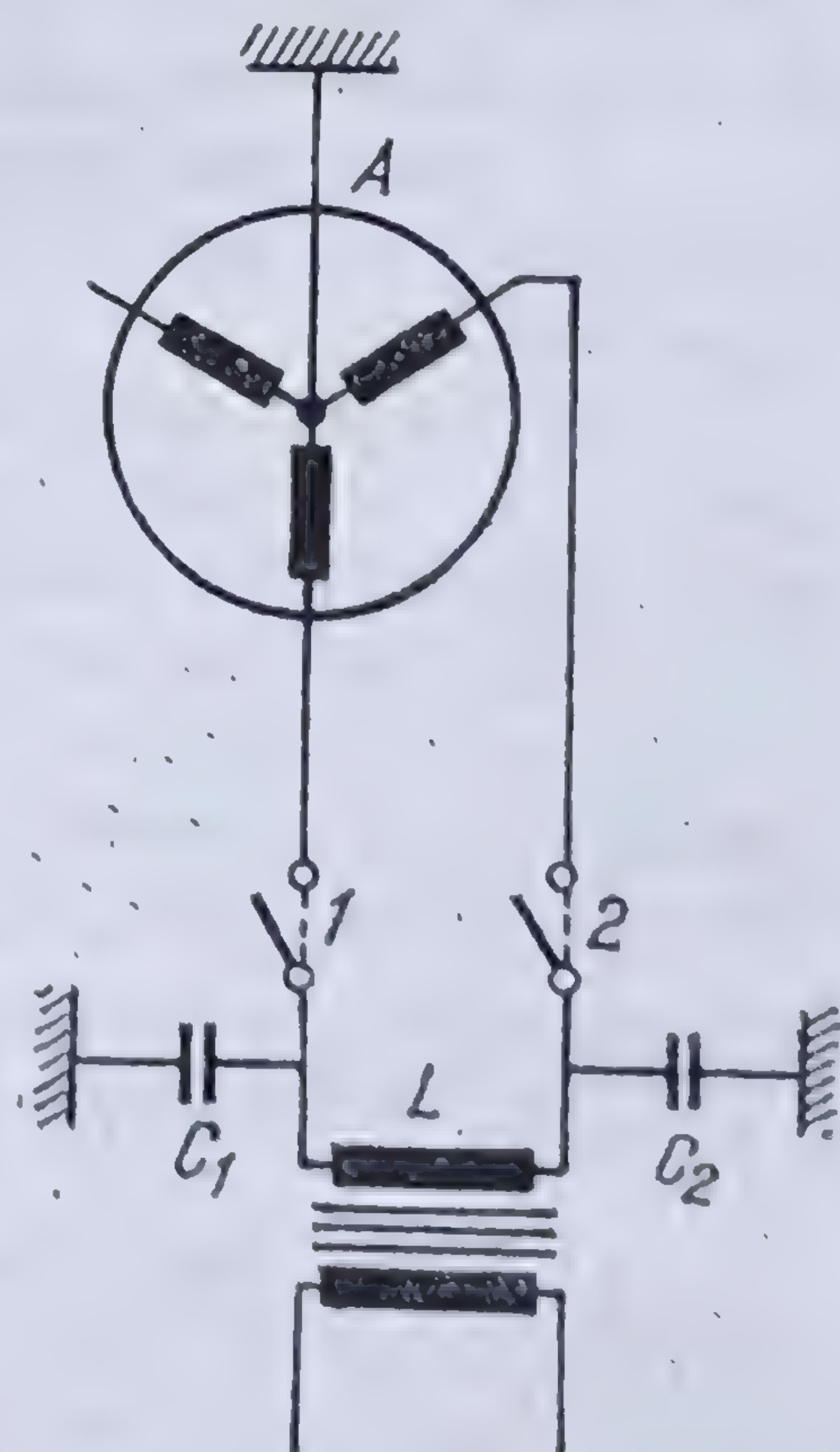


Fig. 11.30. Circuit ferorezonant al unui transformator de tensiune în cazul închiderii nesimultane a separatorilor 1 și 2.



ale legăturilor cuprinse între transformator și separatoarele 1 și 2 sînt suficiente, o ferorezonanță poate apărea foarte ușor, dacă se închide unul din separatoare, spre exemplu 1, al doilea separator rămînînd deschis: regimul tranzitoriu de încărcare prin circuitul  $LC_2$  poate fi suficient pentru a produce fenomenul de ferorezonanță și a provoca astfel supratensiuni importante la bornele condensatorului  $C_2$ .

**11.3.5.4. Deplasarea punctului neutru al unei rețele trifazate.** Fie un transformator trifazat, cuplat în stea; secundarul acestui transformator este de asemenea legat în stea, iar punctul neutru al înfășurării primare este legat la

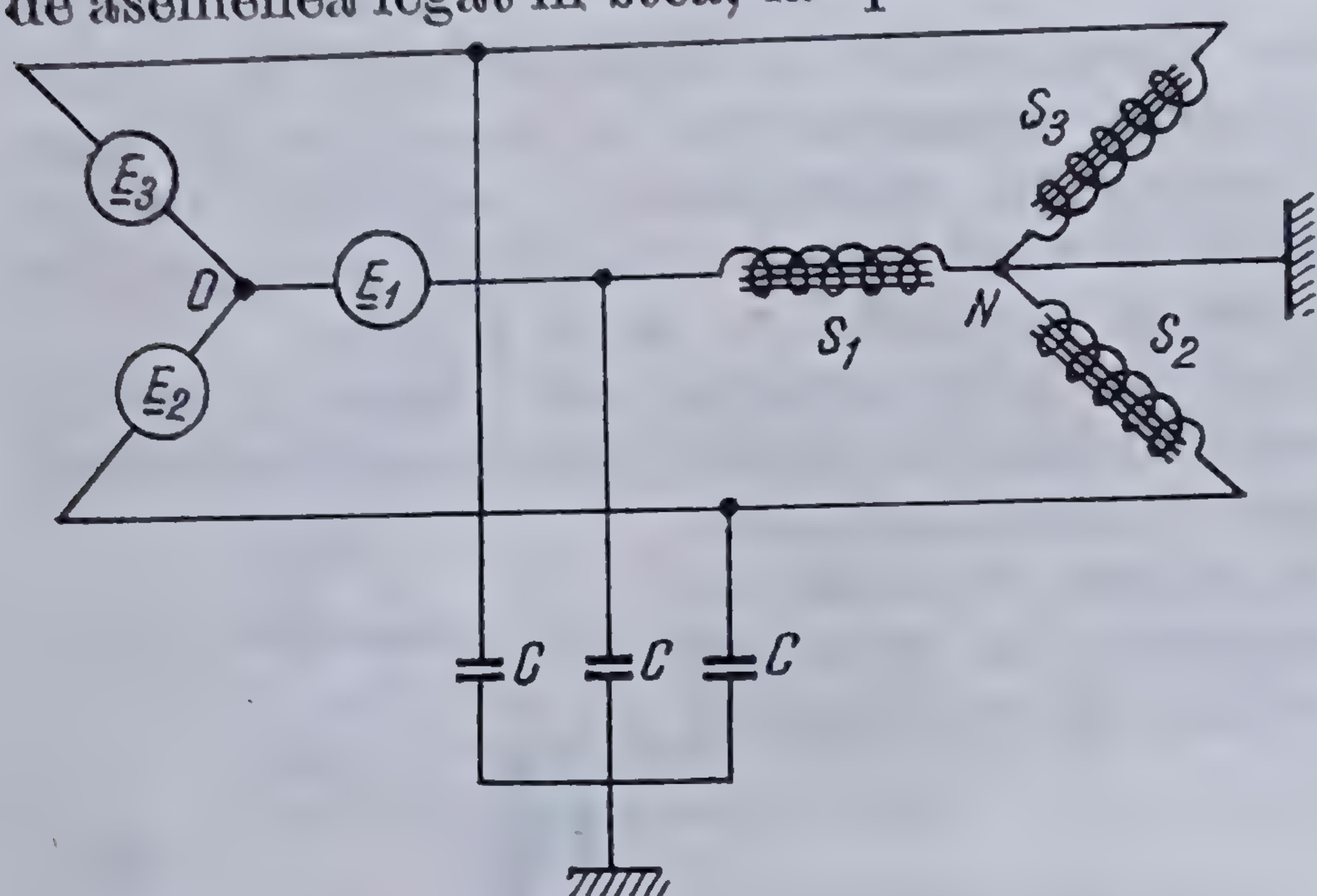


Fig. 11.31. Sistem trifazat alternator-transformator.

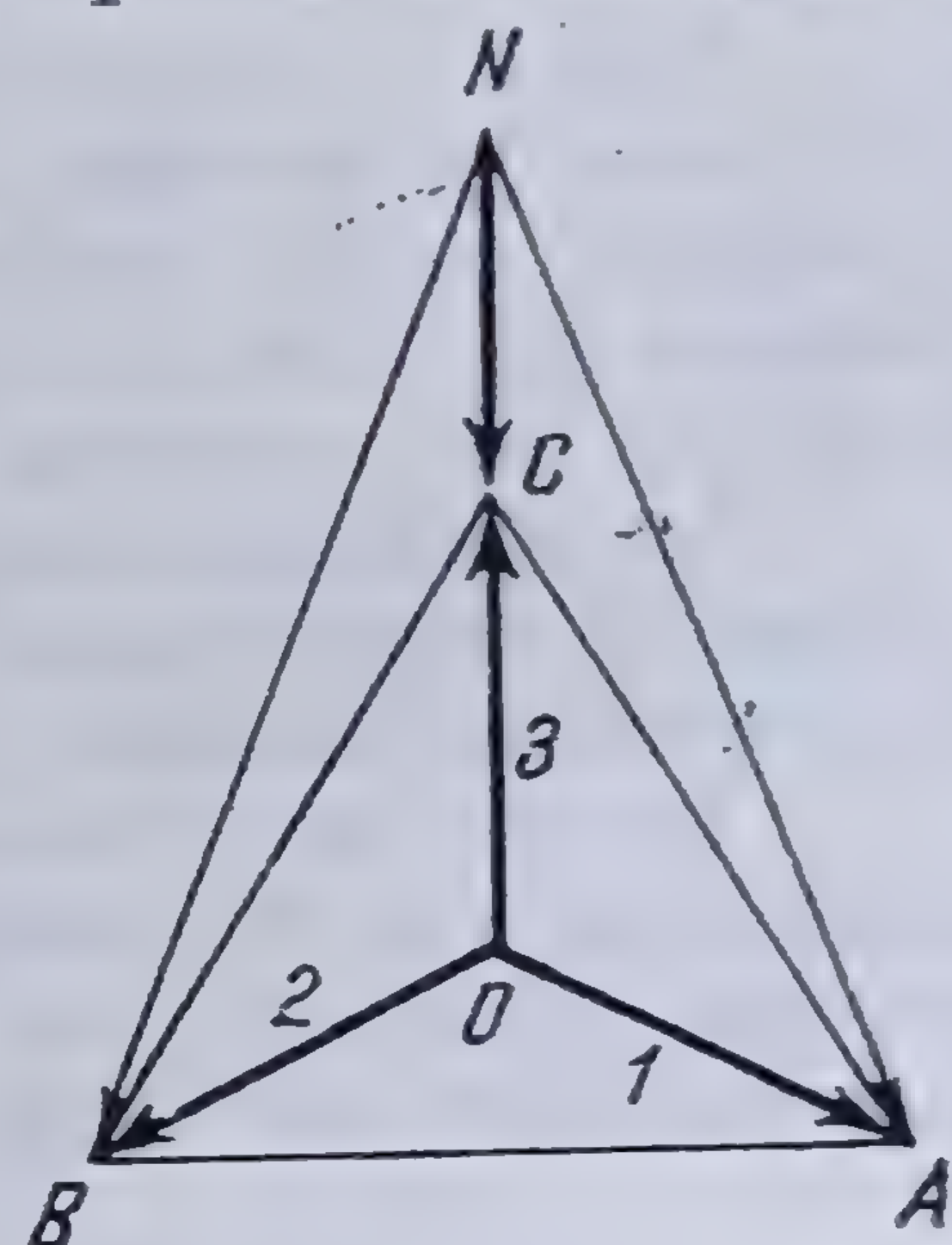


Fig. 11.32. Diagrama tensiunilor.

pământ. Transformatorul este legat la un alternator simetric și echilibrat, prin intermediul unor conductori care au fiecare aceeași capacitate  $C$  față de pământ. Punctul neutru al alternatorului este izolat față de pământ (fig. 11.31).

Dacă impedanțele aparente ale celor trei faze ale sistemului sînt identice, tensiunea punctului neutru al sistemului e nulă și acesta se confundă cu centrul de greutate al triunghiului tensiunilor la borne.

În sistemul considerat, însă fiecare din impedanțe este formată din o inductanță cu fier, în paralel cu o capacitate și formează sisteme ferorezonante în paralel.

În timpul unui regim tranzitoriu oarecare, se poate întîmpla ca două din faze să se comporte ca inductanțe (funcționarea în punctul  $M''$ , figura 11.24), iar cealaltă ca un condensator (funcționarea în punctul  $M$ , figura 11.24). În acest caz, două din faze vor fi astfel supraexcitate, iar a treia subexcitată și inversată în raport cu celelalte. Diagrama tensiunilor pe fază va avea de data aceasta punctul neutru în afara triunghiului (fig. 11.32).

Pentru a evita acest fenomen care produce supratensiuni pe fazele transformatorului, secundarul transformatorului se leagă în triunghi, sau se prevede o a treia înfășurare legată în triunghi.

**11.3.5.5. Stabilizatoare de tensiune, feromagnetice.** Fenomenul de ferorezonanță stă la baza construirii stabilizatoarelor de tensiune feromagnetice; aceste stabilizatoare de tensiune servesc la menținerea unei tensiuni constante la bornele unui receptor atunci cînd tensiunea la bornele de alimentare variază. Stabilizatoarele de tensiune feromagnetică pot fi realizate fie utilizînd fenomenul de ferorezonanță din circuitele serie, fie fenomenul de ferorezonanță din circuitele derivate, schemele de montaj fiind mai mult sau mai puțin complicate.



Schema de principiu a unui stabilizator de tensiune ferorezonant — funcționând pe principiul ferorezonanței din circuitele serie — este dată în figura 11.32, iar diagrama de funcționare a acestui circuit este dată în figura 11.33.

Funcționarea acestui stabilizator se bazează pe faptul că punctul de funcționare  $P$  a circuitului se găsește pe ramura ascendentă a curbei  $OABC$ , pentru care fierul bobinei de inductanță este foarte saturat. Unei variații mari a tensiunii  $U_1$  aplicată la bornele circuitului, îi corespunde o variație mare a curentului  $I$  din circuit — și deci și a curentului  $I_L$  din circuitul inductanței. Din figura 11.34 se vede ușor că acestei variații de curent  $I$  în jurul valorii nominale  $I_L$  a curentului de funcționare a dispozitivului are drept consecință o variație de

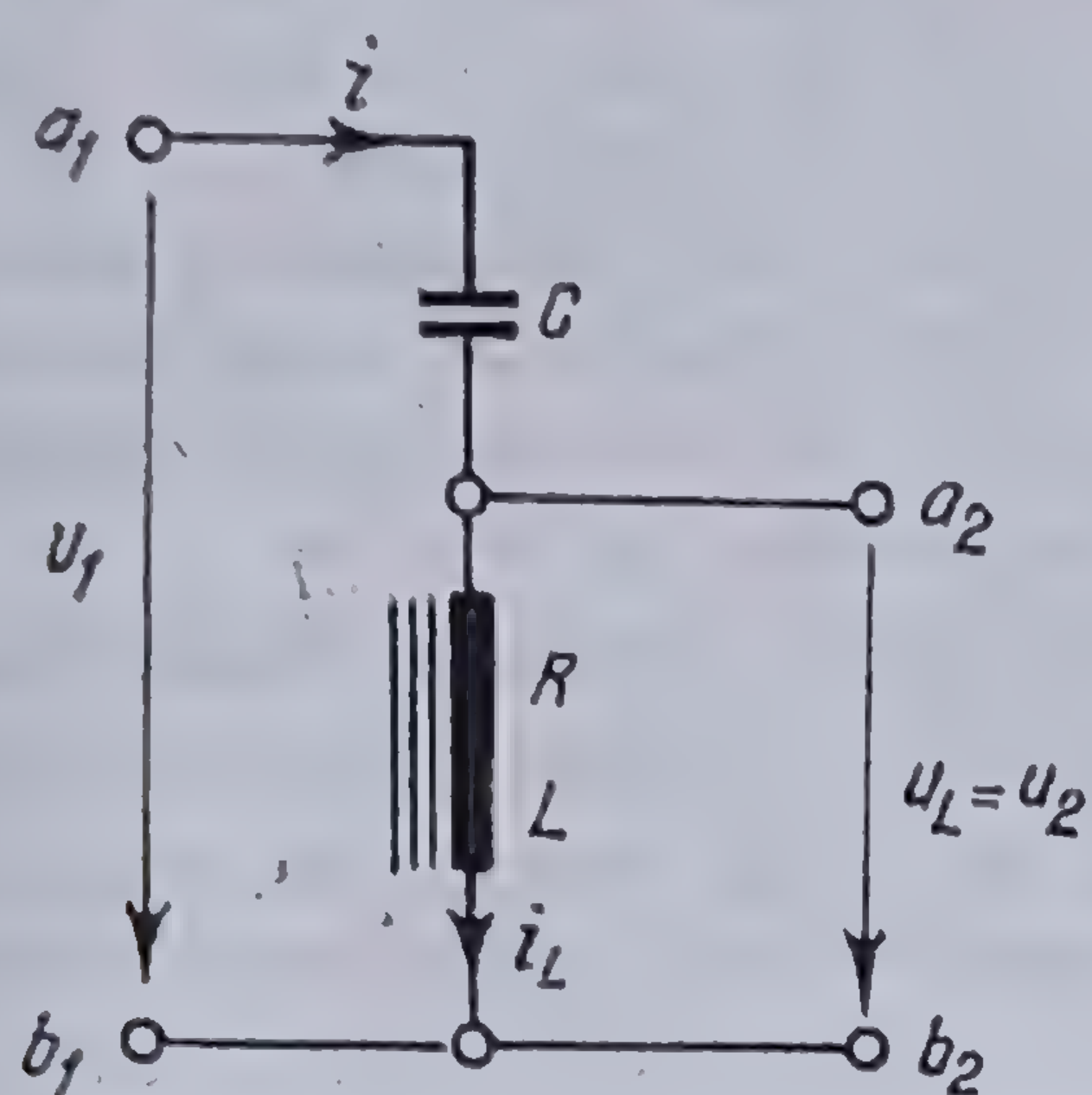


Fig. 11.33. Schema de principiu a unui stabilizator ferorezonant serie.

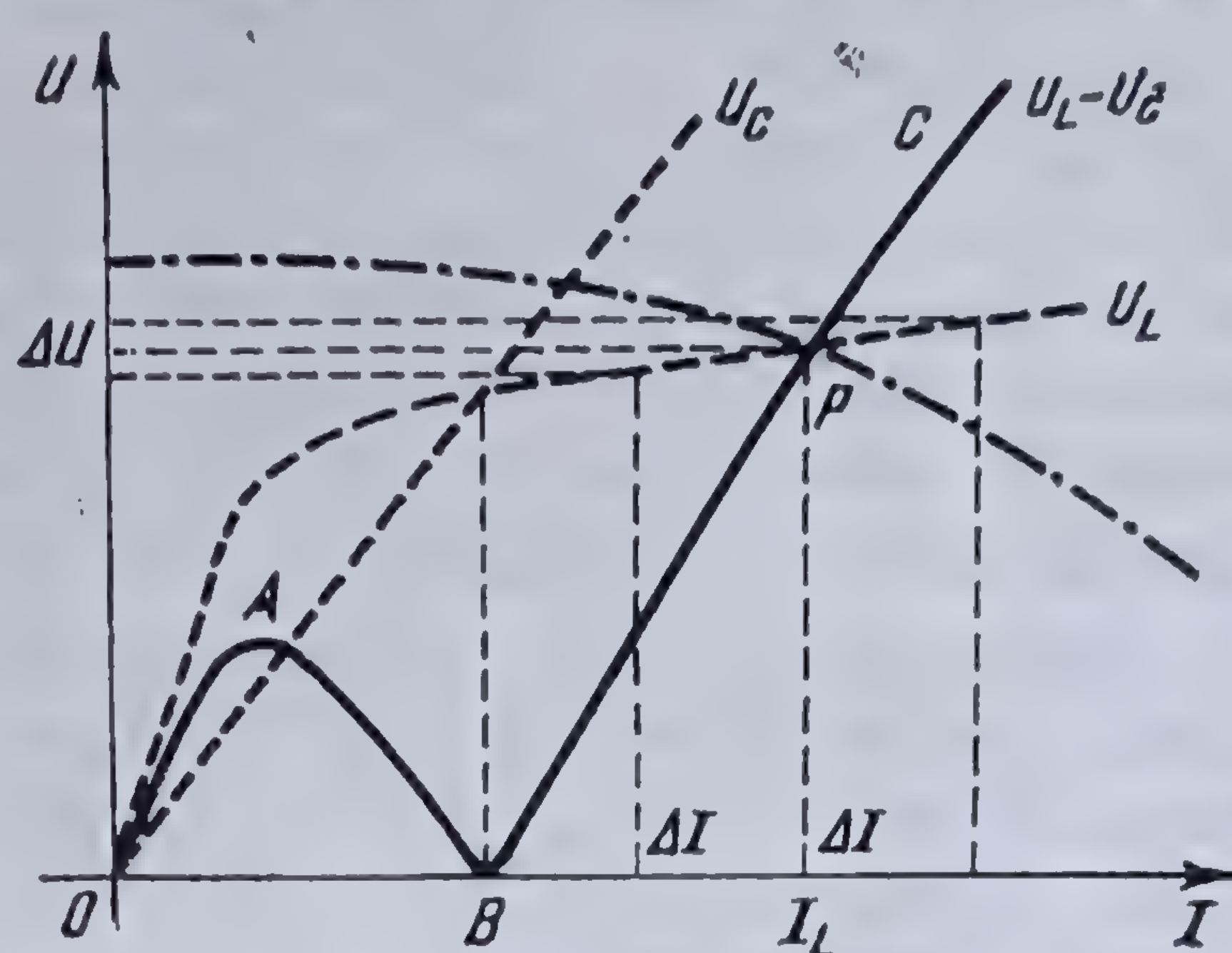


Fig. 11.34. Diagrama de funcționare a unui stabilizator ferorezonant serie.

tensiune  $\Delta U$ , la bornele de ieșire, foarte mică în raport cu tensiunea nominală de utilizare  $U_2$ .

Există numeroase scheme de stabilizatoare de tensiune ferorezonante, bazate fie pe fenomenul de rezonanță serie, fie pe acela de rezonanță derivație; descrierea lor iese din cadrul acestei lucrări.

## 11.4. STABILITATEA CIRCUITELOR ELECTRICE

### 11.4.1. GENERALITĂȚI

Schimbarea caracteristicilor de funcționare ale circuitelor electrice se face trecând printr-un regim tranzitoriu. Acesta apare fie sub o formă aperiodică, fie sub o formă de oscilații periodice amortizate, adică oscilații a căror amplitudine scade cu timpul, după o lege exponențială oarecare. Condițiile de amortizare și periodicitatea fenomenului oscilant nu depind, decât de caracteristicile proprii ale circuitului și deloc de acțiunile exterioare.

Cînd un circuit a fost scos din starea lui de echilibru și lăsat de-sine-stătător, tinde după un oarecare interval de timp, să revină la o stare de echilibru; se zice că circuitul este stabil.

Sînt cazuri însă, în care circuitul nu este stabil, ceea ce înseamnă că oscilațiile sale în jurul poziției de echilibru nu se amortizează niciodată. Se zice că regimul tranzitoriu creează un sistem de oscilații autoîntreținute. Aceste oscilații sînt caracterizate prin faptul că ele singure creează și controlează forțele electromotoare care le întretin; bineînțeles că o oscilație autoîntreținută nu poate exista fără o sursă exterioară de energie, însă pulsația sa este independentă de pulsația acestei surse, care dealtfel poate fi chiar constantă.



Un sistem auto-întreținut poate fi considerat ca un sistem oscilant posedând un *amortisment negativ*, lucrurile petrecându-se ca și cum în circuit există o *impedanță negativă* ceea ce nu se poate realiza decât dacă circuitul conține elemente neliniare. Dacă circuitul ar conține numai elemente liniare, cum noțiunea de impedanță implică o proporționalitate între curent și diferența de potențial, rezultă că amplitudinea oscilațiilor amorsate ar deveni infinit mari. În adevăr, pentru ca să se stabilească un regim stabil de oscilații este necesar să existe un echilibru între energia consumată în circuit și aceea produsă de cauza de amortizare negativă: dacă cei doi factori de amortizare, unul pozitiv și celălalt negativ ar fi liniari, cu alte cuvinte, cele două forțe electromotoare de semn contrar produse ar fi amândouă proporționale cu curentul din circuit, nu există posibilitate de echilibru. Rezultă dar, că un circuit în care apar oscilații auto-întreținute va conține întotdeauna elemente neliniare.

Problema stabilității se pune pentru sisteme pur mecanice, sau pentru sisteme în care intervin simultan fenomene electrice și mecanice, sau în circuitele pur electrice, dacă acestea sînt neliniare și pasive, ca de exemplu atunci cînd ele comportă tuburi electronice sau circuite magnetice saturate.

Există sisteme pentru care problema stabilității este primordială și anume:

a) aparatele de *reglaj automat* sau *reglatoarele*, a căror rol este să mențină constantă valoarea unei mărimi oarecare, cum ar fi, de exemplu, tensiunea la bornele unui generator de curent continuu sau a unui alternator, frecvența unei rețele, curentul sau puterea într-un circuit, viteza de rotație a unui motor sau a unei turbine etc.

b) aparatele de *telecomandă aservită*, destinate să modifice la distanță poziția sau regimul de funcționare a unui aparat receptor, cu o cantitate conformă cu ordinul dat.

Atît reglatoarele, cît și aparatele de telecomandă constituie *servomecanisme*. Astfel, în cazul reglatoarelor, perturbația este, în general, accidentală și scopul aparatului este să aducă mărimea reglată la valoarea ei fixată, fie că perturbația a fost pasageră sau de durată. Pentru ca reglajul să fie *stabil*, este necesar ca abaterea accidentală dintre valoarea fixată a mărimii și valoarea instantanee a acesteia să tindă să se anuleze de la sine; revenirea la echilibru se face aperiodic sau oscilant; în acest din urmă caz, amplitudinea oscilațiilor trebuie să fie cît mai mică posibil. Calitatea unei reglări se apreciază prin durata minimă a reducerii *abaterii de reglaj* sub o anumită limită și a micimii amplitudinilor de reglaj.

Studiul servomecanismelor iese din cadrul acestei lucrări\*; este necesar totuși să fie date unele precizări sumare necesare studiului stabilității însăși.

Un servomecanism de reglaj sau de telecomandă are un circuit funcțional format din următoarele elemente (fig. 11.35):

— *circuitul de acțiune* format din unul sau mai multe elemente intercalate între *organul de comandă* care dă *ordine* și *organul de execuție*, care se conformează ordinelor primite.

— *circuitul de reacție*, care stabilește o legătură între organul de execuție și organul de comandă în scopul de a modifica în sensul necesar ordinele primite în raport cu rezultatul urmărit.

Instabilitatea unui servomecanism se produce, în general, din cauza închiiderii circuitului de reacție.

\* Vezi [80] pag. 9.



Ca un exemplu de sistem de reglaj, asimilabil unui servomecanism să considerăm reglajul tensiunii la bornele unui alternator (fig. 11.36): prin variația reostatului de cîmp a excitatoarei, (elementul de comandă) se produce variația curentului de excitație a excitatoarei, deci a tensiunii la bornele sale (prima amplificarea), deci a curentului de excitație a alternatorului (a doua amplificarea), ceea ce conduce la variația tensiunii la bornele alternatorului

Fig. 11.35. Schema funcțională a unui servomecanism.

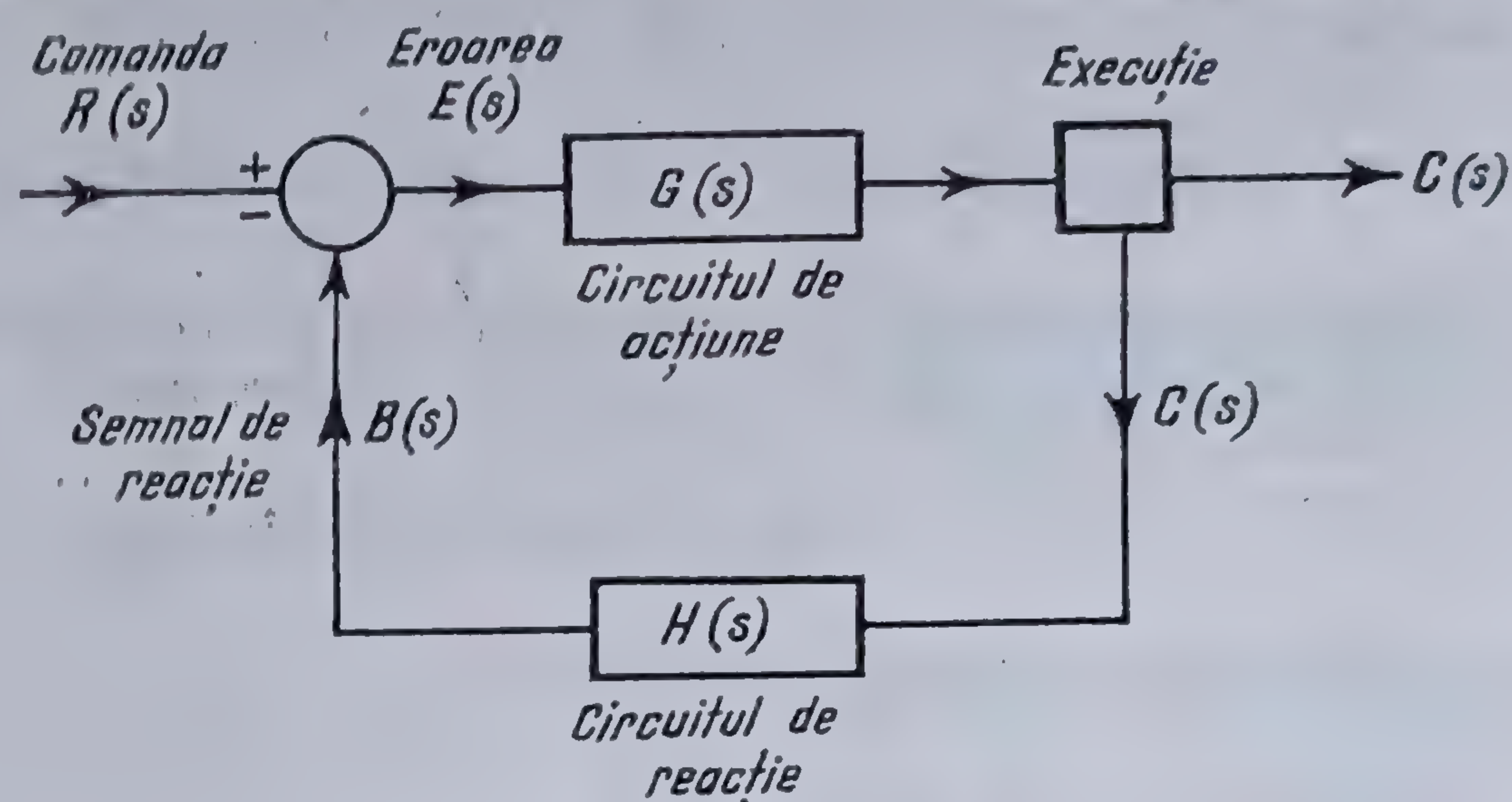
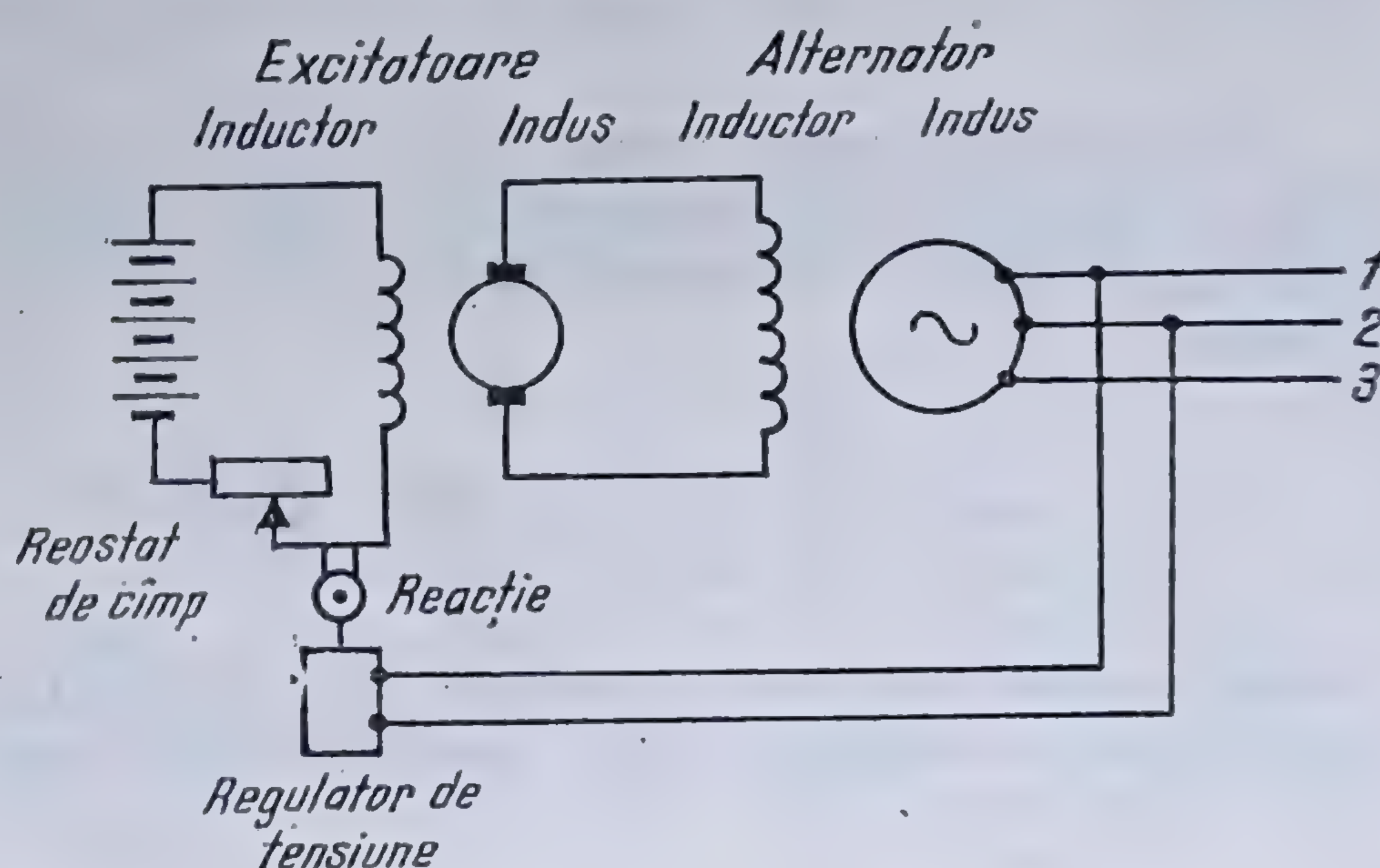


Fig. 11.36. Schema de reglaj a tensiunii la bornele unui alternator.



(organul de execuție). Tensiunea (mărimea produsă de organul de execuție) este măsurată de regulatorul de tensiune care o compară cu o tensiune de referință și face să acționeze (reacția) abaterea constantă asupra comenzii reostatului de cîmp al excitatoarei; circuitul este astfel închis. Sistemul este în echilibru numai dacă tensiunea alternatorului are o anumită valoare.

**11.4.1.2. Ecuația de funcționare. Condiția de stabilitate.** Considerînd schema funcțională a unui sistem de reglaj (fig. 11.35), neglijînd cantitatea preluată la ieșire pentru a alimenta circuitul de reacție și reducînd schema respectivă\*, se obține ecuația operațională de funcționare a sistemului

$$C(s) = \frac{G(s)R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (11.24)$$

\* Vezi [80].

Această relație se putea stabili și direct pe figura 11.34: rezultă imediat:

$$C(s) = G(s) \cdot E(s)$$

dar

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

și

$$B(s) = H(s) C(s).$$

Scoțînd din acest sistem valoarea lui  $C(s)$  se obține, fără dificultate, relația (11.24).



Să presupune că funcțiile  $G(s)$  și  $H(s)$  sînt fracții raționale de forma

$$G(s) = \frac{M_1(s)}{N_1(s)} \text{ și } H(s) = \frac{M_2(s)}{N_2(s)};$$

ecuația (11.24) poate fi pusă atunci sub forma

$$[M_1(s) \cdot M_2(s) + N_1(s) \cdot N_2(s)] C(s) = M_1(s) N_2(s) R(s). \quad (11.25)$$

Coeficientul funcției  $C(s)$  reprezintă *funcția caracteristică a sistemului*, care egalată cu zero dă *ecuația caracteristică a sistemului\**.

$$M_1(s) \cdot M_2(s) + N_1(s) \cdot N_2(s) = 0,$$

care poate fi pusă sub forma

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0. \quad (11.26)$$

Stabilitatea unui sistem este determinată de regimul liber de funcționare al său și care este determinat de ecuația caracteristică respectivă. Într-adevăr, soluția generală a unei ecuații liniare de ordinul  $n$ , fără membrul al doilea, este de forma

$$y = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}, \quad (11.27)$$

în care  $y$  este mărimea studiată,  $A_i$  constantele de integrare și  $s_i$  rădăcinile ecuației caracteristice (11.26) care sînt de forma

$$s = \delta + j\Omega \quad (11.28)$$

și este viteza unghiulară a fazorului a cărui proiecție pe axa reală trebuie să reprezinte mărimea considerată\*\*.

Pentru ca un sistem să fie stabil, este necesar ca relația (11.27) să îndeplinească condiția

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y = 0,$$

și care este obținută numai dacă toți termenii expresiei (11.27) tind simultan către zero, cînd timpul crește indefinit. Întrucît coeficienții  $A_i$  sînt mărimi constante, condiția de stabilitate depinde de natura rădăcinilor (11.28) ale ecuației caracteristice.

Dacă  $\delta > 0$  și  $\Omega = 0$ , atunci  $y$  va crește cu timpul indefinit și sistemul este aperiodic și nestabil.

Dacă  $\delta < 0$  și  $\Omega = 0$ , atunci  $y$  va tinde către zero cînd  $t$  tinde către infinit și sistemul este aperiodic și stabil.

\* Vezi 10.4.2.

\*\* Vezi 4.2.5.3.



Dacă  $\delta \neq 0$  și  $\Omega \neq 0$ , atunci soluția generală a ecuației diferențiale este de forma

$$y = \sum_{i=1}^n B_i \varepsilon^{\delta t} \cos (\Omega t + \psi) \quad (11.29)$$

și rezultă că fenomenul este oscilant; amplitudinea acestuia va crește sau va scădea în funcție de semnul părții reale a rădăcinii (11.28). Dacă  $\delta > 0$ , atunci amplitudinea oscilațiilor este continuu crescătoare cu timpul și sistemul este nestabil. Dacă  $\delta < 0$ , atunci amplitudinea oscilațiilor va tinde către zero când timpul tinde către infinit și sistemul este stabil.

În consecință, pentru ca un sistem să fie *stabil*, adică pentru ca el să tindă a reveni la starea de repaus, sau pentru ca amplitudinile oscilațiilor care pot lua naștere să tindă către zero, este necesar și suficient ca rădăcinile reale ale ecuației caracteristice să fie negative iar partea reală a rădăcinilor complexe ale acestei ecuații să fie negative.

Pentru ca un sistem să fie *nestabil*, sau pentru ca o oscilație să se amorseze, adică pentru ca amplitudinea sa să crească cu timpul după ce a luat naștere dintr-o cauză oarecare, este necesar și suficient ca cel puțin una din rădăcinile reale ale ecuației caracteristice să fie pozitivă, sau partea reală a cel puțin unei perechi de rădăcini complexe să fie pozitivă (fig. 11.37).

Cele două regimuri de funcționare ale unui circuit electric, stabil (sau amortizat) și instabil (sau autoîntreținut) sînt separate de un regim *critic* la care amortismntul este nul ( $\delta = 0$ ).

Acest regim este caracterizat din punct de vedere matematic, prin aceea că rădăcinile (11.28) ale ecuației caracteristice sînt pur complexe, de forma  $\pm j\Omega$ .

Studiul stabilității unui sistem se poate face ușor, dacă se cunosc rădăcinile ecuației caracteristice. Determinarea acestor rădăcini, când gradul ecuației caracteristice este mai mare de 2, se face cu multă greutate și rezultatele obținute sînt uneori numai aproximative; pe de altă parte, aceasta nu se poate face în mod practic decît dacă se cunosc valorile numerice ale coeficienților ecuației caracteristice. S-au văzut mai înainte condițiile în care un sistem este nestabil. Dacă s-ar căuta să se modifice într-un mod oarecare parametrii circuitului pentru ca sistemul să devină stabil, aceasta nu se va putea face întrucît nu se poate stabili o relație generală între expresia unei rădăcini și coeficienții ecuației caracteristice.

Toate acestea au condus la stabilirea unor criterii, care permit să se stabilească condițiile de stabilitate fără a se recurge la calculul explicit al rădăcinilor ecuației caracteristice.

Numărul acestor criterii este destul de mare și studiul amănunțit al lor iese din cadrul lucrării de față.

Unele din aceste criterii, permit numai să se vadă dacă sistemul este sau nu stabil și se aplică numai în cazul cînd numitorul expresiei (11.24) este un polinom întreg în  $s$ , de forma (11.26). Dintre aceste criterii, pur algebrice, fac parte

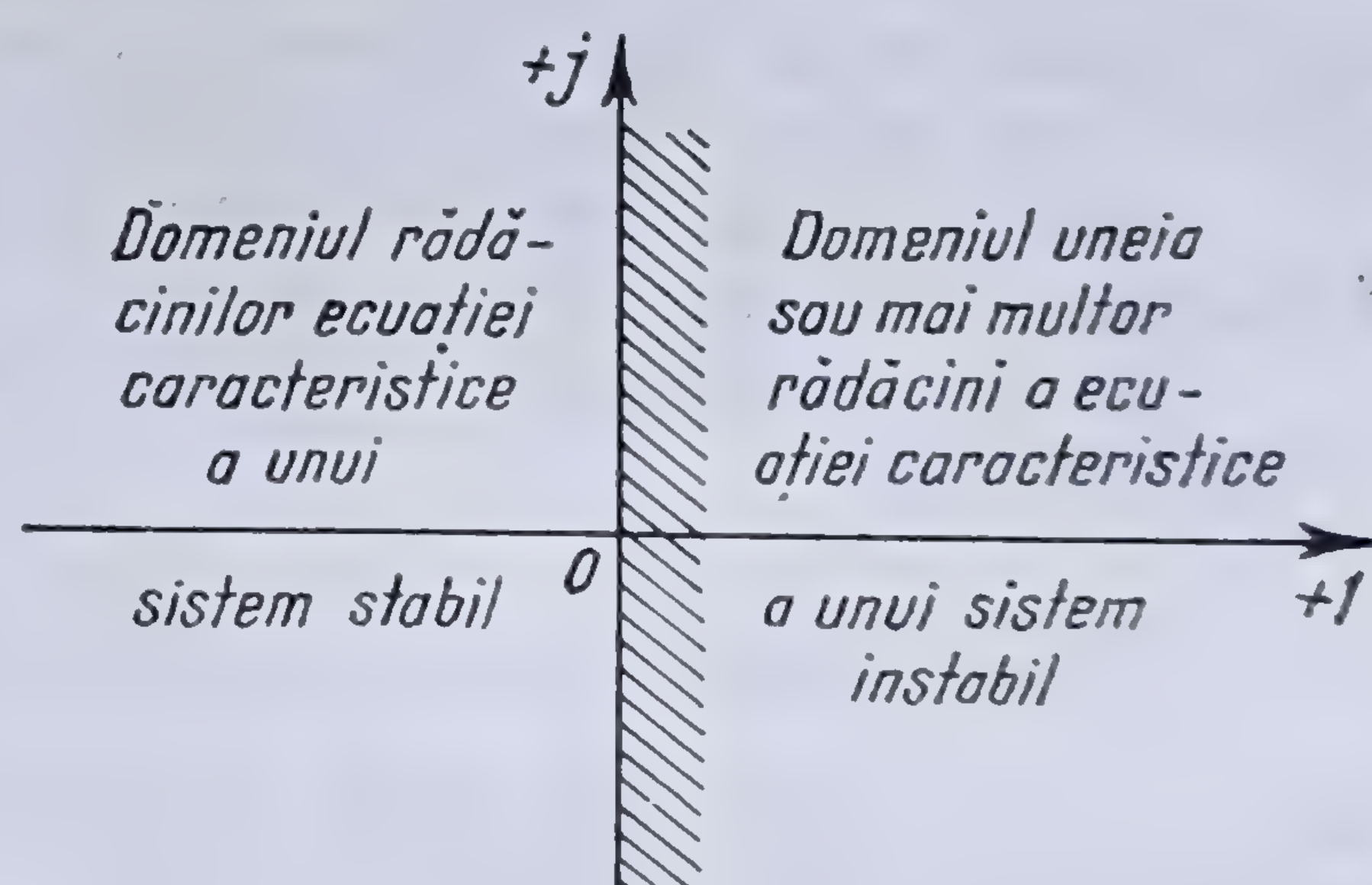


Fig. 11.37. Divizarea planului complex în zonele de stabilitate și instabilitate a sistemelor.



criteriile lui HURWITZ, ROUTH etc. Există criterii cu caracter mai general, în sensul că nu este necesar ca numitorul să fie numaidcît un polinom; aceste criterii permit în plus, nu numai verificarea stabilității sistemului dar dau și posibilitatea aprecierii rapidității cu care se amortizează oscilațiile. Printre acestea cităm criteriul lui NYQUIST, care utilizează procedee de investigație mixte, algebrice și grafice.

#### 11.4.2. CRITERII DE STABILITATE

11.4.2.1. Criteriul lui HURWITZ. Fie o ecuație algebrică de forma (11.26) scrisă astfel, încît  $a_0 > 0$ .

Se formează tabloul coeficienților sub forma :

$$T_H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

HURWITZ a arătat\*, că pentru ca toate rădăcinile ecuației (11.26) să aibă partea reală negativă este necesar și suficient ca cei  $n$  determinanți principali\*\* care se pot forma din tabloul  $T_H$  să fie pozitivi.

Pentru a ilustra modul cum se utilizează criteriul lui HURWITZ, se va aplica ecuațiilor de gradul 1, 2, 3 și 4.

*Ecuația de gradul 1.* Pentru această ecuație  $n = 1$  și determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = |a_1| = a_1 > 0;$$

cum  $a_0 > 0$ , rezultă că ambii coeficienți ai ecuației trebuie să fie pozitivi. Acest rezultat se poate obține și direct.

*Ecuația de gradul 2.* În acest caz  $n = 2$  și determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix};$$

condițiile de stabilitate sînt

$$a_1 > 0; \quad a_1 a_2 > 0; \quad \text{rezultă } a_2 > 0,$$

adică toți coeficienții ecuației caracteristice trebuie să fie pozitivi, rezultat ce se putea obține de asemenea direct.

\* Vezi [138] pag. 273.

\*\* Determinanții principali sînt cei încadrați cu linii punctate.



*Ecuatia de gradul 3.* În acest caz  $n = 3$  și determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

și condițiile de stabilitate sînt :

$$a_1 > 0 ; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 ; a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0.$$

Comparînd ultimele două relații, rezultă  $a_3 > 0$  ; cum  $a_0 > 0$  și  $a_1 > 0$ , din relația a doua rezultă  $a_2 > 0$ . Rezultă dar, că funcționarea sistemului este stabilă dacă toți coeficienții ecuației caracteristice sînt pozitivi și satisfac relația

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

*Ecuatia de gradul 4.* Pentru această ecuație  $n = 4$  și determinantul lui HURWITZ este

$$\Delta H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

Condițiile de stabilitate ale sistemului sînt

$$a_1 > 0 ; a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 ; a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0 ; a_4 [a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4] > 0,$$

Se deduce ușor că funcționarea stabilă a sistemului se obține atunci, cînd toți coeficienții ecuației caracteristice sînt pozitivi și satisfac relația

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0.$$

**11.4.2.2. Condițiile de funcționare în regim critic sau instabil.** Regimul critic de funcționare a unui sistem este un regim de funcționare limită, între funcționarea stabilă și funcționarea instabilă a sistemului. Acest regim este caracterizat prin aceea, că nu are un element de amortizare și deci, rădăcinile (11.28) ale ecuației caracteristice sînt pur imaginare. Pentru a găsi condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții ecuației caracteristice pentru a corespunde unui sistem funcționînd în regim critic, se substituie în ecuația caracteristică o rădăcină de forma  $s = \pm j\Omega$  și se elimină parametrul  $\Omega$  între cele două relații ce se obțin separînd părțile reale de cele complexe.

Pentru ca un regim de funcționare a unui sistem să nu fie stabil și deci, să se producă oscilații autoîntreținute, este necesar și suficient, ca cel puțin una din condițiile date de criteriul de stabilitate al lui HURWITZ să nu fie satisfăcută ; în aceste condiții, cel puțin una din rădăcini va avea partea reală pozi-



tivă, amortismentul corespunzător va fi *negativ* și deci unda va avea amplitudinea mereu crescătoare.

Pentru a găsi deci, condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții ecuației caracteristice în cazul unui regim instabil de funcționare a unui sistem, se alege din inegalitățile lui HURWITZ pe acelea care dau condiția de funcționare în regim critic și se schimbă sensul acestor inegalități.

Aplicând aceste reguli ecuațiilor de gradul 2, 3 și 4 se obțin următoarele:  
*Ecuația de gradul 2.* Fie ecuația

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0.$$

Făcînd  $s = +j\Omega$  se obține

$$-a_0 \Omega^2 \pm ja_1 \Omega + a_2 = 0$$

de unde relațiile

$$a_1 \Omega = 0; \quad -a_0 \Omega^2 + a_2 = 0.$$

Rezultă condiția de funcționare în *regim critic*

$$a_1 = 0.$$

Condițiile lui HURWITZ pentru regimul stabil fiind  $a_0 > 0$ ,  $a_1 > 0$  și  $a_2 > 0$ , regimul nestabil (autoîntreținut) va fi obținut pentru  $a_1 < 0$ .

*Ecuația de gradul 3.* Făcînd în ecuația (11.26)  $n = 3$ , punînd  $s = \pm j\Omega$  și separînd părțile reale de cele complexe se obțin relațiile

$$-a_0 \Omega^3 + a_2 \Omega = 0; \quad -a_1 \Omega^2 + a_3 = 0,$$

între care eliminînd pe  $\Omega$ , se găsește condiția

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,$$

pentru ca sistemul să funcționeze în regim critic.

Condiția lui HURWITZ, pentru regimul stabil, fiind

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

rezultă că regimul nestabil (autoîntreținut) va fi realizat pentru

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 < 0.$$

*Ecuația de gradul 4.* Procedînd în același mod pentru ecuația de gradul 4 ( $n = 4$ ), se obține condiția pentru funcționarea în regim critic

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 = 0$$

și pentru regimul nestabil (autoîntreținut)

$$a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 < 0.$$



**OBSERVAȚIE.** Criteriul lui HURWITZ este destul de simplu de aplicat; el devine extrem de laborios și practic inutilizabil dacă  $n > 4$ .

**11.4.2.3. Criteriul lui ROUTH \***. Cu coeficienții ecuației caracteristice a sistemului, scrisă astfel încât  $a_0 > 0$ , se formează tabloul

$$T_R = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0^1 & a_2^1 & a_4^1 & \dots \\ a_1^1 & a_3^1 & a_5^1 & \dots \\ a_0^2 & a_2^2 & a_4^2 & \dots \\ a_1^2 & a_3^2 & a_5^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

în care

$$\begin{aligned} a_0^1 &= a_2 - \frac{a_0 a_3}{a_1}; & a_2^1 &= a_4 - \frac{a_0 a_5}{a_1}, & \dots \\ a_1^1 &= a_3 - \frac{a_1 a_2^1}{a_0^1}; & a_3^1 &= a_5 - \frac{a_1 a_4^1}{a_0^1}, & \dots \\ a_0^2 &= a_2^1 - \frac{a_0^1 a_3^1}{a_1^1}; & a_2^2 &= a_4^1 - \frac{a_0^1 a_5^1}{a_1^1}, & \dots \\ a_1^2 &= a_3^1 - \frac{a_1^1 a_2^2}{a_0^2}; & a_3^2 &= a_5^1 - \frac{a_1^1 a_4^2}{a_0^2}, & \dots \\ &\dots & & & \dots \end{aligned}$$

Condiția de stabilitate a lui ROUTH este îndeplinită dacă :

- toți coeficienții ecuației caracteristice sînt pozitivi, adică

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n);$$

- toți termenii primei coloane a tabloului  $T_R$  sînt pozitivi adică

$$a_0^i > 0 \text{ și } a_1^i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Criteriul lui ROUTH conduce la aceleași condiții ca și criteriul lui HURWITZ, fiind însă mai ușor de aplicat. Într-adevăr, pentru o ecuație caracteristică de gradul 3 se obțin condițiile de stabilitate

$$a_0, a_1, a_2, a_3 > 0,$$

$$a_0^1 = a_3 - \frac{a_0 a_2}{a_1} > 0$$

sau

$$a_3 a_1 - a_0 a_2 > 0.$$

\* Vezi [250].



11.4.2.4. Criteriul lui Nyquist\*. Să considerăm un sistem fizic oarecare — un circuit electric de exemplu, cărui aplicându-i un semnal, imaginea răspunsului obținut are expresia (11.24), pe care putem să o punem sub forma

$$\gamma(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (11.30)$$

în care  $A(s)$  și  $B(s)$  sînt două polinoame raționale în  $s$ , gradul polinomului de la numitor fiind în general mai mare decît cel de la numărător; polinomul  $B(s)$  reprezintă funcția caracteristică a sistemului.

Fie  $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_m$  rădăcinile polinomului  $A(s)$ , care se numesc zero-urile funcției (11.30) și  $b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n$  rădăcinile polinomului  $B(s)$ , care se numesc poli funcției (11.30). În ipoteza că poli funcției (11.30) sînt toți așezați în partea stîngă a axei complexe\*\*, să căutăm condiția de stabilitate a acestei expresii. Este evident, că în ipoteza făcută, condiția de stabilitate va depinde de poziția zerourilor funcției (11.30).

Să considerăm funcția

$$D(s) = 1 + \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{B(s)}, \quad (11.31)$$

la care gradul numărătorului este de data aceasta egal cu cel al numitorului. Fie  $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_n$  rădăcinile numărătorului expresiei (11.32); putem scrie:

$$D(s) = 1 + \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s) + B(s)}{B(s)} = \frac{C(s-c_1) \dots (s-c_i) \dots (s-c_n)}{B(s-b_1) \dots (s-b_i) \dots (s-b_n)}. \quad (11.32)$$

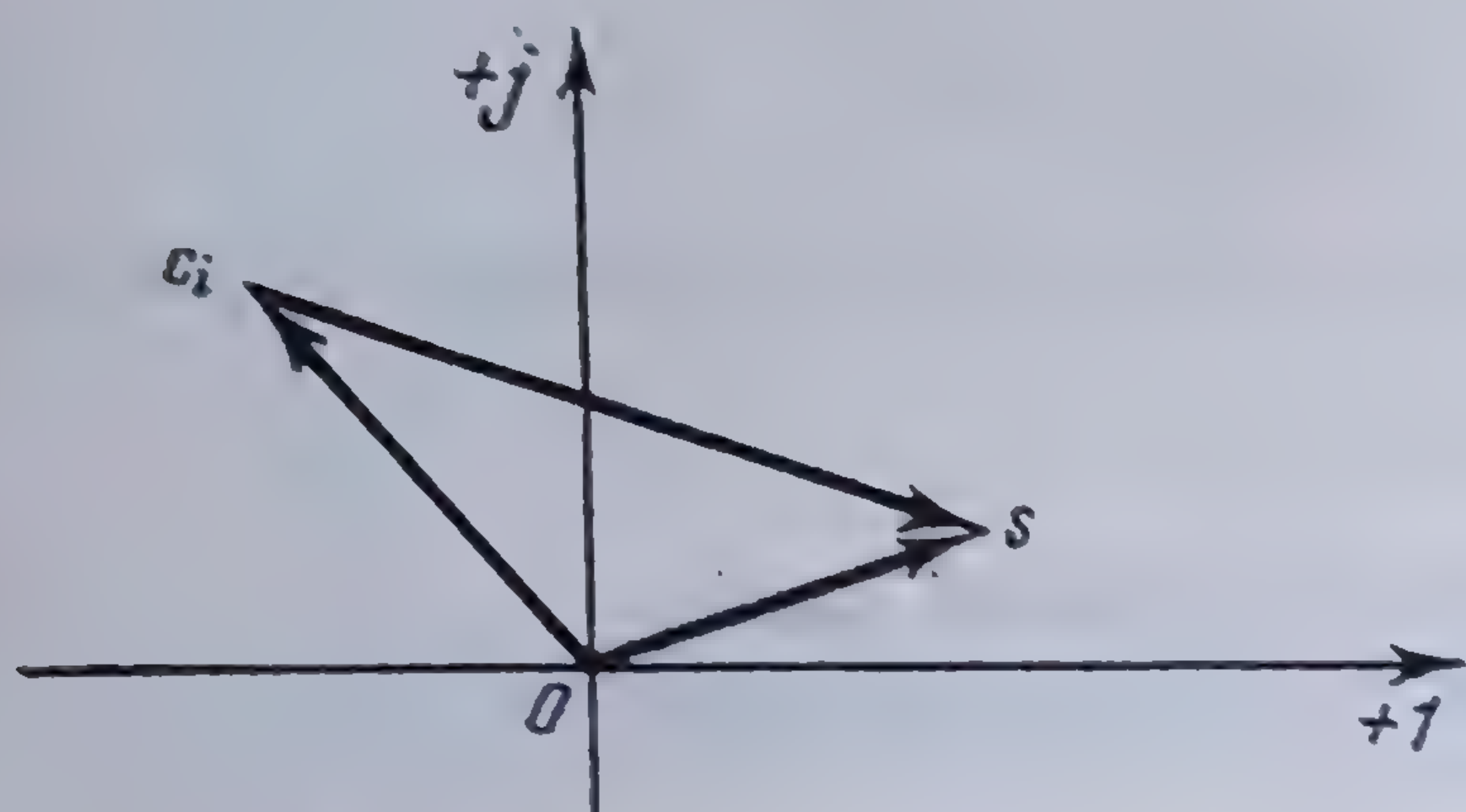


Fig. 11.38. Diagrama vectorială a factorului  $(s - c_i)$ .

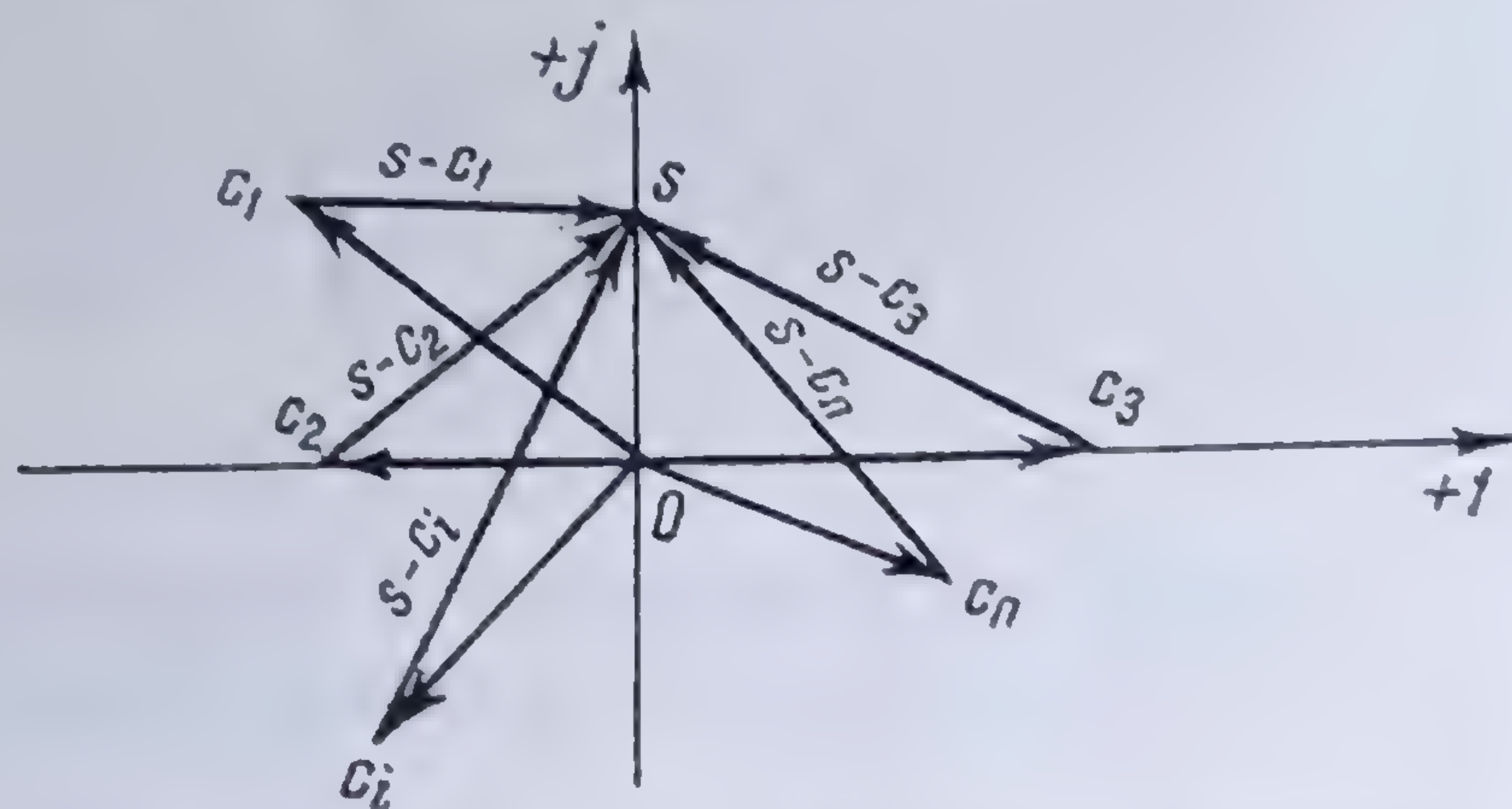


Fig. 11.39. Așezarea rădăcinilor numărătorului în planul complex.

Să reprezentăm în planul complex (fig. 11.38) o rădăcină  $c_i$  și numărul complex  $s = \delta + j\omega$ ; expresia  $(s - c_i)$  va reprezenta un vector egal cu diferența dintre vectorii  $s$  și  $c_i$ . Cum vectorul  $s$  a fost ales arbitrar, putem să-l alegem pur complex și deci situat pe axa complexă. În acest caz, expresia (11.32) poate fi scrisă:

$$D(j\omega) = 1 + \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = \frac{C(j\omega - c_1) \dots (j\omega - c_i) \dots (j\omega - c_n)}{B(j\omega - b_1) \dots (j\omega - b_i) \dots (j\omega - b_n)}, \quad (11.33)$$

astfel că reprezentarea diversilor factori ai produsului de la numărător sau de la numitor poate fi reprezentat ca în figura 11.39.

\* Vezi [201].

\*\* Raționamentul este același dacă se face ipoteza că toate zerourile funcției sînt așezate în stînga axei complexe.



Dacă  $\omega$  variază în mod continuu de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , atunci fiecare vector  $(s-c_i)$  se va roti în jurul originii sale (vîrf vectorului  $c_i$ ) cu un unghi  $\pi$  și anume, *pozitiv* dacă rădăcinile se găsesc în stînga axei complexe și *negativ* dacă ele se găsesc în dreapta acestei axe. Același lucru se poate spune și despre numitorul expresiei (11.33).

Pe de altă parte, atît numărătorul cît și numitorul expresiei (11.33) reprezintă cîte un vector al cărui modul este egal cu produsul modulelor vectorilor reprezentînd factorii respectivi și al cărui argument este egal cu suma argumentelor acestor vectori. Fie

$$C(j\omega) = \prod_1^n C_i | \Sigma \gamma_i$$

și

$$B(j\omega) = \prod_1^n B_i | \Sigma \beta_i$$

acești vectori. În consecință,  $D(j\omega)$  reprezintă cîtul a doi vectori al cărui modul este egal cu cîtul modulelor celor doi vectori, iar argumentul său egal cu diferența argumentelor acestora, adică

$$D(j\omega) = D | \delta = \frac{\prod C_i}{\prod B_i} | \Sigma \gamma_i - \Sigma \beta_i.$$

Ținînd seama de ipoteza făcută, că polii ecuației (11.30) sînt așezați în partea stîngă, rezultă că argumentul vectorului de la numitor va fi egal cu  $n\pi$  atunci cînd  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ ,

$$\Sigma \beta_i = n\pi.$$

Gradul numărătorului expresiei (11.33), respectiv (11.31), fiind tot  $n$ , toate rădăcinile sale vor fi situate în partea stîngă a axei complexe dacă argumentul vectorului reprezentativ este egal cu  $n\pi$ , în cazul cînd  $\omega$  variază continuu de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , adică dacă  $\Sigma \gamma_i = n\pi$ .

Dacă această condiție este îndeplinită, atunci vectorul

$$D(j\omega) = 1 + \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = D | \delta \quad (11.34)$$

are argumentul egal cu zero cînd  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ .

Din punct de vedere geometric, această condiție este îndeplinită dacă originea axelor de coordonate, care este și originea vectorului  $D(j\omega)$ , este situată în afara curbei locului geometric al extremității acestui vector, cînd  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , sau să se găsească pe această curbă. Într-adevăr, în acest caz



(fig. 11.40), unghiul pornind de la o valoare 0 pentru  $\omega = 0$ , ajunge la valoarea 0 pentru  $\omega = +\infty$ ; în cazul când originea se găsește în interiorul curbei, unghiul respectiv variază de la 0 la  $\pi$  și condiția enunțată mai sus nu este îndeplinită.

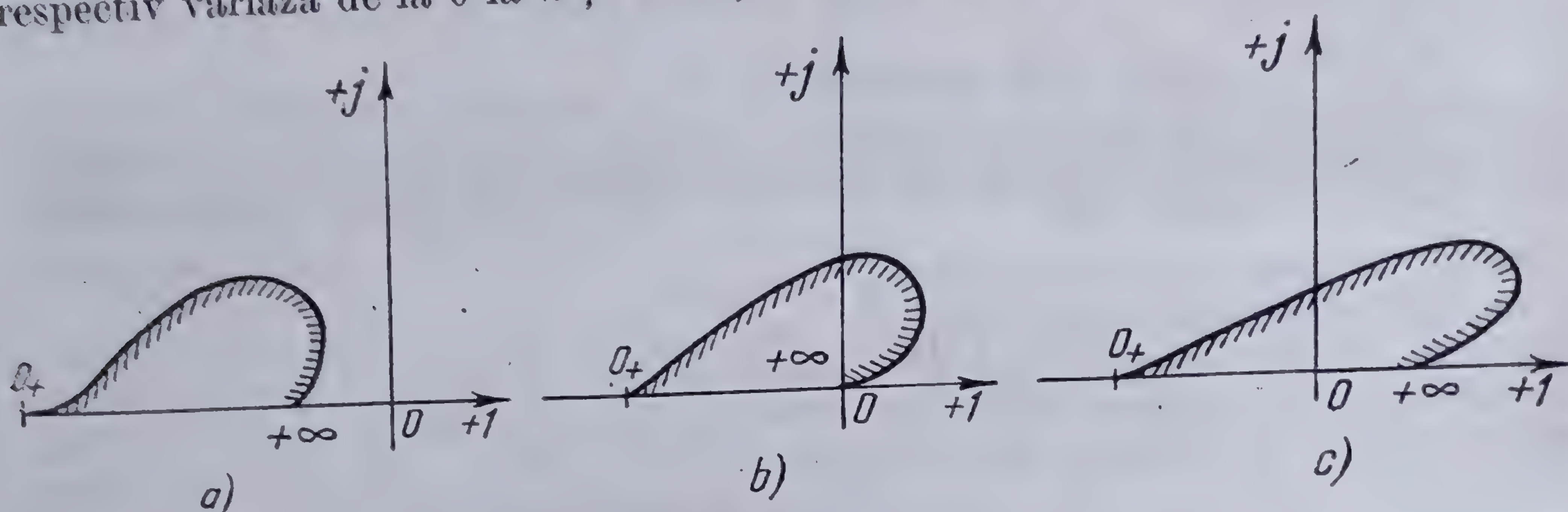


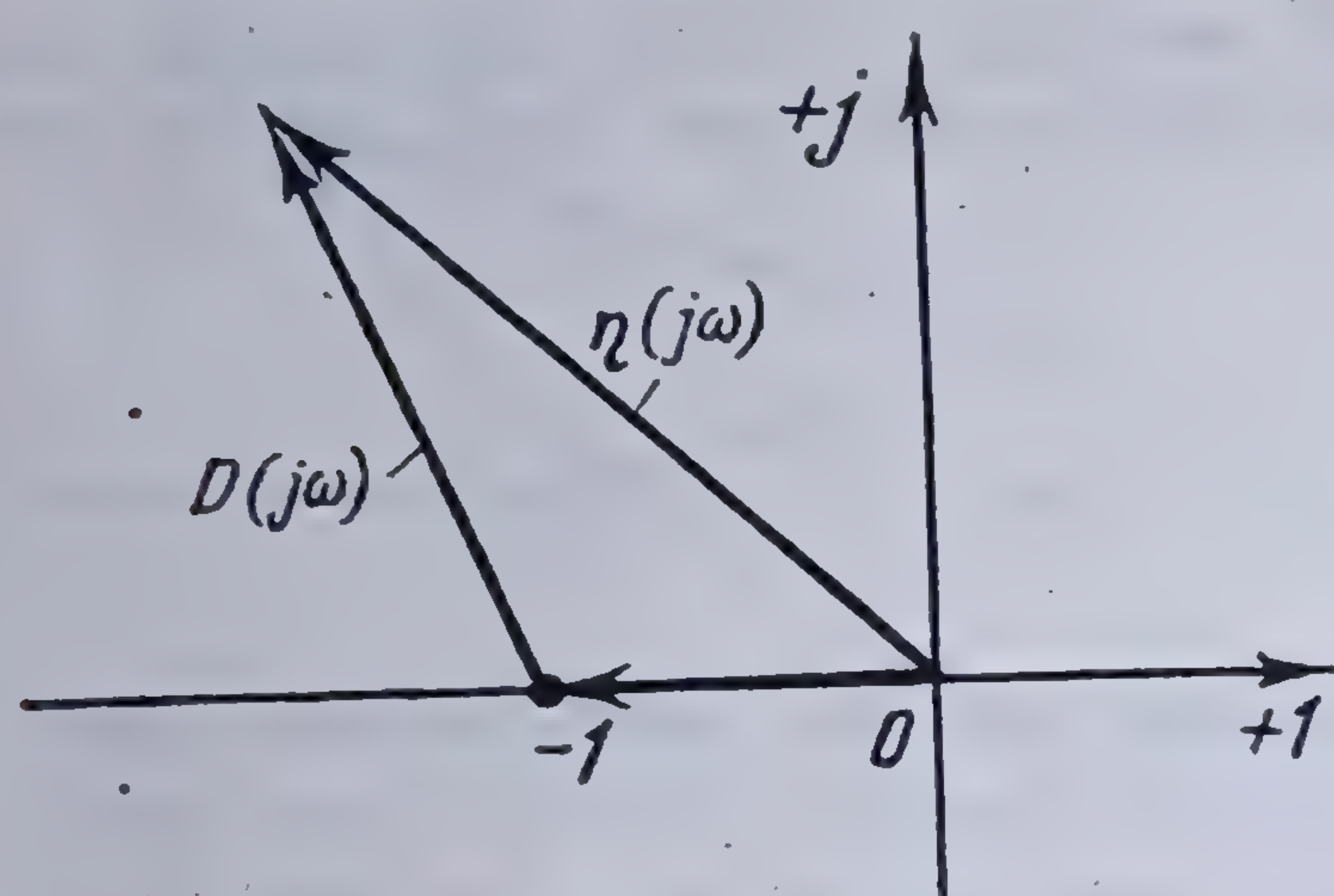
Fig. 11.40. Locul geometric al vectorului  $D(j\omega)$  în diverse situații ale sistemului: a) și b) sistem stabil; c) sistem instabil.

În consecință, dacă locul geometric al vectorului (11.33) este în afara originii atunci sistemul a cărei funcționare este dată de ecuația (11.31) este stabil.

Pentru a deduce acum condiția de stabilitate a relației (11.30) să mutăm originea axelor de coordonate în punctul  $(-1, j0)$  (fig. 11.41) și rezultă imediat că

$$\eta(j\omega) = D(j\omega) - 1 = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \quad (11.35)$$

ceea ce înseamnă că, în acest caz, originea vectorului  $D(j\omega)$  este în punctul  $(-1, j0)$  și în consecință condiția de stabilitate a expresiei (11.30) este ca punctul  $(-1, j0)$  să fie în afara locului geometric al vectorului



$$\eta(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)},$$

și este instabil dacă acest punct este cuprins de curba respectivă.

Regula enunțată mai sus constituie criteriul de stabilitate *amplitudine-fază* a lui NYQUIST.

Fig. 11.41. Legătura între vectorii  $D(j\omega)$  și  $\eta(j\omega)$ .

În general locul geometric al vîrfurilor vectorului  $\eta(j\omega)$  pentru variația frecvenței de la  $-\infty$  la 0 este conjugat locului geometric al aceluiași vector, în cazul când  $\omega$  variază de la  $\infty$  la 0 și deci, este suficient a trasa acest loc numai pentru variația frecvenței de la 0 la  $+\infty$ .

Studiul de mai sus a fost făcut în ipoteza că funcția (11.30) are toți poli săi situați în semiplanul din stînga axei complexe. Regula rămîne valabilă și în cazul când unul din poli se află în origine. În acest caz, curba locului geometric este o curbă asimptotă la axa complexă și pentru a avea curba închisă, necesară, se completează cu un semicerc cu raza infinită astfel ales, încît parcurgînd axa complexă de la 0 la  $+\infty$  — ceea ce corespunde sensului orar — semicercul să fie parcurs în același sens.

Dacă punctul  $(-1, j0)$  este cuprins între curbă și acest semicerc, sensurile de parcurgere fiind aceleași, sau punctul este în afara curbei, sistemul este stabil



fig. 11.42); el este instabil în cazul cînd punctul se găsește în interiorul curbei și aceasta este parcursă în sensuri contrarii în raport cu punctul (fig. 11.43).

Aceasta se poate vedea ușor, vectorul cu originea în punctul  $(-1, j0)$  făcînd o rotație completă (de unghi  $2\pi$ ) în cazul sistemelor instabile și incompletă (de unghi  $< 2\pi$ ) în cazul sistemelor stabile.

O metodă simplă pentru a vedea dacă sistemul e stabil este următoarea: se trasează hașuri pe dreapta curbei, dacă se merge de la 0 la  $+\infty$ , sau pe stînga curbei dacă se merge de la 0 la  $-\infty$ ; dacă punctul e de partea curbei unde nu sînt hașuri, sistemul e stabil; în caz contrar, este instabil.

Fig. 11.42. Sisteme stabile.

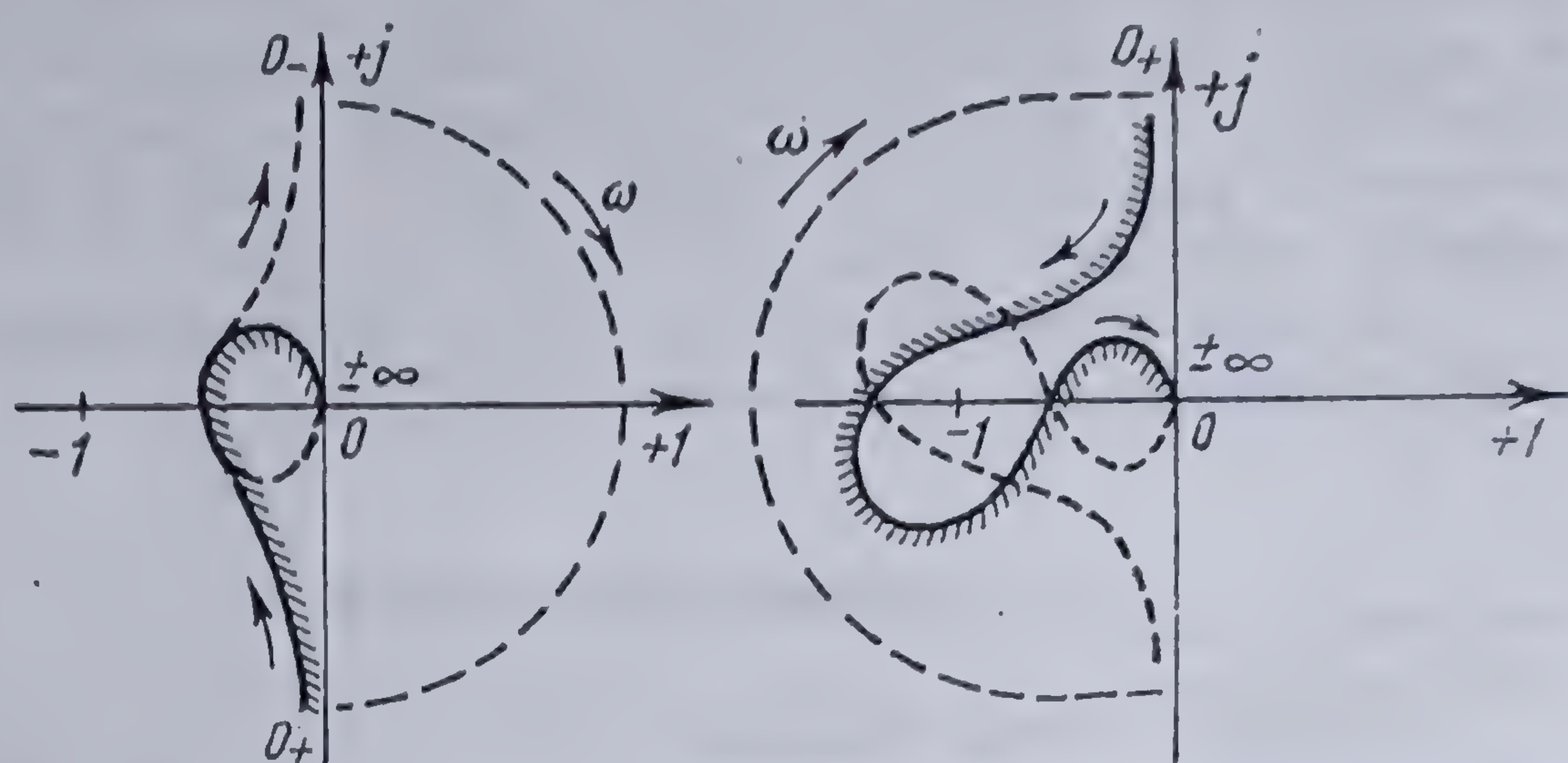
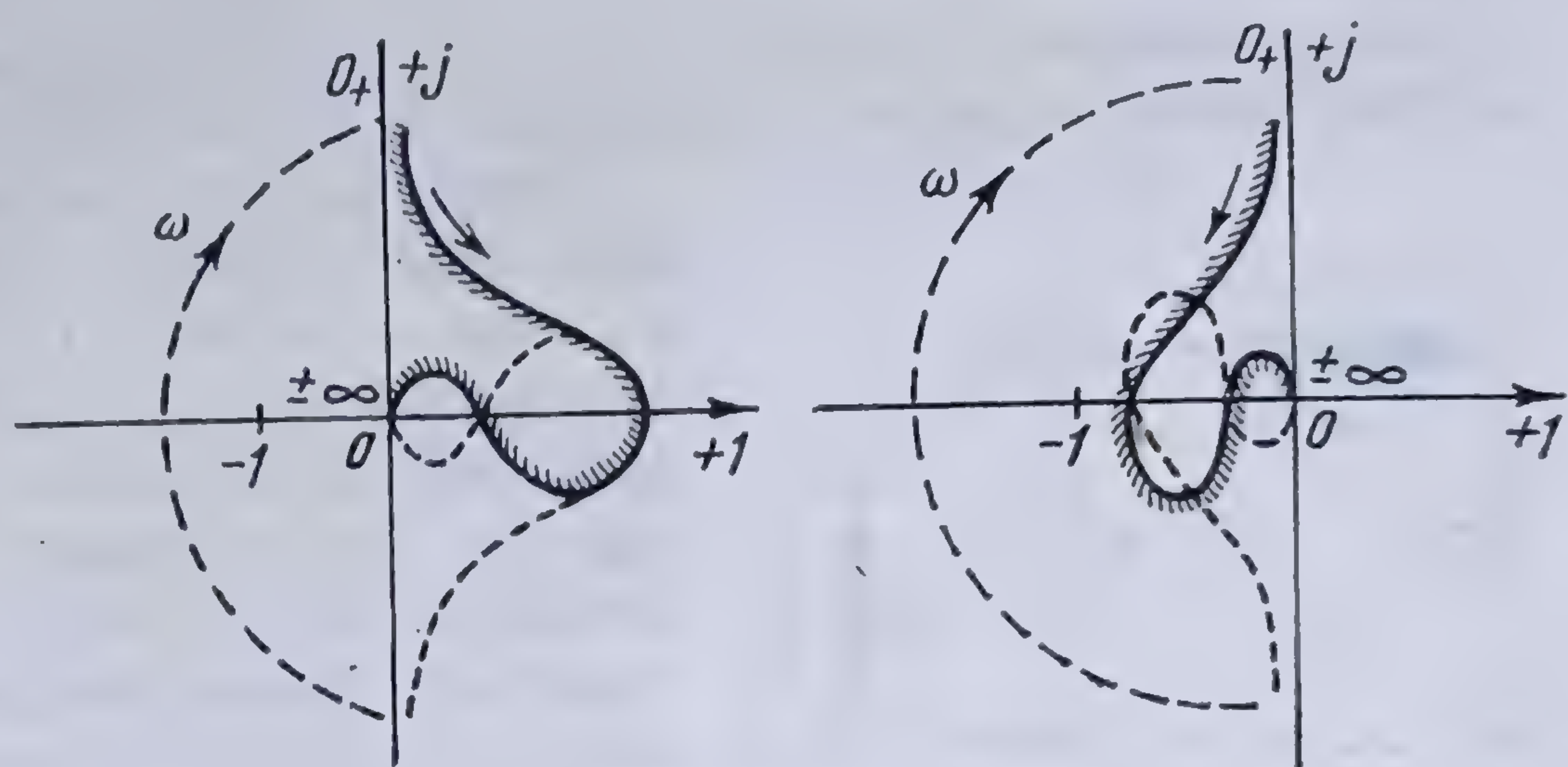


Fig. 11.43. Sistem instabil.



Cînd polul nul este multiplu, atunci se vor trasa o serie de semicercuri de rază infinită egală cu gradul de multiplicare al rădăcinii nule\*.

**OBSERVAȚIE.** Pe cînd criteriile de stabilitate ale lui HURWITZ și ROUTH sînt bazate pe considerații pur matematice, privind proprietățile ecuațiilor algebrice, criteriul de stabilitate al lui NYQUIST dă posibilitatea unei ușoare interpretări fizice.

Criteriul lui NYQUIST are o serie de proprietăți, care îl fac util în studiul stabilității sistemelor fizice și în special în acelea cu reacție. Astfel, el informează asupra existenței de rădăcini ale ecuației caracteristice în semiplanul pozitiv; diagrama construită pentru studiul stabilității unui sistem poate da indicații asupra stabilității sistemului și poate sugera calea de urmat pentru îmbunătățirea stabilității sistemului, în caz de necesitate. De asemenea, criteriul de stabilitate dă posibilitatea să se examineze acțiunea independentă a diverselor elemente ale sistemului asupra stabilității acestuia.

\* Pentru o demonstrație completă și riguroasă a criteriului lui Nyquist, vezi [94].



Pentru a se putea aplica criteriul de stabilitate al lui NYQUIST este necesar și suficient, ca ecuațiile diferențiale care definesc funcționarea sistemului să fie liniare, cu coeficienți constanți; în afară de aceasta este necesar ca funcția  $G(s) \cdot H(s)$  din relația (11.24) să tindă către o limită pozitivă sau nulă când  $|s|$  tinde către infinit.

Prima condiție se datorează faptului, că aplicarea acestui criteriu se face asupra unor expresii, care rezultă din aplicarea transformatei LAPLACE a relațiilor, care definesc funcționarea sistemului. Sînt cazuri cînd însă, deși parametrii sistemului nu sînt constanți în întreg domeniul de funcționare a acestuia, pentru oscilațiile care iau naștere în momentul amorsării fenomenului, care în acest caz au amplitudine mică, se poate admite că toate caracteristicile elementelor care constituie acest sistem pot fi confundate cu tangentele lor; aceasta înseamnă că fenomenul producerii oscilațiilor unui sistem în jurul punctului de amorsare poate fi considerat liniar și studiat ca atare.

A doua condiție este inherentă sistemelor fizice a căror constituție este analoagă celeia a servomecanismelor.

### 11.4.3. EXEMPLE DE APLICAȚIE

11.4.3.1. Arcul cîntător. Arcul cîntător a fost utilizat la începutul telegrafiei fără fir pentru producerea oscilațiilor autoîntreținute, necesare posturilor emițătoare.

Fie un circuit electric serie, format dintr-un rezistor de rezistență  $R$ , o bobină de inductanță  $L$  și un condensator de capacitate  $C$  la bornele căruia se produce un arc electric  $A$  (fig. 11.44). Acest arc este alimentat de o sursă de tensiune constantă  $E$ , care debitează printr-o rezistență  $\rho$ . Se caută condițiile pe care trebuie să le îndeplinească parametrii circuitului pentru ca circuitul să constituie un sistem autoîntreținut. Se presupune că, în imediata vecinătate a punctului de funcționare stabilă (înainte de introducerea circuitului  $LC$ ), caracteristica *volt-ampere* a arcului electric este liniară, de forma

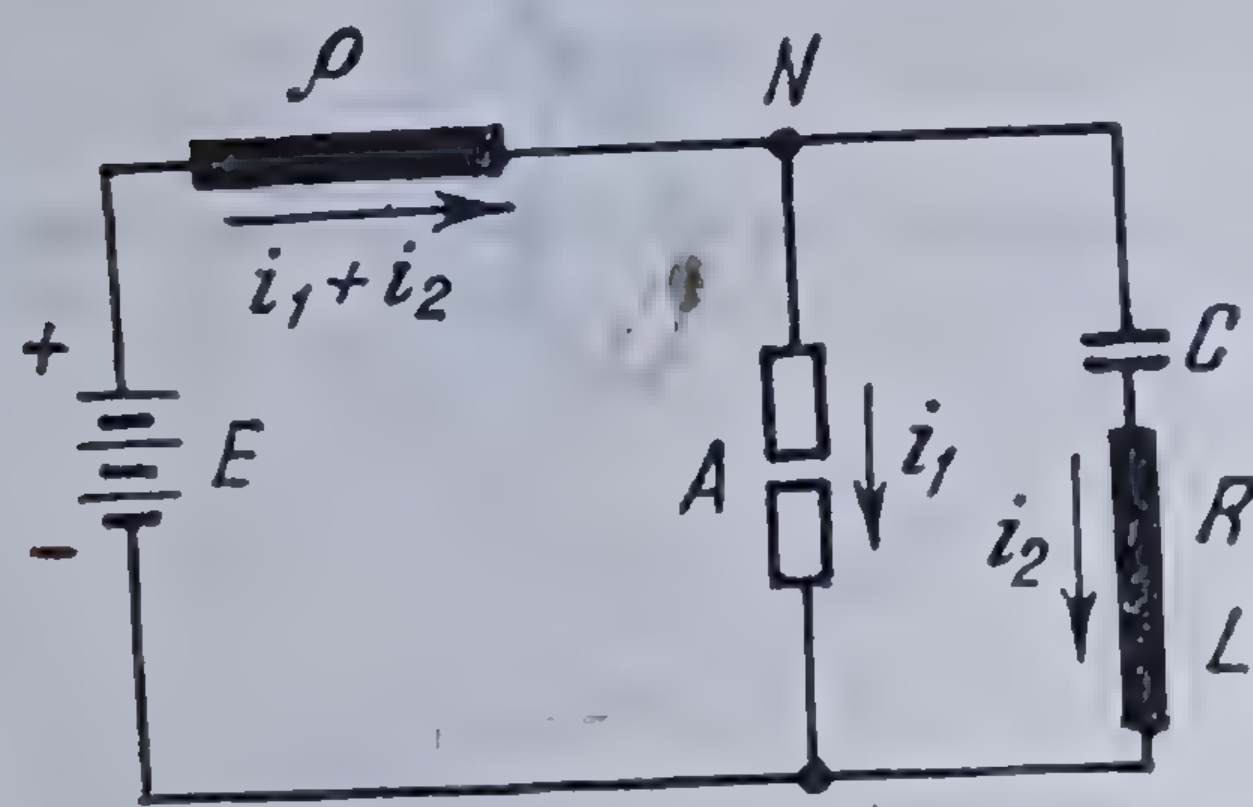


Fig. 11.44. Circuitul unui arc cîntător.

$$u_1 = a + bi ;$$

rezistența dinamică a arcului este deci,

$$b = \frac{du_1}{di_1}.$$

Pentru stabilirea ecuației caracteristice a circuitului, se aplică, în operațional, metoda potențialelor la noduri, nodului  $N$ .

Se găsește

$$\left[ \frac{1}{\rho} + \frac{1}{b} + \frac{1}{Z(s)} \right] \mathcal{L}V_N = \frac{\mathcal{L}E}{\rho}$$

în care,

$$Z(s) = R + Ls + \frac{1}{Cs}$$

este impedanța operațională a circuitului serie.



Ecuatia caracteristică a sistemului este\*

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{b} + \frac{1}{Z(s)} = 0$$

sau, dezvoltînd și ținînd seama că nici unul din parametrii circuitului nu este nul,

$$CL(b + \rho)s^2 + C[(b + \rho)R + b\rho]s + (b + \rho) = 0.$$

Pentru ca arcul electric care se produce să fie autoîntreținut, trebuie ca circuitul să fie instabil; ecuația caracteristică fiind de gradul 2, condiția de instabilitate este\*\*

$$C[(b + \rho)R + b\rho] < 0,$$

de unde rezultă

$$-b > \frac{\rho R}{\rho + R}.$$

Rezultă dar, că  $b$  trebuie să fie negativ, cu alte cuvinte, caracteristica *volt-amper* a arcului să fie descrescătoare, și valoarea absolută a lui  $b$  să fie mai mare decît rezistența echivalentă a rezistențelor  $\rho$  și  $R$  legate în paralel.

În realitate, caracteristica dinamică a arcului electric prezintă un fenomen analog fenomenului de histeresis, formînd o curbă închisă oarecare (fig. 11.45) astfel, încît condițiile de stabilire a unui arc cîntător sînt mai greu de îndeplinit.

**11.4.3.2. Condiția de prindere a unui generator electric de curent continuu cu excitația în derivație\*\*\*.** Fie un generator electric de curent continuu cu excitația în derivație (fig. 11.46) care debitează pe o rezistență exterioară  $R$ . Presupunem, pentru simplificare, că circuitul de excitație nu este saturat și că inductanța indusului și a sarcinii sînt nule. Fie  $N$  numărul de conductoare a înfășurării induse,  $n$  turația mașinii,  $\Phi_0$  fluxul datorit inducției remanente,  $\rho$  și  $r$  rezistențele respectiv ale indusului și inductorului,  $L$  inductanța proprie a inductorului,  $i$  curentul de excitație și  $I$  curentul debitat de mașină. Presupunem, de asemenea, că numărul de căi de curent a mașinii electrice este egal cu numărul său de poli.

Ținînd seama că forța electromotoare a mașinii e dată de relația

$$e = N n \Phi_0 + K n i,$$

\* Vezi 10.4.2.1.

\*\* Vezi 11.4.2.2.

\*\*\* Vezi [192] pag. 438 și 3.3.3.3.

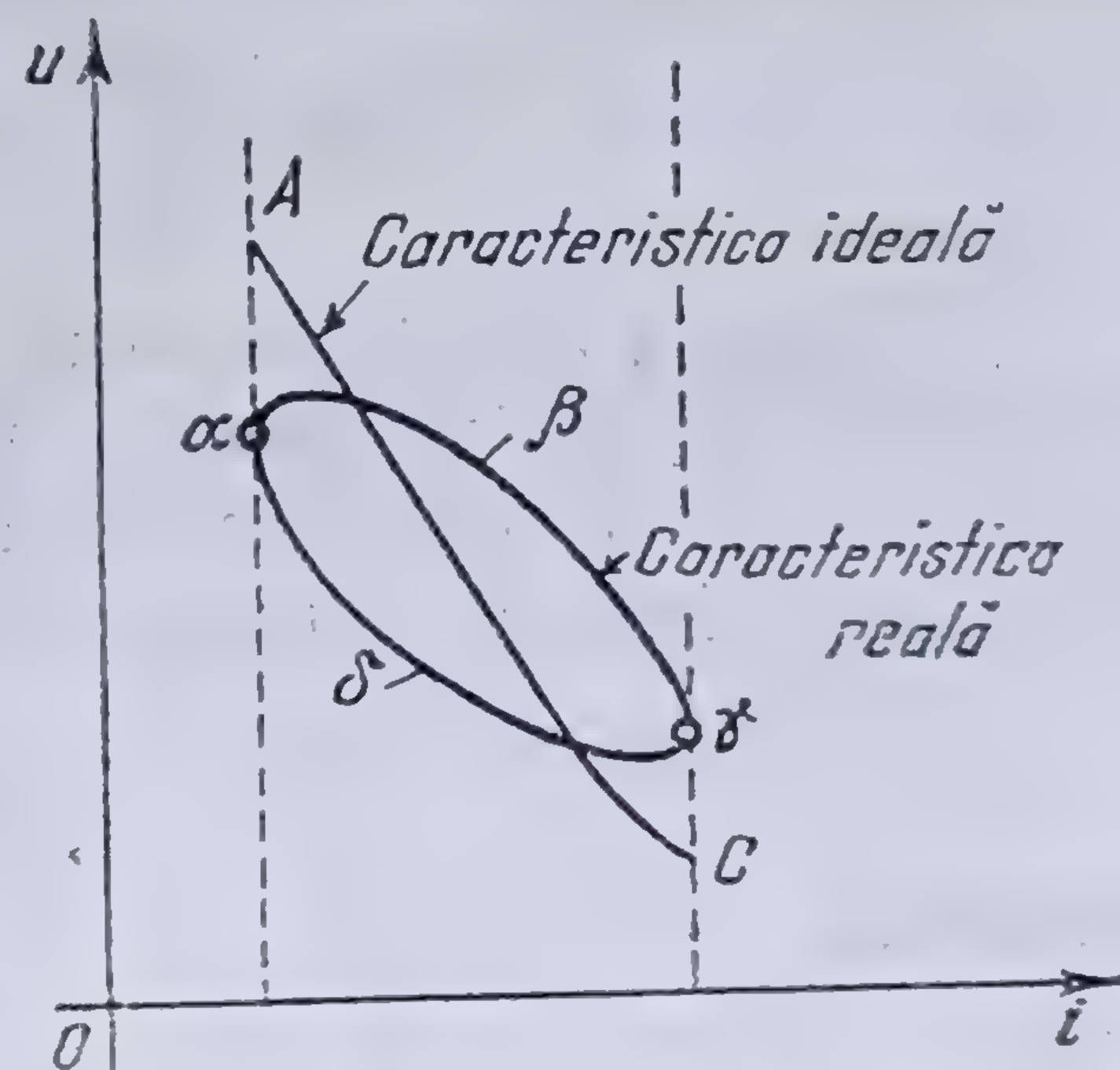


Fig. 11.45. Caracteristica volt-amper a unui arc electric.

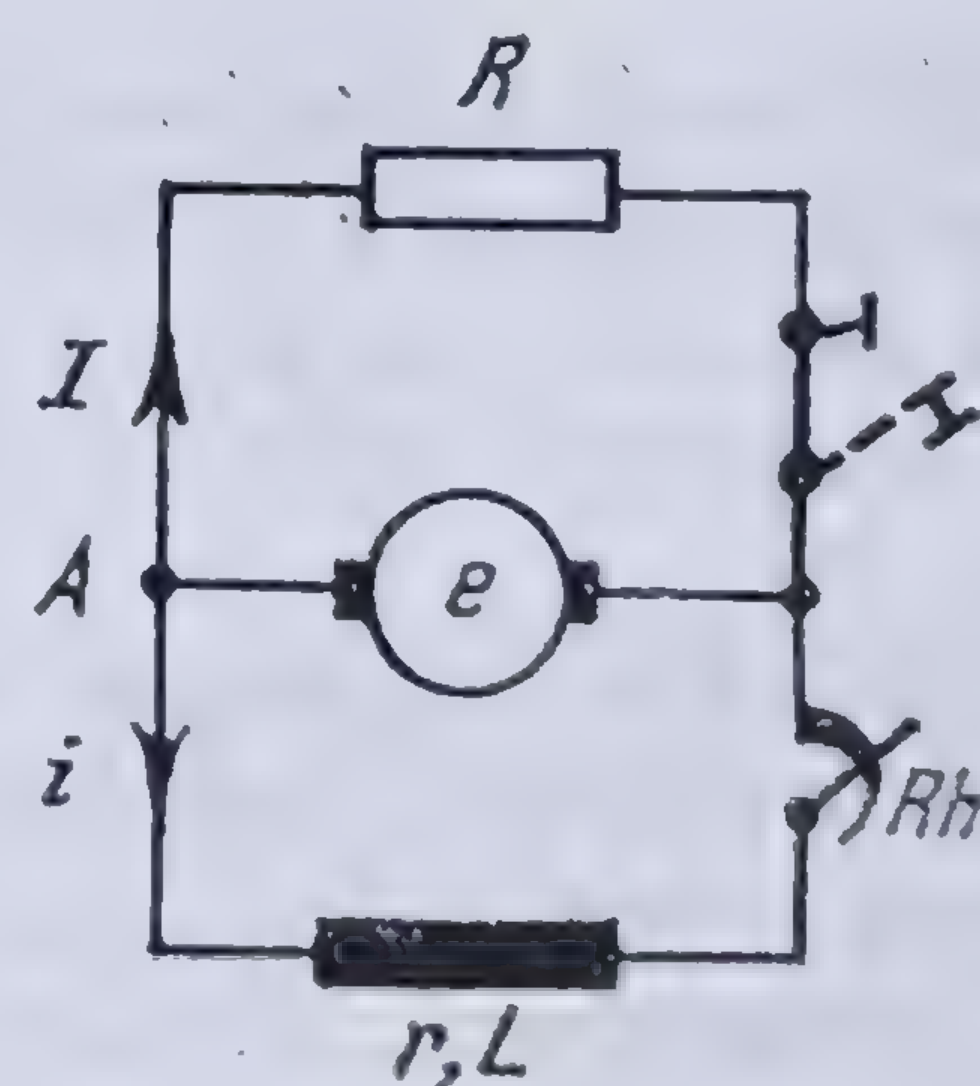


Fig. 11.46 Generator electric de curent continuu cu excitația în derivație.



unde  $K$  este o constantă, aplicînd metoda potențialelor la noduri nodului  $A$ , se găsește

$$\left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{Ls + r} \right) \mathcal{E}V_A = \frac{n}{\rho} (N \mathcal{E}\Phi_0 + K \mathcal{E}i),$$

de unde rezultă

$$\mathcal{E}V_A = \frac{n(N \mathcal{E}\Phi_0 + K \mathcal{E}i) (Ls + r) R}{\rho R + (Ls + r) (R + \rho)}.$$

Curentul de excitație fiind dat de relația

$$\mathcal{E}i = \frac{\mathcal{E}V_A}{Ls + r},$$

rezultă imediat ecuația operațională care definește acest curent

$$[R\rho + (Ls + r)(R + \rho) - KnR_1] \mathcal{E}i = RNn \mathcal{E}\Phi_0.$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$(R + \rho)Ls + r(R + \rho) + R\rho - KnR = 0.$$

Pentru ca generatorul electric să se „prindă” este necesar ca tensiunea la bornele sale să crească cu timpul — pînă la tensiunea nominală a mașinii —, deci sistemul respectiv să fie instabil. Condiția necesară și suficientă este ca termenul liber al ecuației caracteristice să fie negativ; în cazul de față

$$r(R + \rho) + R\rho - KnR < 0.$$

Rezultă

$$n > \frac{r(R + \rho) + R\rho}{KR} = \frac{r + \rho + \frac{r\rho}{R}}{K}. \quad (11.36)$$

În consecință, generatorul electric de curent continuu cu excitație se va prinde din momentul în care turația sa va depăși o anumită valoare, dată de relația (11.36). Se vede ușor, că mașina se poate prinde și în gol ( $R = \infty$ ), dar nu se va prinde niciodată dacă funcționează în scurtcircuit ( $R = 0$ ).

**11.4.3.3. Exemple de utilizare ale criteriului lui NYQUIST.** Fără a insista asupra modului cum se stabilesc relațiile respective\*, vom arăta modul cum se aplică criteriul lui NYQUIST:

*Exemplul 1.* Fie ecuația

$$\eta(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

care reprezintă funcția de transfer a unui regulator de tensiune, a unui regulator de viteză, a unui aparat de măsură etc.

\* Vezi 11.4.1.2.



Efectuând produsul de la numitor, înlocuind pe  $s$  cu  $j\omega$  și separând părțile reale de cele complexe, relația dată se poate scrie

$$\eta(j\omega) = \frac{K(-a_0\omega^2 + 1)}{(-a_0\omega^2 + 1)^2 + a_1^2\omega^2} - j \frac{Ka_1\omega}{(-a_0\omega^2 + 1)^2 + a_1^2\omega^2}$$

în care  $a_0 = T_1 T_2 > 0$  și  $a_1 = (T_1 + T_2) > 0$ .

Caracteristica amplitudine-fază se construiește prin puncte (fig. 11.47)\*, avem astfel :

$$|\eta(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(-a_0\omega^2 + 1)^2 + a_1^2\omega^2}}$$

și

$$\operatorname{tg}\varphi = - \frac{a_1\omega}{(-a_0\omega^2 + 1)^2 + a_1^2\omega^2}.$$

Pentru  $\omega = 0$  :  $|\eta(j\omega)| = K$ ;

$$\operatorname{tg}\varphi = 0; \varphi = 0,$$

$$\omega = \infty : |\eta(j\omega)| = 0;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 0; \varphi = \pi;$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{a_0}} : |\eta(j\omega)| = K \frac{\sqrt{a_0}}{a_1};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\infty; \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Rezultă, că pentru orice valoare a lui  $K$ , sistemul considerat este întotdeauna stabil.

*Exemplul 2.* Fie ecuația

$$\eta(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

care reprezintă, de exemplu, funcția de transfer a unui regulator de poziție comandat de un motor electric.

Procedînd ca și în cazul precedent, se găsește că argumentul maxim este  $\frac{3\pi}{2}$

(în sensul orar). Rezultă că stabilitatea sistemului depinde de mărimea parametrului  $K$  (fig. 11.48)\*\*.

\* Curba a fost trasată pentru cazul particular  $T_1 = 0,5$ ,  $T_2 = 0,04$  și  $K = 20$  [80].

\*\* Curbele au fost construite pentru cazurile particulare  $T_1 = \frac{1}{4}$ ,  $T_2 = \frac{1}{16}$ ,  $K_1 = 10$  curba A) și  $K = 100$  (curba B).

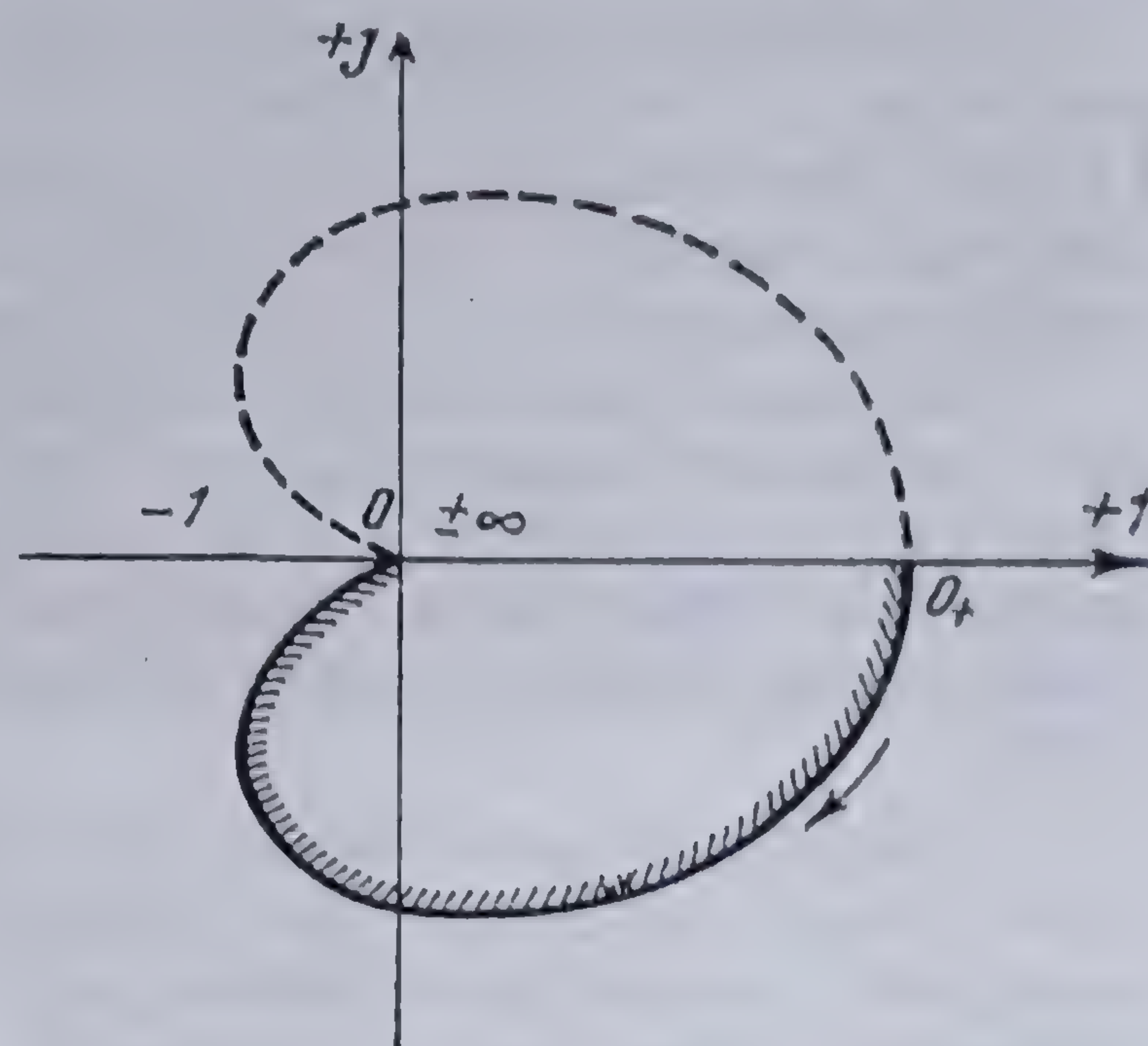


Fig. 11.47. Caracteristica amplitudine-fază a unui regulator stabil.

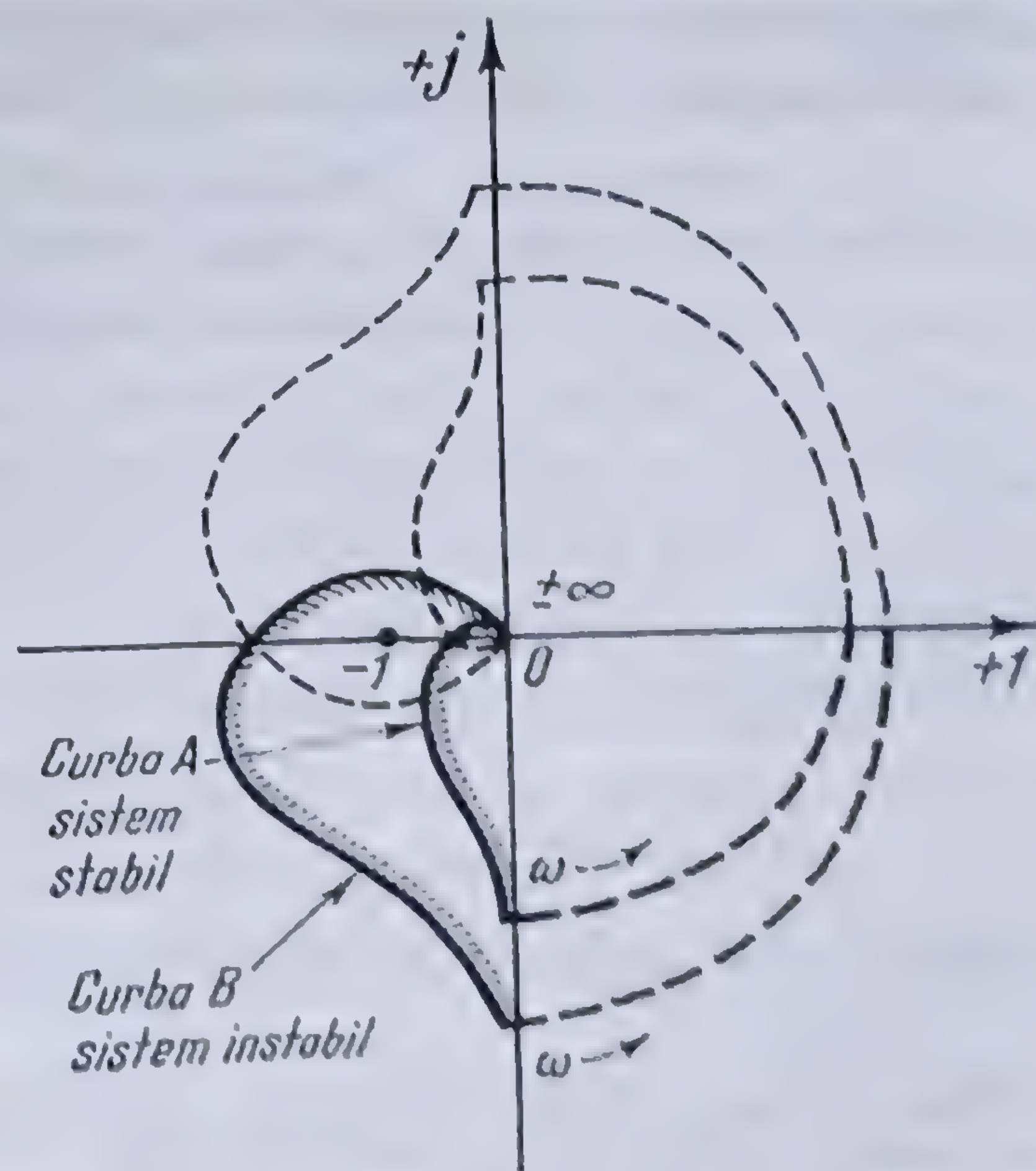


Fig. 11.48. Caracteristica amplitudine-fază a unui regulator comandat.



#### 11.4.4. STABILITATEA SISTEMELOR NELINIARE

11.4.4.1. **Generalități \***. Stabilitatea unui sistem liniar depinde numai de parametrii sistemului respectiv și este independentă de amplitudinea semnalului aplicat. Criteriile de stabilitate (HURWITZ, ROUTH, NYQUIST etc.) dau posibilitatea să se știe dacă un sistem, în prealabil în echilibru, supus la timpul  $t$  la un semnal sau la o perturbație oarecare, revine la o nouă stare de echilibru, în cazul unui sistem stabil, sau va căpăta o oscilație autoîntreținută, în cazul unui sistem instabil.

Stabilitatea unui sistem neliniar depinde atât de parametrii sistemului respectiv cât și de amplitudinea semnalului aplicat sau a funcției perturbatoare. În plus, variabila aservită poate da mai multe tipuri de răspunsuri atunci când încetează semnalul sau perturbația. Este posibil astfel, să apară o *funcționare stabilă* sau *instabilă* a sistemului, analog cu acelea care apar în sistemele liniare.

În cazul când condițiile de funcționare ale unui sistem neliniar sînt astfel, încît parametrii sistemului considerat variază puțin față de valoarea lor liniară, atunci când caracteristica lor *volt-amper* poate fi confundată cu tangenta în punctul de funcționare considerat, în cazul când semnalul nu are o valoare foarte mare, sistemul poate fi considerat liniar din punctul de vedere al stabilității.

Răspunsul unui sistem supus unei perturbații oarecare poate să se prezinte uneori sub forma unor oscilații autoîntreținute, cu amplitudine maximă constantă; aceste amplitudini pot fi cuprinse sau nu între niște limite definite de precizia funcționării sistemului.

Trebuie observat, că examinarea producerii oscilațiilor autoîntreținute nu trebuie limitată numai la considerații de amplitudine. Trebuie văzut, în special, dacă ele sînt destul de mici, pentru a putea fi *tolerate* de sistem sau din cauza acestor amplitudini, ele *nu pot fi tolerate* de sistem; în primul caz sistemul e *stabil*, în al doilea caz el este *instabil*.

În consecință, amplitudinea unui semnal sau a unei perturbații poate fixa tipul de răspuns a unui sistem neliniar. Un asemenea sistem este stabil, în sensul definit la sistemele liniare, dacă este supus unor semnale de intrare de amplitudine mică. Dacă aceste semnale au o amplitudine mai mare, sistemul poate fi sediul unor oscilații autoîntreținute cu amplitudine maximă constantă. În cazul când amplitudinile sînt și mai mari, sistemul poate fi instabil, în sensul definit la sistemele liniare.

Rezultă dar, că înainte de a verifica stabilitatea unui sistem neliniar, este absolut necesar să se fixeze condițiile sale de utilizare.

11.4.4.2. **Punerea problemei în ecuație\***. Să considerăm schema funcțională a unui sistem simplu cu reacție totală (fig. 11.49). Elementele circuitului de

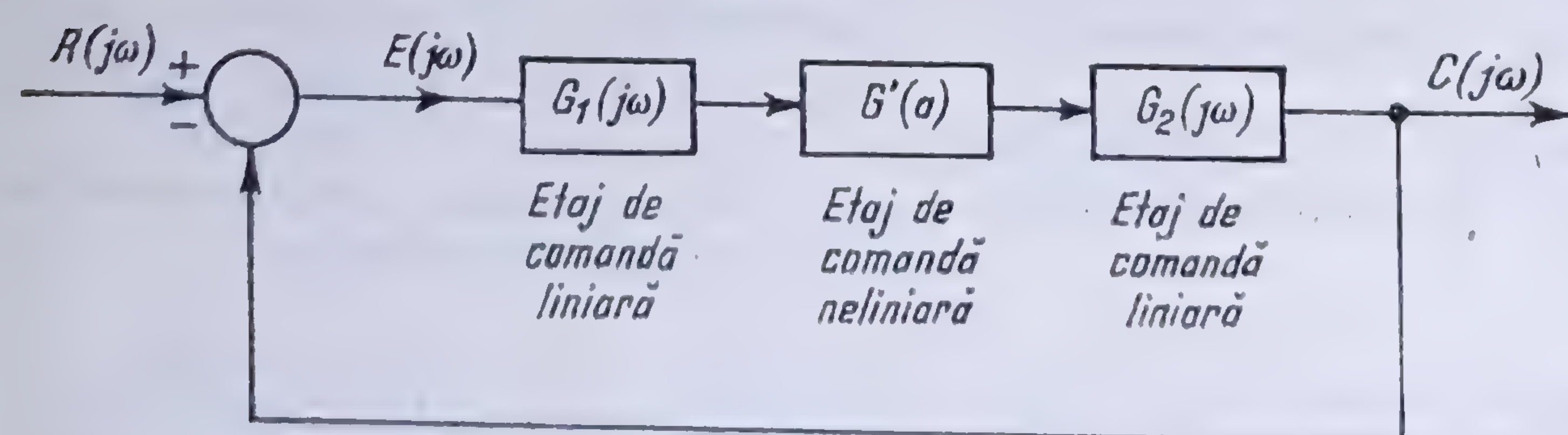


Fig. 11.49. Sistem simplu de comandă cu elemente liniare și neliniare.

\* Vezi [80].



acțiune, reprezentate prin funcțiile de transfer  $G_1(j\omega)$  și  $G_2(j\omega)$ , sînt liniare. În consecință, ele variază cu pulsația  $\omega$  independent de amplitudinea  $a$  a semnalului respectiv de intrare. Se poate scrie deci\*

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega).$$

Această relație ne arată în plus că, poziția în schemă a elementului neliniar e indiferentă\*\*.

Elementul de comandă reprezentat prin funcția de transfer  $G'(a)$  este neliniar, el depinde de amplitudinea semnalului sinusoidal aplicat și este independent de frecvența acestuia.

Urmînd teoria aplicată la sistemele liniare\*\*\*, se găsește

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G'(a) G(j\omega)}{1 + G'(a) G(j\omega)}. \quad (11.37)$$

Pentru a stabili condițiile de instabilitate (în sensul definiției date acestei noțiuni în sistemele liniare), să anulăm numitorul expresiei (11.37); se obține

$$1 + G'(a) G(j\omega)$$

sau

$$G(j\omega) = -\frac{1}{G'(a)}, \quad (11.38)$$

care este condiția de apariție a oscilațiilor autoîntreținute. Relația (11.38) poate să fie astfel, încît să nu existe decît o singură valoare posibilă de producere a acestor oscilații autoîntreținute, pentru o anumită valoare a amplitudinii corespunzătoare unei anumite frecvențe.

În practică, valorile calculate pentru amplitudinea și frecvența oscilațiilor autoîntreținute diferă sensibil de valorile corespunzătoare deduse *experimental*. Astfel, această metodă este numai un mijloc de a determina calitativ performanțele unui sistem neliniar; în practică este necesar să se introducă un coeficient de siguranță pentru a fi siguri că se vor obține rezultate mulțumitoare.

Există numeroase metode de studiu a stabilității sistemelor neliniare. În paragraful următor se va examina una din acestea, care are o mare analogie cu criteriul lui NYQUIST, utilizat în sistemele liniare.

**11.4.4.3. Metoda planului complex\*\*\*\*.** Fie un sistem, care comportă în circuitul său un amplificator saturabil (fig. 11.50); caracteristica ideală de saturație a amplificatorului este dată în figura 11.51, iar în

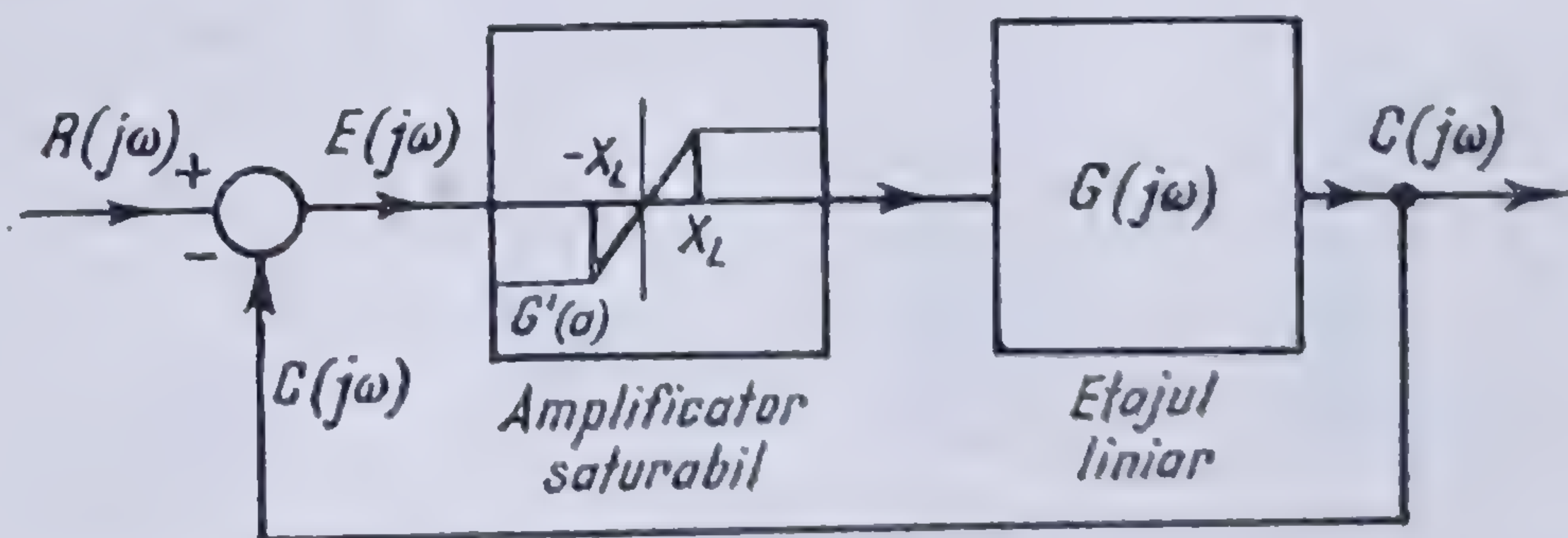


Fig. 11.50. Sistem comportînd un amplificator saturabil.

\* Vezi 6.3.1.5.

\*\* Afirmatie valabilă numai într-o primă aproximație.

\*\*\* Vezi 11.4.1.2.

\*\*\*\* Vezi [80].



tabloul 11.3 sînt date elementele care caracterizează funcția descriptivă  $G'(a)$ . În figura 11.52 a fost construită caracteristica  $G(j\omega)$  a sistemului dat, în funcție de frecvență și o funcție descriptivă  $G'(a)$  și inversa sa cu semnul schimbat în funcție de raportul  $X_L/X_{max} = a_1$ . Să presupunem că se aplică sistemului un semnal sub forma unei funcții treaptă. Eroarea inițială aplicată la intrarea amplificatorului saturabil este egal cu amplitudinea  $X_{max}$  a semnalului de referință.

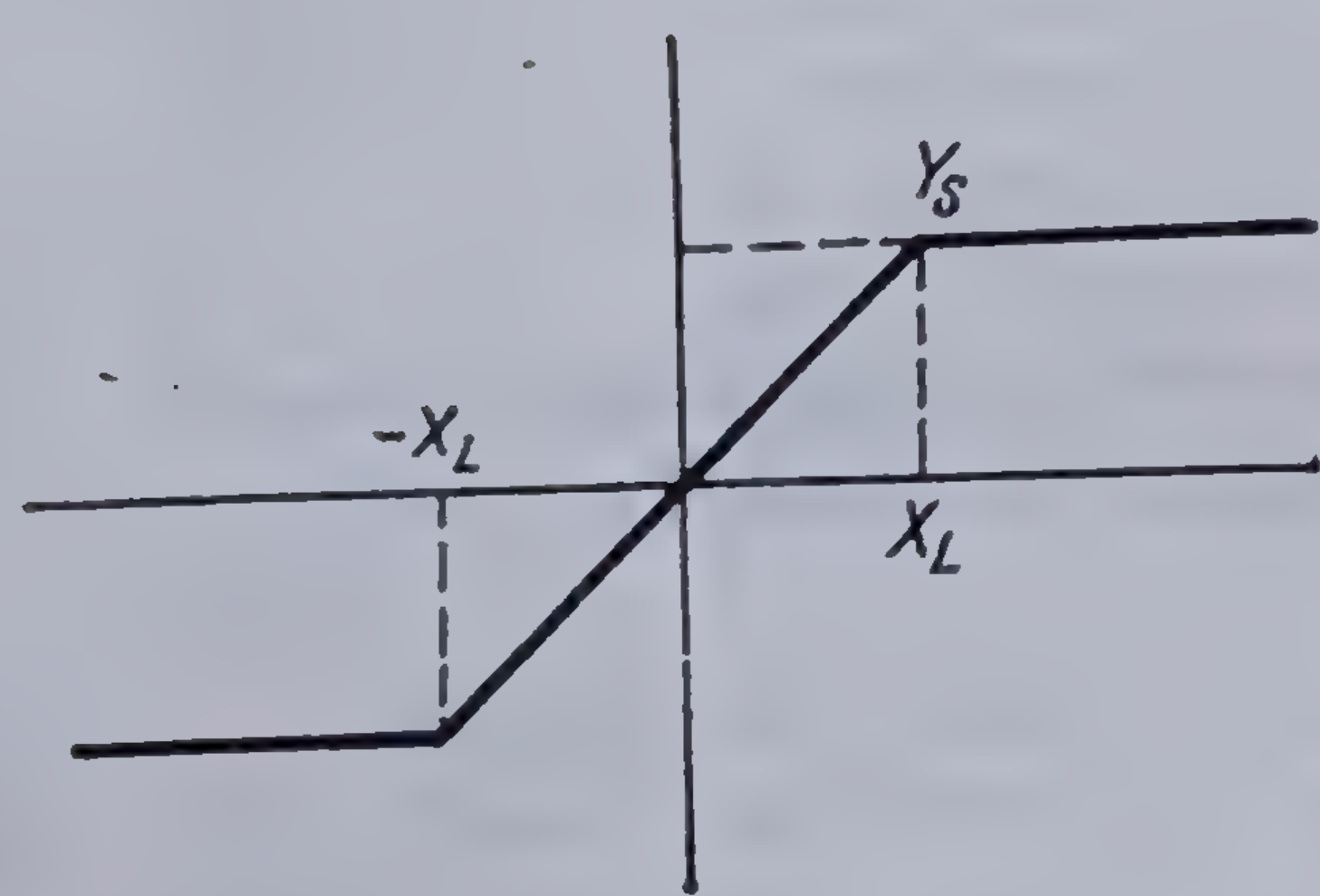


Fig. 11.51. Reprezentarea idealizată a unei saturații.

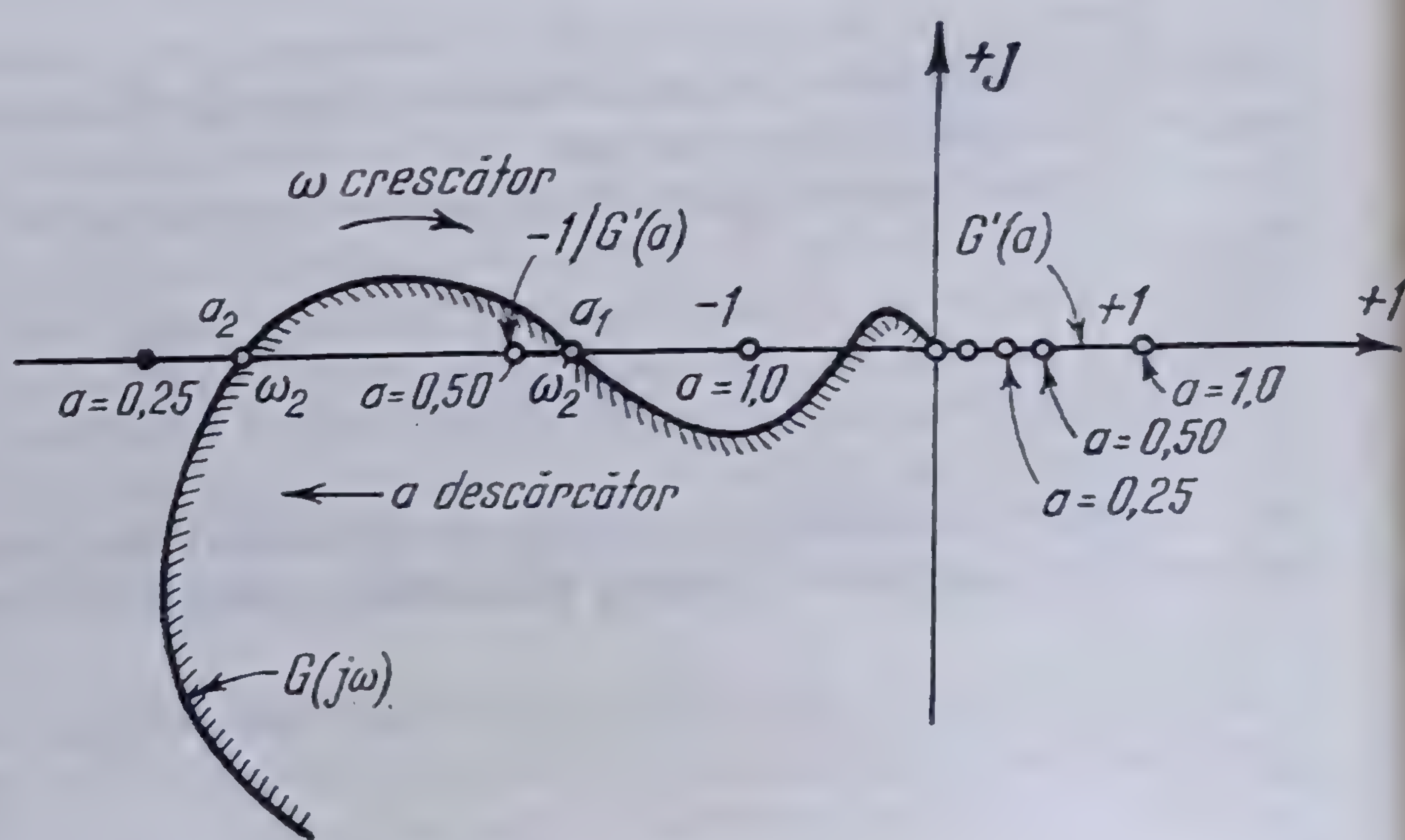


Fig. 11.52. Reprezentarea în planul complex a funcțiilor  $G(j\omega)$ ,  $G'(a)$  și  $-1/G'(a)$  a sistemului considerat.

Dacă  $X_{max}$  e mic, sistemul nu e saturat; sistemul funcționează ca un sistem liniar stabil, care se traduce prin aceea că punctul,  $-1, j0$  se găsește în stînga curbei  $G(j\omega)$  și relația (11.38) nu e niciodată satisfăcută.

Tabloul 11.3

VALOAREA RELATIVĂ, A FUNCȚIEI DE SATURAȚIE

$a = X_L/X_{max}$	$A_s$ numeric	decibeli
0	0	...
0,1	0,127	-17,9
0,2	0,253	-12,0
0,3	0,376	-8,5
0,4	0,495	-6,1
0,5	0,608	-4,3
0,6	0,715	-2,9
0,7	0,810	-1,8
0,8	0,895	-1,0
0,9	0,962	-0,4
1,0	1,000	0

Pentru semnale cu amplitudinea mai mare, astfel ca  $X_{max} > X_L$ , pentru  $1 > a > a_1$ , valoarea  $-1/G'(a)$  se situează pe partea negativă a axei reale, dar nu există nici o valoare pentru  $\omega$  și pentru  $a$  care să satisfacă relația (11.38). Sistemul este stabil.

Pentru semnale pentru care  $a_1 > a > a_2$ , curba  $G(j\omega)$  cuprinde valorile lui  $-1/G'(a)$  se găsesc deci condiții pentru satisfacerea relației (11.38) și sistemul este instabil.

Cînd amplitudinea  $X_{max}$  este astfel, încît raportul  $X_L/X_{max} = a_2$ , variabila reglată tinde să se prezinte sub forma de oscilații autoîntreținute.

Pentru valori  $a < a_2$ ,  $-1/G'(a)$  se găsește la stînga locului funcției de transfer  $G(j\omega)$  și nu este ocolit de acesta, funcționarea pare stabilă, prin aceea că oscilațiile mărimii reglate tind către acelea corespunzătoare lui  $a_2$ ; dacă această valoare e atinsă, oscilațiile se stabilizează și păstrează această amplitudine maximă.



Trebuie observat că punctul de funcționare corespunzător lui  $a_1$  corespunde regimului *critic* de funcționare; într-adevăr, pentru  $a > a_1$ , funcționarea sistemului este stabilă, iar pentru  $a < a_1$ , funcționarea sistemului este instabilă.

**11.4.4.4. Oscilații de relaxare. Experiența lui PAUL JANET.** Fie un generator de curent continuu  $G$ , cu excitație în serie, rotit cu o viteză constantă și care alimentează un motor  $M$ , cu excitație separată, funcționând în gol (fig. 11.53).

Generatorul fiind rotit cu o viteză constantă, forța sa electromotoare este proporțională cu fluxul; din cauza saturației fierului, fluxul nu este proporțional cu curentul; forța electromotoare a generatorului poate fi reprezentată aproximativ prin relația

$$e_g = k_1 i - k_2 i^3.$$

Forța contra-electromotoare a motorului, a cărui excitație este constantă, este proporțională cu viteza sa de rotație

$$e_m = k_3 \Omega_m.$$

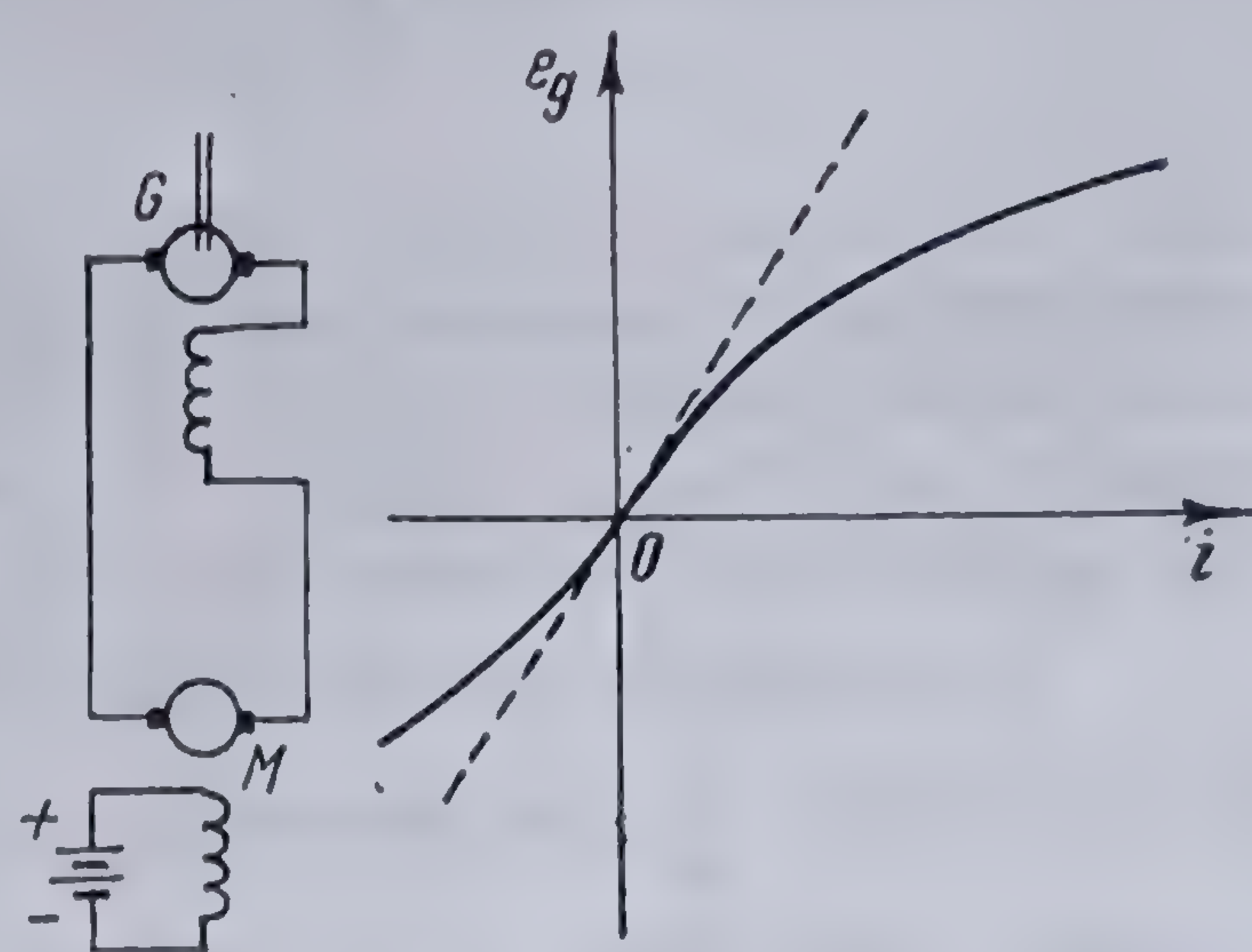


Fig. 11.53. Schema de montaj și caracteristica generatorului.

Aplicînd teorema a II-a a lui KIRCHHOFF circuitului, se obține

$$k_1 i - k_2 i^3 = k_3 \Omega_m + L \frac{di}{dt} + Ri, \quad (11.39)$$

în care  $i$  este curentul debitat de generator în circuit,  $R$  și  $L$  rezistența și inductanța totală a acestuia.

Puterea absolută de motor la mersul acestuia în gol, dacă se neglijează toate pierderile, este consumată pentru accelerarea părții rotative. Dacă  $J$  este momentul de inerție al rotorului motorului, energia cinetică a acestuia este  $\frac{1}{2} J \Omega_m^2$  și deci ecuația puterilor este

$$k_3 \Omega_m i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J \Omega_m^2 \right) = J \Omega_m \frac{d\Omega_m}{dt}$$

de unde

$$\frac{d\Omega_m}{dt} = \frac{k_3}{J} i. \quad (11.40)$$

Derivînd ecuația (11.39) în raport cu timpul și ținînd seama de relația (11.40) se obține

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} - (k_1 - R - 3k_2 i^2) \frac{di}{dt} + \frac{k_3^2}{J} i = 0. \quad (11.41)$$



Pentru valori mici ale lui  $i$ , al doilea termen al parantezei este foarte mic și poate fi neglijat, ținând seama de ecuația (11.39)

$$k_1 - R > 0,$$

ecuația (11.41) se poate scrie

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} - (k_1 - R) \frac{di}{dt} + \frac{k_3^2}{J} i = 0, \quad (11.42)$$

care este o ecuație liniară, cu coeficientul termenului de ordinul întâi negativ, îndeplinind astfel condiția producerii de oscilații autoîntreținute cu un caracter special, numite *oscilații de relaxare*\*. Aceste oscilații prezintă, în afară de forma lor particulară, următoarele trei caractere fizice importante:

1. perioada lor este dată de un produs de două mărimi de tipul  $CR$ , sau de tipul  $L \times \frac{1}{R}$ , numite *timp de relaxare*, în loc de a fi dată, ca perioada unui sistem sinusoidal, prin rădăcina pătrată a produsului a două mărimi de tipul  $LC$ ;

2. se sincronizează foarte ușor cu o forță electromotoare sinusoidală de frecvență oricât de diferită de a lor, însă, dacă perioada lor poate varia astfel ușor între limite destul de largi, amplitudinea lor rămâne practic constantă;

3. sub influența unei forțe electromotoare periodice de frecvență cu mult mai mare decât a lor, ele adoptă o frecvență care este un *submultiplu* exact al frecvenței forței electromotoare impusă, realizând astfel un demultiplicator de frecvență.

Punând

$$\Omega = \frac{k_3}{\sqrt{JL}} \quad \text{și} \quad \xi = \frac{k_1 - R}{k_3} \sqrt{\frac{J}{L}},$$

ecuația (11.41) se poate scrie

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d^2 i}{dt^2} - \frac{k_1 - R}{L\Omega} \left(1 - \frac{3k_2}{k_1 - R} i^2\right) \frac{di}{dt} + \Omega i = 0.$$

Dacă, rezistența negativă,

$$k_1 - R \ll L\Omega = k_3 \sqrt{\frac{J}{L}},$$

\* Vezi [10] pag. 671.



atunci coeficientul

$$\frac{k_1 - R}{L\Omega} \ll \ll 1,$$

termenul al doilea este foarte mic și soluția ecuației (11.41) este foarte apropiată de

$$i = I_0 \sin \Omega t ;$$

regimul de funcționare este sensibil reprezentat de o oscilație periodică sinusoidală de perioadă  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

Amplitudinea  $I_0$  a acestei oscilații se determină scriind că energia totală cheltuită în timpul unei perioade este nulă. Puterea instantanee absorbită de sistem este dată de relația

$$ui = (k_1 i - k_2 i^3) i = k_1 i^2 (1 - \frac{k_2}{k_1} i^2)$$

și deci ecuația energetică corespunzătoare este

$$\int_0^T k_1 I_0^2 \sin^2 \Omega t (1 - \frac{k_2}{k_1} I_0^2 \sin^2 \Omega t) dt = 0,$$

de unde rezultă

$$I_0 = 2 \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}},$$

astfel, încît expresia căutată a curentului este

$$i = 2 \sqrt{\frac{k_1}{3k_2}} \sin \Omega t.$$

Curentul  $i$  schimbîndu-și sensul în mod periodic, rezultă că și viteza motorului

$$\Omega_m = \frac{k_3}{J} \int i dt,$$

va varia periodic și deci motorul se va roti astfel, cînd într-un sens, cînd în celălalt.

În practică însă  $\xi \gg \gg$  și perioada oscilațiilor de relaxare are valoarea aproximativă\*

$$T' = \frac{2\xi}{\Omega} = 2 \frac{k_1 - R}{k_3^2} J,$$

fiind astfel proporțională cu momentul de inerție al motorului.

\* Vezi [10] pag. 671.



PARTEA A IV-a

---

**PROPAGAREA  
ENERGIEI  
ELECTROMAGNETICE**



## Capitolul XII

### TEORIA LINIILOR LUNGI

#### 12.1. STUDIUL LINIILOR LUNGI ÎN REGIM CUASISTAȚIONAR

##### 12.1.1. GENERALITĂȚI

În studiul circuitelor de curent alternativ, efectuat în capitolele precedente, s-a făcut aproximația că diversele forme de energie sînt concentrate în anumite porțiuni ale circuitului, existînd independent unele de altele\* : circuitele echivalente corespunzătoare sînt constituite din elemente cu parametrii respectivi concentrați. În aceste condiții, în fiecare din elementele circuitului, curentul își păstrează în permanență constantă valoarea sa efectivă și defazajul său relativ, din momentul în care el pătrunde în circuit prin borna sa de intrare pînă în momentul cînd îl părăsește prin borna de ieșire.

Această aproximație nu mai poate fi făcută, atunci cînd se studiază o linie electrică lungă de transmitere a energiei electrice. O linie electrică lungă nu poate fi reprezentată numai printr-o simplă impedanță, decît numai dacă se neglijează curentul său capacitiv și pierderile datorite imperfecției izolației sale; de asemenea, un lanț de izolatori nu poate fi reprezentat printr-un lanț de condensatoare decît dacă se neglijează curenții inductivi respectivi etc.

Rezultă dar, că în studiul unei linii lungi nu se poate face aproximarea concentrării parametrilor ei în diverse puncte, ci este necesar a se stabili modul cum se face transmiterea curentului alternativ printr-un circuit avînd în același timp atît rezistență cît și inductanță și capacitate repartizate uniform de-a lungul întregului circuit.

Cu ajutorul rezultatelor obținute, se va putea examina eroarea ce se face, în cazul cînd la studiul unei linii lungi se presupun diverșii parametri concentrați în anumite puncte ale ei; ca o consecință, vor putea fi stabilite condițiile pe care trebuie să le îndeplinească o linie pentru a se putea face studiul ei în ipoteza că parametrii săi sînt concentrați precum și modul de stabilire a circuitului său echivalent.

În consecință, studiul unei linii lungi de transmitere a energiei electrice se va face, în ipoteza că aceasta posedă simultan o anumită rezistență, o anumită conductanță, o anumită inductanță și o anumită capacitate, fiecare din acești parametri fiind uniform răspîndiți de-a lungul întregii linii, linia fiind presupusă omogenă.

În cazul unei linii electrice monofazate sau polifazate simetrice, parcursă de un sistem de curenți cu componenta homopolară nulă, se poate considera

\* Vezi 4.3.3.2.



numai un singur circuit constituit cu unul din conductorii liniei și un conductor neutru, situat în centrul geometric al sistemului de conductori. Întrucât s-a presupus că suma curenților de întoarcere, care ar străbate acest conductor, este nulă, conductorul neutru poate fi înlocuit printr-o linie geometrică.

Tensiunea care intervine în circuitul considerat este  $\frac{U}{\sqrt{3}}$  în cazul unei linii trifazate și  $\frac{U}{2}$  în cazul unei linii monofazate,  $U$  fiind tensiunea de linie.

Parametrii liniei electrice lungi sînt definiți pentru acest circuit.

### 12.1.2. PARAMETRII LINIILOR ELECTRICE LUNGI

**12.1.2.1. Rezistența lineică.** *Rezistența pe unitatea de lungime sau rezistența lineică*, a unei linii electrice lungi, este rezistența uniform răspîndită  $r$ , definită prin pierderile prin efect JOULE  $r dx i^2$ , disipate într-un element de linie infinit mic  $dx$ , parcurs de un curent de pulsație egală cu aceea a regimului considerat și avînd o intensitate efectivă egală cu 1 A de-a lungul întregului element de circuit.

Valoarea kilometrică a acestei rezistențe este dată de relația

$$r = k \frac{\rho}{s} \text{ } \Omega/\text{km} \quad (12.1)$$

în care  $\rho$  este rezistivitatea, în  $\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{km}}$ ;

$s$  — secțiunea efectivă a conductorului, în  $\text{mm}^2$ ;

$k$  — un factor corectiv, care ține seama de cablarea conductorului, de efectul pelicular\*, de săgeată etc.

Pentru conductoare construite din materiale nemagnetice, valoarea acestui factor este  $k = 1,01$  pentru conductoare cilindrice masive și  $k = 1,02 \div 1,05$  pentru conductoare cablate.

Pentru conductoare cablate din oțel-aluminiu, calculul rezistenței se face tot cu relația (12.1), aplicată însă numai la coroana de aluminiu, factorul  $k$  avînd aceleași valori; trebuie ținut seama că inima de oțel a cablului este o cauză de pierderi suplimentare.

— Valoarea rezistenței electrice este influențată de variațiile curentului și de condițiile meteorologice, prin încălzirea pe care o exercită asupra conductorului.

**12.1.2.2. Conductanța lineică.** *Conductanța pe unitatea de lungime sau conductanța lineică*, a unei linii electrice lungi este conductanța uniform răspîndită  $g$ , definită prin puterea activă  $g dx u^2$  pierdută într-un element de linie infinit mic  $dx$  din cauza defectelor de izolație sau a curenților de deplasare, atunci cînd între conductorul de ducere și conductorul fictiv de întoarcere există o diferență de potențial de 1 V de-a lungul elementului  $dx$ .

\* Vezi Cap. XIV.



Valoarea kilometrică a acestei conductanțe se obține din relația de definiție și este

$$g = \frac{p}{U_0^2} \cdot 10^{-3} \text{ S/km},$$

în care  $p$  sînt pierderile de dispersiune totale pe km de conductă simplă, în kW ;  
 $U_0$  este tensiunea efectivă pe fază, în kV.

Conductanța este o mărime care nu se poate determina decît experimental ; ea variază în general de-a lungul liniei, atît din cauza stării liniei cît și din cauza condițiilor meteorologice și a variației tensiunii. În practică, pentru conductanță se iau valori între

$$g = 0,97 \cdot 10^{-8} - 27 \cdot 10^{-8} \text{ S/km}.$$

**12.1.2.3. Inductanța lineică.** Inductanța pe unitatea de lungime sau inductanța lineică\*, a unei linii electrice lungi este inductanța uniform răspîndită  $l$ , definită prin puterea reactivă  $l \, dx \, \omega \, i^2$  absorbită într-un element de linie infinit mic  $dx$ , parcurs de un curent electric avînd o intensitate efectivă de 1 A de-a lungul întregului element, prin producerea fluxului magnetic care îmbrățișează acest element.

Valoarea kilometrică a acestei inductanțe se calculează cu relația

$$l = \left( \lambda + 2 \ln \frac{2D}{d} \right) \mu_r \cdot 10^{-4} = \left( \lambda + 4,6 \lg \frac{2D}{d} \right) \mu_r \cdot 10^{-4} \text{ H/km} \quad (12.2)$$

în care  $d$  este diametrul conductorului, în m ;

$D$  — distanța medie geometrică între conductoarele liniei, în m și este dată de relația

$$D = \sqrt[3]{D_{12} \cdot D_{23} \cdot D_{31}},$$

$D_{jk} (j \neq k = 1, 2, 3)$  fiind distanțele reale, în m, între diversele conductoare ale liniei ;

$\lambda$  — un factor proporțional cu inductanța internă a conductorului ; el este egal cu 0,5 dacă densitatea de curent este uniform repartizată pe întreaga secțiune plină a conductorului (cazul curentului continuu și a curenților alternativi de frecvență foarte joasă) și tinde către zero cînd curenții electrici caută să se localizeze la suprafața conductorului din cauza efectului pelicular\*\*. În cazul conductoarelor eterogene (conductoarele de oțel-aluminiu) și la frecvențele industriale se poate lua  $\lambda = 0,1$  ;

$\mu_r$  — este permeabilitatea relativă a mediului dintre conductoare.

În cazul sistemelor polifazate, din cauza așezării nesimetrice a conductoarelor față de pămînt, este necesar a se face o transpunere\*\*\* a acestora pentru a se obține o uniformizare cît mai bună a acestei inductanțe.

\* sau inductanța de serviciu

\*\* Vezi 3.4.5.

\*\*\* Vezi 1.5.7.4. și 3.4.5.



Pentru o linie aeriană trifazată, cu un singur circuit, valoarea medie a inductanței de serviciu este cuprinsă între

$$l = 1,2 \cdot 10^{-3} - 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ H/km},$$

iar pentru un cablu subteran ea este aproximativ

$$l = 0,487 \cdot 10^{-3} \text{ H/km}.$$

**12.1.2.4. Capacitatea lineică.** Capacitatea pe unitatea de lungime sau capacitatea lineică \* a unei linii electrice lungi, este capacitatea uniform răspândită  $c$ , definită prin puterea reactivă  $cdx\omega u^2$  produsă de elementul de linie infinit mic  $dx$ , supus tensiunii efective de 1 V, prin curenții de deplasare din dielectricul care separă conductoarele liniei.

Valoarea kilometrică a acestei capacități se calculează cu relația \*\*

$$c = \frac{10^{-6} \epsilon_r}{18 \ln \frac{2D}{d}} = \frac{2,41 \epsilon_r}{\lg \frac{2D}{d}} \cdot 10^{-8} \text{ F/m}, \quad (12.3)$$

diversele mărimi avînd aceleași semnificații ca și în cazul expresiei inductanței lineice iar  $\epsilon_r$  este permitivitatea relativă a mediului dintre conductoare.

Dacă se ține seama de prezența solului, expresia capacității lineice este

$$c = \frac{10^{-6} \epsilon_r}{18 \ln \frac{2D}{d} \frac{2H}{\sqrt{4H^2 + D^2}}} = \frac{2,41 \epsilon_r}{\lg \frac{2D}{d} \frac{2H}{\sqrt{4H^2 + D^2}}} 10^{-8}, \text{ F/km} \quad (12.4)$$

în care  $H$  este distanța medie a liniei față de pămînt și se calculează cu relația

$$H = h - \frac{2}{3}f,$$

unde  $h$  este înălțimea conductorului față de pămînt la punctul de suspensie și  $f$  săgeata conductorului în deschiderea respectivă \*\*\*.

Valoarea medie a capacității lineice pentru o linie lungă aeriană trifazată, cu un singur circuit, este cuprinsă între

$$c = 0,008 \cdot 10^{-3} - 0,0095 \cdot 10^{-3} \text{ F/km};$$

pentru un cablu subteran trifazat această valoare este

$$c = 0,023 \cdot 10^{-3} \text{ F/km}.$$

\* sau capacitatea de serviciu (vezi 1.5.7.).

\*\* Vezi 1.5.7.

\*\*\* Expresiile (12.3) și (12.4) se deduc din relațiile (1.141) și respectiv (1.138), în care linia trifilară se consideră ca o linie bifilară, distanța dintre cele două conductoare fictive fiind luată media geometrică a distanței dintre cele trei conductoare. Vezi și 1.5.7.4.



**OBSERVAȚIE.** În cazul liniilor de foarte înaltă tensiune (peste 220 kV), conductoarele liniilor se realizează din mai multe fire, obținându-se astfel, conductoare în fascicul. Fiecare fază este astfel formată din două, trei sau patru conductoare așezate astfel, încât să permită o anumită simetrie (fig. 12.1). Prin acest aranjament se reduce posibilitatea producerii efectului corona \* prin aceea că, la egalitate de secțiune de conductor, cîmpul electric la suprafața acestora se reduce.

Formulele de calcul (12.2), (12.3) și (12.4) rămîn valabile și în acest caz cu condiția de a se înlocui diametrul  $d$  al conductorului cu acel dat de relația

$$d' = \sqrt[n]{2^{n-1} R^{n-1} n d}$$

numit *diametrul echivalent* al conductorului, în care  $R$  este raza arcului pe care sînt așezate conductoarele liniei, în metri,  $n$  numărul acestor conductoare și  $d$  diametrul unui conductor, în metri.

Pentru un fascicul cu trei conductoare, se obține

$$d' = \sqrt[3]{12 d R^2}.$$

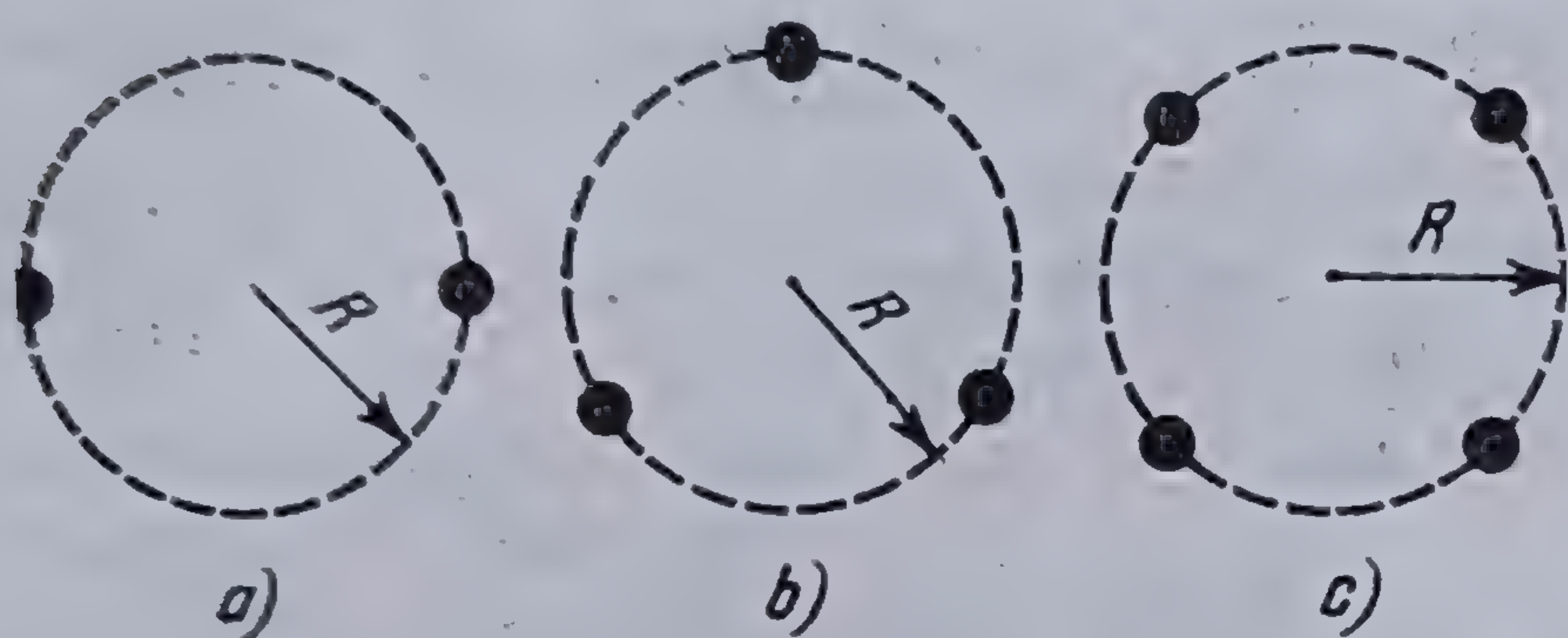


Fig. 12.1. Fascicul de conductoare.

a) cu doi conductori; b) cu trei conductori; c) cu patru conductori

#### 12.1.2.5. Impedanța lineică.

Dacă circuitul considerat este parcurs de un curent de pulsație  $\omega$ , se definește impedanța pe unitatea

de lungime sau *impedanța lineică* a liniei prin expresia

$$\underline{Z} = r + j l \omega = r + j \xi \text{ } \Omega/\text{km}, \quad (12.5)$$

avînd modulul

$$Z = \sqrt{r^2 + l^2 \omega^2} = \sqrt{r^2 + \xi^2}$$

și argumentul

$$\psi_Z = \arctg \frac{\xi}{r}.$$

Pentru frecvența de 50 Hz și pentru o linie aeriană cu un singur circuit, ținînd seama de valoarea medie a inductanței, valoarea reactanței lineice este cuprinsă între

$$l \omega = \xi = 0,38 - 0,46 \text{ } \Omega/\text{km}.$$

Pentru o linie cu două circuite valoarea corespunzătoare crește cu 2% — 8%.

**12.1.2.6. Admitanța lineică.** Dacă tensiunea aplicată sistemului are pulsația  $\omega$ , se definește admitanța pe unitatea de lungime sau *admitanța lineică* a liniei prin expresia

$$\underline{Y} = g + j c \omega = g + j b \text{ } \text{S}/\text{km}, \quad (12.6)$$

\* Vezi 9.4.4.2.



avînd modulul

$$y = \sqrt{g^2 + c^2 \omega^2} = \sqrt{g^2 + b^2}$$

și argumentul

$$\psi_y = \arctg \frac{b}{g}.$$

12.1.2.7. Linie electrică aeriană, cu conductoare simple, funcționînd în regim dezechilibrat. Pentru o linie electrică aeriană, cu conductoare simple, funcționînd în regim dezechilibrat, reactanțele directă și inversă sînt egale \* și pot fi calculate cu ajutorul valorilor obținute din relațiile (12.2) și (12.3). În ceea ce privește sistemul homopolar, atît rezistențele, cît și inductanțele și capacitățile sînt diferite față de cele corespunzătoare sistemelor direct și invers; mai mult, ele diferă și în raport cu modul de constituire al sistemului trifazat, dacă sistemul are un conductor de întoarcere izolat sau nu de pămînt.

După cum s-a arătat \*\*, circulația curenților homopolari implică existența unei căi de întoarcere, care poate fi un al patrulea conductor — conductorul neutru — sau chiar pămîntul. Regimul homopolar de funcționare a unui circuit se obține legînd în paralel conductoarele celor trei faze și alimentînd cu o sursă monofazată circuitul format din aceste conductoare și conductorul neutru (fig. 12.2). Prin definiție \*\*\*, impedanța homopolară este egală cu triplul raportului dintre tensiunea  $U_0$  și curențul pe fază  $I_0$ .

Calculul acestei impedanțe se face diferit după cum conductorul neutru este izolat de pămînt sau este constituit de acesta.

a) Conductorul de întoarcere este izolat de pămînt. Pentru calculul impedanței homopolare există în literatură diverse metode; una dintre aceste metode\*\*\*\* constă în atribuirea fiecărui conductor al liniei a unei rezistențe proprii fictive, a unei inductanțe proprii fictive și a unei inductanțe mutuale fictive între conductori, luați doi cîte doi. Dacă  $X$  este lungimea totală a liniei, în km, și se presupune că linia a fost simetrizată prin transpunere, parametrii care intervin în calcul sînt următorii:

Pentru conductorul de fază avînd raza echivalentă \*\*\*\*\*  $a'$

$$\text{rezistența : } R = rX \text{ } \Omega;$$

$$\text{inductanța proprie : } L = 4,6 X \left( \lg \frac{2X}{a'} - 1 \right) \cdot 10^{-4} \text{H.}$$

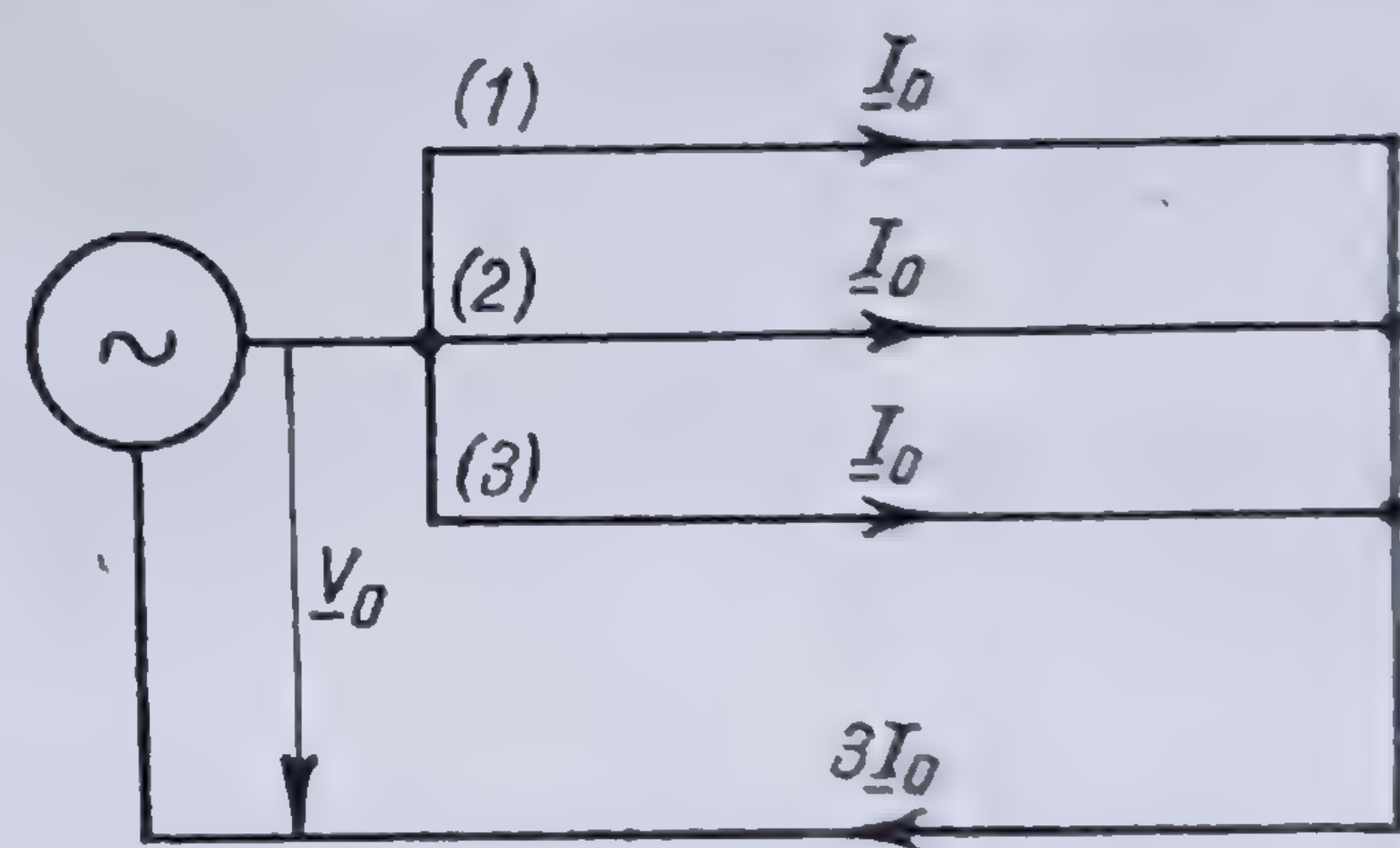


Fig. 12.2. Sistem homopolar.

\* Vezi 8.4.5.1.

\*\* Vezi 8.3.4.2.

\*\*\* Vezi [73] pag. 202; vezi și 8.3.9.4.

\*\*\*\* Vezi [73] pag. 203.

\*\*\*\*\* Raza echivalentă este  $a' = 0,78 a$ , pentru un conductor plin, omogen și nemagnetic și  $a' = 0,95 a$ , pentru un conductor oțel-aluminiu,  $a$  fiind raza efectivă a conductorului exprimată în metri.



Pentru conductorul neutru avind raza echivalentă  $b'$

$$\text{rezistența : } R_n = r_n X \quad \Omega ;$$

$$\text{inductanța proprie : } L_n = 4,6 X \left( \lg \frac{2X}{b'} - 1 \right) \cdot 10^{-4} \text{ H.}$$

*Inductanțele mutuale :*

$$\text{între faze : } M = 4,6 X \left( \lg \frac{2X}{D} - 1 \right) \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

între fază și conductorul neutru :

$$M_n = 4,6 X \left( \lg \frac{2X}{D_n} - 1 \right) \cdot 10^{-4} \text{ H,}$$

în care  $D$  și  $D_n$  sînt distanțele medii geometrice între conductoarele de fază și între acestea și conductorul neutru.

Aplicînd teorema a doua a lui KIRCHHOFF circuitului din figura 12.2 se obține

$$\underline{V}_0 = (rX + jL\omega) \underline{I}_0 + 2jM\omega \underline{I}_0 - jM_n\omega \cdot 3\underline{I}_0 + (r_nX + jL_n\omega)3\underline{I}_0 - 3jM_n\omega \underline{I}_0,$$

de unde, înlocuind inductanțele proprii și mutuale cu expresiile date mai înainte, rezultă

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = (r + 3r_n) X + j\omega 13,8 X \lg \frac{D_n^2}{b' \sqrt[3]{a'D^2}} \cdot 10^{-4} \Omega$$

și deci, impedanța lineică

$$\underline{Z}_0 = (r + 3r_n) + j\omega 13,8 \lg \frac{D_n^2}{b' \sqrt[3]{a'D^2}} \cdot 10^{-4} \Omega/\text{km.}$$

b) Conductorul de întoarcere este pămîntul \*. În acest caz — în primă aproximație — se poate înlocui pămîntul cu un conductor fictiv așezat în pămînt la adîncimea

$$h_s = \frac{1640}{\sqrt{\sigma \cdot \omega}} \text{ m}$$

în care  $\sigma$  este conductivitatea, exprimată în S/m, a unui pămînt avînd o rezistență lineică

$$r_s = \frac{\pi\omega}{2} \cdot 10^{-4} \Omega/\text{km.}$$

\* Vezi [73] p. 204.



Trecerea prin acest conductor fictiv a unui curent  $3\underline{I}_0$  induce în fiecare din conductoarele de fază o forță electromotoare egală cu  $-\underline{j}M_s\omega \cdot 3\underline{I}_0$ , în care :

$$M_s = 4,6 X \left( \lg \frac{2X}{h_s} - 1 \right) \cdot 10^{-4} \text{ H.}$$

Aplicînd cea de a doua teoremă a lui KIRCHHOFF circuitului din figura 12.2 se obține în acest caz

$$\underline{V}_0 = (rX + \underline{j}\omega L')\underline{I}_0 + 2\underline{j}M\omega \underline{I}_0 - \underline{j}M_s\omega \cdot 3\underline{I}_0 + r_s X \cdot 3\underline{I}_0$$

și se deduce expresia impedanței homopolare lineice

$$\underline{Z}_0 = \left( r + \frac{3}{2} \pi \cdot \omega \cdot 10^{-4} \right) + \underline{j}\omega 13,8 \lg \frac{h_s}{\sqrt[3]{a' D^2}} \cdot 10^{-4} \Omega/\text{km.}$$

Această relație este valabilă, cu foarte bună aproximație, în cazul cînd linia a fost transpusă în mod regulat (foarte bine simetrizată) și pămîntul este omogen.

**12.1.2.8. Capacitatea homopolară lineică\*.** Se definește capacitatea homopolară lineică pentru o linie trifazată simetrizată prin transpunere și fără *fîr de gardă\*\**, ca fiind a treia parte din capacitatea în raport cu pămîntul a ansamblului celor trei conductoare legate în paralel; ea este dată de relația

$$c_0 = \frac{10^{-6} \varepsilon_r}{18 \ln \frac{4H(4H^2 + D^2)}{d \cdot D^2}} = \frac{2,41 \varepsilon_r}{\lg \frac{4H}{d} \cdot \frac{(4H^2 + D^2)}{D^2}} \cdot 10^{-4} \text{ F/m.} \quad (12.7)$$

**12.1.2.9. Capacitatea aparentă lineică sau capacitatea de serviciu,** este capacitatea unui conductor de fază, singur alimentat, față de pămînt\*\*\*; expresia ei este dată de relația\*\*\*\*

$$c_a = \frac{10^{-6} \varepsilon_r}{18 \ln \frac{4H}{d}} = \frac{2,41 \varepsilon_r}{\lg \frac{4H}{d}} \cdot 10^{-8} \text{ F/km.} \quad (12.8)$$

**OBSERVAȚIE.** Între relațiile (12.4), (12.7) și (12.8) există relația

$$\frac{1}{c_a} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{c_0} + \frac{2}{c} \right),$$

ușor de verificat.

\* Vezi [73] pag. 205.

\*\* Se numește fîr de gardă, conductorul montat pe o linie de înaltă tensiune, legat la pămînt, care servește la protejarea liniei contra supratensiunilor atmosferice.

\*\*\* Vezi 1.5.7.4.

\*\*\*\* Vezi 1.5.7.2.



### 12.1.3. ECUAȚIILE LINIILOR LUNGI

**12.1.3.1. Forma generală a ecuațiilor.** Fie o linie  $AB$ , de lungime totală  $X$  și având parametrii săi uniform răspândiți de-a lungul ei (fig. 12.3). Să presupunem că funcționarea liniei este astfel, încât sensul curenților este de la  $A$  către  $B$ ; fie  $u_1, i_1, u_2, i_2$  tensiunile și curenții la cele două extremități.

În ipoteza făcută, în cazul când defazajul  $\varphi_2$  dintre curentul  $i_2$  și tensiunea  $u_2$ , de la extremitatea  $B$ , este în așa fel, încât  $\cos \varphi_2 > 0$ , energia activă este transmisă de la extremitatea  $A$ , care este astfel *extremitatea sursă* către extremitatea  $B$ , care este *extremitatea receptor*; dacă însă  $\cos \varphi_2 < 0$ , atunci energia activă circulă de la  $B$  către  $A$ , cele două extremități schimbându-și rolurile.

În toate cele ce urmează se presupune  $\cos \varphi_2 > 0$  și deci extremitatea  $B$  receptoare.

Să considerăm un element de linie  $mn$  de lungime  $dx$ , situat la distanța  $x$  de extremitatea  $B$  a liniei (fig. 12.4). Fie  $u + du$  și  $i + di$ , valoarea instantanee a tensiunii, respectiv a curentului la intrarea în acest element și  $u$  și  $i$ , valoarea instantanee a tensiunii, respectiv a curentului la ieșirea din element. Considerând elementul de linie  $mn$  ca un cuadripol în  $T$  și aplicând ecuațiile corespunzătoare, se obține

$$u + du = u + \left( ri + l \frac{\partial i}{\partial t} \right) dx,$$

$$i + di = \left( gu + c \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx + i,$$

de unde rezultă

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= ri + l \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= gu + c \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

care reprezintă ecuațiile de funcționare a liniilor lungi.

Eliminând, pe rând, mai întâi pe  $i$  și apoi pe  $u$ , ecuațiile (12.9) pot fi puse sub forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= rgu + (rc + lg) \frac{\partial u}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} &= rgi + (rc + lg) \frac{\partial i}{\partial t} + lc \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$



Ecuatiile (12.10) definesc complet tensiunea sau curentul de-a lungul liniei electrice lungi; ele se mai numesc și *ecuațiile telegrafistilor*.

În practică, ținând seama de unele proprietăți speciale ale liniilor electrice, ecuațiile (12.10) pot fi simplificate, putând astfel conduce la o rezolvare mai ușoară a lor;

— În cazul liniilor perfect izolate,  $r \ll$  și  $g \ll$  și deci pot fi neglijate; în acest caz ecuațiile (12.10) devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lc \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

ecuații de tip D'ALEMBERT.

— În cazul liniilor aeriene  $r \ll$  și  $c \ll$  și pot fi neglijate, astfel că ecuațiile (12.10) devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = lg \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = lg \frac{\partial i}{\partial t}.$$

— În cazul liniilor formate din cabluri subterane,  $l \ll$  și  $g \ll$ , putând fi neglijate; ecuațiile (12.10) devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = rc \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = rc \frac{\partial i}{\partial t}.$$

**12.1.3.2. Forma ecuațiilor în cazul unui regim periodic alternativ sinusoidal staționar.** În cazul când regimul energetic al liniei este alternativ sinusoidal, utilizând mărimile complexe, ecuațiile (12.9) pot fi scrise

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\underline{U}}{dx} &= r\underline{I} + j\omega l\underline{I} = \underline{z}\underline{I}, \\ \frac{d\underline{I}}{dx} &= g\underline{U} + j\omega c\underline{U} = \underline{y}\underline{U}. \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Eliminând între aceste ecuații mai întâi pe  $\underline{I}$  și apoi pe  $\underline{U}$ , se obține

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{z}\underline{y}\underline{U} \quad (12.12)$$



$$\text{și} \quad \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{z} \underline{y} \underline{I} \quad (12.13)$$

În aceste ecuații,  $\underline{z}$  și  $\underline{y}$  sînt impedanța lineică și admitanța lineică a liniei, definite în paragrafele 12.1.2.5. și 12.1.2.6.

#### 12.1.4. INTEGRAREA ECUAȚIEI LINIILOR LUNGI ÎN CAZUL UNUI REGIM ALTERNATIV SINUSOIDAL STAȚIONAR

##### 12.1.4.1. Soluțiile generale. Notînd

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{z} \underline{y}}, \quad (12.14)$$

ecuația (12.12) devine

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U},$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul doi în  $\underline{U}$  și a cărei soluție generală este

$$\underline{U} = \underline{M} \varepsilon^{\underline{\gamma} x} + \underline{N} \varepsilon^{-\underline{\gamma} x}. \quad (12.15)$$

Derivînd pe  $\underline{U}$ , astfel obținut, în raport cu  $x$  și introducînd această derivată în prima ecuație din sistemul (12.11) se găsește

$$\underline{I} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}} (\underline{M} \varepsilon^{\underline{\gamma} x} - \underline{N} \varepsilon^{-\underline{\gamma} x}) = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{M} \varepsilon^{\underline{\gamma} x} - \underline{N} \varepsilon^{-\underline{\gamma} x}), \quad (12.16)$$

în care s-a notat

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{z}}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{\underline{z}}{\underline{y}}}. \quad (12.17)$$

Relațiile (12.15) și (12.16) constituie soluțiile generale ale sistemului (12.11); aceste soluții depind de două constante de integrare,  $\underline{M}$  și  $\underline{N}$ , care urmează a fi determinate în condiții particulare ale liniei; se vede ușor că aceste soluții se compun din doi termeni:

— unul din acești termeni  $\underline{M} \varepsilon^{\underline{\gamma} x}$ , respectiv  $\frac{\underline{M}}{\underline{Z}_c} \varepsilon^{\underline{\gamma} x}$ , are modulul maxim la sursă ( $x = X$ ) și scade pe măsură ce ne apropiem de receptor, avînd valoarea minimă în acest punct ( $x = 0$ ); el reprezintă o undă de tensiune, sau de curent, care se propagă de la sursă către receptor. Această undă se numește *unda directă*;

— al doilea dintre acești termeni  $\underline{N} \varepsilon^{-\underline{\gamma} x}$ , respectiv  $\frac{\underline{N}}{\underline{Z}_c} \varepsilon^{-\underline{\gamma} x}$ , are valoarea maximă la receptor ( $x = 0$ ) și scade pe măsură ce ne apropiem de sursă, avînd



valoarea minimă în acest punct ( $x = X$ ); el constituie o undă de tensiune sau de curent care se propagă de la receptor către sursă. Această undă se numește *undă inversă* sau *undă reflectată* \*.

12.1.4.2. Constanta de propagare. Reluând expresia (12.14),

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{z} \underline{y}} = \sqrt{(r + j l \omega) (g + j c \omega)}, \quad (12.14)$$

mărimea respectivă, fără dimensiuni, se numește *constanta de propagare a liniei*. Ea reprezintă variația pe care o suferă amplitudinea și faza undei de tensiune, respectiv de curent, când parcurge 1 km de linie \*\*.

Expresia constantei de propagare poate fi pusă sub diverse forme, fiecare dintre ele având importanță în studiul liniilor lungi.

a) Punând

$$\underline{\gamma} = \gamma \underline{\delta},$$

se găsește ușor valoarea modului și argumentului în funcție de parametrii liniei; vom avea

$$\gamma = \sqrt[4]{(r^2 + l^2 \omega^2) (g^2 + c^2 \omega^2)} \quad (12.18)$$

și

$$\delta = \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{l \omega}{r} + \arctg \frac{c \omega}{g} \right). \quad (12.19)$$

$$b) \text{ Punind } \underline{\gamma} = \alpha + j \beta, \quad (12.20)$$

rezultă

$$(\alpha + j \beta)^2 = (r + j l \omega) (g + j c \omega)$$

sau

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j \alpha \beta = (rg - lc \omega^2) + j (rc \omega + gl \omega)$$

și deci,

$$\alpha^2 - \beta^2 = rg - lc \omega^2,$$

$$2\alpha\beta = (rc + gl)\omega;$$

rezolvând acest sistem în raport cu  $\alpha$  și  $\beta$ , se găsește:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(r^2 + l^2 \omega^2) (g^2 + c^2 \omega^2)} + \frac{1}{2} (rg - lc \omega^2)} = \sqrt{\frac{1}{2} zy + \frac{1}{2} (gr - \xi b)} \quad (12.21)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} zy - \frac{1}{2} (rg - \xi b)}. \quad (12.22)$$

\* Justificarea acestor denumiri se va vedea în paragraful 12.1.5.1.

\*\* Justificarea acestei definiții se va vedea în paragraful 12.1.4.3.



Partea reală a constantei de propagare,  $\alpha$ , a cărei valoare în funcție de parametrii liniei este dată de relația (12.21), se numește *constanta de atenuare a liniei* și este legată de variația amplitudinii de tensiune sau de curent, pe unitatea de lungime. Ea este egală cu logaritmul natural al raportului dintre două valori ale amplitudinii tensiunii, respectiv ale curentului, existând în două puncte ale liniei situate la 1 km unul de altul.

Într-adevăr, să considerăm din relația (12.15) numai unda directă. Vom avea

$$\underline{U}_d = \underline{M} \varepsilon^{\gamma x} = \underline{M}^{(\alpha + j\beta)x} = \underline{M} \varepsilon^{\alpha x} (\cos \beta x + j \sin \beta x), \quad (12.23)$$

a cărei modul este

$$U_d = M \varepsilon^{\alpha x}.$$

Punând

$$U_{d_1} = M \varepsilon^{\alpha x_1} \text{ la distanța } x_1 \text{ și } U_{d_2} = M \varepsilon^{\alpha x_2} \text{ la distanța } x_2,$$

rezultă

$$\alpha = \ln \frac{U_{d_1}}{U_{d_2}}$$

deoarece  $x_1 - x_2 = 1$ , care justifică definiția de mai sus;  $\alpha$  se măsoară în radiani hiperbolici/km sau în neperi/km.

Partea complexă a constantei de propagare,  $\beta$ , a cărei valoare în funcție de parametrii liniei este dată de relația (12.22), se numește *constanta de distorsiune a liniei* și exprimă variația fazei unde de tensiune, sau a celei de curent, pe unitatea de lungime a liniei. Ea este deci, unghiul între fazorii de tensiune, respectiv de curent, corespunzători tensiunii sau curentului existând în două puncte ale liniei situate la 1 km unul de altul;  $\beta$  se măsoară în radiani/km sau în grade/km.

c) Punând

$$\underline{\gamma}x = \underline{\theta} = \theta_1 + j\theta_2,$$

$\underline{\theta}$  se numește *unghiul complex al liniei*.

Comparînd cu relația (12.20), rezultă

$$\underline{\theta} = \alpha x + j\beta x$$

și deci,

$$\theta_1 = \alpha x \text{ și } \theta_2 = \beta x,$$

de unde

$$\alpha = \frac{\theta_1}{x} \text{ și } \beta = \frac{\theta_2}{x}.$$

Considerînd din nou unda directă, relația (12.23) transcrisă în funcție de unghiul complex al liniei {devine

$$\underline{U}_d = \underline{M} \varepsilon^{\theta_1} (\cos \theta_2 + j \sin \theta_2).$$



Din această expresie, rezultă că  $\theta_1$  acționează asupra modului amplitudinii tensiunii — sau curentului — și exprimă *atenuarea* pe care o suferă unda de tensiune — sau de curent — atunci când parcurge pe linie o distanță de lungime  $x$ ; constanta de atenuare este deci atenuarea liniei pe unitatea de lungime a ei.

Mărimea  $\theta_2$  (partea complexă a lui  $\underline{\theta}$ ) acționează asupra argumentului, respectiv asupra fazei tensiunii — sau curentului — și exprimă *întârzierea unghiulară spațială* sau *distorsiunea*, pe care unda de tensiune — sau de curent — o suferă atunci când parcurge pe linie o distanță de lungime  $x$ ; constanta de distorsiune a liniei este deci distorsiunea liniei pe unitatea de lungime a ei.

În cazurile particulare întâlnite în practică, diversele mărimi definite mai sus capătă forme mai simple.

a) *Linie fără pierderi*. În acest caz  $r = 0$ ,  $g = 0$  și expresiile de mai sus devin

$$\alpha = 0, \theta_1 = 0, \beta = \sqrt{\xi b} = \omega \sqrt{lc}, \theta_2 = \omega x \sqrt{lc},$$

și deci,

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\sqrt{\xi b} \text{ și } \underline{\theta} = jx\sqrt{\xi b}.$$

Punind \* :

$$v = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

expresia lui  $\beta$  poate fi scrisă

$$\beta = \frac{\omega}{v}. \quad (12.24)$$

expresie care are numeroase aplicații.

În cazul unei linii aeriene, pentru care  $f = 50$  Hz și  $\mu_r = \epsilon_r = 1$ , se găsește

$$\beta = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km.}$$

b) *Linie aeriană industrială*. În acest caz  $\xi > r$  și  $b > g$ ; expresia (12.14) a constantei de propagare poate fi pusă sub forma

$$\underline{\gamma} = j\sqrt{\xi b} \sqrt{1 + \frac{r}{j\xi}} \sqrt{1 + \frac{g}{jb}}. \quad (12.25)$$

\* Dimensional expresia  $\sqrt{lc}$  are dimensiunile inversului unei viteze. Dacă presupunem în expresia inductanței liniei  $\lambda = 0$ , atunci avem

$$lc = 2 \ln \frac{2D}{d} \mu_r \cdot 10^{-4} \cdot \frac{10^{-6} \epsilon_r}{18 \ln \frac{2D}{d}} = \frac{10^{-10}}{9} \mu_r \epsilon_r$$

și deci

$$v = 3 \cdot 10^5 \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \text{ km/s.}$$



Dezvoltând în serie cei doi radicali, se obține

$$\sqrt{1 + \frac{r}{j\xi}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{r}{j\xi} \text{ și } \sqrt{1 + \frac{g}{jb}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{g}{jb},$$

astfel că expresia (12.25) devine

$$\underline{\gamma} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{b}{\xi}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\xi}{b}} + j \left( \sqrt{\xi b} - \frac{1}{4} \frac{gr}{\sqrt{\xi b}} \right).$$

Conform relației (12.20) se obține :

$$\alpha = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{b}{\xi}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\xi}{b}} \cong \frac{1}{2} \frac{r}{Z_c} \text{ rad. hip/km}$$

și

$$\beta = \sqrt{\xi b} - \frac{1}{4} \frac{rg}{\sqrt{\xi b}} \cong \sqrt{\xi b} \text{ rad/km}$$

ținând seama de relația (12.22) și de faptul, că în baza ipotezelor făcute, al doilea termen este foarte mic față de primul și poate fi neglijat.

c) *Linie constituită din cabluri subterane.* În acest caz, se poate admite că  $g = 0$  și  $\xi = 0$ ; expresia (22.14) a constantei de propagare devine \*

$$\underline{\gamma} = \sqrt{jrb} = \sqrt{j} \cdot \sqrt{rb} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{rb}$$

astfel că :

$$\alpha = \sqrt{\frac{rb}{2}} \text{ rad. hip/km}; \beta = \sqrt{\frac{rb}{2}} \text{ rad/km.}$$

d) *Linie satisfăcând condiția lui HEAVISIDE.* Condiția lui HEAVISIDE pentru o linie electrică este exprimată prin relația \*\*

$$\frac{r}{\xi} = \frac{g}{b}. \quad (12.26)$$

Ținând seama de această relație, expresiile (12.21), și (12.22) devin

$$\alpha = \sqrt{rg} \text{ rad. hip/km}; \beta = \sqrt{\xi b} \text{ rad./km,}$$

după cum se poate verifica ușor.

\* Deoarece  $j = 1 \left| \frac{\pi}{2} \right.$ , rezultă  $\sqrt{j} = 1 \left| \frac{\pi}{4} \right. = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}}.$

\*\* Vezi 12.1.5.1.



### 12.1.4.3. Impedanța caracteristică Mărimea exprimată de relația (12.17)

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{z}}{\underline{y}}} = \sqrt{\frac{r + j l \omega}{g + j c \omega}}, \quad (12.17)$$

care apare în soluțiile ecuațiilor diferențiale ale liniilor lungi, se numește *impedanța caracteristică* sau *impedanța naturală* a liniei \*.

Impedanța caracteristică fiind o mărime complexă, ea poate fi pusă sub forma

$$\underline{Z}_c = Z_c |\psi|$$

în care, modulul respectiv, argumentul exprimați în funcție de parametrii liniei au forma

$$Z_c = \sqrt[4]{\frac{r^2 + l^2 \omega^2}{g^2 + c^2 \omega^2}} \quad (12.27)$$

și

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{l \omega}{r} - \arctg \frac{c \omega}{g} \right). \quad (12.28)$$

Dacă se pune impedanța caracteristică sub forma

$$\underline{Z}_c = Z_{1c} + j Z_{2c},$$

printr-un calcul algebric elementar se găsește \*\*

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{z}{y} + \frac{r g + \xi b}{g^2 + b^2} \right)} \quad (12.29)$$

și

$$Z_{2c} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{z}{y} - \frac{r g + \xi b}{g^2 + b^2} \right)}. \quad (12.30)$$

Aceste expresii capătă forme mai simple în diverse cazuri particulare, întâlnite în practică.

a) *Linii fără pierderi.* În acest caz  $r=0$  și  $g=0$ ;

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{\xi}{b}} = \sqrt{\frac{l}{c}} \text{ și } Z_{2c} = 0.$$

Rezultă dar, că în cazul liniilor fără pierderi, impedanța caracteristică este o mărime reală. Ea se mai numește și *impedanța de undă*.

\* Semnificația fizică a acestei mărimi se va vedea în paragraful 12.1.4.3.

\*\* Se ridică la pătrat această expresie și se compară cu pătratul expresiei (12.17); se obțin două ecuații cu două necunoscute care dau expresia celor doi parametri.



Ținând seama de relațiile (12.2) și (12.3) care dau inductanța lineică și capacitatea lineică a unei linii, făcând aproximația neglijării inductanței interne a conductorului se obține

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{2 \ln \frac{2D}{d} \mu_r 10^{-4}}{\frac{10^{-6} \epsilon_r}{18 \ln \frac{2d}{D}}}} = 0,6 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r} \ln \frac{2D}{d}} \Omega.$$

b) *Linie aeriană industrială*. În acest caz pierderile nu mai sînt neglijabile; pentru tensiuni mai mari de 60 kV se poate lua în medie

$$\underline{Z}_c \cong 400 \mid -5^\circ \div -10^\circ.$$

c) *Linie construită din cabluri subterane*. În acest caz  $g = 0$  și  $\xi = 0$ ; expresia (12.17) devine \*

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{r}{jb}} = \sqrt{-j} \sqrt{\frac{r}{b}} = \sqrt{\frac{r}{b}} \mid -45^\circ.$$

În practică, se poate lua în medie

$$\underline{Z}_c = 40 \mid -45^\circ \Omega.$$

d) *Linie foarte bine izolată*. În acest caz  $g \ll c\omega$  și deci

$$\arctg \frac{c\omega}{g} \cong \frac{\pi}{2};$$

expresia (12.28) a argumentului impedanței caracteristice devine

$$\psi = -\frac{1}{2} \arctg \frac{r}{l\omega}. \quad (12.31)$$

#### 12.1.5. INTERPRETAREA FIZICĂ A SOLUȚIILOR GENERALE

12.1.5.1. *Primul aspect fizic al soluțiilor*. Soluțiile ecuațiilor (12.11) fiind

$$\underline{U} = \underline{M} \underline{e}^{\underline{\gamma}x} + \underline{N} \underline{e}^{-\underline{\gamma}x} \quad (12.15)$$

și

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_c} (\underline{M} \underline{e}^{\underline{\gamma}x} - \underline{N} \underline{e}^{-\underline{\gamma}x}), \quad (12.16)$$

\* Deoarece  $-j = \mid -90^\circ$  și deci  $\sqrt{-j} = \mid -45^\circ$ .



pentru determinarea constantelor de integrare  $\underline{M}$  și  $\underline{N}$ , să considerăm situația particulară de funcționare la extremitatea receptoare a liniei ( $x = 0$ ); în acest caz  $\underline{U} = \underline{U}_2$  și  $\underline{I} = \underline{I}_2$ .

Făcând în relațiile (12.15) și (12.16)  $x = 0$ , se obține

$$\underline{M} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2) = \underline{M} |_{\underline{\mu}}; \quad \underline{N} = \frac{1}{2} (\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2) = \underline{N} |_{\underline{\nu}}. \quad (12.32)$$

Ținând seama de aceste relații și de expresia (12.20) a constantei de propagare, soluțiile generale ale ecuațiilor liniilor lungi se pot pune sub forma mai explicită

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{M} \varepsilon^{\alpha x} |_{\beta x + \underline{\mu}} + \underline{N} \varepsilon^{-\alpha x} |_{-\beta x + \underline{\nu}}; \\ \underline{I} &= \frac{\underline{M}}{\underline{Z}_c} \varepsilon^{\alpha x} |_{\beta x + \underline{\mu} - \underline{\psi}} - \frac{\underline{N}}{\underline{Z}_c} \varepsilon^{-\alpha x} |_{-\beta x + \underline{\nu} - \underline{\psi}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.33)$$

Alegînd originea de timp astfel, încît ea să coincidă cu momentul cînd unda directă de tensiune pleacă din extremitatea sursă  $A$  ( $x = X$ ) cu amplitudinea maximă, dacă  $\underline{U}'\sqrt{2}$  este această amplitudine, atunci prima relație (12.33) se poate scrie

$$\sqrt{2} \underline{M} \varepsilon^{\alpha X} = \underline{U}'\sqrt{2}; \quad \beta X + \underline{\mu} = 0,$$

de unde rezultă

$$\underline{M} = \underline{U}' \varepsilon^{-\alpha X}; \quad \underline{\mu} = -\beta X$$

și relațiile (12.33) devin

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}' \varepsilon^{-\alpha(X-x)} |_{-\beta(X-x)} + \underline{U}'' \varepsilon^{-\alpha x} |_{-\beta x + \underline{\nu}}; \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}_c} \varepsilon^{-\alpha(X-x)} |_{-\beta(X-x) - \underline{\psi}} - \frac{\underline{U}''}{\underline{Z}_c} \varepsilon^{-\alpha x} |_{-\beta x + \underline{\nu} - \underline{\psi}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

Din aceste relații, se deduc expresiile valorilor instantanee ale tensiunii și curentului; se găsește

$$\left. \begin{aligned} u &= \underline{U}' \sqrt{2} \varepsilon^{-\alpha(X-x)} \cos[\omega t - \beta(X-x)] + \underline{U}'' \sqrt{2} \varepsilon^{-\alpha x} \cos(\omega t + \underline{\nu} - \beta x) \\ i &= \frac{\underline{U}'}{\underline{Z}_c} \sqrt{2} \varepsilon^{-\alpha(X-x)} \cos[\omega t - \beta(X-x) - \underline{\psi}] - \frac{\underline{U}''}{\underline{Z}_c} \sqrt{2} \varepsilon^{-\alpha x} \cos(\omega t + \underline{\nu} - \underline{\psi} - \beta x). \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

Rezultă că fiecare undă, de curent și de tensiune, este compusă din cîte două *unde mobile*, care se propagă în *sensuri contrare* cu aceeași viteză  $v$ . Într-adevăr, să considerăm unda de tensiune; la timpul  $t_1$  și la distanța  $x_1$ , cele două componente ale ei vor avea valorile

$$U_d = \underline{U}' \sqrt{2} \varepsilon^{-\alpha(X-x)} \cos[\omega t_1 - \beta(X - x_1)]$$



și

$$U_r = U'' \sqrt{2}^{-\alpha x_1} \cos(\omega t_1 + v - \beta x_1).$$

Cu aproximația factorului exponențial, pentru ca tensiunea să aibă aceeași amplitudine la timpul  $t_1 + dt$  și la distanța  $x_1 + dx$ , trebuie ca

$$\omega(t_1 + dt) - \beta[X - (x_1 + dx)] = \omega t_1 - \beta(X - x_1)$$

și

$$\omega(t_1 + dt) + v - \beta(x_1 + ds) = \omega t_1 + v - \beta x_1,$$

de unde rezultă

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta},$$

pentru unda  $u_d$  și

$$\frac{dx}{dt} = +\frac{\omega}{\beta},$$

pentru unda  $u_r$ .

Totul se petrece ca și cum unda de tensiune  $u_d$  se deplasează de-a lungul liniei, în sensul  $x$ -lor descrescători (de la capătul generator către capătul receptor) cu viteza constantă

$$v = \frac{\omega}{\beta}. \quad (12.36)$$

iar unda de tensiune  $u_r$  se deplasează de-a lungul liniei, în sensul  $x$ -lor crescători (de la capătul receptor către capătul generator) cu aceeași viteză constantă  $v$ .

La aceleași concluzii se ajunge și în ceea ce privește unda de curent.

Rezultă deci, că regimul poate fi considerat ca suprapunerea a două unde mobile, care se propagă în sensuri contrarii cu aceeași viteză constantă  $v$  (fig. 12.5), numită *viteza de fază*.

Prima undă de tensiune pleacă de la sursă ( $x = X$ ) cu amplitudinea  $U' \sqrt{2}$ ; ea este însoțită de o undă de curent, de amplitudine  $\frac{U'}{Z_c} \sqrt{2}$ , defazată cu unghiul

$\psi$  în urma undei de tensiune. Amplitudinile acestor unde scad exponențial pe măsură ce se depărtează de sursă, astfel că, la distanța  $x$  aceste amplitudini sînt

$$U' \sqrt{2} e^{-\alpha(X-x)} \text{ și } I' \sqrt{2} = \frac{U'}{Z_c} e^{-\alpha(X-x)}.$$

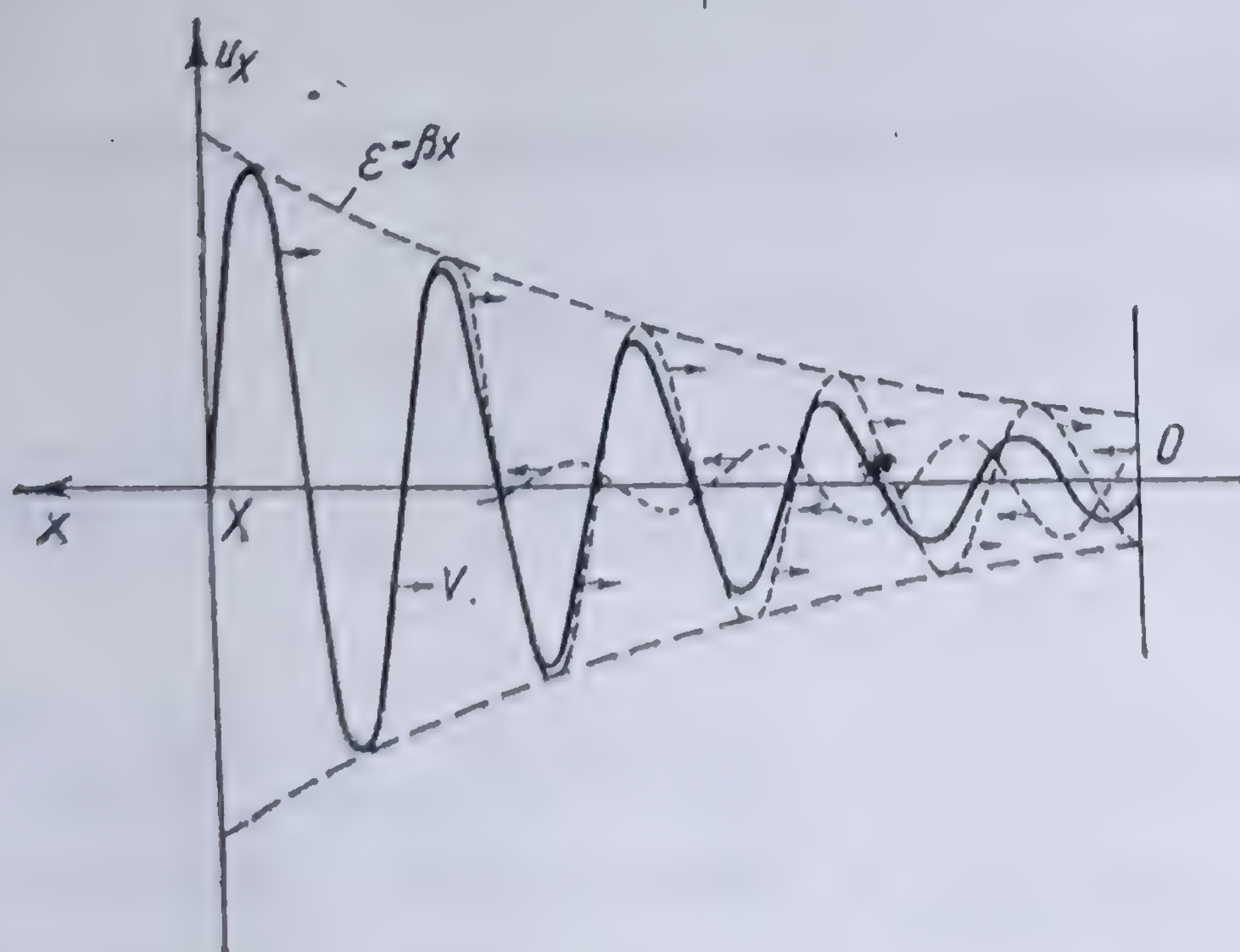


Fig. 12.5. Propagarea unei tensiuni alternative de-a lungul unei linii lungi, omogene.

Această undă se numește *unda directă*, de tensiune sau de curent.



A doua undă de tensiune pleacă de la receptor cu amplitudinea  $U'' \sqrt{2}$  și este însoțită de o undă de curent, de amplitudine  $\frac{U''}{Z_0} \sqrt{2}$ , defazată cu unghiul  $\pi - \phi$  față de unda de tensiune; amplitudinile acestor unde scad exponențial, astfel, că la distanța  $x$  de stația receptoare, ele sînt

$$U'' \sqrt{2} \varepsilon^{-\alpha x} \text{ și } I'' \sqrt{2} = \frac{U''}{Z_0} \varepsilon^{-\alpha x}.$$

Această undă se numește *unda reflectată*, de tensiune sau de curent.

Dat fiind că s-a luat ca origine de timp momentul cînd undele directe pleacă de la capătul sursă ( $x = X$ ), unda reflectată pleacă din capătul receptor ( $x = 0$ ) cu o întîrziere  $-\frac{v}{\omega}$ , dedusă din

$$\omega t + v = \omega \left[ t - \left( -\frac{v}{\omega} \right) \right].$$

Rezultanta celor două unde poate fi fundamental diferită de undele componente și aceasta cu atît mai mult, cu cît cele două unde au amplitudinile comparabile, cum ar fi, de exemplu în cazul liniilor scurte. În cazul liniilor lungi, unda reflectată are o amplitudine mică în raport cu aceea a undei directe, care impune astfel aspectul său undei rezultante (fig. 12.5).

Raportul dintre amplitudinea tensiunii și curentului a fiecărui tren de unde — directe sau reflectate — este constant și egal cu modulul impedanței caracteristice a liniei; defazajul între aceste două unde este de asemenea, constant și este egal cu argumentul impedanței caracteristice\*.

Ecuațiile (12.35) pot fi interpretate geometric. Să considerăm unda de tensiune: primul termen, corespunzînd undei directe,

$$u = \varepsilon^{-\alpha(X-x)} U' \sqrt{2} \cos [\omega t - \beta(X-x)],$$

poate fi reprezentat în fiecare punct al liniei și pentru același moment cu un fazor. Luînd ca origine de fază fazorul corespunzînd originii liniei (la sursă)  $x = X$ , modulul fazorului reprezentativ va fi

$$U'_0 = U'.$$

În același moment, fazorul reprezentativ al tensiunii la distanța  $X - x_1$  de origine este reprezentat de un fazor de modul

$$U' \varepsilon^{-\alpha(X-x_1)}$$

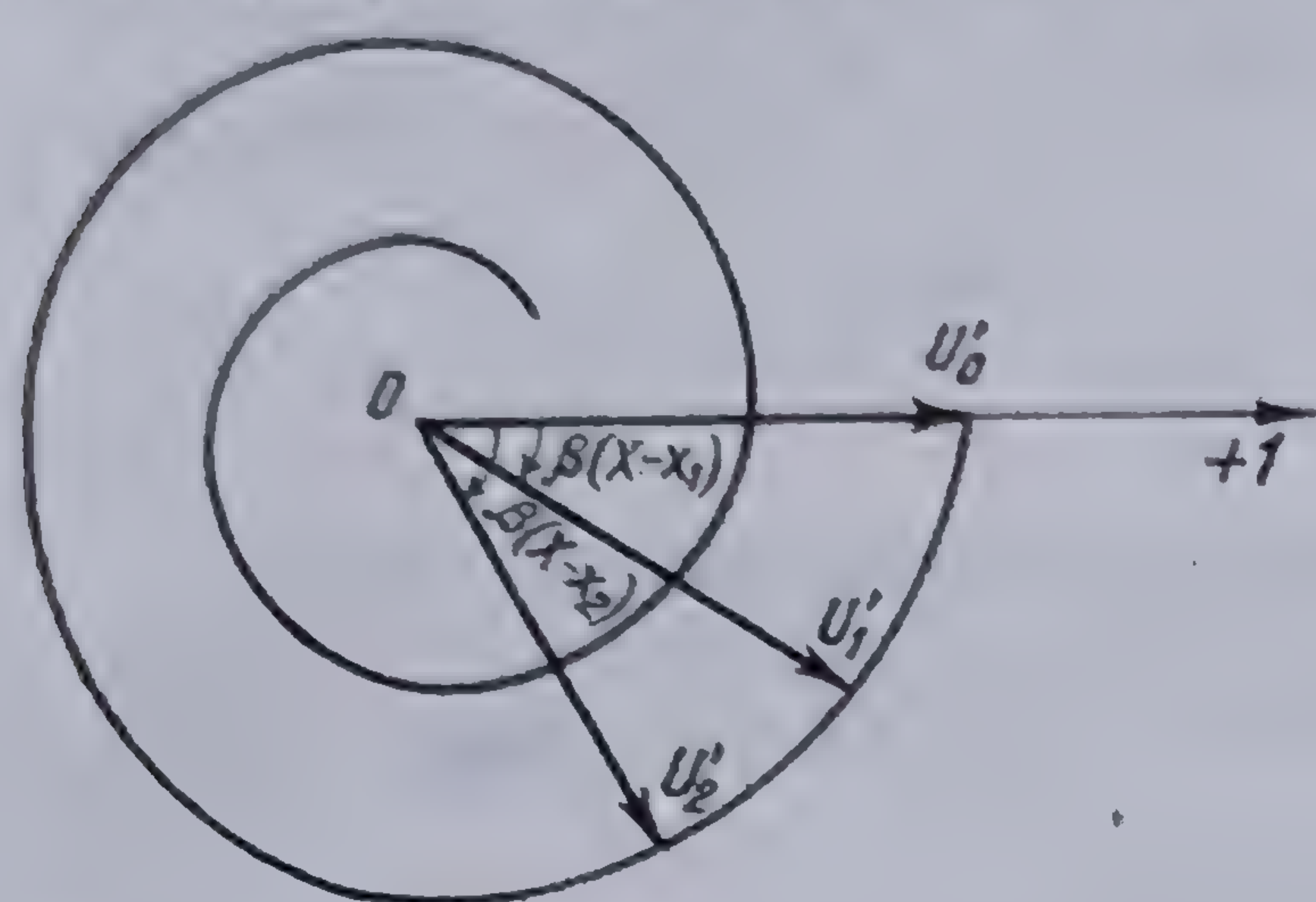
și defazat în urmă cu unghiul  $\beta(X - x_1)$ ; la o altă distanță  $x_2$ , fazorul corespunzător va avea modulul

$$U' \varepsilon^{-\alpha(X-x_2)}$$

\* Vezi par. 12.1.4.3.



și va fi defazat cu unghiul  $\beta(X-x_2)$  etc. Componenta  $U_1$  a tensiunii este deci reprezentată de-a lungul întregii linii de un ansamblu de fazori a căror extremitate este așezată pe o spirală logaritmică și a căror argumente sînt proporționale cu distanța ce separă fiecare punct de origine (fig. 12.6).



De-a lungul liniei există puncte în care tensiunile, sau curenții respectivi au aceeași fază; fie  $\lambda$  distanța dintre două asemenea puncte. Va trebui să avem

$$\beta(X-x) = \beta[X-(x+\lambda)] = \beta(X-x) - 2\pi$$

și rezultă

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (12.37)$$

Fig. 12.6. Reprezentarea grafică a variației amplitudinii și fazei unei unde directe de tensiune.

Distanța  $\lambda$  astfel definită se numește *lungimea de undă* a unei de tensiune, respectiv de curent; ea este aceeași atât

pentru unda directă cît și pentru unda reflectată.

Înmulțind numărătorul și numitorul relației (12.37) cu  $\omega$  și ținînd seama de relațiile (4.6) și (12.36) se obține

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{f}$$

Astfel, pentru o linie aeriană industrială fără pierderi \*  $f = 50$  Hz,  $v = 3 \cdot 10^5$  km/s și deci

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^5}{50} = 6000 \text{ km.}$$

Al doilea termen, corespunzînd unei reflectate,

$$u_2 = \varepsilon^{-\alpha x} U'' \sqrt{2} \cos(\omega t + v - \beta x)$$

se reprezintă în același mod, cu deosebirea că la extremitatea receptor

$$\underline{U}_0'' = U'' \underline{v}.$$

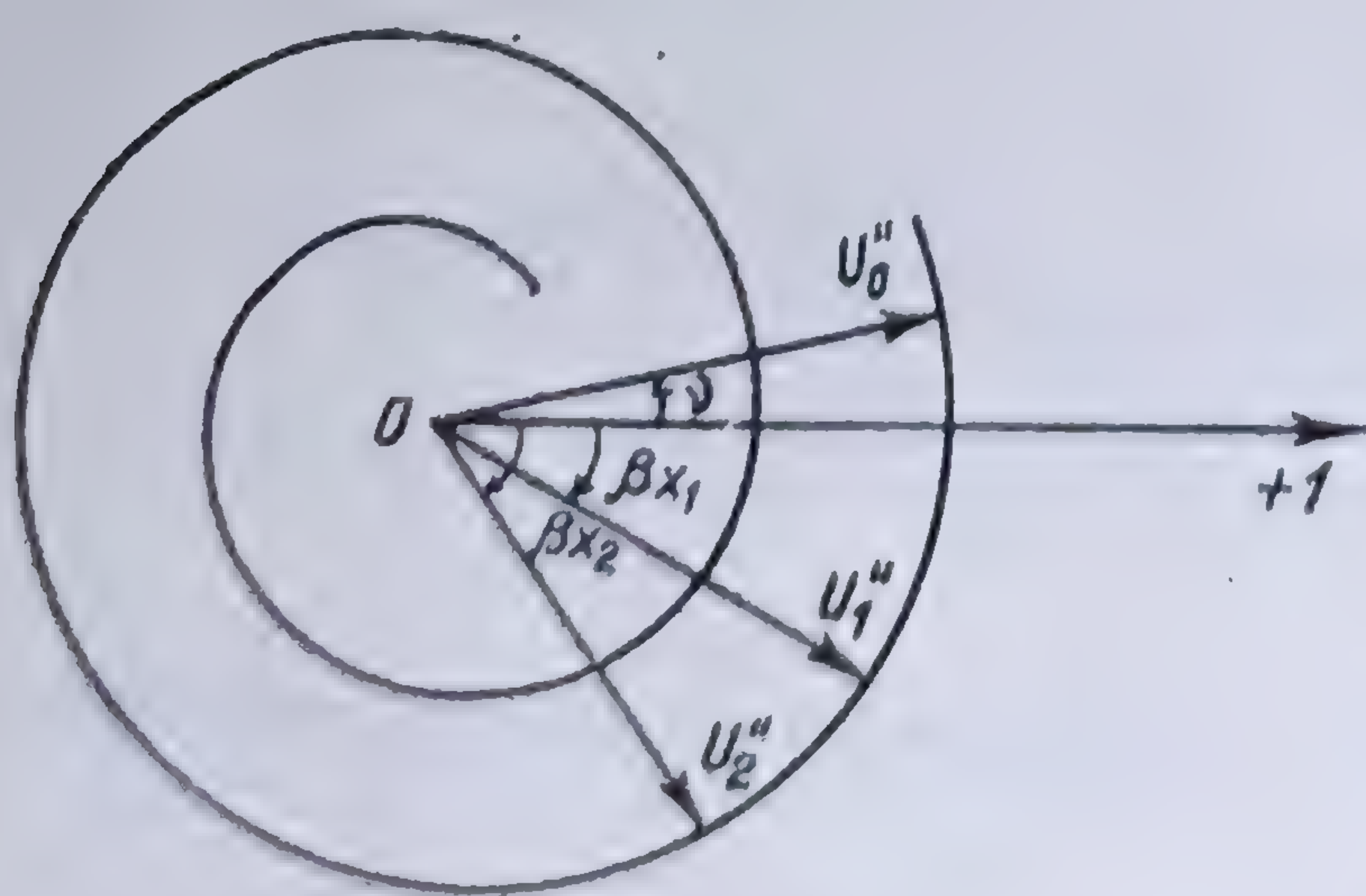


Fig. 12.7. Reprezentarea grafică a variației amplitudinii și fazei unei unde reflectate de tensiune.

\* Vezi 12.1.4.2. a).

Construcția diagramei se efectuează în același mod, ca și pentru cazul precedent (fig. 12.7), lungimea de undă fiind aceeași  $\lambda$ .

În ceea ce privește undele de curent, reprezentarea lor este analoagă.

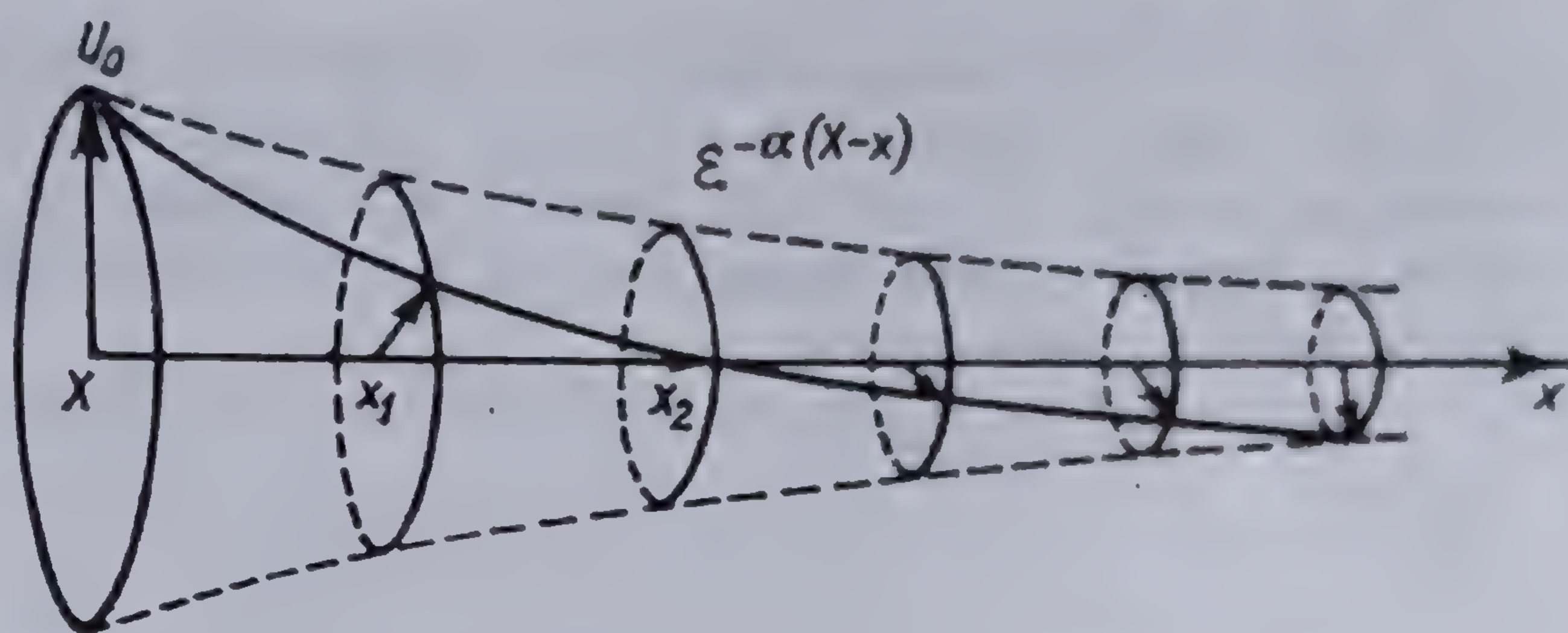
O reprezentare intuitivă se poate face reprezentînd variația fazorilor respectivi cu ajutorul unei imagini spațiale, în care extremitatea acestor fazori se găsesc pe o elice logaritmică a cărei pas este egal cu lungimea de undă  $\lambda$  a liniei.



În figura 12.8 este redată această reprezentare pentru fazorul undei directe de tensiune; pentru ceilalți fazori reprezentarea este analoagă.

Raportul dintre amplitudinea undelor directe și reflectate — de tensiune și de curent — este determinat de impedanța de sarcină legată la extremitatea receptoare a liniei; într-adevăr, din relațiile (12.15) și (12.32) se deduce :

Fig. 12.8. Reprezentarea spațială a variației fazorului undei directe de tensiune.



pentru tensiune

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_d &= \frac{1}{2} \underline{U}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_2} \right) \\ \underline{U}_r &= \frac{1}{2} \underline{U}_2 \left( 1 - \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

și pentru curent

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_d &= \frac{1}{2} \underline{I}_2 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} \right) \\ \underline{I}_r &= \frac{1}{2} \underline{I}_2 \left( 1 - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_c} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.39)$$

În cazul particular, când impedanța sarcinii este egală cu impedanța caracteristică a liniei

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$$

rezultă

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_c \underline{I}_2,$$

și deci

$$\underline{U}_d = \underline{U}_2 \text{ și } \underline{U}_r = 0$$

respectiv

$$\underline{I}_r = \underline{I}_2 \text{ și } \underline{I}_d = 0$$

ceea ce înseamnă că în acest caz undele reflectate sînt nule și nu există decît undele directe; altfel spus, nu există reflexie de unde la extremitatea receptoare a liniei.

O linie închisă pe impedanța sa caracteristică, se zice că funcționează în *regim caracteristic* sau că este *adaptată* \*.

\* Vezi 12.1.6.6.



Se definește factor de reflexie corespunzător impedanței de sarcină  $\underline{Z}_2$ , raportul

$$\underline{r} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_c} = r | \theta \quad (12.40)$$

și se vede că reflexia undelor este cu atât mai puternică cu cât diferența  $\underline{Z}_2 - \underline{Z}_c$  este mai mare. Acest raport caracterizează atât undele de tensiune cât și pe acelea de curent. Modulul factorului de reflexie dă raportul dintre amplitudinea undei reflectate către unda directă, iar argumentul acestuia definește defazajul dintre aceste două unde.

Punînd  $\underline{Z} = \underline{Z}_2 / \underline{Z}_c$ , relația (12.40) se poate scrie

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z} - 1}{\underline{Z} + 1}$$

și este ușor de văzut că locul geometric al afixului mărimii  $\underline{r}$  cînd  $\underline{Z}$  variază ca modul și argument, este un cerc\*. Pentru construirea lui se scrie această relație sub forma

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z} - 1}{\underline{Z} + 1} = 1 - \frac{2}{\underline{Z} + 1} = 1 - \frac{2}{1 + R + jX}.$$

În această relație, atât  $R$  cât și  $X$  sînt variabile. Locul geometric respectiv se obține construind inversele dreptelor  $1 + R + jX$  corespunzînd lui  $R$  constant [ $R \in (0, \infty)$ ] și lui  $X$  constant [ $X \in (-\infty, +\infty)$ ]; rezultatele obținute se

înmulțesc cu  $-2$ , la care se adaugă apoi 1. Procedînd în acest mod se găsește, pentru  $R$  constant o familie de cercuri cu centrul pe axa reală, toate tangente în punctul  $+1$  la o dreaptă paralelă cu axa complexă; această familie de cercuri are ca limită cercul corespunzător valorii  $R = 0$ , care are diametrul cel mai mare și care trece prin punctul  $-1$ . Pentru  $X$  constant, se găsește o familie de cercuri cu centrul pe o dreaptă perpendiculară în punctul 1 pe axa reală și toate tangente în acest punct la axa reală (fig. 12.9). Dia-

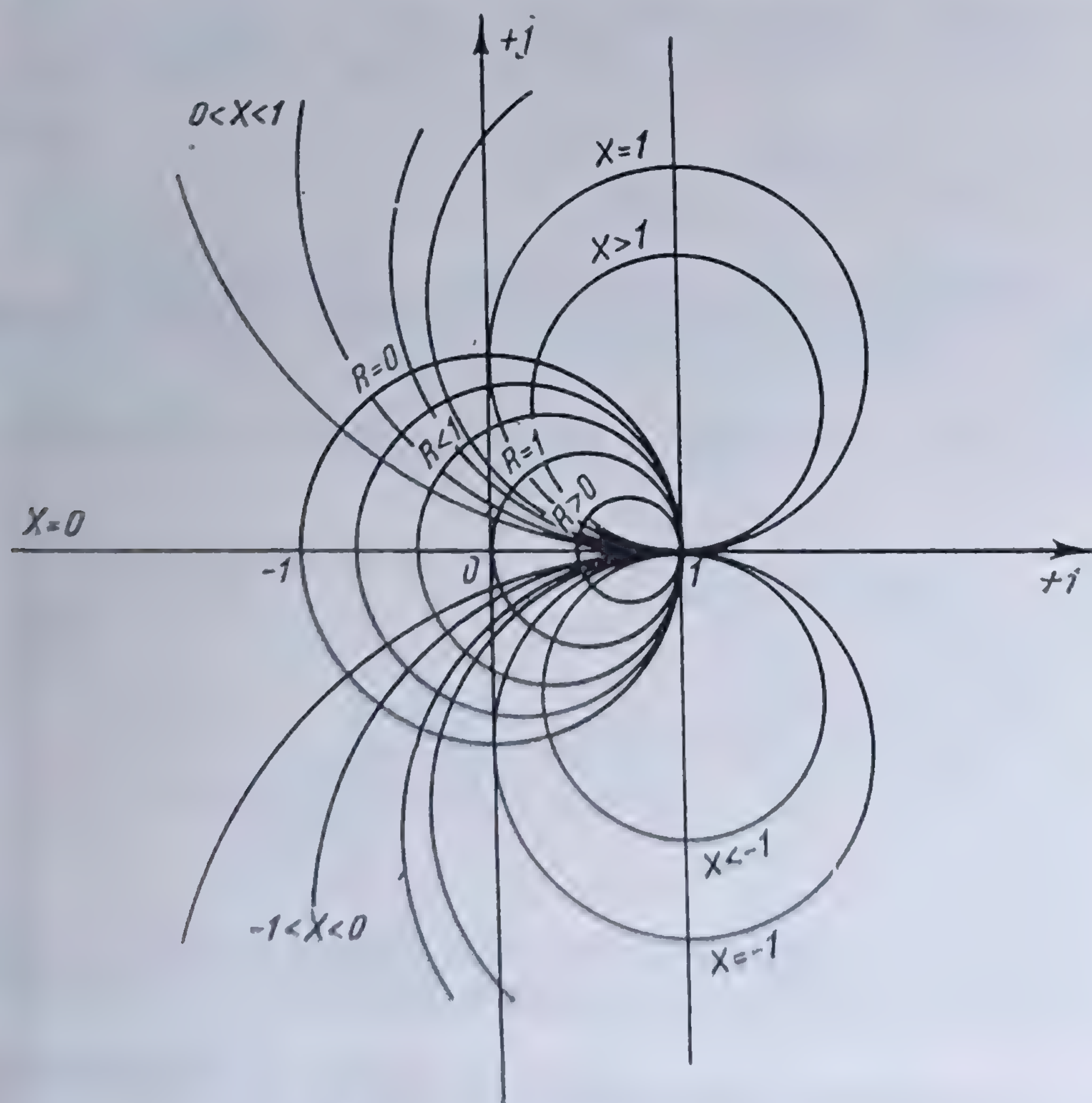
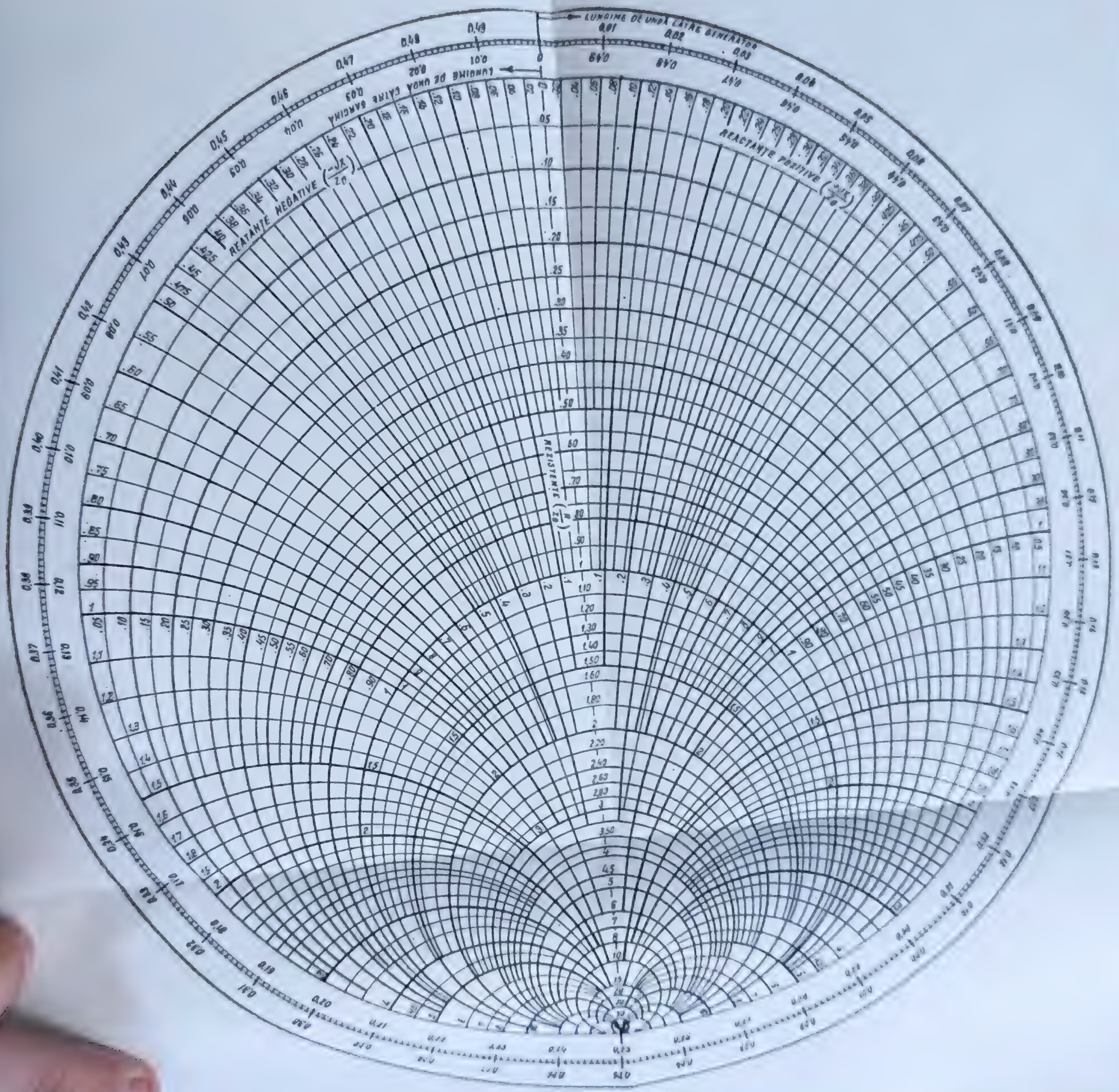


Fig. 12.9. Construcția diagramei lui SMITH.

\* Vezi 6.6.3.3.







grama astfel obținută poartă numele de *abaca lui SMITH* (fig. 12.10) și are numeroase aplicații în practică de calculul liniilor electrice lungi; ea este însă astfel orientată încât *axa rezistențelor* să fie orizontală, cercul cel mare are centrul în punctul  $1+j0$  și raza egală cu unitatea.

Dacă  $Z = R \pm jX$  este o impedanță oarecare, se determină impedanța relativă (sau redusă)

$$\underline{Z}_r = \frac{Z}{Z_c} = \frac{R}{Z_c} \pm j \frac{X}{Z_c},$$

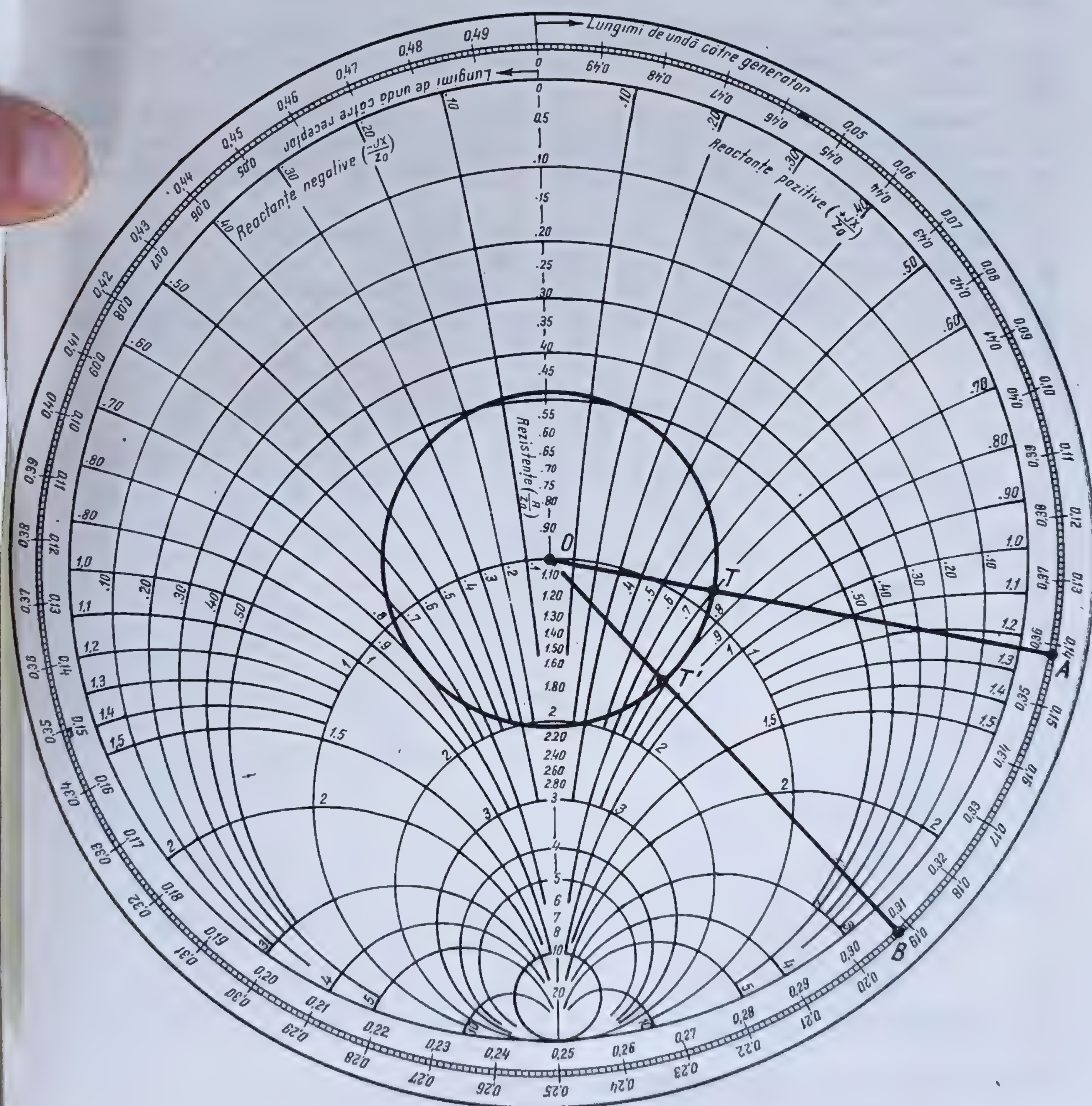


Fig. 12.11. Schema de utilizare a abacei SMITH.



valorile lui  $R/Z_c$  se citesc pe diametrul orizontal iar cele ale lui  $\frac{X}{Z_c}$  se citesc pe cercurile de reactanță constantă.

Scările periferice exterioare indică două elemente:

1. Lungimile de linie exprimate în funcție de lungimea de undă  $\lambda$ , spre generator — rotind în sensul acelor unui ceasornic — pornind de la punctul  $0^\circ$ , sau spre receptor — rotind în sens contrar mersului acelor unui ceasornic.

2. Unghiurile de defazaj de-a lungul liniei. Valoarea coeficientului de reflexie  $\Gamma$  este dată, pentru orice punct al abacei, prin distanța radială a acestui punct la centrul cercului mare (pentru care  $R/Z_c = 1$ ), luând ca unitate raza acestui cerc mare.

Pe abacă, un punct corespunzând unei anumite impedanțe se determină prin intersecția a două cercuri: cercul lui  $R$  și acela a lui  $X$ . Fie  $T$  acest punct (fig. 12.11).

Pentru a determina impedanța  $Z_c$  la o anumită distanță  $d$  către sursă, se trasează dreapta  $OT$  ( $O$  fiind centrul cercului mare) pînă întâlnește scara exterioară într-un punct  $A$  și se citește pe această scară o anumită valoare a distanței exprimată în fracțiuni de  $\lambda$ .

Se rotește apoi raza  $OTA$  cu un unghi corespunzător lungimii  $d$  dorită (exprimată în fracțiuni de  $\lambda$ ). Se obține raza  $OB$ .

Punctul  $T'$ , intersecția razei  $OB$  cu cercul cu centrul în  $O$  și care trece prin punctul  $T$ , dă valoarea relativă a impedanței căutate  $R_1 + jX_1$ ; se deduce apoi

$$Z_0 = Z_c (R_1 + jX_1).$$

Ca exemplu de aplicație să studiem următoarea problemă \*: O linie de înaltă frecvență fără pierderi, avînd lungimea  $X = 2,25$  m și avînd impedanța caracteristică  $Z_c = 55 + j0 \Omega$ , este alimentată de un generator avînd  $E = 100$  V și a cărui impedanță internă este  $Z_s = 40 + j0 \Omega$ . Linia are cuplat la ieșire un receptor avînd impedanța  $Z_2 = 115 + j75 \Omega$ . Frecvența este  $f = 150$  MHz și se admite că viteza de propagare este 95% din viteza luminii.

Se cere să se calculeze curentul  $I_2$  absorbit de receptor, tensiunea  $U_2$  la bornele sale și puterea pe care o absoarbe (fig. 12.12).

Lungimea de undă este

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0,95 \cdot 3 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 1,9 \text{ m}$$

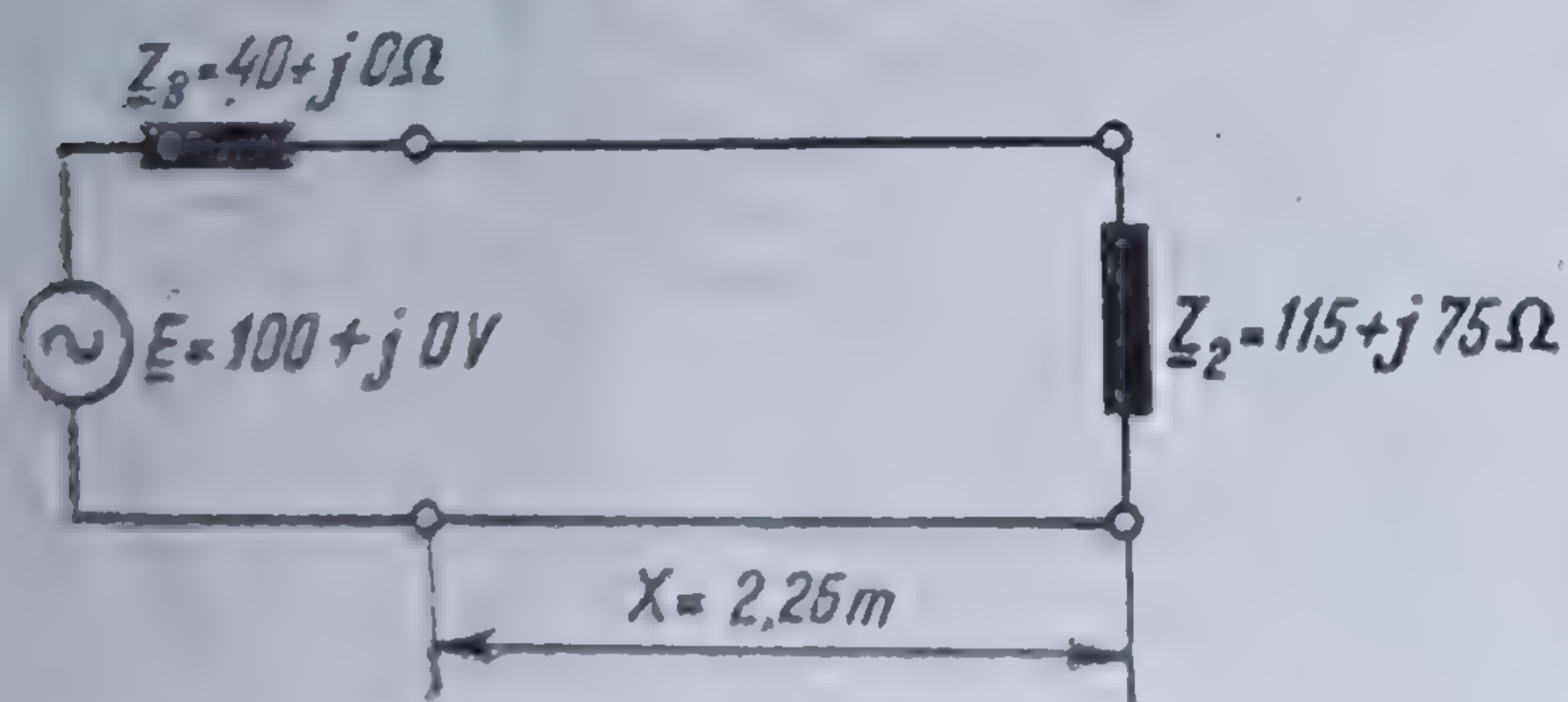


Fig. 12.12. Circuitul de calculat.

și deci

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{2,25}{1,90} = 1,184$$

Impedanța relativă (sau redusă) a receptorului este

$$Z_r = \frac{Z_2}{Z_c} = \frac{115 + j75}{55} = 2,09 + j1,36.$$

\* Vezi pentru alte aplicații de exemplu [77] pag. 323.



Așezind pe abacă punctul  $D$  corespunzător acestei impedanțe și ducind raza  $OD$  se găsește la periferie punctul  $A'$  care corespunde distanței  $0,212 \lambda$  (fig. 12.13). Rotind raza  $OA'$  spre sursă cu  $1,184 \lambda$  sau cu  $0,184 \lambda$  ceea ce e tot una, corespunzătoare lunginii totale a liniei, se obține

$$0,212\lambda + 0,184 \lambda = 0,396 \lambda$$

care determină punctul  $D'$ . Ducînd raza  $OD'$  și luînd  $OC = OD$ , se găsește

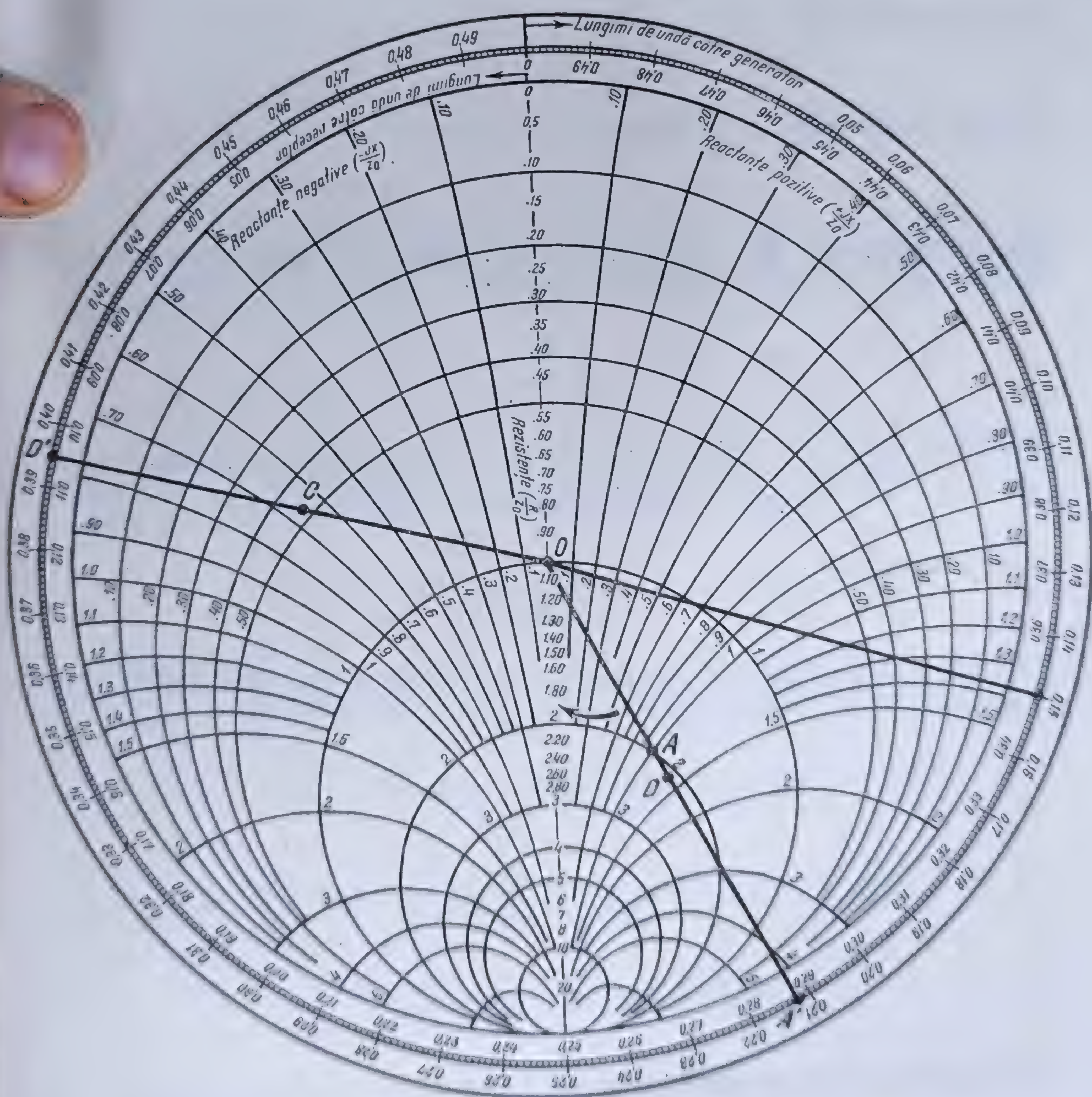


Fig. 12.13. Aplicarea abacel Smirni la circuitul dat.



că punctul  $C$  corespunde impedanței relative  $0,49 - j 0,65$ . În consecință,

$$\underline{Z}_0 = (0,49 - j 0,65) \cdot 55 = 27 - j 35,8 \Omega$$

care este impedanța de intrare a liniei pe care debitează sursa.  
Curentul dat de sursă va fi

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_0} = \frac{100}{40 + j (27 - j 35,8)} = 1,16 + j 0,62 \text{ A}$$

a cărui modul este

$$I_0 = 1,31 \text{ A.}$$

Puterea activă dată de sursă este

$$P_0 = R_0 I_0^2 = 27 \cdot 1,31^2 = 37 \text{ W.}$$

Întrucât linia este fără pierderi, această putere este integral absorbită de receptor, rezultă dar, curentul prin receptor

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_0}{R_2}} = \sqrt{\frac{37}{115}} = 0,64 \text{ A.}$$

Tensiunea la bornele receptorului va fi

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = (115 + j 75) \cdot 0,64 = 73,6 + j 48 \text{ V}$$

a cărui modul este

$$V_2 = 88,4 \text{ V.}$$

**OBSERVAȚIE.** Acest aspect atît de simplu a propagării curenților și tensiunilor nu se regăsește și în cazul transmiterii puterilor

$$\begin{aligned} \underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* &= (\varepsilon^{\alpha x} M | \underline{\mu + \beta x} + \varepsilon^{-\alpha x} N | \underline{\nu - \beta x}) \cdot (\varepsilon^{\alpha x} \frac{M}{Z_c} | \underline{-\mu - \beta x + \psi} - \\ &- \varepsilon^{-\alpha x} \cdot \frac{N}{Z_c} | \underline{-\nu + \beta x + \psi}) = \varepsilon^{2\alpha x} \frac{M^2}{Z_c} | \underline{\gamma} - \frac{MN}{Z_c} | \underline{\mu - \nu + 2\beta x + \psi} + \\ &+ \frac{MN}{Z_c} | \underline{-\mu + \nu - 2\beta x + \psi} - \frac{N^2}{Z_c} \varepsilon^{-2\alpha x} | \underline{\psi}, \end{aligned}$$

sau punînd ca mai înainte

$$\mu = -\beta X, \quad M = U' \varepsilon^{-\alpha x} \text{ și } N = U''$$



se obține

$$\underline{S} = \frac{1}{Z_c} \left[ \frac{1}{2} \varepsilon^{-2\alpha(X-x)} U'^2 \underline{\psi} - \frac{1}{2} U' U'' \varepsilon^{-\alpha x} \underline{v - \beta(X-2x) + \psi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} U' U'' \varepsilon^{-\alpha x} \underline{v + \beta(X-2x) + \psi} - \frac{1}{2} U''^2 \varepsilon^{-2\alpha x} \underline{\psi} \right],$$

de unde rezultă

$$P = \frac{1}{2Z_c} \{ (\varepsilon^{-2\alpha(X-x)} U'^2 - \varepsilon^{-2\alpha x} U''^2) \cos \psi - 2 U' U'' \varepsilon^{\alpha X} \sin[\beta(X-2x) + v] \sin \psi \},$$

$$Q = \frac{1}{2Z_c} \{ (\varepsilon^{-2\alpha(X-x)} U'^2 - \varepsilon^{-2\alpha x} U''^2) \sin \psi + 2 U' U'' \varepsilon^{\alpha X} \sin[\beta(X-2x) + v] \cos \psi \}.$$

Rezultă dar, că *puterea activă* nu poate fi separată în doi termeni, corespunzător celor două unde, decât numai dacă  $\psi = 0$ , adică argumentul impedanței caracteristice este nul. Aceasta se realizează dacă  $r = 0$  și  $g = 0$ , în cazul liniilor fără pierderi și în cazul transmisiunilor de radio, sau dacă

$$\frac{l}{r} = \frac{c}{g},$$

care constituie condiția lui HEAVISIDE și corespunde unei linii funcționând fără distorsiuni\*. În ambele aceste cazuri, impedanța caracteristică este o mărime reală și are expresia

$$Z_c = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

12.1.5.2. Al doilea aspect fizic al soluțiilor. Ținând seama de expresiile (12.32) ale parametrilor de integrare ale ecuațiilor generale (12.11), soluțiile (12.15) și (12.16) ale acestor ecuații pot fi scrise:

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \frac{\varepsilon^{\gamma x} + \varepsilon^{-\gamma x}}{2} + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \frac{\varepsilon^{\gamma x} - \varepsilon^{-\gamma x}}{2}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \frac{\varepsilon^{\gamma x} - \varepsilon^{-\gamma x}}{2} + \underline{I}_2 \frac{\varepsilon^{\gamma x} + \varepsilon^{-\gamma x}}{2}$$

sau

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x. \end{aligned} \right\} \quad (12.41)$$

\* Vezi 12.1.6.6.



La originea liniei,  $x=X$ , tensiunea și curentul vor fi

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} X \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} X + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X. \end{aligned} \right\} \quad (12.42)$$

Făcînd ca sistemul să funcționeze în gol la receptor, ceea ce se obține din ecuațiile (12.14) în care se face  $\underline{I}_2 = 0$ ; se obține

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x, \\ \underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x. \end{aligned} \right\} \quad (12.43)$$

Făcînd acum ca linia să funcționeze în scurtcircuit ( $\underline{U}_2 = 0$ ) se găsește

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{sc} &= \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \\ \underline{I}_{sc} &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x \end{aligned} \right\} \quad (12.44)$$

astfel, că funcționarea liniei poate fi considerată ca rezultînd din suprapunerea acestor două stări limită de funcționare (teorema lui BLONDEL):

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_{sc} \text{ și } \underline{I} = \underline{I}_0 + \underline{I}_{sc}.$$

Luînd  $\underline{U}_2$  ca origine de fază și punînd

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta, \quad \underline{Z}_c = Z_c \angle \psi, \quad \underline{I}_2 = I_2 \angle \varphi_2,$$

se obține

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \underline{\gamma} x &= \frac{1}{2} [\varepsilon^{(\alpha+j\beta)x} + \varepsilon^{-(\alpha+j\beta)x}] = \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha x} \varepsilon^{j\beta x} + \varepsilon^{-\alpha x} \varepsilon^{-j\beta x}) = \\ &= \frac{1}{2} [\varepsilon^{\alpha x} \angle \beta x + \varepsilon^{-\alpha x} \angle -\beta x] \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \underline{\gamma} x &= \frac{1}{2} [\varepsilon^{(\alpha+j\beta)x} - \varepsilon^{-(\alpha+j\beta)x}] = \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha x} \varepsilon^{j\beta x} - \varepsilon^{-\alpha x} \varepsilon^{-j\beta x}) = \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{\alpha x} \angle \beta x - \varepsilon^{-\alpha x} \angle -\beta x). \end{aligned}$$



Introducând aceste valori în expresiile (12.42) și (12.43) se obține

$$\underline{U}_0 = \frac{1}{2} \underline{U}_2 [(\operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) \underline{\beta x} + (\operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x) \underline{-\beta x}];$$

$$\underline{I}_0 = \frac{1}{2} \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} [(\operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) \underline{\beta x - \psi} - (\operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x) \underline{-\beta x - \psi}];$$

$$\underline{U}_{sc} = \frac{1}{2} \underline{Z}_c \underline{I}_2 [(\operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) \underline{\beta x + \psi + \varphi_2} - (\operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x) \underline{-\beta x + \psi + \varphi_2}];$$

$$\underline{I}_{sc} = \frac{1}{2} \underline{I}_2 [(\operatorname{ch} \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) \underline{\beta x + \varphi_2} + (\operatorname{ch} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x) \underline{-\beta x + \varphi_2}].$$

Din aceste relații se pot scrie imediat valorile instantanee corespunzătoare

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= U_2 \sqrt{2} [\operatorname{ch} \alpha x + \cos \beta x \cos \omega t - \operatorname{sh} \alpha x \sin \beta x \sin \omega t]; \\ u_{sc} &= Z_c I_2 \sqrt{2} [\operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x \cos(\omega t + \psi + \varphi_2) - \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x \sin(\omega t + \psi + \varphi_2)]; \end{aligned} \right\} \quad (12.45)$$

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= \frac{U_2}{Z} \sqrt{2} [\operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x \cos(\omega t - \psi) - \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x \sin(\omega t - \psi)]; \\ i_{sc} &= I_2 \sqrt{2} [\operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x \cos(\omega t + \varphi_2) - \operatorname{sh} \alpha x \sin \beta x \sin(\omega t + \varphi_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (12.46)$$

Fiecare dintre aceste patru combinații, corespunzând tensiunii respectiv curentului, reprezintă două mărimi alternative în spațiu și timp avînd fiecare, în diversele puncte ale liniei, aceeași fază, dar amplitudinea variînd cu distanța (fig. 12.14).

Acste mărimi sînt unde staționare; distanța care separă două maxime de același semn, cu alte cuvinte distanța care separă două puncte ale liniei unde amplitudinea are aceeași valoare (abstracție făcînd de factorii  $\operatorname{ch} \alpha x$  și  $\operatorname{sh} \alpha x$ ) este astfel, încît

$$\cos \beta x = \cos \beta(x + \lambda) \text{ și } \sin \beta x = \sin \beta(x + \lambda)$$

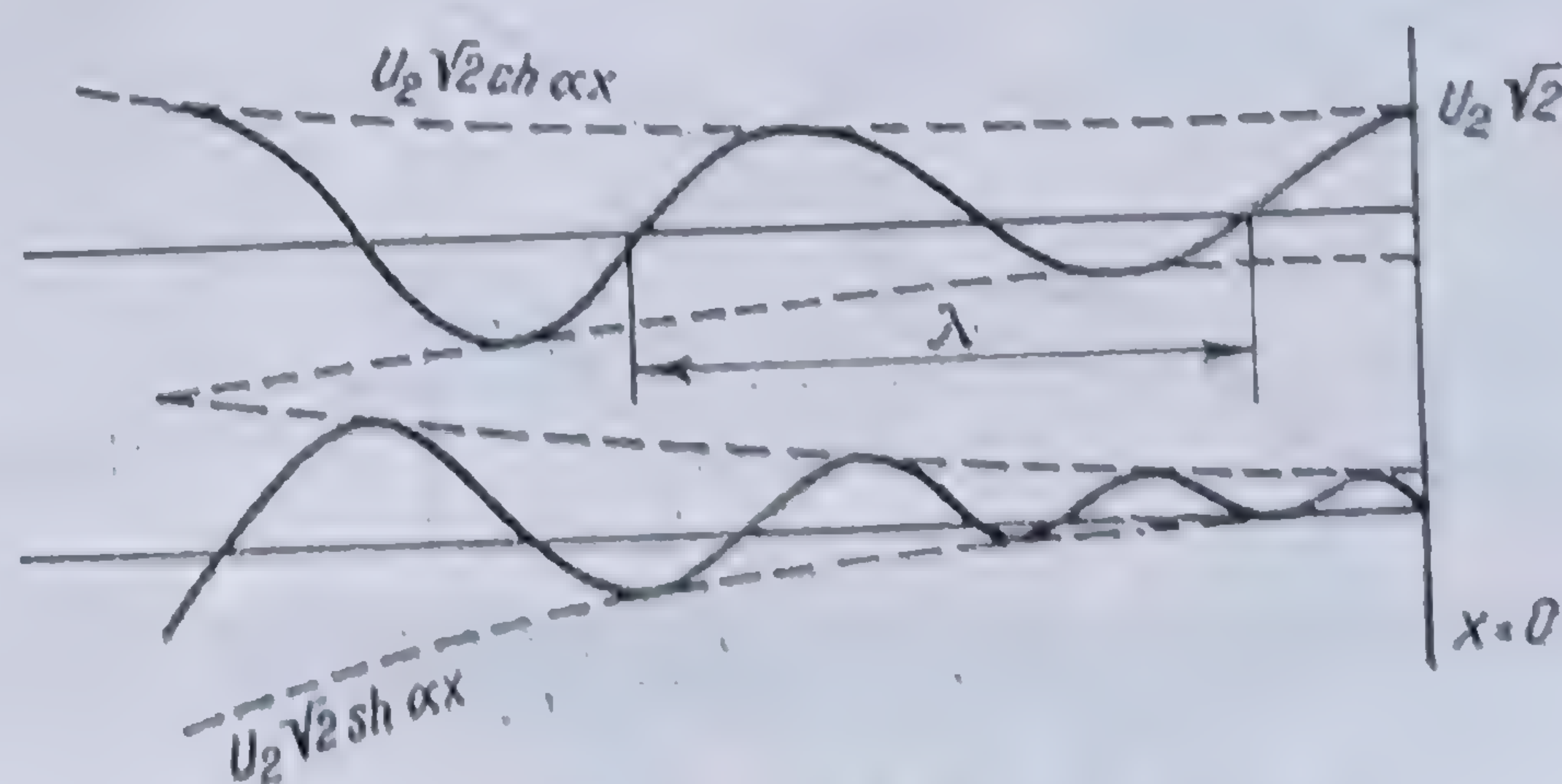
rezultă

$$\lambda \beta = 2\pi$$

și deci

$$= \frac{2\pi}{\beta},$$

care este tocmai lungimea de undă a liniei.



12.14. Undele staționare de tensiune



Astfel că atât curentul cât și tensiunea, pot fi considerate ca suprapunerea respectivă a celor patru unde, două câte două decalate unele în raport cu celelalte, însă toate avînd aceeași lungime de undă.

În cazul liniilor electrice de transmitere a energiei electrice, lungimea lor este în general mică în raport cu lungimea lor de undă; în consecință, în acest caz nu se poate vorbi de unde staționare. În cazul liniilor de telecomunicații, la care frecvențele sînt mult mai ridicate, lungimea de undă este în general mult mai mică decît lungimea liniei.

**12.1.5.3. Valoarea efectivă a curenților și tensiunilor de-a lungul liniei.** Pornind de la relațiile

$$u = u_0 + u_{sc} \quad \text{și} \quad i = i_0 + i_{sc},$$

valorile efective ale acestor mărimi se obțin calculînd rădăcina pătrată a sumei pătratelor coeficienților lui  $\cos \omega t$  și  $\sin \omega t$ , împărțiți cu  $\sqrt{2}$ , din relațiile (12.44) și (12.45). Făcînd aceste calcule se găsește \*

$$U^2 = [A \operatorname{ch} 2\alpha x + B \operatorname{sh} 2\alpha x] - [C \cos 2\beta x + D \sin 2\beta x] = V - W$$

$$Z_c^2 I^2 = [A \operatorname{ch} 2\alpha x + B \operatorname{sh} 2\alpha x] + [C \cos 2\beta x + D \sin 2\beta x] = V + W$$

în care,

$$A = \frac{1}{2} [Z_c^2 I_2^2 + U_2^2]; \quad B = Z_c I_2 U_2 \cos(\psi + \varphi_2),$$

$$C = \frac{1}{2} [Z_c^2 I_2^2 - U_2^2]; \quad D = Z_c I_2 U_2 \sin(\psi + \varphi_2).$$

Pentru un regim dat la sosire, mărimea

$$V = A \operatorname{ch} 2\alpha x + B \operatorname{sh} 2\alpha x$$

este o funcție ce crește permanent cu  $x$ , adică de la receptor către generator. Mărimea

$$W = C \cos 2\beta x + D \sin 2\beta x$$

se scade din  $V$  — în expresia lui  $U^2$  — sau se adaugă lui  $V$  — în expresia curen-  
tului  $Z_c^2 I^2$ ; este o funcție sinusoidală, cu perioada spațială  $\frac{2\pi}{2\beta} = \frac{\lambda}{2}$ , prezen-  
tînd astfel, de-a lungul liniei o serie de maxime și de minime, maximum ten-  
siunii corespunzînd la minimumul curen-  
tului (fig. 12.15).

Cazuri particulare:

— Linia funcționînd în gol:  $I_2 = 0$ .

Rezultă

$$A = \frac{U_2^2}{2}, \quad C = -\frac{U_2^2}{2}, \quad B = D = 0$$

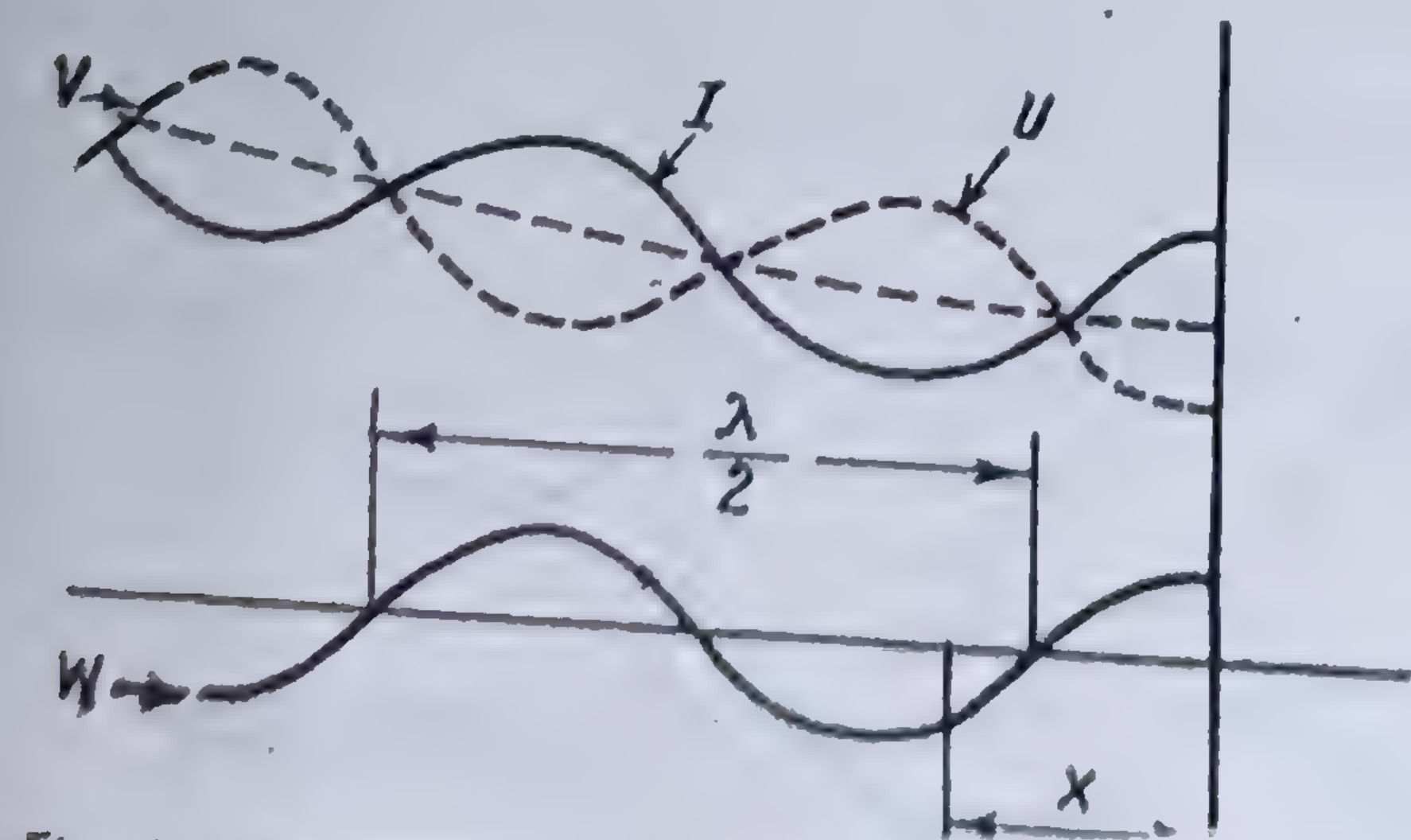


Fig. 12.15. Variația valorii efective a tensiunii și curențului de-a lungul liniei.

\* Vezi [107] pag. 404—405.



$$U_0^2 = \frac{U_2^2}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x),$$

$$I_0^2 = \frac{U_2^2}{2Z_0^2} (\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x).$$

— Linia funcționând în scurtcircuit:  $U_2 = 0$ . Rezultă

$$A = C = \frac{Z_0^2 I_2^2}{2}; \quad B = D = 0$$

$$U_{sc}^2 = \frac{Z_0^2 I_2^2}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x),$$

$$I_{sc}^2 = \frac{I_2^2}{2} (\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x).$$

#### 12.1.6. FUNCȚIONAREA ȘI PROPRIETĂȚILE GENERALE ALE LINIILOR DE TRANSMITERE DE ENERGIE ELECTRICĂ

12.1.6.1. Ecuațiile și diagrama generală a unei linii de transmitere a energiei electrice. Ecuațiile (12.42), care dau expresia tensiunii și curentului la sursă în funcțiile de mărimile corespunzătoare de la receptor:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X + \underline{Z}_0 \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} X,$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} \operatorname{sh} \underline{\gamma} X + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X,$$

în care  $X$  este lungimea liniei, reprezintă ecuațiile unui cuadripol, coeficienții respectivi îndeplinind condiția cerută pentru un cuadripol pasiv \*

$$\operatorname{ch}^2 \underline{\gamma} X - \operatorname{sh}^2 \underline{\gamma} X = 1.$$

Ținând seama de expresiile constantei de propagare  $\underline{\gamma}$  și a impedanței caracteristice, precum și că

$$\underline{\gamma} X = \sqrt{X(r + j\ell\omega) X(g + jc\omega)} = \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}} \quad (12.47)$$

și

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{X(r + j\ell\omega)}{X(g + jc\omega)}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}},$$

\* Vezi 0.4.4.2.



cei patru parametri care reprezintă linia respectivă vor avea expresiile următoare

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} &= \underline{D} = \operatorname{ch} \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}} \\ \underline{B} &= \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} \operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}} = \underline{Z} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}} \\ \underline{C} &= \sqrt{\frac{\underline{Y}}{\underline{Z}}} \operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}} = \underline{Y} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}} \end{aligned} \right\} \quad (12.48)$$

Dezvoltînd în serie funcțiile din membru doi \*, expresiile (12.46) se pot scrie

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{4!} + \dots \quad (12.49)$$

$$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{5!} + \dots$$

Numărul de termeni ce urmează a fi reținuți din aceste serii depinde direct de lungimea liniei; într-adevăr din relația (12.47) rezultă imediat ce  $\underline{Z} \underline{Y} = \gamma^2 X^2$ . Aceste serii fiind foarte rapid convergente, în cazul liniilor electrice industriale funcționînd la frecvența de 50 Hz și în consecință, primii trei termeni sînt suficienți.

Pentru exemplificare, să considerăm o linie aeriană perfect izolată ori fără pierderi ( $r = 0$ ,  $g = 0$ ); în aceste condiții

$$\underline{z} \underline{y} = j^2 \omega^2 cl = -\omega^2 cl.$$

Însă, produsul  $cl$  este egal cu inversul pătratului vitezei luminii, care este aproximativ egală cu  $3 \cdot 10^5$  km/s, iar, pentru frecvența industrială de 50 Hz rezultă  $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$ . Rezultă deci,

$$\underline{Z} \underline{Y} = X^2 \underline{z} \underline{y} = -1,1 \cdot 10^{-6} X^2.$$

Pentru diverse valori ale lungimii liniei  $X$  se obțin rezultatele din tabloul 12.1, în care au fost reținuți numai primii trei termeni.

Din tabloul 12.1 rezultă că modulul mărimilor  $\underline{A}$  și  $\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}}$  scade atunci cînd lungimea liniei crește, cu atît mai mult cu cît linia este mai lungă.

Dacă se calculează acum lungimea liniei pentru care un termen al seriilor din relațiile (12.48) rămîne mai mic decît o anumită valoare dată, spre exemplu

\* Se cunosc dezvoltările:  $\operatorname{ch} \sqrt{\underline{Z} \underline{Y}} = 1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{4!} + \dots$

$$\operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \underline{Y}} = \sqrt{\underline{Z} \underline{Y}} \left( 1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{6!} + \dots \right).$$



Tabloul 12.1

Lungimea liniei $X$ km	$\frac{ZY}{2!}$	$\frac{Z^2 Y^2}{4!}$	$A$	$\frac{ZY}{3!}$	$\frac{Z^2 Y^2}{5!}$	$\frac{B}{Z} = \frac{C}{Y}$
100	-0,0055	—	0,9945	-0,0018	—	0,9982
200	-0,0220	0,0001	0,9781	-0,0073	—	0,9927
300	-0,0495	0,0004	0,9509	-0,0165	0,0001	0,9836
400	-0,0880	0,0013	0,9133	-0,0293	0,0003	0,9700
500	-0,1375	0,0032	0,8657	-0,0458	0,0006	0,9548
600	-0,1980	0,0065	0,8085	-0,0660	0,0013	0,9353
700	-0,2695	0,0121	0,7426	-0,0898	0,0024	0,9126
800	-0,3520	0,0207	0,6687	-0,1173	0,0041	0,8868
900	-0,4455	0,0331	0,5876	-0,1485	0,0066	0,8581
1000	-0,5500	0,0504	0,5004	-0,1833	0,0101	0,8268

0,01, se găsește că se poate lua pentru parametrii cuadripolului echivalent al liniei electrice, valorile date în tabloul 12.2\*.

Tabloul 12.2

Lungimea maximă a liniei km	Parametrii cuadripolului
135	$\underline{A} = 1$
650	$\underline{A} = 1 + \frac{ZY}{2!}$
230	$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1$
1 000	$\frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1 + \frac{ZY}{3!}$

În mod practic termenii de forma  $\underline{Z}^2 \underline{Y}^2$  nu intervin decât în cazul unor linii foarte ungi.

Trebuie observat, că aceste rezultate nu sînt decât aproximative, întrucît în ipoteza făcută ( $r = 0$ ,  $g = 0$ ) argumentul constantei de propagare este  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , în realitate însă,  $\delta < \frac{\pi}{2}$ . De asemenea, trebuie ținut seama, că toate

considerațiile făcute mai înainte s-au făcut pentru o frecvență de 50 Hz; ținînd seama că  $\gamma$  este proporțional cu frecvența, atunci cînd aceasta crește, termenii dezvoltărilor în serie (12.49) cresc mult mai rapid cu ordinul lor și este deci necesar să se rețină termeni mai mulți pentru linii de aceeași lungime.

**OBSERVAȚIE.** Studiul funcționării unei linii electrice de transmitere a energiei electrice se poate face deci, utilizînd toate metodele folosite la studiul unui cuadripol \*\*. Printre acestea, se utilizează în mod curent, diagrama tensiunilor—sau cu un singur pol de tensiune—, metoda analitică folosind schemele echivalente  $\pi$  și  $T$ , precum și aceea a separării puterilor la cele două extremități (metoda BOUCHEROT)\*\*\*. Trebuie observat, că diagrama tensiunilor con-

\* Vezi [73] pag. 216.

\*\* Vezi 6.4.4.

\*\*\* Vezi 6.1.4.1.



struită pentru o anumită linie este un instrument de calcul foarte util, care dă foarte repede toate elementele caracteristice corespunzătoare unui anumit regim de funcționare.

Circuitele  $\pi$  și  $T$  sînt utile atît pentru calculul analitic al liniei, cît și pentru faptul că ele dau posibilitatea modelării liniei respective într-un laborator.

12.1.6.2. Circuitele  $\pi$  și  $T$  echivalente ale unei linii date. Ecuațiile de funcționare ale unei linii electrice lungi fiind acelea ale unui cuadripol, o linie electrică poate fi înlocuită printr-o schemă echivalentă în  $\pi$  sau în  $T$ ; pentru aceasta este suficient să se scrie impedanțele corespunzătoare în funcție de parametrii cuadripolului\*.

Astfel, pentru schema în  $\pi$  (fig. 12.16), ținînd seama că

$$\underline{Z}_\pi = \underline{B} \quad \text{și} \quad \underline{Y}_\pi = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{B}},$$

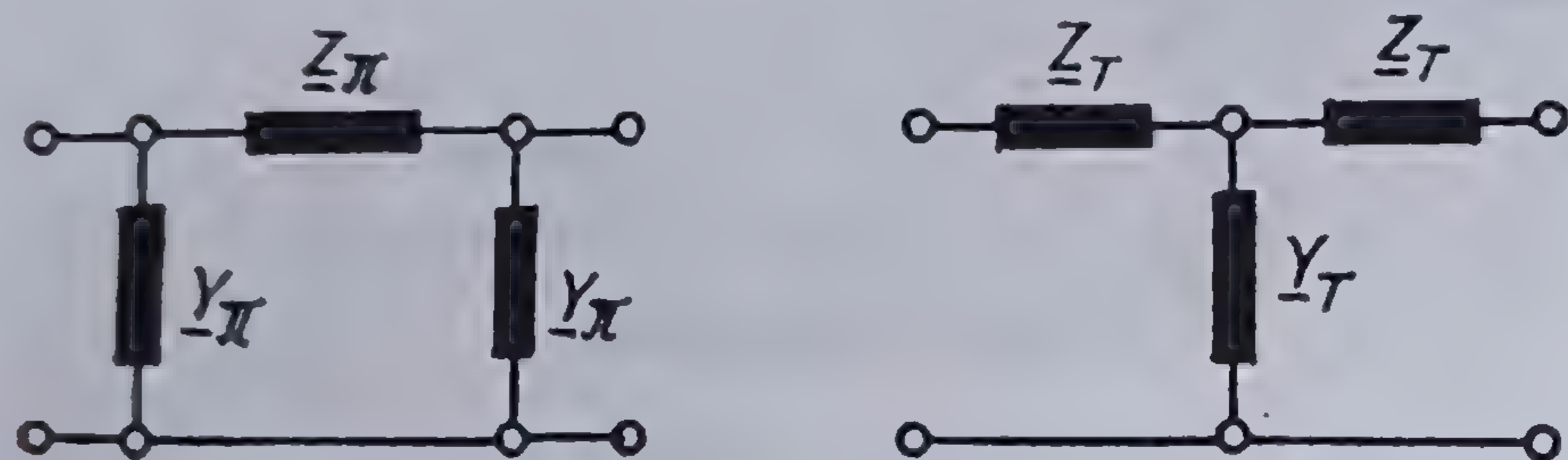


Fig. 12.16. Cuadripolii  $\pi$  și  $T$  echivalenți ai unei linii electrice de transmitere a energiei electrice.

precum și de relațiile (12.47), se obține

$$\underline{Z}_\pi = \underline{Z} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}; \quad \underline{Y}_\pi = \frac{\underline{Y}}{2} \frac{\operatorname{tg h} \frac{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{2}}{\frac{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{2}}. \quad (12.50)$$

În același mod, pentru schema în  $T$  se găsește

$$\underline{Z}_T = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}} = \frac{\underline{Z}}{2} \frac{\operatorname{tg h} \frac{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{2}}{\frac{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{2}}; \quad \underline{Y}_T = \underline{C} = \underline{Y} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}. \quad (12.51)$$

Din relațiile (12.50) și (12.51) rezultă că impedanțele și admitanțele, corespunzînd celor două circuite echivalente  $\pi$  și  $T$  ale unei linii lungi diferă de impedanța și admitanța totală  $-\underline{Z}$  și  $\underline{Y}$  — a liniei numai prin factorii

$$\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}} = 1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{5!} + \dots$$

$$\frac{\operatorname{tg h} \frac{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{2}}{\frac{\sqrt{\underline{Z} \underline{Y}}}{2}} = 1 - \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{12} + \frac{\underline{Z}^3 \underline{Y}^3}{296} - \dots$$

\* Vezi 6.4.4.9.



Din aceste relații se poate vedea în ce condiții se poate neglija repartitia uniformă a constantelor lineice ale liniei și a admite că impedanța totală este localizată la mijlocul liniei, admitanța corespunzătoare fiind localizată, în două jumătăți egale la cele două extremități ale liniei (circuitul în  $\pi$ ) sau admitanța totală este localizată întreaga la mijlocul liniei între două impedanțe egale fiecare cu jumătate din impedanța totală a liniei așezate la extremitățile liniei (circuitul în  $T$ ). Pentru aceasta este suficient să se poată neglija termenul  $\frac{\underline{Z}\underline{Y}}{6} > \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{12}$  față de unitate. În acest caz, se obține

$$\underline{Z}_{\pi} = 2 \underline{Z}_T = \underline{Z} \quad \text{și} \quad 2 \underline{Y}_{\pi} = \underline{Y}_T = \underline{Y}.$$

Făcînd un calcul analog cu cel făcut mai înainte, pentru o linie aeriană fără pierderi, se poate vedea că termenii în  $\underline{Z}^2 \underline{Y}^2$  pot fi neglijați pentru linii avînd lungimea pînă la 1000 km. Valorile aproximative a celor doi factori corespunzătoare pînă la această distanță sînt date în tabloul 12.3.

Tabloul 12.3

Lungimea liniei $X$ km	$1 + \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{6}$	$1 - \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{12}$
100	0,9988	1,0009
200	0,9927	1,0037
300	0,9835	1,0083
500	0,9542	1,0229
1000	0,8147	1,0917

Rezultă din acest tablou, făcînd un calcul invers că, pentru a obține în calcule o aproximație de 1/100 termenii în  $\underline{Z}\underline{Y}$  pot fi neglijați pentru linii avînd o lungime pînă la aproximativ 230 km.

**12.1.6.3. Altă formă a soluțiilor ecuațiilor liniilor lungi.** Reluînd soluțiile generale (12.15) și (12.16) ale ecuațiilor liniilor lungi, acestea pot fi scrise succesiv

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{M} \varepsilon^{\underline{\gamma} x} + \underline{N} \varepsilon^{-\underline{\gamma} x} = \underline{M} (\text{ch } \underline{\gamma} x + \text{sh } \underline{\gamma} x) + \underline{N} (\text{ch } \underline{\gamma} x - \text{sh } \underline{\gamma} x) = \\ &= (\underline{M} + \underline{N}) \text{ch } \underline{\gamma} x + (\underline{M} - \underline{N}) \text{sh } \underline{\gamma} x = (\underline{M} - \underline{N}) \left( \frac{\underline{M} + \underline{N}}{\underline{M} - \underline{N}} \text{ch } \underline{\gamma} x + \text{sh } \underline{\gamma} x \right). \end{aligned}$$

Ținînd seama de relațiile (12.32) și punînd

$$\frac{\underline{M} + \underline{N}}{\underline{M} - \underline{N}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c \underline{I}_2} = \text{tgh } \underline{\gamma} n,$$

relația precedentă se poate scrie

$$\underline{U} = \underline{m} \text{sh } \underline{\gamma} (x + n), \quad (12.52)$$

unde s-a notat

$$\underline{m} = \frac{\underline{M} - \underline{N}}{\text{ch } \underline{\gamma} n} = \frac{\underline{Z}_c \underline{I}_2}{\text{ch } \underline{\gamma} n}.$$

În același mod se găsește

$$\underline{I} = \frac{\underline{m}}{\underline{Z}_c} \text{ch } \underline{\gamma} (x + n). \quad (12.53)$$



La extremitatea receptor a liniei ( $x = 0$ ), relațiile (12.52) și (12.53) devin

$$\underline{U}_2 = \underline{m} \operatorname{sh} \gamma n,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{m}}{\underline{Z}_c} \operatorname{ch} \gamma n.$$

Eliminând parametrul  $\underline{m}$  între aceste relații și relațiile precedente, se obține

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \frac{\operatorname{sh} \gamma (x + n)}{\operatorname{sh} \gamma n} \quad (12.54)$$

$$\underline{I} = \underline{I}_2 \frac{\operatorname{ch} \gamma (x + n)}{\operatorname{ch} \gamma n} \quad (12.55)$$

o formă a soluției ecuațiilor lungi, utilă în aplicațiile practice și analoagă cu soluțiile ce se obțin în fenomenul pelicular\*.

**12.1.6.4. Funcționarea unei linii electrice în gol.** În cazul funcționării în gol, impedanța de sarcină  $\underline{Z}_2 = \infty$  și curentul de ieșire este nul ( $\underline{I}_2 = 0$ ). În aceste condiții, ecuațiile (12.42), de funcționare ale liniei, devin

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{10} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma X = \underline{A} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_{10} &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{ch} \gamma X = \underline{C} \underline{U}_2 \end{aligned} \right\} \quad (12.56)$$

Să examinăm mărimile caracteristice de funcționare ale liniei electrice în aceste condiții.

**Tensiunea.** Diferența relativă a tensiunilor la cele două extremități este

$$\frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_{10}}{\underline{U}_2} = 1 - \operatorname{ch} \gamma X = 1 - \underline{A}.$$

În ipoteza făcută mai înainte și anume a unei linii perfect izolată și fără pierderi ( $r=0$ ,  $g=0$ ), s-a calculat valoarea parametrului  $\underline{A}$  (Tab. 12.1). Se poate determina astfel, variația acestei diferențe de tensiune în funcție de lungimea liniei (Tab. 12.4)

Tabloul 12.4

Lungimea liniei $X$ km	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$1 - \underline{A}$	0,0055	0,0219	0,0491	0,0867	0,1343	0,1915	0,2574	0,3313	0,4124	0,4996

După cum s-a arătat mai înainte, pentru o linie electrică a cărei lungime nu depășește 630 km, se pot neglija, cu o eroare mai mică de 1%, termenii

\* Vezi 14.1.2.2.



de gradul doi și mai mare din dezvoltarea în serie a funcțiilor hiperbolice; în cazul liniei considerate se poate scrie

$$\underline{Z} = j\omega l X \quad \text{și} \quad \underline{Y} = j\omega c X$$

și deci \*

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_{10}}{\underline{U}_2} = -\frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2} = \frac{\omega^2 l c X^2}{2} \cong 0,55 \cdot 10^{-6} X^2. \quad (12.57)$$

Rezultă dar, că în primă aproximație, la mersul în gol a unei linii electrice se produce întotdeauna o creștere a tensiunii la receptor față de tensiunea la sursă; valoarea relativă a creșterii de tensiune este proporțională cu pătratul lungimii liniei și este sensibil aceeași, pentru orice linie electrică industrială.

*Curentul.* Din a doua relație (12.56) rezultă

$$\underline{I}_{10} = \underline{C} \underline{U}_2 = \frac{\underline{C}}{\underline{A}} \underline{U}_{10},$$

sau ținând seama de relațiile (12.49).,

$$\underline{I}_{10} = \underline{Y} \underline{U}_{10} \frac{1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{5!} + \dots}{1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{4!} + \dots}.$$

Cu aceleași aproximații făcute, această relație poate fi scrisă

$$\underline{I}_{10} = j c \omega X \underline{U}_{10} \frac{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{6}}{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{2}} \quad (12.58)$$

Rezultă dar, că în primă aproximație, *curentul de încărcare* a liniei este pur capacitiv, defazat deci cu  $\frac{\pi}{2}$  față de tensiunea de alimentare.

Se observă ușor, că acest curent este o funcție de pătratul lungimii liniei. Punînd

$$\frac{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{6}}{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{2}} = f(X^2), \quad (12.59)$$

relația (12.58) se poate scrie

$$\underline{I}_0 = j c \omega X \underline{U}_1 f(X^2).$$

În consecință, curentul de mers în gol sau curentul de încărcare a liniei este egal — în primă aproximație — cu curentul de încărcare a unui condensator

\* Vezi 12.1.6.1.



a căruia capacitate este egală cu capacitatea totală a liniei și căruia i se aplică tensiunea liniei la sursă  $\underline{U}_1$ , multiplicată cu o constantă care este o funcție de pătratul lungimii liniei electrice respective.

În tabloul 12.5 este dată valoarea acestei funcții pentru diverse lungimi de linie, pînă la 1000 km.

Tabloul 12.5

Lungimea liniei $X$ km	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$f(X^2)$	1,0036	1,0151	1,0350	1,0539	1,1075	1,1166	1,2482	1,3654	1,5405	1,8222
$f^{-1}(X^2)$	0,9964	0,9852	0,9662	0,9489	0,9029	0,8956	0,8012	0,7324	0,6816	0,5488

*Puterile activă și reactivă.* Calculînd aceste puteri la extremitatea sursă se obține

$$\underline{S}_{10} = P_{10} + j Q_{10} = \underline{U}_{10} \underline{I}_{10}^* = \underline{A} \underline{C}^* U_2^2 = \frac{\underline{C}^*}{\underline{A}^*} U_{10}^2. \quad (12.60)$$

În ipoteza considerată (linie care nu depășește 630 km) și în ipotezele făcute în acest caz, *puterea activă* la sursă este foarte mică și poate fi neglijată; *puterea reactivă* pe fază la sursă, *absorbită* deci de linia electrică, este aproximativ dată de relația

$$j Q_{10} = U_{10}^2 \frac{\underline{C}^*}{\underline{A}^*} = U_{10}^2 \frac{\left(1 + \frac{\underline{Z}^* \underline{Y}^*}{3!}\right) \underline{Y}^*}{1 + \frac{\underline{Z}^* \underline{Y}^*}{2!}} = -j \omega C X U_{10}^2 \frac{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{6}}{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{2}},$$

sau ținînd seama de relația (12.59),

$$Q_1 = -\omega c X U_{10}^2 f(X^2). \quad (12.61)$$

Rezultă deci, că linia electrică funcționînd în gol *produce* o putere reactivă, care este echivalentă cu aceea pe care ar produce-o un condensator de capacitate  $cX$  căruia i s-ar aplica tensiunea liniei la sursă  $\underline{U}_1$  multiplicată cu o constantă care este o funcție de pătratul lungimii liniei electrice respective.

Dacă se notează\*

$$\underline{A} = A \underline{|\varepsilon} \quad \text{și} \quad \underline{C} = C \underline{|\eta - \psi},$$

$\psi$  fiind argumentul impedanței caracteristice, expresiile celor două puteri, activă și reactivă, la sursă vor fi

$$P_{10} = A C U_2^2 \cos(\varepsilon + \psi - \eta) = \frac{C}{A} U_{10}^2 \cos(\varepsilon + \psi - \eta),$$

$$Q_{10} = A C U_2^2 \sin(\varepsilon + \psi - \eta) = \frac{C}{A} U_{10}^2 \sin(\varepsilon + \psi - \eta).$$

\* Vezi [106] p. 12.



Aceste expresii dau cu mai multă precizie valoarea celor două puteri. Ținând seamă că în general  $\varepsilon$  e foarte mic și pozitiv,  $\psi$  e foarte mic și negativ, iar  $\eta$  este foarte aproape de  $\frac{\pi}{2}$ , puterea activă  $P_1$  este foarte mică și corespunde pierderilor prin conductanță și pierderilor prin efect JOULE produse de trecerea curentului capacitiv prin linie; puterea reactivă este negativă, cum rezultă și din relația (12.61), îndreptată deci spre capătul de alimentare. O linie electrică funcționând în gol se comportă deci ca un generator de putere reactivă pe care o furnizează sistemului de alimentare a liniei.

12.1.6.5. Funcționarea unei linii electrice în scurtcircuit. Acest caz limită de funcționare a unei linii electrice nu este interesant pentru practică, el nefiind realizat decât în cazuri cu totul excepționale, cum ar fi, de exemplu, în timpul încercărilor de recepție. El este totuși examinat pentru interesul teoretic pe care îl prezintă.

În cazul funcționării în scurtcircuit, impedanța de sarcină a receptorului este nulă ( $\underline{Z}_2 = 0$ ) și tensiunea la bornele receptorului este de asemenea nulă ( $\underline{U}_2 = 0$ ). Ecuațiile de funcționare ale liniei electrice (12.42) devin în acest caz

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1sc} &= \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} X = \underline{B} \underline{I}_2 \\ \underline{I}_{1sc} &= \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} X = \underline{A} \underline{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (12.62)$$

Să examinăm — și în acest caz — mărimile caracteristice ale liniei electrice în aceste condiții.

*Curentul.* Din relațiile (12.62) se deduce imediat

$$\underline{I}_{1sc} = \frac{\underline{A}}{\underline{B}} \underline{U}_{1sc},$$

sau ținând seama de relațiile (12.49),

$$\underline{I}_{1sc} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{\underline{Z}} \frac{1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{4!} + \dots}{1 + \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{3!} + \frac{\underline{Z}^2 \underline{Y}^2}{5!} + \dots}$$

Făcând aceleași aproximații ca și pentru cazul precedent ( $r = 0$ ,  $g = 0$ ), linie a cărei lungime nu depășește 630 km pentru ca aproximația făcută să nu depășească 1%), expresia curentului se poate scrie

$$\underline{I}_{1sc} = \frac{\underline{U}_{1sc}}{j\omega l X} \frac{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{2}}{1 - \frac{\omega^2 l c X^2}{6}} = -j \frac{\underline{U}_{1sc}}{\omega l X} f^{-1}(X^2),$$

unde  $f^{-1}(X^2)$  este inversa expresiei definită de relația (12.59). Rezultă dar, că în primă aproximație, curentul absorbit de linie de la sursă este de data aceasta



pur inductiv defazat cu  $\frac{\pi}{2}$  față de tensiunea de alimentare și a cărei mărime depinde de lungimea liniei. În acest caz, linia poate fi asemuită cu o inductanță, avînd reactanța egală cu reactanța totală a liniei  $\omega lX$ , căruia i se aplică la borne tensiunea liniei la sursă  $U_1$  multiplicată cu o constantă, care este o funcție de pătratul lungimii liniei electrice respective.

*Puterile activă și reactivă.* Calculul acestor puteri la extremitatea sursă dă — pentru fiecare fază —

$$S_{1sc} = P_{1sc} + j Q_{1sc} = \underline{U}_{1sc} \underline{I}_{1sc}^* = \underline{A}^* \underline{B} I_2^2 = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} I_{1sc}^2 \quad (12.63)$$

În ipoteza făcută, *puterea activă* la sursă este foarte mică și se poate neglija. *Puterea reactivă* pe fază la sursă, *absorbită* de linia electrică, este dată aproximativ de relația

$$j Q_{1sc} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}} I_{1sc}^2 = I_{1sc}^2 \frac{\underline{Z} \left( 1 + \frac{\underline{ZY}}{3!} \right)}{1 + \frac{\underline{ZY}}{2!}} = j \omega lX I_{1sc}^2 \frac{1 - \frac{\omega^2 lc X^2}{6}}{1 - \frac{\omega^2 lc X^2}{2}}$$

sau ținînd seama de relația (12.59), se obține:

$$Q_{1sc} = \omega lX I_{1sc}^2 f(X^2).$$

În consecință, o linie electrică în scurtcircuit *absoarbe* o putere reactivă care este echivalentă cu aceea pe care ar absorbi-o o inductanță, a cărei valoare este  $lX$ , care ar fi străbătută de curentul absorbit de linie la sursă  $I_1$ , multiplicat cu o constantă care este o funcție de pătratul lungimii liniei electrice respective; această constantă este identică cu aceea care apare în cazul determinării aceleiași mărimi, atunci cînd linia funcționează în gol.

Notînd în acest caz\*

$$\underline{A} = A \underline{\varepsilon} \quad \text{și} \quad \underline{B} = B \underline{\eta + \psi},$$

$\psi$  fiind și de data aceasta argumentul impedanței caracteristice, expresiile celor două puteri, activă și reactivă, la sursă vor fi

$$P_{1sc} = A B I_2^2 \cos(\eta + \psi - \varepsilon) = \frac{B}{A} I_{1sc}^2 \cos(\eta + \psi - \varepsilon),$$

$$Q_{1sc} = A B I_2^2 \sin(\eta + \psi - \varepsilon) = \frac{B}{A} I_{1sc}^2 \sin(\eta + \psi - \varepsilon).$$

Și în acest caz, ca și în cazul funcționării în gol, puterea activă  $P_{1sc}$ , absorbită de linie este foarte mică și corespunde pierderilor prin conductanță

\* Vezi [106] pag. 12.



și acelea prin efect JOULE produse de trecerea curentului inductiv prin linie; puterea reactivă este pozitivă. O linie electrică funcționând în scurtcircuit se comportă ca un receptor de putere reactivă, pe care o absoarbe de la sistemul de alimentare.

12.1.6.6. Funcționarea unei linii electrice în regim caracteristic\*. Reluând ecuațiile generale (12.41) de funcționare a unei linii electrice

$$\underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch} \gamma x + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \gamma x,$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \gamma x,$$

să presupunem că linia alimentează un receptor, a cărui impedanță este egală cu impedanța caracteristică a liniei, adică

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_c \underline{I}_2.$$

Luând tensiunea la receptor ca origine de fază, rezultă imediat că

$$\varphi_2 = -\psi.$$

În aceste condiții, ecuațiile liniei se pot scrie

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 (\operatorname{ch} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma x) = \underline{U}_2 \varepsilon^{\gamma x} \\ \underline{Z}_c \underline{I} &= \underline{U}_2 (\operatorname{ch} \gamma x + \operatorname{sh} \gamma x) = \underline{U}_2 \varepsilon^{\gamma x} = \underline{Z}_c \underline{I}_2 \varepsilon^{\gamma x} \end{aligned} \right\} \quad (12.64)$$

Rezultă, că de-a lungul întregii linii raportul dintre tensiunea  $\underline{U}$  și curentul  $\underline{I}$  este constant și egal cu impedanța caracteristică a liniei

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_c \text{ și deci } \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_c \text{ și } \varphi = -\psi. \quad (12.65)$$

Luând modulul expresiilor (12.64) se vede că valoarea efectivă a acestora este

$$U = U_2 \varepsilon^{\alpha x} \text{ și } I = I_2 \varepsilon^{\alpha x};$$

ele variază deci exponențial de-a lungul liniei.

La originea liniei ( $x = X$ ) vom avea

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \varepsilon^{\gamma X} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \varepsilon^{\gamma X} \text{ și } \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_c \end{aligned} \right\} \quad (12.66)$$

\* Vezi și 12.1.5.1.



Dacă se exprimă acum valoarea tensiunii și a curentului într-un punct oarecare, în funcție de tensiunea  $\underline{U}_1$  de la sursă și luând această tensiune ca origine de fază, se obține

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_1 \varepsilon^{-\gamma(X-x)} = \varepsilon^{-\alpha(X-x)} \underline{U}_1 | -\beta(X-x), \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}_1}{Z_0} \varepsilon^{-\gamma(X-x)} = \varepsilon^{-\alpha(X-x)} \frac{\underline{U}_1}{Z_0} | -\beta(X-x) - \psi. \end{aligned} \right\} \quad (12.67)$$

Atât curentul, cât și tensiunea pot fi reprezentate fazorial printr-un singur fazor al cărui modul scade exponențial cu distanța de la sursă către receptor, argumentul respectiv variind proporțional cu distanța respectivă; variația fazorului de curent urmează aceeași lege, însă el este defazat cu unghiul  $\psi$  în urma tensiunii (fig. 12.17).

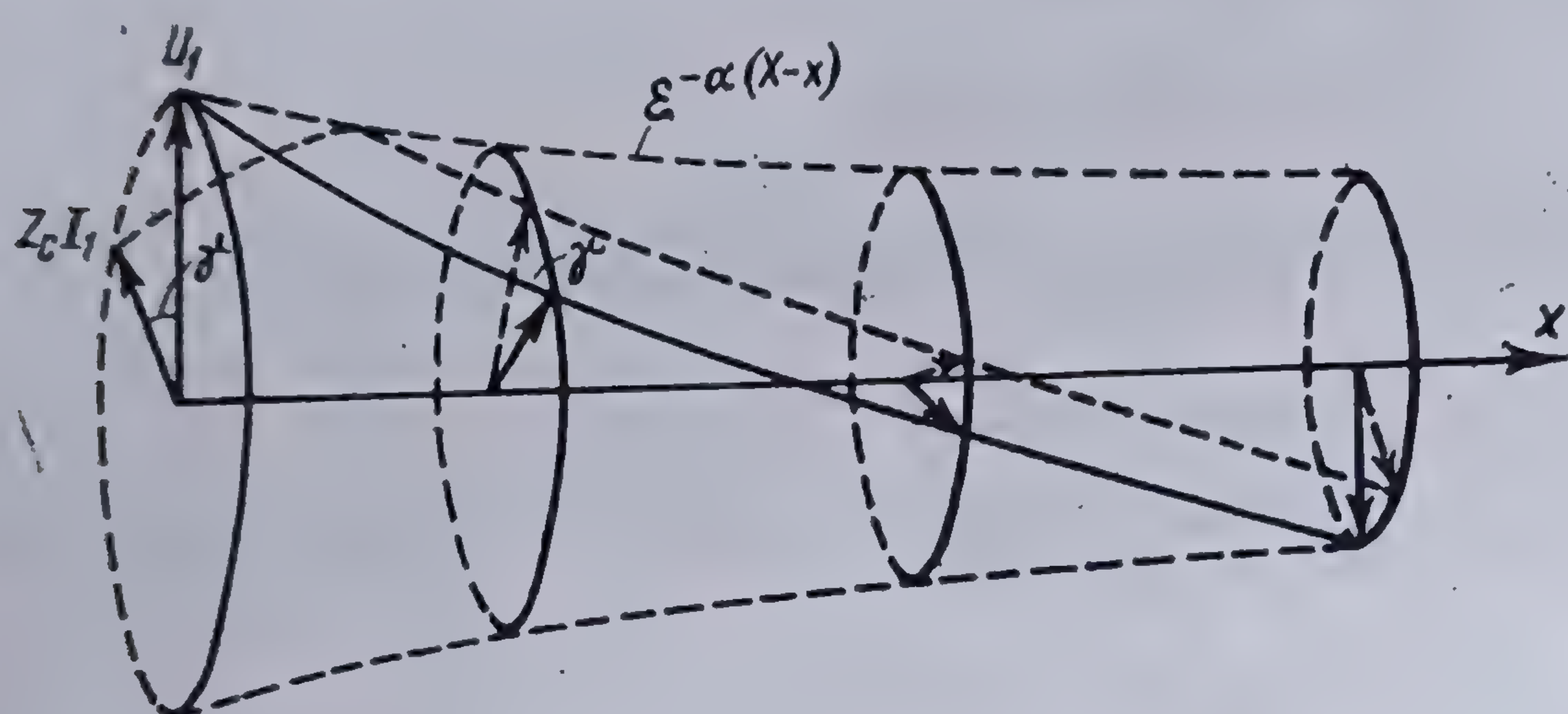


Fig. 12.17. Variația tensiunii și curentului de-a lungul unei linii electrice adaptate.

Pornind de la relațiile (12.67) se pot scrie imediat expresiile valorilor instantanee ale tensiunii și curentului într-un punct oarecare al liniei în funcție de mărimile corespunzătoare la capătul sursă a liniei:

$$u = \varepsilon^{-\alpha(X-x)} U_1 \sqrt{2} \cos [\omega t - \beta(X-x)]$$

$$i = \varepsilon^{-\alpha(X-x)} \frac{U_1}{Z_0} \sqrt{2} \cos [\omega t - \beta(X-x) - \psi].$$

Tensiunea și curentul de-a lungul liniei sînt astfel reprezentate printr-o singură undă mobilă, unda reflectată anulîndu-se.

Puterea într-un punct oarecare a liniei se poate calcula ușor; ținînd seama de relațiile (12.65) se obține

$$\underline{S} = P_c + j Q_c = \underline{U} \underline{I}^* = \frac{U^2}{Z_0} (\cos \psi + j \sin \psi).$$

Se găsește astfel:

a) La extremitatea sursă a liniei ( $x = X$ )

$$P_{1c} = \frac{U_1^2}{Z_0} \cos \psi; \quad Q_{1c} = \frac{U_1^2}{Z_0} \sin \psi.$$



b) Într-un punct oarecare al liniei\*

$$P_o = \frac{U^2}{Z_o} \cos \psi = P_{1o} e^{-2\alpha(X-x)} ;$$

$$Q_o = \frac{U^2}{Z_o} \sin \psi = Q_{1o} e^{-2\alpha(X-x)}$$

c) La extremitatea receptor a liniei ( $x = 0$ )

$$P_{2o} = \frac{U_2^2}{Z_2} \cos \psi = P_{1c} e^{-2\alpha X}$$

$$Q_{2c} = \frac{U_2^2}{Z_c} \sin \psi = Q_{1c} e^{-2\alpha X}.$$

Puterea activă de la extremitatea receptoare a liniei.

$$P_{2c} = \frac{U_2^2}{Z_c} \cos \psi$$

poartă numele de *puterea caracteristică* sau *puterea naturală* a liniei.

În cazul cînd argumentul impedanței caracteristice este nul, tensiunea și curentul sînt în fază de-a lungul întregii linii. Ținînd seama de relația (12.28) care definește acest argument

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \arctg \frac{l \omega}{r} - \arctg \frac{c \omega}{g} \right) ;$$

el va fi nul dacă  $r = g = 0$ , adică în cazul unei linii fără pierderi, sau dacă

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c} ,$$

această din urmă condiție fiind cunoscută sub numele de condiția lui HEAVISIDE.

În cazul particular al unei linii perfecte, pentru care  $g$  este neglijabil și  $r \ll l\omega$  și poate fi de asemenea neglijat, atunci\*\*

$$\alpha = 0 ; \beta = \omega \sqrt{lc} ; Z_o = \sqrt{\frac{l}{c}} ; \psi = 0.$$

Regimul caracteristic de funcționare este realizat în acest caz dacă curentul  $I_2$  la sosire este în fază cu tensiunea  $U_2$  la sosire și este egal cu  $\frac{U_2}{Z_o}$  și în consecință, dacă puterea aparentă la sosire este egală cu puterea activă

$$S = P = \frac{U_2^2}{Z_o} ;$$

\* Ținînd seama de relațiile (12.67).

\*\* Vezi 12.1.4.2. a).



Curenții și tensiunea păstrează de-a lungul liniei aceeași valoare ca la sosire, oricare ar fi  $\beta x$  și în consecință, oricare ar fi lungimea liniei și frecvența ei. Viteza de propagare a undei este

$$v = \frac{\omega}{\beta} \frac{1}{\sqrt{lc}}.$$

Regimul caracteristic fiind atins, pentru fiecare punct al liniei

$$U = Z_c I = \sqrt{\frac{l}{c}} I$$

și deci

$$\frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} L I^2;$$

rezultă că energia reactivă inductivă este compensată în fiecare punct al liniei de energia reactivă capacitivă. Se zice că linia este autocompensată.

Din cele examinate mai înainte, se pot deduce proprietățile esențiale ale funcționării unei linii electrice lungi, în regim caracteristic :

1. Valorile efective ale tensiunii și curentului scad exponențial de-a lungul liniei, de la extremitatea sursă către receptor, constanta de atenuare fiind \*

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{r}{Z_c}.$$

2. Raportul dintre valorile efective ale tensiunii și curentului de-a lungul liniei este constant și egal cu impedanța caracteristică, iar defazajul între acestea este de asemenea constant și egal cu argumentul impedanței caracteristice, luat cu semnul schimbat.

3. Curentul și tensiunea se prezintă ca unde mobile care se propagă de la sursă către receptor, fără a fi reflectată la această extremitate.

4. Toate aceste rezultate sînt independente de frecvența tensiunii și curentului.

5. Puterile activă și reactivă variază exponențial de-a lungul liniei, descrescînd de la extremitatea sursă către extremitatea receptor, factorul de amortizare  $2\alpha$  fiind dublul constantei de atenuare.

6. În liniile industriale, puterea reactivă este foarte mică, ea fiind proporțională cu  $\sin \psi$ . Puterea activă, numită *puterea caracteristică* sau *puterea naturală* a liniei, este foarte apropiată de puterea ce s-ar obține dacă  $\cos \psi = 1$ .

7. Calculînd pierderile de putere activă și reactivă, acestea sînt :

$$\begin{cases} p = P_{1c} - P_{2c} = \frac{U_1^2}{Z_0} \cos \psi (1 - \varepsilon^{-2\alpha X}) \cong \frac{U_1^2}{Z_c} (1 - \varepsilon^{-2\alpha X}); \\ q = Q_{1c} - Q_{2c} = \frac{U_1^2}{Z_0} \sin \psi (1 - \varepsilon^{-2\alpha X}) \cong 0. \end{cases}$$

Pierderile de putere reactivă sînt într-o linie industrială, foarte mici; aceasta se datorează faptului că o linie electrică, funcționînd în regim caracteristic, se autocompensează. Linia se comportă astfel ca o rezistență pură.

\* Vezi 12.1.4.2, b.



8. Puterea caracteristică nu depinde decât de tensiune, de modulul impedanței caracteristice, foarte puțin de frecvență și este independentă de lungime.

Puterea naturală sau caracteristică constituie o dată foarte importantă pentru liniile electrice, susceptibilă să fixeze, în fiecare caz particular, tensiunea de serviciu a liniei.

Impedanțele caracteristice ale liniilor aeriene, precum și cele ale liniilor subterane, nevariind decât între limite foarte mici, puterea naturală a oricărui sistem de transmisie nu depinde, pînă la urmă, decât de tensiunea de serviciu. Astfel, dacă presupunem că :

$$\begin{aligned} Z_c &= 400 \, \Omega \text{ pentru liniile aeriene,} \\ Z_c &= 40 \, \Omega \text{ pentru cabluri subterane,} \end{aligned}$$

atunci puterea naturală în funcție de tensiunea de serviciu este dată în tabloul 12.6

Tabloul 12.6

Tensiunea de serviciu kV	Puterea naturală MW	
	aerian	subteran
35	2,2	22
60	9	90
110	30	300
220	120	1200
300	225	2250
380	360	—
400	400	—

12.1.6.7. Linia electrică foarte lungă. Să reluăm ecuațiile generale (12.41)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x \\ \underline{I} &= \frac{1}{\underline{Z}_c} \underline{U}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} x + \underline{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} x. \end{aligned}$$

Dacă linia este foarte lungă, astfel, încît de la o anumită distanță  $X_1$  de la extremitatea liniei  $\varepsilon^{-\underline{\gamma} X_1}$  poate fi neglijat față de  $\varepsilon^{\underline{\gamma} X_1}$ , atunci se poate lua

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} X_1 = \operatorname{sh} \underline{\gamma} X_1 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\underline{\gamma} X_1},$$

ecuațiile de funcționare ale liniei devenind

$$\begin{aligned} \underline{U}_{X_1} &= \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2) \varepsilon^{\underline{\gamma} X_1} \\ \underline{Z}_c \underline{I}_{X_1} &= \frac{1}{2} (\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2) \varepsilon^{\underline{\gamma} X_1} \end{aligned}$$

de unde,

$$\underline{U}_{X_1} = \underline{Z}_c \underline{I}_{X_1}$$

totul se petrece în acest caz ca și cum de la această distanță, linia devine o simplă impedanță egală cu impedanța caracteristică. Pe de altă parte, curentul



și tensiunea crește exponențial către extremitatea generatoare, deoarece

$$|\underline{\varepsilon}^{\gamma X_1}| = \varepsilon^{\alpha X_1} |(\cos \beta X_1 + j \sin \beta X_1)| = \varepsilon^{\alpha X_1}.$$

O linie foarte lungă se comportă deci ca și o linie electrică funcționând pe impedanța sa caracteristică și are aceleași proprietăți ca și aceasta.

Posibilitatea ca o linie electrică industrială să poată funcționa în aceste condiții — adică fără undă reflectată —, depinde în primul rând de lungimea  $X$  a liniei și apoi de valoarea constantei de atenuare  $\alpha$ , care pentru o linie industrială, este egală aproximativ cu  $\frac{1}{2} \frac{r}{Z_0}$  radhip/km. Astfel, în cazul unei linii

lungi industriale la frecvența de 50 Hz, rezistența sa lineică este cuprinsă între 0,06 — 0,10  $\Omega$ /km iar impedanța sa caracteristică este  $Z_0 = 400 \Omega$ . În aceste condiții se găsește că  $\alpha \cong 10^{-4}$  radhip/km. Pentru a avea însă  $\text{ch } x \cong \text{sh } x$  este necesar și suficient ca\*  $x > 6,3$  și deci, în cazul unei linii industriale, trebuie ca  $X_1 > 6,3 \cdot 10^4$  km, ceea ce în mod practic nu se poate realiza. Condițiile de funcționare ale unei linii lungi — fără undă reflectată — sînt însă îndeplinite de liniile de telecomunicații pentru care frecvența este cuprinsă între 50 și 200 kHz. La această frecvență apare efectul pelicular\*\* în conductoare și constanta de atenuare a acestor linii poate fi multiplicată printr-un coeficient egal cu 50 sau 100, astfel că unda reflectată poate fi neglijată la linii avînd o lungime numai de cîteva sute de km.

**12.1.6.8. Transmisia prin linii sfert de undă.** Dacă lungimea  $X$  a unei linii este egală cu un sfert din lungimea de undă a undelor de tensiune, respectiv de curent, care se propagă pe această linie, linia corespunzătoare se numește *linie sfert de undă*. Asemenea linii se pot întîlni în mod curent în cazul liniilor telefonice sau telegrafice. Ele se întîlnesc mai rar în cazul liniilor electrice industriale; în acest caz, o asemenea linie poate fi realizată în mod artificial prin intercalarea în serie, la intervale spațiale egale, de inductanțe și capacități dimensionate corespunzător. Pentru o linie industrială cu  $f = 50$  Hz, lungimea normală a unei linii sfert de undă este de 1500 km.

Dacă ecuațiile (12.41) se face

$$X = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\pi}{2},$$

se obține\*\*\*

$$\left. \begin{aligned} -j \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \text{sh } \alpha X + \underline{X}_0 \underline{I}_2 \text{ch } \alpha X, \\ -j \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_0} \text{ch } \alpha X + \underline{I}_2 \text{sh } \alpha X, \end{aligned} \right\} \quad (12.68)$$

care reprezintă ecuațiile de funcționare ale unei linii sfert de undă.

\* Vezi [139] pag. 47.

\*\* Care produce creșterea rezistenței electrice a conductoarelor. Vezi 14.1.2.3.

\*\*\* Deoarece

$$\text{ch } \underline{\gamma} X = \text{ch } (\alpha + j\beta) X = \text{ch } \alpha X \cos \beta X + j \text{sh } \alpha X \sin \beta X$$

$$\text{și } \text{sh } \underline{\gamma} X = \text{sh } (\alpha + j\beta) X = \text{sh } \alpha X \cos \beta X + j \text{ch } \alpha X \sin \beta X,$$

în cazul liniilor sfert de undă rezultă

$$\text{ch } \underline{\gamma} X = j \text{sh } \alpha X,$$

$$\text{sh } \underline{\gamma} X = j \text{ch } \alpha X.$$



Să examinăm cazul unei linii la care pierderile sînt neglijabile ( $r = 0$ ,  $g = 0$ ); în acest caz\*

$$\alpha = 0; \quad \text{sh } \alpha X = 0, \quad \text{ch } \alpha X = 1; \quad \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{l}{c}} |0.$$

și ecuațiile (12.68) devin

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_c \underline{I}_2 \left| + \frac{\pi}{2} \right.; \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \left| + \frac{\pi}{2} \right. \quad (12.69)$$

Rezultă din aceste ecuații, că în cazul considerat, tensiunea la o extremitate este egală cu curenul la cealaltă extremitate, multiplicat cu impedanța caracteristică a sistemului. Dacă tensiunea  $U_2$  este menținută constantă la receptor, curenul la sursă este de asemenea constant și viceversa: dacă se menține constantă tensiunea  $U_1$  la sursă, atunci curenul la receptor este constant. În consecință, o linie funcționînd în sfert de undă, cu pierderi neglijabile, transformă o transmisie de energie cu tensiune constantă într-una cu curen constant sau invers.

Pentru a putea efectua pe o asemenea linie o transmisie de energie, în care să se mențină la receptor o tensiune constantă  $U_2$ , este necesar ca la sursă să se mențină un curen constant. Acest lucru este însă imposibil de efectuat cu mașinile sincrone care se utilizează astăzi în mod curen în centralele electrice, ele neputînd fi cuplate în serie. Pentru realizarea unei asemenea transmisiuni trebuie prevăzute în centrală instalații speciale care să transforme în centrală tensiunea constantă în curen constant.

La mersul în gol ( $I_2 = 0$ ) tensiunea la sursă este nulă; ea crește cu sarcina și devine egală cu tensiunea la receptor, cînd pe linie se transmite puterea naturală a ei  $\frac{U_2^2}{Z_c}$ .

Într-adevăr, în acest caz

$$P_2 = \frac{U_2^2}{Z_c}; \quad I_2 = \frac{P_2}{U_2} = \frac{U_2}{Z_c}; \quad U_2 = Z_c I_2 = U_1.$$

Dacă puterea absorbită de receptor este mai mare decît puterea naturală a liniei, atunci tensiunea la sursă devine mai mare decît tensiunea la receptor.

Pentru a mări puterea transmisă este necesar a se micșora impedanța caracteristică ceea ce se obține prin mărirea capacității liniei; aceasta are o serie de dezavantaje printre care micșorarea randamentului sursei din cauza creșterii intensității curenului care trebuie menținut constant.

O linie sfert de undă nu prezintă deci nici un avantaj față de o linie obișnuită cu tensiune constantă; în afară de aceasta, o asemenea linie nu poate fi utilizată la interconexiuni și din ea nu se pot face derivații pentru eventualele distribuții de energie electrică de-a lungul traseului său.

\* Vezi 12.1.4.2. a).



12.1.6.9. Transmisia prin linii jumătate de undă. În cazul unei linii a cărei lungime este egală cu jumătate din lungimea unei de tensiune, respectiv de curent, care se propagă pe această linie, atunci

$$X = \frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\beta},$$

rezultă

$$\begin{aligned} \beta X &= \pi, & \cos \beta X &= -1, & \sin \beta X &= 0, \\ \operatorname{ch} \gamma X &= -\operatorname{ch} \alpha X, & \operatorname{sh} \gamma X &= -\operatorname{sh} \alpha X \end{aligned}$$

și deci, ecuațiile liniei devin :

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= -U_2 \operatorname{ch} \alpha X - Z_c I_2 \operatorname{sh} \alpha X, \\ I_1 &= -\frac{U_2}{Z_c} \operatorname{sh} \alpha X - I_2 \operatorname{ch} \alpha X. \end{aligned} \right\} \quad (12.70)$$

În cazul unei linii cu pierderile neglijabile ( $r = 0, g = 0$ ) rezultă  $\alpha = 0$  și ecuațiile (12.70) devin

$$U_1 = -U_2 \text{ și } I_1 = -I_2.$$

În acest caz, pentru orice sarcină a liniei atât tensiunile, cât și curenții sînt egali și în opoziție de fază, la cele două extremități ale liniei.

Dacă se menține tensiunea constantă la receptor (și în consecință și la sursă), tensiunea la mijlocul liniei va fi nulă la mersul în gol. În acest punct, tensiunea va crește cu sarcina și va atinge o valoare egală cu tensiunea la receptor atunci, cînd puterea transmisă este egală cu puterea naturală a liniei; la mijlocul liniei jumătate de undă, totul se petrece ca în originea liniei sfert de undă; o linie jumătate de undă poate fi considerată ca formată din două linii sfert de undă legate în serie.

Trebuie observat, că punctul de tensiune nulă a liniei nu se află la mijlocul liniei decît la mersul în gol a acesteia; pe măsură ce sarcina crește, crește tensiunea la mijlocul liniei și deci punctul de tensiune nulă se deplasează către extremitatea sursă a liniei.

O linie jumătate de undă, deși nu mai pune problemele puse de o linie sfert de undă, prezintă totuși același mare dezavantaj de a nu putea fi folosită în sisteme în care urmează să se facă o distribuție de energie electrică de-a lungul ei.

12.1.6.10. Liniile electrice industriale obișnuite. Lungimea obișnuită a unei linii lungi — între o sursă și un receptor — depășește arareori 600 km, adică 1/10 din lungimea de undă corespunzătoare frecvenței de 50 Hz. Studiul funcționării acestor linii se face cu ajutorul relațiilor (12.42), care sînt acelea ale unui cuadripol, așa după cum s-a arătat în paragrafele precedente\*. După cum

\* Vezi 12.1.6.1. — 12.1.6.6.



s-a arătat, pentru anumite lungimi maxime de linii se pot face anumite simplificări în calculul parametrilor cuadripolului, aproximația rămânând suficientă și mai mică de 1/100. Astfel:

— pentru o linie electrică de 50 Hz, cu o lungime de cel mult 650 km se poate lua

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{2!}; \quad \frac{\underline{B}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{C}}{\underline{Y}} = 1 + \frac{\underline{Z}\underline{Y}}{3!}; \quad (12.71)$$

— pentru o linie electrică de 50 Hz, cu o lungime de cel mult 135 km se pot lua

$$\underline{A} = 1; \quad \underline{B} = \underline{Z}; \quad \underline{C} = \underline{Y} \quad (12.72)$$

și ecuațiile (12.42) pot fi puse sub forma simplă

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 &= \underline{Y} \underline{U}_2 + \underline{I}_2, \end{aligned} \quad (12.73)$$

care corespund schemelor echivalente din figura 12.18, aplicabilă una tensiunii (a) și cealaltă curentului (b);

— pentru o linie electrică de 50 Hz, dar de lungime sub 100 km și a cărei tensiune este de cel mult 100 kV, termenul  $\underline{Y} \underline{U}_2$  poate fi neglijat față de curentul de încărcare  $\underline{I}_2$ ; ecuațiile (12.73) se reduc la acelea ale unui dipol de impedanță  $\underline{Z}$ ,

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{Z} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2$$

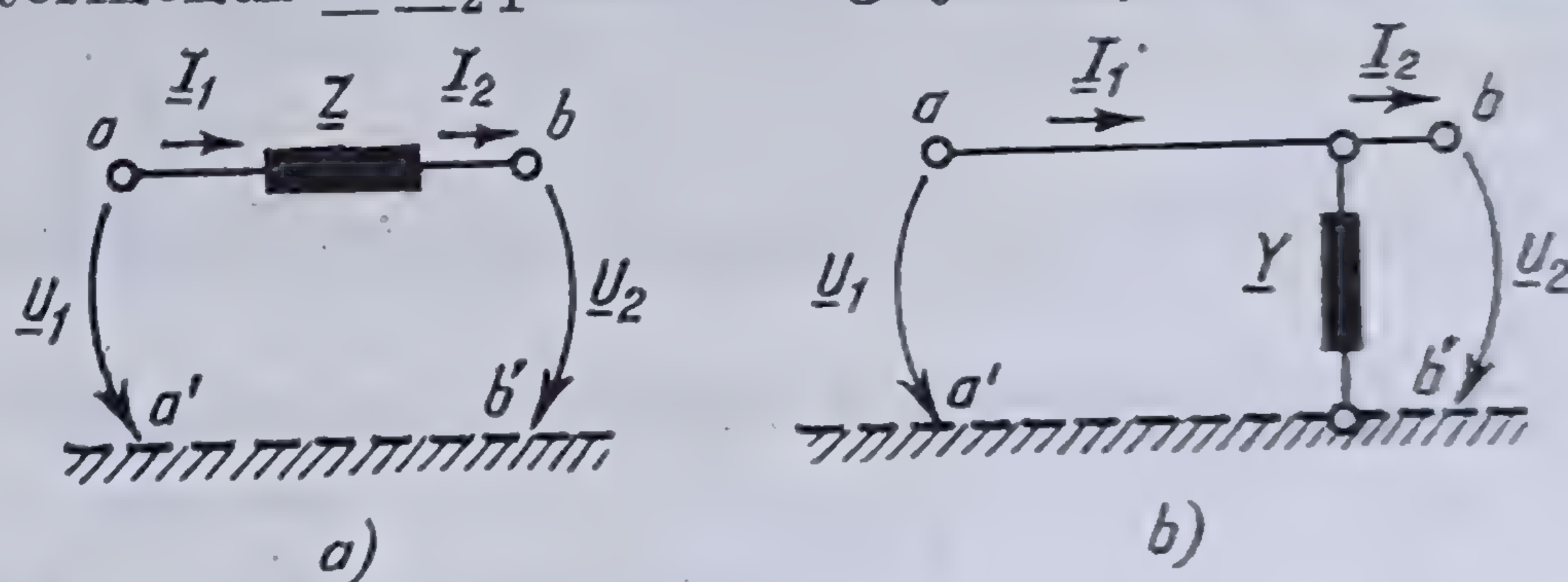


Fig. 12.18. Cuadripolul echivalent al unei linii electrice scurte

a cărui studiu se face așa cum s-a arătat mai înainte\*.

Trebuie observat că expresiile aproximative (12.51) și (12.72) nu mai sînt parametrii unui cuadripol, ei nemaisatisfăcînd relația (6.104)

$$\underline{A}^2 - \underline{B} \underline{C} = 1.$$

Cuadripolul echivalent al liniei trebuie înlocuit prin doi cuadripoli — unul de tensiune și unul de curent — legați în lanț, obținîndu-se astfel un cuadripol gama ( $\Gamma$ ) sau gama întors ( $\Upsilon$ ). Rezultatele obținute din studiul unei linii cu ajutorul acestor ecuații simplificate rămîn valabile în limita aproximațiilor făcute.

12.1.6.11. Puterea maximă ce se poate transmite, în curent alternativ, printr-o linie electrică\*\*. Considerînd ecuațiile de funcționare ale unei linii lungi (12.42) scrise sub forma

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \underline{U}_2 + \underline{B} \underline{I}_2, \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \underline{U}_2 + \underline{A} \underline{I}_2 \end{cases} \quad (12.74)$$

\* Vezi 6.4.5.

\*\* Vezi [106] pag. 11.



parametrii respectivi fiind definiți prin relațiile (12.48), respectiv (12.49), între care se poate scrie

$$\underline{A}^2 - \underline{B} \underline{C} = 1.$$

Folosind argumentele indicate de BLONDEL

$$\underline{A} = A \angle \varepsilon; \quad \underline{B} = B \angle \eta + \psi; \quad \underline{C} = C \angle \eta - \psi;$$

raportul

$$\sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{B}{C}} \angle \psi$$

reprezintă impedanța caracteristică\*

$$\underline{Z}_c = Z_c.$$

Raportul

$$\frac{\underline{C}}{\underline{A}} = \frac{C}{A} \angle \xi$$

reprezintă admitanța aparentă la intrare, la mers în gol iar raportul

$$\frac{\underline{B}}{\underline{A}} = \frac{B}{A} \angle \xi,$$

impedanța aparentă la intrare, la scurtcircuit\*\*, în care

$$\xi = \eta - \varepsilon + \psi \quad \text{și} \quad \xi = \eta - \varepsilon - \psi.$$

Diagrama acestui cuadripol se construiește obișnuit\*\*\*, presupunând curentul  $\underline{I}_2$  defazat cu  $\varphi_2$  în urma tensiunii (fig. 12.19).

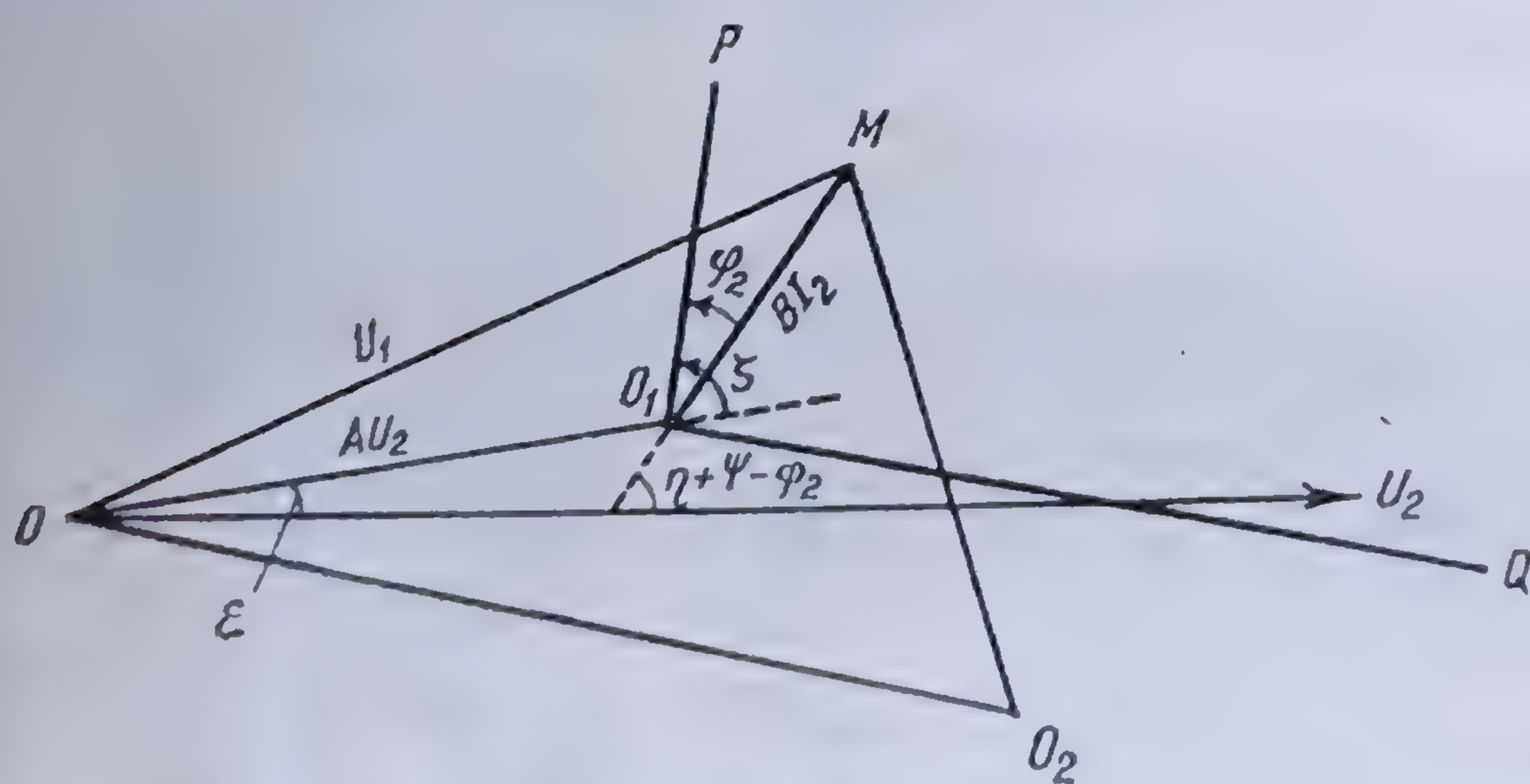


Fig. 12.19. Diagrama unei linii lungi.

Din triunghiul  $OO_1M$  rezultă

$$U_1^2 = (AU_2)^2 + (BI_2)^2 + 2ABU_2I_2 \cos(\xi - \varphi_2). \quad (12.75)$$

\* Vezi 6.4.4.8.

\*\* Vezi 6.4.4.3.

\*\*\* Vezi 6.4.4.14.



49),  
 Punind  $\frac{U_2}{I_2} = \underline{Z}_2 = Z_2 \angle \varphi_2$ , impedanța aparentă a circuitului receptor, expresia (12.75) se poate scrie

$$\left(\frac{U_1}{I_1}\right)^2 = (AZ_2)^2 + B^2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2)$$

și puterea activă la sursă

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = Z_2 I_2^2 \cos \varphi_2 = \frac{U_2^2}{Z_2^2} Z_2 \cos \varphi_2$$

are ca expresie

$$P_2 = U_1^2 \frac{Z_2 \cos \varphi_2}{A^2 Z_2^2 + B^2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2)},$$

deoarece

$$\frac{U_2}{Z_2} = I_2.$$

Maximul acestei expresii, în funcție de  $Z_2$ , se obține anulând derivata corespunzătoare. Se obține

$$\frac{1}{U_1^2} \frac{dP_2}{dZ_2} = \frac{[A^2 Z_2^2 + B^2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2)] \cos \varphi_2 - Z_2 \cos \varphi_2 [2A^2 Z_2 + 2AB \cos(\zeta - \varphi_2)]}{[A^2 Z_2^2 + B^2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2)]^2} = 0.$$

Dezvoltind se găsește

$$A^2 Z_2^2 \cos \varphi_2 + B^2 \cos \varphi_2 + 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2) \cos \varphi_2 - 2A^2 Z_2^2 \cos \varphi_2 - 2ABZ_2 \cos(\zeta - \varphi_2) \cos \varphi_2 = B^2 \cos \varphi_2 - A^2 Z_2^2 \cos \varphi_2$$

și rezultă

$$Z_2 = \frac{B}{A},$$

adică egală cu modulul impedanței aparentă la intrare a sistemului la funcționarea în scurtcircuit\*,  $\zeta$  fiind argumentul acestei impedanțe.

Puterea maximă corespunzătoare este deci

$$P_{2max} = U_1^2 \frac{\cos \varphi_2}{2AB[1 + \cos(\zeta - \varphi_2)]}.$$

\* Din relațiile (12.74) rezultă pentru  $\underline{U}_2 = 0$

$$\frac{U_{1sc}}{I_{1sc}} = \underline{Z}_{1sc} = \frac{B}{A}$$



Căutînd acum maximul acestei expresii în funcție de  $\varphi_2$ , se găsește

$$\frac{1}{U_1^2} \frac{dP_{2max}}{d\varphi_2} = \frac{-\sin \varphi_2 \cdot 2AB [1 + \cos(\zeta - \varphi_2)] - \cos \varphi_2 \cdot 2AB \sin(\zeta - \varphi_2)}{(2AB)^2 [1 + \cos(\zeta - \varphi_2)]^2} = 0$$

sau

$$-2AB [1 + \cos(\zeta - \varphi_2)] \sin \varphi_2 - 2AB \cos \varphi_2 \sin(\zeta - \varphi_2) = 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin(\zeta - \varphi_2)}{1 + \cos(\zeta - \varphi_2)} = - \frac{2 \sin \frac{\zeta - \varphi_2}{2} \cos \frac{\zeta - \varphi_2}{2}}{2 \cos^2 \frac{\zeta - \varphi_2}{2}} = - \operatorname{tg} \frac{\zeta - \varphi_2}{2}$$

și deci :

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2 - \zeta}{2} \quad \text{sau} \quad \varphi_2 = -\zeta;$$

în consecință, puterea maximum maximorum care poate fi transmisă prin linia considerată este

$$P_{2max \ max} = \frac{U_1^2}{4AB \cos \zeta}.$$

Scotînd din relația (12.75) valoarea raportului  $\frac{U_1}{U_2}$  în funcție de  $Z_2$  și  $\varphi_2$  se obține

$$\left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2 = A^2 + \frac{B^2}{Z_2^2} + \frac{2AB}{Z_2} \cos(\zeta - \varphi_2),$$

sau punînd valorile care dau maximul maximorum puterii transmise, rezultă

$$\left( \frac{U_1}{U_2} \right)^2 = A^2 + A^2 + 2A^2 \cos 2\zeta = 2A^2 [1 + \cos 2\zeta] = 4A^2 \cos^2 \zeta$$

și deci,

$$\frac{U_1}{U_2} = 2A \cos \zeta.$$

Privitor la puterea maximă ce se poate transmite printr-o linie electrică A. BLONDEL a enunțat următoarea teoremă :

În orice linie electrică de curent alternativ, avînd rezistență, impedanță și capacitate, puterea la sosire trece printr-un maxim pentru o anumită valoare  $Z_{2m}$  a impedanței de utilizare ; modulul acestei impedanțe este egal cu modulul impedanței aparente la mersul în scurtcircuit  $\frac{B}{A}$ , iar argumentul său este egal dar de semn contrar cu argumentul acestei impedanțe. Acest maxim este proporțional cu pătratul tensiunii la plecare.



Această teoremă nu are decât o valoare de calcul, puterea transportabilă maximă, fiind limitată de condiții de securitate și economice : condițiile de putere maximă conduc la pierderi inadmisibile în linii și sînt foarte îndepărtate de acelea care corespund unui randament optim.

**12.1.6.12. Randamentul unei linii electrice de transmisie a energiei electrice în curent alternativ\***. Pornind de la ecuațiile (12.74) ale enadripolului care dau funcționarea unei linii, în funcție de elementele de la intrare sau de la ieșire\*\*, se obține puterea aparentă corespunzătoare

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = f_1(\underline{U}_2, \underline{I}_2); \quad \underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = f_2(\underline{U}_1, \underline{I}_1),$$

de unde se deduce

$$\begin{cases} P_1 = ACU_2^2 \cos \xi + ABI_2^2 \cos \zeta + P_2 (A^2 + BC \cos 2\psi) + BCQ_2 \sin 2\psi \\ Q_1 = -ACU_2^2 \sin \xi + ABI_2^2 \sin \zeta + Q_2 (A^2 - BC \cos 2\psi) + BCP_2 \sin 2\psi \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} P_2 = -ACU_1^2 \cos \xi - ABI_1^2 \cos \zeta + P_1 (A^2 + BC \cos 2\psi) + BCQ_1 \sin 2\psi \\ Q_2 = ACU_1^2 \sin \xi - ABI_1^2 \sin \zeta + Q_1 (A^2 - BC \cos 2\psi) + BCP_1 \sin 2\psi. \end{cases}$$

Randamentul liniei se poate exprima prin relația

$$\eta = -\frac{AC}{P_1} U_1^2 \cos \zeta - \frac{ABP_1}{U_1^2} \cos \zeta - \frac{ABQ_1^2}{U_1^2 P_1} \cos \zeta + A^2 + BC (\cos 2\psi + \frac{Q_1}{P_1} \sin 2\psi).$$

Randamentul maxim maximorum este

$$\eta_{\max \max} = \frac{1}{A^2 + BC (\cos 2\psi - \sin 2\psi \operatorname{ctg} \varphi_2)}.$$

Acest randament nu are decât valoare de calcul, deoarece conduce la transmișii de puteri cu mult prea mici, incompatibile cu cheltuielile făcute : nu poate ajuta la alegerea tensiunii de serviciu.

Alegerea modului de transmisie cel mai avantajos rezultă dintr-un studiu de optimizare judicios între randamentul, puterea transportată, tensiune și reglaj.

## 12.2. STUDIUL LINIILOR LUNGI ÎN REGIM TRANZITORIU

### 12.2.1. GENERALITAȚI

Ecuațiile generale (12.9) care reprezintă funcționarea unei linii lungi, cu parametri uniform repartizați de-a lungul ei, rămîn valabile și în cazul funcționării acestora într-un regim nestaționar, în regim tranzitoriu.

\* Vezi [106] pag. 19

\*\* Vezi 6.4.4.16



Studiul regimului tranzitoriu de funcționare a liniilor lungi se poate face utilizând metoda clasică a suprapunerii unui regim liber, peste regimul forțat de funcționare a sistemului, determinarea constantelor de integrare făcându-se prin fixarea condițiilor inițiale. Pentru găsirea regimului liber, se poate utiliza metoda mărimilor complexe\*. Această metodă prezintă însă seriosă dificultăți în cazul aplicării în practică în studiul complet a unui regim tranzitoriu.

Studiul complet al regimurilor tranzitorii a liniilor lungi se face foarte comod folosind transformata LAPLACE\*\* ; această metodă va fi folosită în expunerea ce urmează.

Există și alte metode cu ajutorul cărora se poate rezolva regimul tranzitoriu al liniilor lungi, metode ce presupun anumite aproximații, în general compatibile cu rezultatele urmărite.

### 12.2.2. ECUAȚIILE LINIILOR ELECTRICE LUNGI ÎN REGIM TRANZITORIU

12.2.2.1. Forma generală a ecuațiilor. Ecuațiile (12.9), în care se pun în evidență cei doi parametri,  $x$  și  $t$ , se pot scrie

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = r i(x,t) + l \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = g u(x,t) + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Aplicând transformata LAPLACE acestor două ecuații se găsește :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dt &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty e^{-st} (u, x, t) dt = \frac{\partial \mathcal{L}u(x,t)}{\partial x} = (r + ls) \mathcal{L}i(x,t) - li(x,0); \\ \frac{\partial \mathcal{L}i(x,t)}{\partial x} &= (g + cs) \mathcal{L}u(x,t) - cu(x,0). \end{aligned} \right\} (12.76)$$

Derivând una din ecuații în raport cu  $x$  și înlocuind-o în cealaltă ecuație, rezultă

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}u(x,t)}{\partial x^2} &= (r + ls) (g + cs) \mathcal{L}u(x,t) - (r + ls) cu(x,0); \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}i(x,t)}{\partial x^2} &= (r + ls) (g + cs) \mathcal{L}i(x,t) - (g + cs) li(x,0). \end{aligned} \right\} (12.77)$$

Relațiile (12.77) reprezintă transformata LAPLACE a ecuației telegrafistilor.

12.2.2.2. Soluțiile generale ale ecuațiilor liniilor lungi în transformata LAPLACE\*\*\*. Punând

$$\gamma^2 = (r + ls) (g + cs), \quad (12.78)$$

\* Vezi par. 7.4. și [73] pag. 254

\*\* Vezi par. 10.4.

\*\*\* Pentru ușurarea scrisului, în tot ce urmează se va scrie  $u(x,t)=u$ ,  $u(x,0)=u_0$  etc.



care se numește *constantă de propagare operațională*, prima ecuație din (12.77) se poate scrie

$$\frac{d^2 \mathcal{L}u}{dx^2} = \gamma^2 \mathcal{L}u - (r + ls) cu_0. \quad (12.79)$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$\mathcal{L}u = M e^{\gamma x} + N e^{-\gamma x}$$

sau

$$\mathcal{L}u = A \operatorname{ch} \gamma x + B \operatorname{sh} \gamma x,$$

în care s-a notat

$$A = M + N \quad \text{și} \quad B = M - N.$$

Fie  $(\mathcal{L}u)_0$  o soluție particulară a ecuației (12.79); rezultă imediat din (12.79)

$$0 = \gamma^2 (\mathcal{L}u)_0 - (r + ls) cu_0$$

și deci,

$$(\mathcal{L}u)_0 = \frac{r + ls}{\gamma^2} cu_0 = \frac{c}{g + cs} u_0,$$

astfel, că soluția ecuației (12.79) este

$$\mathcal{L}u = A \operatorname{ch} \gamma x + B \operatorname{sh} \gamma x + \frac{c}{g + cs} u_0. \quad (12.80)$$

Derivând ecuația (12.80) în raport cu  $x$  și introducând această expresie în prima ecuație (12.76) se obține

$$\mathcal{L}i = \frac{\gamma}{r + ls} (A \operatorname{sh} \gamma x + B \operatorname{ch} \gamma x) + \frac{1}{r + ls} i_0. \quad (12.81)$$

Ținând seama de relația (12.78), se poate scrie

$$\frac{r + ls}{\gamma} = \sqrt{\frac{r + ls}{g + cs}} = Z_0, \quad (12.82)$$

care se numește *impedanța caracteristică operațională* a liniei. Cu aceasta, ecuația (12.81) devine

$$\mathcal{L}i = \frac{1}{Z_0} (A \operatorname{sh} \gamma x + B \operatorname{ch} \gamma x) + \frac{1}{r + ls} i_0. \quad (12.83)$$

Expresiile (12.80) și (12.83) constituie soluțiile operaționale ale problemei, care dau imaginea tensiunii și curentului într-un punct al liniei situat la distanța  $x$  de extremitatea receptoare a liniei.



Pentru ca soluțiile să fie unice, este necesar ca  $Z_c$  și  $\gamma$  să nu aibă decît o singură valoare; în acest scop se ia numai valoarea pentru care

$$\operatorname{Re}(\gamma) > 0 \quad \text{și} \quad \arg \gamma \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

În aceste condiții, relația (12.82) determină o singură valoare pentru  $Z_c$ .

Pentru determinarea constantelor de integrare,  $A$  și  $B$ , se presupune că tensiunea liniei la *sursă* (la intrare) este  $u_1$ , iar la ieșire, linia are conectat un receptor a cărui impedanță operațională este  $Z(s)$ . În aceste condiții rezultă

$$\text{la } x = X \quad (\mathcal{L}u)_{x=X} = \mathcal{L}u_1$$

și

$$\text{la } x = 0 \quad (\mathcal{L}u)_{x=0} = Z(s)\mathcal{L}i_2 = \mathcal{L}u_2,$$

unde  $\mathcal{L}i_2$  este imaginea curentului absorbit de impedanța  $Z(s)$  iar  $\mathcal{L}u_2$  este imaginea tensiunii la bornele acestei impedanțe.

Introducînd aceste valori, pe rînd în ecuația (12.80) și (12.83) se obține

$$\mathcal{L}u_1 = A \operatorname{ch} \gamma X + B \operatorname{sh} \gamma X + \frac{c}{g+cs} u_0$$

$$Z(s) \mathcal{L}i_2 = \frac{Z(s)}{Z_c} B + Z(s) \frac{1}{r+ls} i_0 = A + \frac{c}{g+cs} u_0 = \mathcal{L}u_2,$$

de unde se deduce

$$A = \frac{\frac{Z(s)}{Z_c} \mathcal{L}u_1 - \frac{c}{g+cs} u_0 \left[ \frac{Z(s)}{Z_c} + \operatorname{sh} \gamma X \right] + Z(s) \frac{1}{r+ls} i_0 \operatorname{sh} \gamma X}{\operatorname{sh} \gamma X + \frac{Z(s)}{Z_c} \operatorname{ch} \gamma X}$$

și

$$B = \frac{\mathcal{L}u_1 - \frac{c}{g+cs} u_0 \left[ 1 - \operatorname{ch} \gamma X \right] - Z(s) \frac{1}{r+ls} i_0 \operatorname{ch} \gamma X}{\operatorname{sh} \gamma X + \frac{Z(s)}{Z_c} \operatorname{ch} \gamma X}.$$

În cazul particular cînd condițiile inițiale sînt nule,  $u_0 = 0$  și  $i_0 = 0$ , atunci valorile parametrilor respectivi devin

$$A = \frac{\frac{Z(s)}{Z_c} \mathcal{L}u_1}{\operatorname{sh} \gamma X + \frac{Z(s)}{Z_c} \operatorname{ch} \gamma X} \quad \text{și} \quad B = \frac{\mathcal{L}u_1}{\operatorname{sh} \gamma X + \frac{Z(s)}{Z_c} \operatorname{ch} \gamma X}.$$



Cu aceste valori — deci în cazul condițiilor inițiale nule — imaginile tensiunii și curentului într-un punct oarecare al liniei sînt date de relațiile

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{\operatorname{sh} \gamma x + \frac{Z(s)}{Z_0} \operatorname{ch} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma X + \frac{Z(s)}{Z_0} \operatorname{ch} \gamma X} \mathcal{L}u_1 \\ \mathcal{L}i &= \frac{\frac{Z(s)}{Z_0} \operatorname{sh} \gamma x + \operatorname{ch} \gamma x}{\operatorname{sh} \gamma X + \frac{Z(s)}{Z_0} \operatorname{ch} \gamma X} \cdot \frac{\mathcal{L}u_1}{Z_0} \end{aligned} \right\} \quad (12.84)$$

Expresiile (12.84) rezolvă orice problemă de regim tranzitoriu pe o linie electrică de transmitere a energiei electrice, oricare ar fi forma tensiunii aplicate liniei la sursă, condițiile inițiale fiind nule.

Ca exemplu de aplicație se va examina cazul simplu a două tipuri de linii și anume, linii fără pierderi ( $r = 0$  și  $g = 0$ ) și linii îndeplinind condiția lui HEAVISIDE  $\left(\frac{r}{g} = \frac{l}{c}\right)$ .

**12.2.2.3. Linie electrică, fără pierderi, deschisă la o extremitate, căreia i se aplică la cealaltă extremitate o tensiune de formă treaptă.** Este evident că, pentru o astfel de linie, condițiile inițiale sînt nule. Să presupunem deci, că linia este deschisă la extremitatea receptor adică  $Z(s) = \infty$  și că la extremitatea sursă se aplică brusc tensiunea constantă  $E$  ( $u_1 = E$ ), corespunzătoare, de exemplu, căderii unui trăsnet. În aceste condiții, ecuațiile de funcționare ale liniei (12.84) devin

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{\operatorname{ch} \gamma x}{\operatorname{ch} \gamma X} \cdot \frac{E}{s} \\ \mathcal{L}i &= \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{sch} \gamma X} \cdot \frac{E}{Z_0} \end{aligned} \right\} \quad (12.85)$$

În acest caz, din relațiile (12.78) și (12.82) rezultă

$$\gamma = s\sqrt{lc} \quad \text{și} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

Fie să determinăm originalul tensiunii  $u$ ; prima relație (12.85) arată că imaginea acestei tensiuni este de forma  $\frac{V(s)}{sW(s)}$  și găsirea originalului respectiv se face aplicînd teorema dezvoltării lui HEAVISIDE\*

$$u = \frac{V(0)}{W(0)} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)} e^{s_i t}$$

\* Vezi 10. 2. 1. 3.



Pentru problema care se studiază

$$V(s) = E \operatorname{ch} \gamma x = E \operatorname{ch} s \sqrt{lc} x = E \operatorname{ch} s \frac{x}{\tau},$$

$$W(s) = \operatorname{ch} \gamma X = \operatorname{ch} s \sqrt{lc} X = \operatorname{ch} s \tau,$$

$$W'(s) = X \operatorname{sh} \gamma X \frac{\partial \gamma}{\partial s} = X \sqrt{lc} \operatorname{sh} s \sqrt{lc} X = \tau \operatorname{sh} s \tau,$$

în care s-a notat

$$X \sqrt{lc} = \tau.$$

Rezultă imediat

$$V(0) = E \text{ și } W(0) = 1.$$

Rădăcinile numitorului expresiilor din relațiile (12.85) sînt date de ecuația

$$\operatorname{ch} \gamma X = 0$$

care este satisfăcută pentru

$$X = j(2n + 1) \frac{\pi}{2},$$

și rezultă

$$s_n = j \frac{2n + 1}{\tau} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n \in (-\infty, +\infty).$$

Vom avea deci

$$V(s_n) = E \operatorname{ch} j \frac{2n + 1}{X \sqrt{lc}} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{lc} x = E \cos \left[ (2n + 1) \cdot \frac{x}{X} \frac{\pi}{2} \right],$$

$$W'(s_n) = X \sqrt{lc} \operatorname{sh} j \frac{2n + 1}{X \sqrt{lc}} \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{lc} X = jX \sqrt{lc} \sin (2n + 1) \frac{\pi}{2} = j(-1)^n \cdot \tau$$

și

$$e^{s_n t} = \exp j(2n + 1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{\tau} = \cos \alpha_n + j \sin \alpha_n$$

unde

$$\alpha_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{\tau}.$$

Ținînd seama că

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \underline{N} = \sum_0^{\infty} (\underline{N} + \underline{N}^*) = 2 \sum \Re \underline{N},$$



rezultă că originalul căutat al tensiunii  $u$  într-un punct oarecare situat la distanța  $x$  de extremitatea receptoare a liniei este dat de relația

$$u = E \left[ 1 + 2 \sum_0^{\infty} \Re e \frac{\cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X}}{j \frac{2n + 1}{\pi} \frac{\pi}{2} j (-1)^n \tau} \exp j (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} \right] =$$

$$= E \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \cos \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X} \right] \cos \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} \right] \right] \quad (12.86)$$

În același mod se găsește

$$i = \frac{E}{Z_c} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \sin \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X} \right] \sin \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} \right].$$

Din relațiile (12.86) se vede, că atât curentul cât și tensiunea sînt formate din unde nesinusoidale, atât în timp, cât și în spațiu. Undele respective pot fi interpretate ca fiind constituite din armonici impare de timp avînd amplitudinea variabilă în spațiu, aceste amplitudini avînd același rang ca și rangul armonicii de timp corespunzătoare. Frecvența diverselor armonici de timp este

$$f_n = \frac{2n + 1}{4X\sqrt{lc}}, \quad n \in [0, \infty),$$

iar pentru armonicile spațiale, frecvența corespunzătoare este

$$F_n = \frac{2n + 1}{4X}, \quad n \in [0, \infty).$$

Este ușor de văzut, că toate armonicile de curent sînt în cuadratură față de armonicile corespunzătoare de tensiune și în urma acestora; situația este analoagă și pentru amplitudinea fiecărei armonici de curent față de amplitudinea de tensiune, primele fiind în cuadratură spațială față de cele de tensiune și în urma acestora.

Transformînd produsele de cosinus și de sinus în sume, relațiile (12.86) pot fi scrise

$$u = E \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \left[ \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} - \frac{t}{\tau} \right) + \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} + \frac{t}{\tau} \right) \right] \right\}$$

și

$$i = \frac{E}{Z_c} \cdot \frac{2}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + 1} \left[ \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} - \frac{t}{\tau} \right) - \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} + \frac{t}{\tau} \right) \right]. \quad (12.97)$$



Rezultă dar, că fiecare armonică este formată din câte două unde călătore — una directă și una reflectată —, toate armonicile având aceeași viteză de propagare și anume,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_d = -\frac{X}{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{lc}} \text{ și } \left(\frac{dx}{dt}\right)_r = \frac{X}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{lc}},$$

adică foarte apropiate de viteza luminii. În consecință, viteza de grup \* a undelor

\* Propagarea energiei electromagnetice de-a lungul unei linii electrice cu constante repartizate nu se mai face de data aceasta printr-o singură undă, ci printr-un grup de unde, care au frecvențe diferite și care în general au și amplitudinea variabilă. Este deci un sistem de unde — de curenți și de tensiune — nesinusoidale atât în timp, cât și în spațiu. Dacă linia este fără distorsiuni, undele corespunzătoare tuturor componentelor se deplasează cu aceeași viteză de-a lungul liniei și se poate spune că oscilația rezultantă (unda nesinusoidală) se deplasează și ea cu aceeași viteză, care este viteza de fază; în orice punct al liniei, oscilația rezultantă va avea aceeași formă ca și oscilația aplicată la intrare.

Dacă viteza de fază a fiecărei unde variază cu frecvența, diversele armonici care compun unda nesinusoidală se deplasează cu viteze diferite și în orice punct al liniei oscilația rezultantă va avea altă formă decât oscilația aplicată la intrare; în acest caz, nu se mai poate aplica noțiunea de viteză de fază pentru oscilația rezultantă.

Pentru propagarea acestor unde nesinusoidale — corespunzând oscilațiilor rezultante se definește viteza de grup, după cum urmează: să considerăm — pentru simplificare — un grup format din două unde sinusoidale, având frecvențele  $\omega_1$  și  $\omega_2$  foarte apropiate și aceeași amplitudine (se neglijează amortizarea), care se propagă pe o linie electrică lungă. Vom avea deci

$$y = A [\cos(\omega_1 t - \beta_1 x) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 x)] = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} x\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} x\right),$$

unde rezultantă, fiind astfel o undă de frecvență  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  modulată prin frecvența  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  (vezi 9.2.2.5).

În ipoteza făcută, se poate lua

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cong \omega \text{ și } \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \cong \beta$$

și expresia de mai sus se poate scrie

$$y = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} x\right) \cos(\omega t - \beta x),$$

care reprezintă o undă de frecvență  $\omega$  care se propagă pe linie cu viteza de fază  $\omega/\beta$ ; amplitudinea oscilației variază și ea cu timpul și cu distanța, având o variație periodică de frecvență egală cu diferența dintre cele două frecvențe. Ea se propagă cu viteza

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\beta_1 - \beta_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta},$$

care este însăși viteza de propagare a undei modulate. Limita acestei viteze când  $\Delta\omega$  tinde către zero se numește viteza de grup și este definită de relația

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta},$$

Viteza de grup coincide cu viteza de fază atunci când  $\beta$  este proporțional cu frecvența, adică în cazul unei linii fără distorsiuni.

La aceleași concluzii se poate ajunge și atunci când se presupune că pe linie se transmite un grup



de tensiune și curent este aceeași cu viteza de fază a fiecărei armonici. Se mai observă, de asemenea, că, pe cînd undele *reflectate* ale diverselor armonici de tensiune și curent sînt *în fază*, undele *directe* ale diverselor armonici de tensiune și curent sînt *în opoziție*.

În ipoteza făcută ( $r = 0$  și  $g = 0$ ) undele de tensiune și curent, definite de relațiile (12.86) și (12.87), vor oscila neconținut.

**12.2.2.4. Linie electrică deschisă la o extremitate, îndeplinind condiția lui HEAVISIDE, căreia i se aplică la cealaltă extremitate o tensiune de formă treaptă.** Ca un al doilea exemplu de calcul se va examina cazul unei linii îndeplinind condiția lui HEAVISIDE (12.26), deschisă la extremitatea receptor adică  $Z(s) = \infty$  și căreia i se aplică la extremitatea sursă o tensiune de formă treaptă ( $U_1 = E$ ).

În cazul unei linii electrice industriale de foarte mare tensiune, conductanța  $g$  variază între limite foarte mari, în funcție de condițiile atmosferice; într-adevăr acestea influențează în același timp producerea fenomenului corona în jurul conductoarelor precum și pierderile prin conductibilitate superficială a izolațiilor. În consecință, în prima aproximație și pentru un studiu calitativ, se poate presupune că parametrii lineici ai liniei îndeplinesc condiția lui HEAVISIDE.

Pentru a concretiza cele afirmate mai înainte, fie o linie trifazată de 225 kV pentru care parametrii lineici corespunzători \* sînt:

$$r = 0,11 \, \Omega/\text{km la } 20^\circ\text{C și } 50 \, \text{Hz}; \quad l = 2,05 \cdot 10^{-3} \, \text{H/km}; \quad c = 8,45 \cdot 10^{-9} \, \text{F/km}.$$

La tensiunea nominală de 225 kV între faze, pierderile minime, pe timp uscat, datorite fenomenului corona și izolațiilor sînt de cel puțin 250 W/km de linie trifazată \*\*; în condiții atmosferice foarte defavorabile aceste pierderi pot fi de 100 de ori mai mari. Ținînd seama că aceste pierderi sînt date de relația

$$p_c = 3g U^2,$$

conductanța lineică poate fi cuprinsă între  $5 \cdot 10^{-9}$  și  $5 \cdot 10^{-7}$  siemens/km.

Din condiția lui HEAVISIDE, aplicată valorilor indicate mai sus, rezultă

$$g = \frac{rc}{l} = \frac{0,11 \cdot 8,45 \cdot 10^{-9}}{2,05 \cdot 10^{-3}} = 4,5 \cdot 10^{-7} \, \text{S/km},$$

valoare foarte apropiată de limita superioară, calculată mai sus.

de oscilații de aceeași amplitudine, de frecvențe apropiate, care diferă între ele cu aceeași mărime  $\Delta\omega$ .

Viteza de grup reprezintă și viteza de propagare a energiei electrice, aceasta fiind cuprinsă între două noduri a unei modulatori.

Tîmpul de propagare a grupului de unde este

$$t = \frac{l}{v_g} = \frac{d \left( \frac{\omega}{v} \right)}{d\omega},$$

fiind astfel variabil cu frecvența.

Vezi și [77] pag. 291, [87] pag. 106, [297] pag. 3.

\* Vezi 12.1.2.

\*\* Vezi [73] pag. 271.



În practică, dacă tensiunea tranzitorie depășește tensiunea nominală, ceea ce se întâmplă întotdeauna la punerea bruscă sub tensiune a unei linii, tensiunea putînd ajunge în acest caz aproape de dublul tensiunii nominale, pierderile cresc mai repede decît pătratul tensiunii, chiar pe timp uscat, putînd ajunge la valori de cîteva ori mai mari decît maximele indicate și, în consecință, conductanța lineică este mult mai mare decît cea calculată. Acest fenomen este mult mai accentuat dacă se studiază regimul tranzitoriu produs de o supra-tensiune de origine atmosferică \* a cărei amplitudine este de mai multe ori mai mare decît tensiunea nominală a liniei. Pe de altă parte, rezistența lineică a liniei este ea însăși mai mare decît cea calculată la frecvența normală de 50 Hz, aceasta din cauza efectului pelicular din conductor \*\*; în afară de aceasta, ea depinde de frecvență. În consecință, ținînd seama că regimul tranzitoriu este format dintr-o infinitate de unde mobile cu frecvențe crescînde \*\*\*, rezistența crește cu rangul undei mobile. Astfel, rezistența lineică  $r$  și conductanța lineică  $g$  nu mai pot fi considerate, constante, ele depinzînd de însăși forma regimului tranzitoriu. În special, rezistența  $r$  este o funcție de timp, deci de variabila  $s$ . În aceste condiții, în locul parametrilor lineici constanți se utilizează parametrii tranzitorii corespunzători \*\*\*\*.

Pentru studierea problemei propuse, se vor utiliza aceleași ecuații (12.85); punînd

$$\frac{r}{l} = \frac{g}{c} = \delta,$$

din relațiile (12.78) și (12.82) rezultă :

$$\gamma = \sqrt{(r + sl)(g + sc)} = (s + \delta) \sqrt{lc}; \quad Z_c = \sqrt{\frac{r + sl}{g + sc}} = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

Pentru a găsi originalul tensiunii de linie, se aplică teorema dezvoltării a lui HEAVISIDE pentru care, în acest caz

$$V(s) = E \operatorname{ch} \gamma x = E \operatorname{ch} (s + \delta) \sqrt{lc} x = E \operatorname{ch} (s + \delta) \frac{x}{X} \tau,$$

$$W(s) = \operatorname{ch} \gamma x = \operatorname{ch} (s + \delta) \tau,$$

$$W'(s) = X \operatorname{sh} \gamma x \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \tau \operatorname{sh} (s + \delta) \tau,$$

în care s-a notat

$$X \sqrt{lc} = \tau.$$

Rezultă

$$V(0) = E \operatorname{ch} \delta \frac{x}{X} \tau; \quad W(0) = \operatorname{ch} \delta \tau.$$

\* Vezi [73] pag. 291

\*\* Vezi 14.1.2.3.

\*\*\* Vezi relația (12.87)

\*\*\*\* Vezi [242]



Rădăcinile numitorului expresiilor (12.85) sînt date în acest caz de ecuația

$$\operatorname{ch} (s + \delta) \tau = 0,$$

care este satisfăcută pentru

$$(s_n + \delta) \tau = j (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad [n \in (-\infty, +\infty)]$$

și rezultă

$$s_n = j \frac{2n + 1}{\tau} \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Cu aceasta, se obține

$$\begin{aligned} W'(s_n) &= \tau \operatorname{sh} \left[ j \frac{2n + 1}{\tau} \cdot \frac{\pi}{2} - \delta + \delta \right] t = \tau \operatorname{sh} j (2n + 1) \frac{\pi}{2} = \\ &= j (-1)^n \tau. \quad [n \in (-\infty, +\infty)]. \end{aligned}$$

Ținînd seama că

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \underline{N} = \sum_0^{\infty} (\underline{N} + \underline{N}^*) = 2 \sum_0^{\infty} \Re \underline{N},$$

rezultă

$$V(s_n) = E \operatorname{ch} (s + \delta) \tau \frac{x}{X} = E \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X}$$

și

$$\begin{aligned} \varepsilon^{s_n t} &= \exp \left( j \frac{2n + 1}{\tau} \frac{\pi}{2} - \delta \right) t = \exp j (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} \cdot \exp (-\delta t) = \\ &= \varepsilon^{-\delta t} \left[ \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} + j (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} \right]. \end{aligned}$$

În consecință

$$\begin{aligned} u &= E \left[ \frac{\operatorname{ch} \delta \tau \frac{x}{X}}{\operatorname{ch} \delta \tau} + 2 \sum_0^{\infty} \Re \frac{\cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X}}{\left[ j \frac{2n + 1}{\tau} \frac{\pi}{2} - \delta \right] j (-1)^n \tau} \varepsilon^{-\delta t} \varepsilon^{j (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau}} \right] = \\ &= E \left[ \frac{\operatorname{ch} \delta \tau \frac{x}{X}}{\operatorname{ch} \delta \tau} - \frac{4}{\pi} \varepsilon^{-\delta t} \sum_0^{\infty} (-1)^n \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X} \Re \frac{\exp j (2n + 1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau}}{(2n + 1) + j \frac{2}{\pi} \delta \tau} \right]. \end{aligned}$$



Punând

$$(2n+1) + j \frac{2}{\pi} \delta \tau = T_n e^{j\varphi_n} = T_n (\cos \varphi_n + j \sin \varphi_n),$$

se obține

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\delta \tau}{(2n+1) \frac{\pi}{2}}$$

și

$$T_n = \sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi} \delta \tau\right)^2}$$

și deci,

$$\Re \frac{\exp j(2n+1) \frac{2}{\pi} \frac{t}{\tau}}{(2n+1) + j \frac{2}{\pi} \delta \tau} = \frac{\cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} - \varphi_n \right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \delta^2 \tau^2}}$$

astfel, că originalul căutat al tensiunii este

$$u = E \left[ \frac{\operatorname{ch} \delta \tau \frac{x}{X}}{\operatorname{ch} \delta \tau} - \frac{4}{\pi} \varepsilon^{-\delta t} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\cos (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X} \cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} - \varphi_n \right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \delta^2 \tau^2}} \right].$$

Expresia curentului se determină în același mod. În acest caz,  $W(s)$  și  $W'(s)$  sînt aceleași ca și pentru tensiune, dar

$$V(s) = \frac{E}{Z_c} \operatorname{sh} \gamma x = \frac{E}{Z_c} \operatorname{sh} (s + \delta) \tau \frac{x}{X}$$

și deci,

$$V(s_n) = \frac{E}{Z_c} \operatorname{sh} \left[ j \frac{2n+1}{\tau} \frac{\pi}{2} - \delta + \delta \right] \tau \frac{x}{X} = j \frac{E}{Z_c} \sin (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X}$$

și

$$V(0) = \frac{E}{Z_c} \operatorname{sh} \delta \tau \frac{x}{X}.$$

Calculînd se găsește

$$i = \frac{E}{Z_c} \left[ \frac{\operatorname{sh} \delta \tau \frac{x}{X}}{\operatorname{ch} \delta \tau} + \frac{4}{\pi} \varepsilon^{-\delta t} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{X} \right] \sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau} - \varphi_n \right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \delta^2 \tau^2}} \right]$$

(12.89)



Este ușor de văzut, că dacă  $r = 0$  și  $g = 0$  (cazul liniei fără pierderi) rezultă  $\delta = 0$  și  $\varphi_n = 0$ ; se găsesc astfel relațiile (12.85).

Din relațiile (12.88) și (12.89) rezultă că și în cazul când linia satisface condițiile lui HEAVISIDE, atât unda de tensiune, cât și unda de curent sînt nesinusoidale, atât în timp cât și în spațiu; fiecare armonică este însă defazată cu argumentul  $\varphi_n$ , care depinde de ordinul armonicii. Undele respective pot fi interpretate ca fiind constituite din armonici impare de timp avînd amplitudinea variabilă în spațiu, rangul lor fiind același cu al armonicilor de timp corespunzătoare. Diversele armonici de timp au și în acest caz frecvența

$$f_n = \frac{2n+1}{4X\sqrt{lc}}, \quad n \in [0, \infty),$$

iar cele spațiale

$$F_n = \frac{2n+1}{4X}, \quad n \in [0, \infty).$$

Toate aceste armonici se amortizează cu același factor de amortizare.

În afară de aceasta, și în acest caz, toate armonicile de curent sînt în cuadratură față de armonicile de tensiune și anume în urma acestora, ele avînd însă același defazaj  $\varphi_n$ ; aceeași situație se găsește și la amplitudinile corespunzătoare ale diverselor armonici, primele fiind în cuadratură spațială față de cele de tensiune și în urma acestora.

Transformînd produsele funcțiilor trigonometrice în sume, relațiile (12.88) și (12.89) se pot descrie

$$u = E \left[ \frac{\operatorname{ch} \delta \tau \frac{x}{X}}{\operatorname{ch} \delta \tau} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \varepsilon^{-\delta t} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} - \frac{t}{\tau} \right) + \varphi_n \right] + \cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} + \frac{t}{\tau} \right) - \varphi_n \right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \delta^2 \tau^2}} \right]$$

și

$$i = \frac{E}{Z_0} \left[ \frac{\operatorname{sh} \delta \tau \frac{x}{X}}{\operatorname{ch} \delta \tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} \varepsilon^{-\delta t} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} - \frac{t}{\tau} \right) + \varphi_n \right] - \cos \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{X} + \frac{t}{\tau} \right) - \varphi_n \right]}{\sqrt{(2n+1)^2 + \left( \frac{2}{\pi} \right)^2 \delta^2 \tau^2}} \right]$$



În consecință, și în cazul liniilor îndeplinind condiția lui HEAVISIDE, fiecare armonică este formată din cîte două unde călătoare — una directă și una reflectată — toate armonicile avînd aceeași *viteză de propagare* și anume

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_d = -\frac{X}{\tau} = -\frac{1}{\sqrt{lc}} \text{ și } \left(\frac{dx}{dt}\right)_r = \frac{X}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{lc}},$$

deci, foarte apropiate de viteza luminii ; și în acest caz, viteza de grup este aceeași cu viteza de fază, atît pentru unda de tensiune cît și pentru cea de curent. Toate armonicile se amortizează în timp cu același factor de amortizare  $\delta$ . Se observă de asemenea că undele *reflectate* ale diverselor armonici de curent sînt *respectiv în fază* și defazate *înainte* cu argumentul  $\varphi_n$  față de originea de timp, undele *directe* sînt *respectiv în opoziție* și defazate *în urmă* cu același argument  $\varphi_n$  față de originea de timp.

Este ușor de văzut că dacă  $r = 0$  și  $g = 0$ , rezultă  $\delta = 0$  și  $\varphi_n = 0$  și se regăsesc relațiile (12.87) corespunzătoare liniei fără pierderi.



## Capitolul XIII

### LANȚURI DE CUADRIPOLI

#### 13.1. LANȚURI DE CUADRIPOLI FUNCȚIONÎND ÎN REGIM PERMANENT CUASISTAȚIONAR

##### 13.1.1. DEFINIȚII

Un lanț de cuadripoli este o structură formată dintr-un număr oarecare de cuadripoli pasivi legați astfel, încât bornele de ieșire ale cuadripolului de rangul  $m$  să fie legate la bornele de intrare ale cuadripolului de rangul  $m + 1$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) (fig. 13.1).

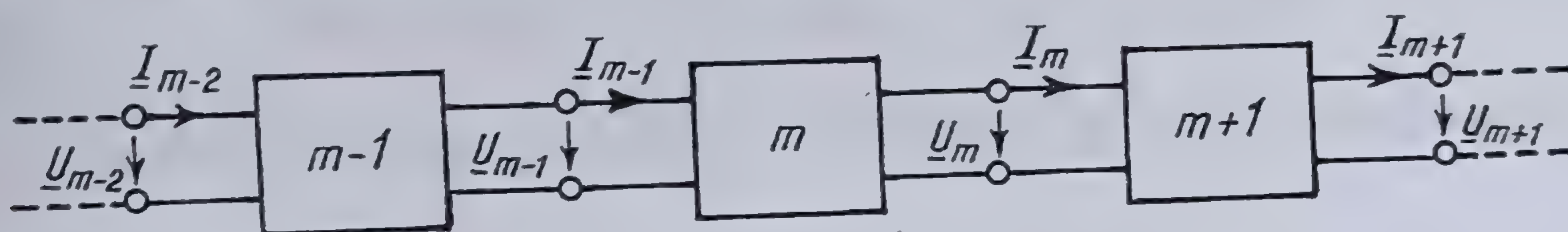


Fig. 13.1. Lanț de cuadripoli.

În cazul cînd cuadripolii sînt identici, lanțul de cuadripoli este *omogen*. Dacă fiecare cuadripol care alcătuiește lanțul este și simetric, atunci lanțul de cuadripoli este *simetric și omogen*.

Prin analogie cu cuadripolii simpli \*, se convine să se considere ca borne de intrare în lanțul de cuadripoli, bornele avînd indicele cel mai mic (0 sau 1), iar ca borne de ieșire, bornele avînd indicele cel mai mare; sensul normal de transmitere a energiei electrice se consideră deci sensul stînga-dreapta.

##### 13.1.2. ECUAȚIILE UNUI LANȚ DE CUADRIPOLI ÎN REGIM PERMANENT

13.1.2.1. Stabilirea ecuațiilor unui cuadripol. Să considerăm un lanț de cuadripoli omogen; ecuațiile de funcționare ale cuadripolului de rangul  $m$  sînt:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{m-1} &= \underline{A} \underline{U}_m + \underline{B} \underline{I}_m, \\ \underline{I}_{m-1} &= \underline{C} \underline{U}_m + \underline{D} \underline{I}_m \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

în care s-au notat cu  $m-1$  bornele de intrare și cu  $m$  bornele de ieșire ale acestui cuadripol.

Ecuațiile (13.1) sînt valabile pentru toate valorile întregi ale lui  $m$  în intervalul  $m \in (1, n)$ ; ele constituie un sistem de ecuații cu diferențe finite și determină pe  $\underline{U}_m$  și  $\underline{I}_m$  în funcție de variabila discretă  $m$ .

\* Vezi 6.4.4.



Soluțiile acestor ecuații sînt de forma \* :

$$\underline{U}_m = \underline{M} \varepsilon^{m\gamma} \text{ și } \underline{I}_m = \underline{N} \varepsilon^{m\gamma},$$

în care  $\underline{M}$ ,  $\underline{N}$  și  $\gamma$  sînt mărimi complexe, independente de  $m$ , diferite de zero și care urmează a fi determinate; în aceste expresii  $m$  poate lua și valoarea zero, corespunzînd elementelor de intrare în cuadripolul de rangul 1, tensiunea și curenul corespunzătoare fiind  $\underline{U}_0$  și  $\underline{I}_0$ .

Introducînd aceste valori în ecuațiile (13.1) se obține

$$\underline{M} \varepsilon^{(m-1)\gamma} = \underline{A} \underline{M} \varepsilon^{m\gamma} + \underline{B} \underline{N} \varepsilon^{m\gamma},$$

$$\underline{N} \varepsilon^{(m-1)\gamma} = \underline{C} \underline{M} \varepsilon^{m\gamma} + \underline{D} \underline{N} \varepsilon^{m\gamma},$$

sau, după simplificarea cu  $\varepsilon^{m\gamma}$ ,

$$\underline{M} (\varepsilon^{-\gamma} - \underline{A}) = \underline{N} \underline{B}; \quad \underline{N} (\varepsilon^{-\gamma} - \underline{D}) = \underline{M} \underline{C}. \quad (13.2)$$

Înmulțind relațiile (13.2) între ele și ținînd seama de relația (6.104) se obține

$$\varepsilon^{-2\gamma} - (\underline{A} + \underline{D}) \varepsilon^{-\gamma} + 1 = 0, \quad (13.3)$$

o ecuație reciprocă cu rădăcinile

$$\varepsilon^{-\gamma} = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1}; \quad \varepsilon^{\gamma} = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1} \quad (13.4)$$

căci

$$\varepsilon^{\gamma} \varepsilon^{-\gamma} = 1.$$

Soluțiile sistemului (13.1) sînt deci :

$$\text{și} \quad \left. \begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{M}_1 \varepsilon^{-m\gamma} + \underline{M}_2 \varepsilon^{m\gamma} \\ \underline{I}_m &= \underline{N}_1 \varepsilon^{-m\gamma} + \underline{N}_2 \varepsilon^{m\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Constantele  $\underline{M}$  și  $\underline{N}$  trebuie să satisfacă relațiile (13.2) adică

$$\frac{\underline{M}}{\underline{N}} = \frac{\underline{A}}{\varepsilon^{-\gamma} - \underline{A}} = \frac{\varepsilon^{-\gamma} - \underline{D}}{\underline{C}} = Z.$$

Din ecuația (13.3) se deduce

$$\frac{1}{2} (\varepsilon^{\gamma} + \varepsilon^{-\gamma}) = \operatorname{ch} \gamma = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}. \quad (13.6)$$

\* Vezi [122] pag. 287.



Cosinusul hiperbolic fiind o funcție pară, ecuația (13.6) are două soluții egale și de semn contrar  $\gamma_1 = \gamma$  și  $\gamma_2 = -\gamma$ . La aceste valori ale lui  $\gamma$  corespund două valori pentru raportul  $\underline{M}_2/\underline{N}$ . Să notăm deci,

$$\frac{\underline{M}_1}{\underline{N}_1} = \underline{Z}_1 \quad \text{și} \quad \frac{\underline{M}_2}{\underline{N}_2} = -\underline{Z}_2,$$

dimensiunile acestor rapoarte fiind evident acelea ale unor impedanțe. Este ușor de văzut, că de fapt,  $\underline{Z}_1$  reprezintă impedanța caracteristică a lanțului de cuadripoli în sensul *stînga-dreapta* (intrare-ieșire), iar  $\underline{Z}_2$  reprezintă impedanța caracteristică a lanțului de cuadripoli în sensul *dreapta-stînga* (ieșire-intrare). Într-adevăr, calculînd se găsește:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{B}}{\varepsilon^{-\gamma} - \underline{A}} = \frac{\underline{B}}{\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1} - \underline{A}} = \frac{1}{2\underline{C}} \left[ (\underline{A} - \underline{D}) + \sqrt{(\underline{A} - \underline{D})^2 - 4\underline{B}\underline{C}} \right]$$

și

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{B}}{\varepsilon^{\gamma} - \underline{A}} = \frac{\underline{B}}{\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1} - \underline{A}} = \frac{1}{2\underline{C}} \left[ (\underline{A} - \underline{D}) - \sqrt{(\underline{A} - \underline{D})^2 - 4\underline{B}\underline{C}} \right].$$

Ori, se știe, că \* rădăcinile care dau valorile impedanțelor caracteristice pentru cele două sensuri de funcționare ale unui cuadripol sînt două cîte două egale și de semn contrar, valabile fiind numai acele rădăcini pentru care partea reală este pozitivă sau nulă. Aceasta justifică semnul minus atribuit lui  $\underline{Z}_2$ .

Rezultă,

$$\underline{N}_1 = \frac{\underline{M}_1}{\underline{Z}_1} \quad \text{și} \quad \underline{N}_2 = -\frac{\underline{M}_2}{\underline{Z}_2},$$

astfel, că relațiile (13.5) pot fi scrise:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{M}_1 \varepsilon^{-m\gamma} + \underline{M}_2 \varepsilon^{m\gamma}, \\ \underline{I}_m &= \frac{\underline{M}_1}{\underline{Z}_1} \varepsilon^{-m\gamma} - \frac{\underline{M}_2}{\underline{Z}_2} \varepsilon^{m\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Pentru determinarea lui  $\underline{M}_1$  și  $\underline{M}_2$  se face  $m = 0$  în relațiile (13.7) și se obține

$$\underline{U}_0 = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 \quad \text{și} \quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{M}_1}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{M}_2}{\underline{Z}_2},$$

\* Vezi 6.4.4.8.



de unde rezultă :

$$\underline{M}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} (\underline{U}_0 + \underline{Z}_2 \underline{I}_0) ; \underline{M}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} (\underline{U}_0 - \underline{Z}_1 \underline{I}_0). \quad (13.8)$$

În aceste expresii  $\underline{U}_0$  și  $\underline{I}_0$  reprezintă tensiunea și curentul la bornele de intrare ale cuadripolului de rang 1, respectiv la bornele de intrare ale lanțului de cuadripoli. Introducând acum valorile lui  $\underline{M}_1$  și  $\underline{M}_2$  în relațiile (13.7) se obține

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_m &= \left( \operatorname{ch} m \gamma + \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \right) \underline{U}_0 - \frac{2 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \cdot \underline{I}_0, \\ \underline{I}_m &= -\frac{2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \cdot \underline{U}_0 + \left( \operatorname{ch} m \gamma - \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \right) \underline{I}_0. \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

Ecuatiile (13.8) reprezintă ecuațiile unui lanț de cuadripoli omogen și dau tensiunea și curentul la bornele de ieșire ale cuadripolului de rangul  $m$  în funcție de tensiunea și curentul la bornele de intrare ale lanțului și de parametrii unui cuadripol; în particular, dacă  $m = n$ , se obține tensiunea și curentul la bornele de ieșire ale lanțului de cuadripoli.

Scriind acum mărimile de intrare în funcție de mărimile de ieșire, ecuațiile lanțului de cuadripoli devin :

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \left( \operatorname{ch} m \gamma - \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \right) \underline{U}_m + \frac{2 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \cdot \underline{I}_m, \\ \underline{I}_0 &= \frac{2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \cdot \underline{U}_m + \left( \operatorname{ch} m \gamma + \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \operatorname{sh} m \gamma \right) \underline{I}_m. \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

**13.1.2.2. Interpretarea fizică a rezultatelor.** Să considerăm un lanț omogen de cuadripoli (fig. 13.1). O undă simplă, de tensiune sau de curent, este caracterizată prin aceea, că trecând de la un cuadripol de rang  $m$  la următorul, de rang  $m + 1$ , mărimea ei este multiplicată cu un același factor complex  $\lambda$ ; rezultă deci, că mărimile de ieșire pot fi exprimate în funcție de mărimile de intrare, cu ajutorul acestui factor

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{m-1} &= \lambda \underline{U}_m, \\ \underline{I}_{m-1} &= -\underline{I}_m. \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

Introducând aceste valori în ecuațiile (13.1) se obține sistemul de ecuații

$$\left. \begin{aligned} \lambda \underline{U}_m &= \underline{A} \underline{U}_m + \underline{B} \underline{I}_m, \\ \lambda \underline{I}_m &= \underline{C} \underline{U}_m + \underline{D} \underline{I}_m, \end{aligned} \right\} \quad (13.12)$$



care este un sistem omogen în  $\underline{U}_m$  și  $\underline{I}_m$  și care este compatibil dacă

$$\begin{vmatrix} \underline{A} - \underline{\lambda} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} - \underline{\lambda} \end{vmatrix} = \underline{\lambda}^2 - (\underline{A} + \underline{D}) \underline{\lambda} + 1 = 0 \quad (13.13)$$

întrucât  $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$ . Este ușor de văzut, că cele două rădăcini  $\underline{\lambda}_1$  și  $\underline{\lambda}_2$  sînt valorile proprii ale matricei coeficienților sistemului de ecuații (13.12); ele sînt

$$\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2 = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1}.$$

Ținînd seama de relațiile (13.4), putem scrie imediat

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-\underline{\gamma}} \quad \text{și} \quad \underline{\lambda}_2 = \varepsilon^{\underline{\gamma}}.$$

Dacă  $|\underline{\lambda}| = 1$ , se obține o propagare *pură*, fără atenuare; dacă  $|\underline{\lambda}| < 1$  avem o propagare de la *stînga la dreapta* cu atenuare progresivă în acest sens; dacă  $|\underline{\lambda}| > 1$ , atunci propagarea se produce de la *dreapta la stînga* cu atenuarea progresivă în același sens.

Prin analogie cu liniile lungi \* parametrul  $\underline{\gamma}$  se numește *constantă de propagare* și este de forma

$$\underline{\lambda} = \alpha + j\beta. \quad (13.14)$$

Partea reală a constantei de propagare  $\alpha$ , se numește *constantă de atenuare* (sau numai atenuarea) *pe cuadripol*. Produsul

$$n\alpha = \alpha_T,$$

în care  $n$  este numărul total al cuadripolilor care formează lanțul de cuadripoli, se numește *constantă de atenuare totală* (sau numai *atenuarea totală*) a lanțului de cuadripoli.

Atenuarea tensiunilor sau curenților se exprimă, în practică, fie prin logaritmul natural al raportului dintre două valori ale acestei mărimi

$$\alpha_T = \ln \frac{U_0}{U_n}$$

și se măsoară în *neperi* (Np), fie prin logaritmul zecimal al aceluiași raport înmulțit cu 20,

$$\alpha_T = 20 \lg \frac{U_0}{U_n}$$

și se măsoară în *decibeli* (db).

\* Vezi 12.1.4.2.



În tabloul 13.1 este dată corespondența dintre aceste unități de măsură.

Tabloul 13.1

$\frac{U_0}{U_n}$	1	10	100	1000
$\alpha_T$ Np	0	2,3	4,6	6,9
$\alpha_T$ db	0	20	40	60

Acest lucru se exprimă spunînd că „cele două tensiuni diferă cu  $\alpha_T$  Np, respectiv db“ sau că „între tensiunea de intrare în lanțul de cuadripoli și aceea de ieșire există o atenuare de atîția neperi sau decibeli“.

Mărimea  $\beta$  din partea complexă a constantei de propagare, se numește *constanta de distorsiune* (sau numai *distorsiunea*) *pe cuadripol* și exprimă variația fazei unde de tensiune — respectiv de curent — pe cuadripol; ea este deci, unghiul între fazorii de tensiune — respectiv de curent — corespunzători tensiunii sau curentului, existînd la intrarea și la ieșirea dintr-un cuadripol; distorsiunea se măsoară în radiani sau în grade. Produsul

$$n\beta = \beta_T,$$

în care  $n$  e numărul total al cuadripolilor care formează lanțul de cuadripoli se numește *constanta de distorsiune totală* (sau numai *distorsiunea totală*) *a lanțului de cuadripoli* \*.

Ținînd seama de aceste definiții, rezultă, că pentru  $\alpha = 0$ , propagarea se face fără atenuare; în acest caz

$$\underline{\lambda}_1 = \varepsilon^{-j\beta} \quad \text{și} \quad \underline{\lambda}_2 = \varepsilon^{j\beta}$$

și  $|\underline{\lambda}| = 1$ , așa cum s-a indicat și mai înainte.

Pentru  $\alpha \neq 0$  și pozitiv, rădăcina  $\underline{\lambda}_1$  corespunde propagării undelor de la stînga la dreapta (intrare-ieșire) iar rădăcina  $\underline{\lambda}_2$  unei propagări a undelor de la dreapta la stînga (ieșire-intrare).

Să presupunem că în lanțul de cuadripoli există un regim permanent de curenți și tensiuni — fără amortizare — definit de relațiile (13.11) și (13.13); în fiecare punct\*\* al lanțului de cuadripoli se poate scrie

$$\frac{U}{I} = \underline{Z}.$$

\* Parametrii  $\alpha$  și  $\beta$  se determină din relațiile (13.6) și (13.14).

\*\* La punctele de interconectare ale diversilor cuadripoli.



Din relația (13.12) se deduce

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{B}}{\underline{\lambda} - \underline{A}} = \frac{\underline{\lambda} - \underline{D}}{\underline{C}}. \quad (13.15)$$

Cele două soluții  $\underline{\lambda}_1$  și  $\underline{\lambda}_2$ , corespunzătoare celor două sensuri de propagare pe lanțul de cuadripoli, dau două valori posibile pentru  $\underline{Z}$ , care nu sînt altceva decît impedanțele caracteristice ale lanțului de cuadripoli corespunzătoare celor două sensuri de propagare. Rezultă

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 = \frac{\underline{B}}{\underline{\lambda} - \underline{A}} &= \frac{\underline{B}}{\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\underline{A} + \underline{D}}{2}\right)^2 - 1} - \underline{A}} = \frac{2\underline{B} [(\underline{D} - \underline{A}) - \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 - 4}]}{(\underline{D} - \underline{A})^2 - (\underline{A} + \underline{D})^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{2\underline{C}} \left[ (\underline{A} - \underline{D}) + \sqrt{(\underline{A} - \underline{D})^2 + 4\underline{B}\underline{C}} \right] = \underline{Z}_c, \end{aligned}$$

care este expresia impedanței caracteristice în sensul intrare-ieșire (stînga — dreapta) \*.

În același mod se găsește

$$\underline{Z}_2 = -\underline{Z}_c = \underline{\zeta}_c,$$

semnul minus interpretîndu-se în sensul, că această impedanță caracteristică este corespunzătoare sensului de propagare ieșire — intrare (dreapta — stînga).

Să considerăm o porțiune limitată din lanțul de cuadripoli, formată din cuadripolii de rang  $m, m+1, \dots, m+p$ , pe care să o închidem la *dreapta* la ieșire, pe impedanța caracteristică  $\underline{Z}_c$ . Totul se petrece ca și cum am avea un lanț de cuadripoli nelimitat la dreapta \*\*, a cărei impedanță aparentă la intrare este tot  $\underline{Z}_c$ .

Dacă se leagă o impedanță caracteristică  $\underline{\zeta}_c$  la *stînga* lanțului de cuadripoli, la intrare, lanțul de cuadripoli va funcționa ca un lanț nelimitat la stînga și care prezintă la dreapta, la ieșire, o impedanță aparentă egală cu  $\underline{\zeta}_c$ .

Raționamentul făcut conduce la ideea descompunerii undelor de tensiune și de curent, fiecare în cîte două unde, care se propagă în sens invers, unde directă și inversă de tensiune și unde directă și inversă de curent. Pentru a arăta aceasta, să reluăm ecuațiile (13.7). Scriind valorile lui  $\underline{M}_1$  și  $\underline{M}_2$  definite de expresiile (13.8) sub forma

$$\underline{M}_1 = \underline{M}_1 | \underline{\mu}_2 \quad \text{și} \quad \underline{M}_2 = \underline{M}_2 | \underline{\mu}_2,$$

și ținînd seama de expresia (13.14) a constantei de propagare, ecuațiile (13.7) se pot scrie:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{M}_1 \epsilon^{-m\alpha} | \underline{-m\beta + \mu_1} + \underline{M}_2 \epsilon^{m\alpha} | \underline{m\beta + \mu_2} \\ \underline{I}_m &= \frac{\underline{M}_1}{\underline{Z}_1} \epsilon^{-m\alpha} | \underline{-m\beta + \mu_1 - \psi_1} - \frac{\underline{M}_2}{\underline{Z}_2} \epsilon^{m\alpha} | \underline{m\beta + \mu_2 - \psi_2} \end{aligned} \right\} \quad (13.16)$$

\* Vezi 6.4.4.8.

\*\* Vezi [17] pag. 114.



Alegînd originea de timp astfel, încît ea să coincidă cu momentul în care unda directă de tensiune pleacă din extremitatea stîngă, adică la intrarea în lanțul de cuadripoli, cu amplitudinea maximă, dacă  $U_0 \sqrt{2}$  este această amplitudine, atunci  $m = 1$  și se poate scrie :

$$\begin{cases} \sqrt{2} M_1 \varepsilon^{-\alpha} = U_0 \sqrt{2}, \\ -\beta + \mu_1 = 0, \end{cases}$$

de unde, rezultă

$$M_1 = U_0 \varepsilon^\alpha; \quad \mu_1 = \beta.$$

Notînd

$$M_2 = U'_n,$$

relațiile (13.16) pot fi scrise

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_m &= U_0 \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \left[ -\beta(m-1) + U'_n \varepsilon^{m\alpha} \frac{m\beta + \mu_2}{Z_2} \right], \\ \underline{I}_m &= \frac{U_0}{Z_1} \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \left[ -\beta(m-1) - \psi_1 - \frac{U'_n}{Z_2} \varepsilon^{m\alpha} \frac{m\beta + \mu_2 - \psi_2}{Z_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

Din aceste relații se deduc expresiile valorilor instantanee ale tensiunii și curentului; se găsește :

$$\left. \begin{aligned} u_m &= U_0 \sqrt{2} \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos [\omega t - \beta(m-1)] + U'_n \sqrt{2} \varepsilon^{m\alpha} \cos (\omega t + m\beta + \mu_2), \\ i_m &= \frac{U_0}{Z_1} \sqrt{2} \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos [\omega t - \beta(m-1) - \psi_1] - \frac{U'_n}{Z_2} \sqrt{2} \varepsilon^{m\alpha} \cos (\omega t + m\beta + \mu_2 - \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (13.18)$$

Rezultă deci, că fiecare undă, de tensiune și de curent, este compusă din cîte două *unde mobile* care se propagă în *sensuri contrarii* cu aceeași viteză  $v$ . Aceste unde sînt armonici în raport cu timpul care variază continuu; în raport cu  $m$ , care variază discret, undele au un caracter spectral, spectrele respective avînd o repartitie sinusoidală. În ceea ce privește amplitudinea acestor unde aceasta crește sau descrește exponențial avînd de asemenea un caracter spectral.

Cu aproximația factorului exponențial, pentru ca cele patru unde — de tensiune și de curent — să aibă respectiv aceleași amplitudini la timpurile  $t$  și  $t + \Delta t$  — la bornele cuadripolilor de rangul  $m$  și  $m + \Delta m$ , este necesar ca\*

$$\text{și} \quad \omega(t + \Delta t) - \beta(m + \Delta m - 1) - \psi_1 = \omega t - \beta(m - 1) - \psi_1 \quad (13.19)$$

$$\omega(t + \Delta t) + \beta(m + \Delta m) + \mu_2 - \psi_2 = \omega t + \beta m + \mu_2 - \psi_2, \quad (13.20)$$

\* Pentru undele de tensiune  $\psi_1$ , respectiv  $\psi_2$ , sînt nule.



unde  $\psi_1$  și  $\psi_2$  au valorile din ecuațiile (13.18). Din relația (13.19) rezultă

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta},$$

iar din relația (13.20) rezultă

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = - \frac{\omega}{\beta}.$$

Ținând seama că cea mai mică valoare pe care o poate lua  $m$  este 1, mărimea

$$v = \frac{1}{\Delta t} = \pm \frac{\omega}{\beta}$$

se numește \* *viteza de propagare* a undelor de tensiune și de curent, de-a lungul lanțului de cuadripoli.

Rezultă deci, că cele două unde componente ale undelor de tensiune și de curent, exprimate prin relațiile (13.18) se propagă de-a lungul lanțului de cuadripoli în sensuri diferite, dar cu aceeași viteză :

— unde

$$u_{md} = U_0 \sqrt{2} \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos [\omega t - (m-1)\beta]$$

și

$$i_{md} = \frac{U_0}{Z_1} \sqrt{2} \varepsilon^{-(m-1)\alpha} \cos [\omega t - (m-1)\beta - \psi_1]$$

se numesc *unde directe* și se propagă în direcția stînga-dreapta, de la intrarea în lanțul de cuadripoli către ieșirea din lanțul de cuadripoli;

— unde

$$u_{mi} = U'_0 \sqrt{2} \varepsilon^{m\alpha} \cos (\omega t + m\beta + \mu_2)$$

și

$$i_{mi} = - \frac{U'_0}{Z_2} \sqrt{2} \varepsilon^{m\alpha} \cos (\omega t + m\beta + \mu_2 - \psi_2)$$

se numesc *unde reflectate* și se propagă în direcția dreapta-stînga, de la ieșirea din lanțul de cuadripoli către intrarea în lanțul de cuadripoli.

În consecință, într-un lanț de cuadripoli omogen, unde de tensiune și curent se pot descompune fiecare în câte două unde care se propagă de-a lungul lanțului de cuadripoli, într-un sens sau într-altul, cu o viteză constantă; amplitudinile lor se atenuează, pentru fiecare din ele în sensul de propagare corespunzător, după o exponențială avînd constanta de atenuare  $\alpha$ , adică, raportul amplitudinilor tensiunilor sau curenților la bornele de intrare și de ieșire ale unui cuadripol din lanțul respectiv este egal cu  $\varepsilon^\alpha$ .

\* Vezi [20].



În ceea ce privește undele de curent, pentru unda directă amplitudinea ei este egală cu amplitudinea undei directă de tensiune împărțită la modulul impedanței  $\underline{Z}_1$ , definită de relațiile (13.15) și este defazată în urmă cu argumentul  $\psi_1$  al acestei impedanțe față de unda de tensiune respectivă; amplitudinea undei reflectată de curent este egală cu amplitudinea undei reflectată de tensiune împărțită la modulul impedanței  $\underline{Z}_2$ , definită de aceleași relații (13.15), defazajul său fiind înaintea undei de tensiune cu unghiul  $\pi - \psi_2$ ,  $\psi_2$  fiind argumentul impedanței respective. La trecerea prin fiecare cuadripol al lanțului, defazajul dintre undele de curent și tensiune crește — într-un sens sau altul — cu un unghi egal cu constanta de distorsiune  $\beta$ .

Descompunerea undelor de tensiune sau curent în unde directe și unde reflectate se poate face și în cazul unui singur cuadripol.

### 13.1.3. CAZURI PARTICULARE DE FUNCȚIONARE ALE UNUI LANȚ DE CUADRIPOLI

13.1.3.1. Lanțul de cuadripoli omogen și simetric. În cazul unui lanț de cuadripoli omogen și simetric avem

$$\underline{A} = \underline{D} \quad \text{și} \quad \varepsilon \pm \gamma = \underline{A} \pm \sqrt{\underline{A}^2 - 1}.$$

Rezultă :

$$\operatorname{ch} \gamma = \underline{A}; \quad \frac{\underline{M}}{\underline{N}} = - \frac{\underline{B}}{\operatorname{sh} \gamma};$$

pentru  $\gamma_1 = -\gamma$  se obține

$$\frac{\underline{M}_1}{\underline{N}_1} = \frac{\underline{B}}{\operatorname{sh} \gamma} = \frac{\underline{B}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \gamma - 1}} = \frac{\underline{B}}{\underline{C}} = \underline{Z}_c;$$

pentru  $\gamma_2 = \gamma$  se obține

$$\frac{\underline{M}_2}{\underline{N}_2} = - \frac{\underline{B}}{\operatorname{sh} \gamma} = - \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = - \underline{Z}_c.$$

Mărimea

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}$$

se numește *impedanța caracteristică* (sau *impedanța de undă*, sau *impedanța iterativă*) a lanțului de cuadripoli omogen și simetric prin analogie cu mărimea corespunzătoare definită în cazul unui cuadripol simplu simetric\* sau în cazul

\* Vezi 6.4.4.8.



unei linii lungi \*. În acest caz, ecuațiile (13.9) și (13.10) devin pentru lanțul de cuadripoli omogen și simetric

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_m &= \underline{U}_0 \operatorname{ch} m \underline{\gamma} - \underline{Z}_c \underline{I}_0 \operatorname{sh} m \underline{\gamma}, \\ \underline{I}_m &= - \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} m \underline{\gamma} + \underline{I}_0 \operatorname{ch} m \underline{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

și

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_m \operatorname{ch} m \underline{\gamma} + \underline{Z}_c \underline{I}_m \operatorname{sh} m \underline{\gamma}, \\ \underline{I}_0 &= \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} m \underline{\gamma} + \underline{I}_m \operatorname{ch} m \underline{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

**13.1.3.2. Lanț de cuadripoli omogen și simetric închis pe impedanța caracteristică.** Dacă la ieșirea din ultimul cuadripol al unui lanț de cuadripoli omogen se conectează o impedanță oarecare  $\underline{Z}_n$ , atunci între tensiunea și curentul corespunzătoare ieșirii din lanțul de cuadripoli există relația

$$\underline{U}_n = \underline{Z}_n \underline{I}_n. \quad (13.23)$$

În cazul unui lanț de cuadripoli omogen și simetric, dacă una din cele patru mărimi —  $\underline{U}_0$ ,  $\underline{I}_0$ ,  $\underline{U}_n$ ,  $\underline{I}_n$  — este dată, cu ajutorul relațiilor (13.22) și (13.23) se pot determina și celelalte trei mărimi necunoscute.

Dacă impedanța de încărcare a lanțului de cuadripoli este egală cu impedanța sa caracteristică

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_c,$$

atunci ecuațiile (13.22) iau forma simplă

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_n \varepsilon^{n \underline{\gamma}} \\ \underline{I}_0 &= \underline{I}_n \varepsilon^{n \underline{\gamma}} \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

și rezultă

$$\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{U}_n}{\underline{I}_n} = \underline{Z}_c \quad (13.25)$$

adică, impedanța aparentă la bornele de intrare ale lanțului de cuadripoli este egală cu impedanța sa caracteristică, întocmai ca și în cazul unui cuadripol simplu.

Ținând seama de relația (13.25), în cazul cînd cuadripolul este legat pe impedanța sa caracteristică, din relațiile (13.8) rezultă

$$\underline{M}_2 = 0$$

și deci, undele reflectate de tensiune și de curent sînt nule.

\* Vezi 12.1.4.3.



Din relațiile (13.24) se poate deduce

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_n &= \underline{U}_0 \varepsilon^{-n\gamma} \\ \underline{I}_n &= \underline{I}_0 \varepsilon^{-n\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (13.26)$$

Ținând seama de expresia (13.14) a constantei de propagare, relațiile (13.25) arată că amplitudinea tensiunii și curentului scad exponențial de-a lungul lanțului de cuadripoli.

#### 13.1.4. APLICAȚII

**13.1.4.1. Linia electrică lungă.** Pentru a modela o linie electrică lungă, aceasta se înlocuiește cu un lanț de cuadripoli în  $T$  sau în  $\pi$  care, prin reducerea impedanțelor serie, respectiv paralel, se transformă într-un lanț de cuadripoli de tip  $\Gamma$  sau  $\Gamma$  întors\* (fig. 13.2).

Impedanța de intrare a unei celule oarecare a lanțului rămâne identică cu ea însăși astfel, că în cazul unui lanț format din foarte multe celule, dacă

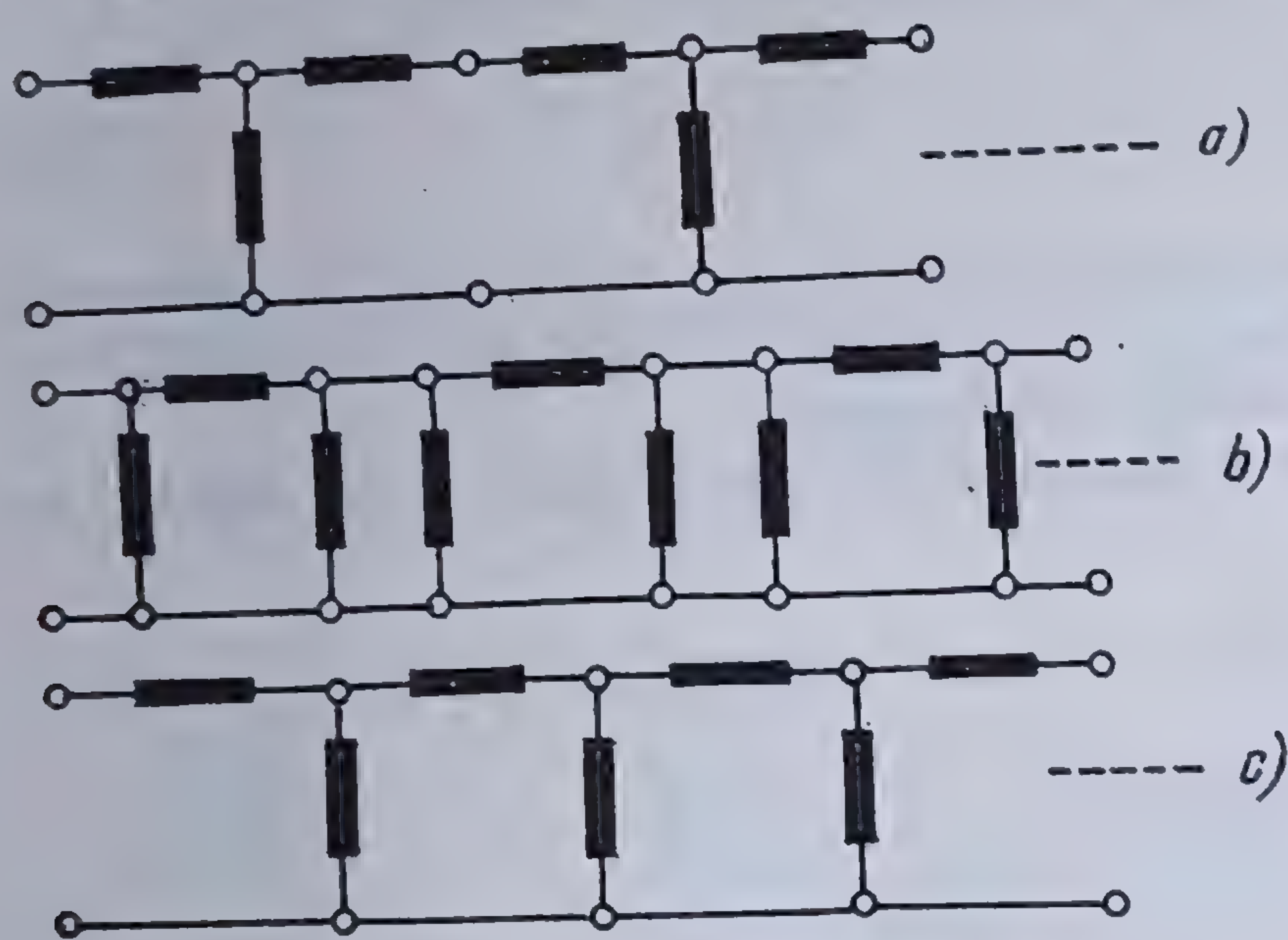


Fig. 13.2. Structură de linie lungă:

a) lanț de cuadripoli  $T$ ; b) lanț de cuadripoli  $\pi$ ; c) lanț de cuadripoli  $\Gamma$ .

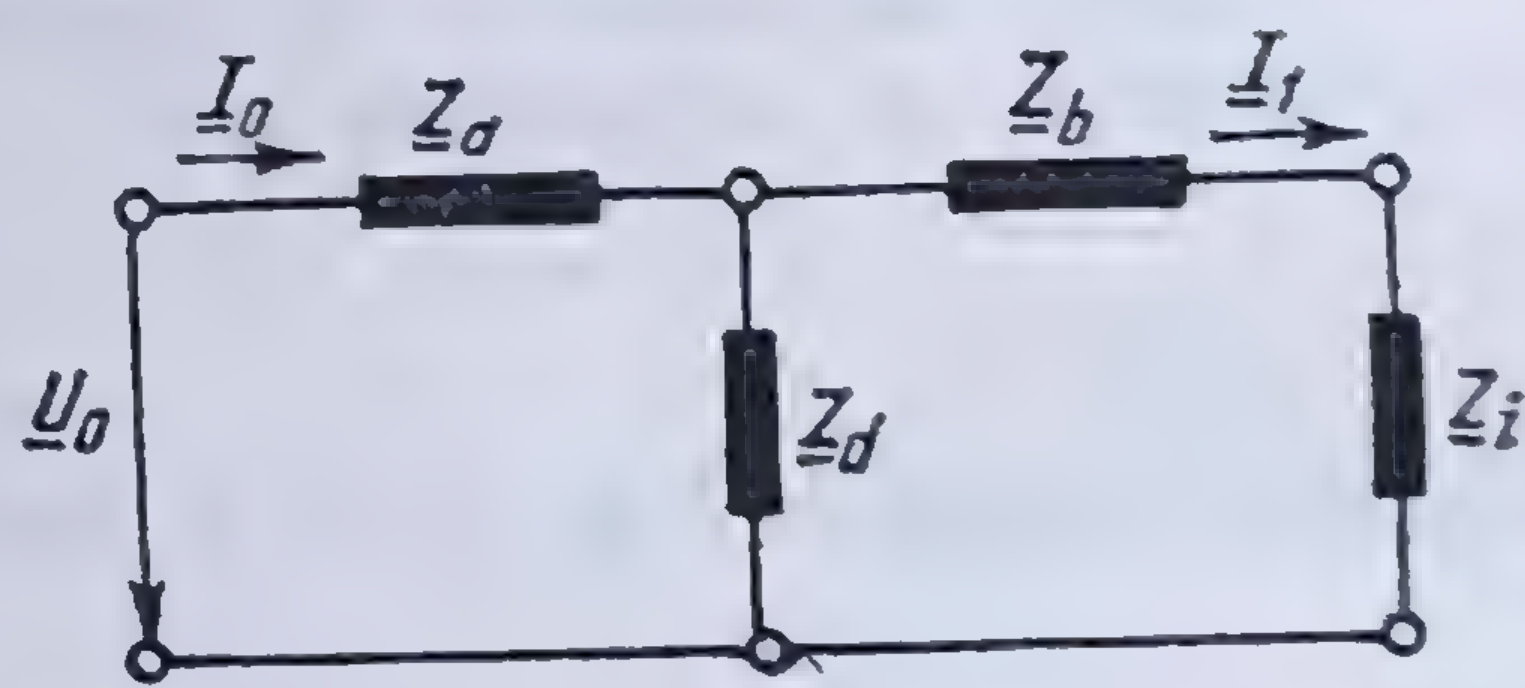


Fig. 13.3. Lanțul de cuadripoli redus.

dorim să ne oprim la o celulă de un anumit rang, este suficient să se înlocuiască restul celulelor cu o impedanță egală cu impedanța  $Z_i$  de intrare în lanț. Să ne oprim la prima celulă; schema echivalentă a lanțului este dată în figura 13.3. Aplicând metoda buclor, ecuațiile de funcționare ale acestui circuit sînt

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= (\underline{Z}_a + \underline{Z}_d) \underline{I}_0 - \underline{Z}_d \underline{I}_1 \\ 0 &= -\underline{Z}_d \underline{I}_0 + (\underline{Z}_b + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i) \underline{I}_1 \end{aligned} \right\} \quad (13.27)$$

Din a doua ecuație rezultă

$$\frac{\underline{I}_0}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{Z}_b + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i}{\underline{Z}_d} = \frac{\underline{I}_0}{\underline{I}_1} |_{\varphi} = \varepsilon^{\alpha} |_{\varphi} \quad (13.28)$$

factorul de atenuare al curentului cuadripolului considerat.

\* Vezi [20]



Ținând seama de relația (13.28), din prima ecuație (13.27) se deduce expresia impedanței aparentă la intrarea în lanțul de cuadripoli:

$$\underline{Z}_{oi} = \frac{U_o}{I_o} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_d \frac{\underline{Z}_b + \underline{Z}_i}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i} = \underline{Z}_i = \frac{U_i}{I_i} \quad (13.29)$$

intrucit, conform celor arătate, impedanța de intrare în lanțul de cuadripoli este aceeași oricare ar fi celula la care ne oprim. Rezultă dar, că impedanța  $\underline{Z}_i$  nu este altceva, decît impedanța caracteristică a cuadripolului considerat. Expresia ei, în funcție de parametrii acestui cuadripol se deduce din relația (13.29) și este

$$\underline{Z}_i = \frac{+ (\underline{Z}_b - \underline{Z}_d) \pm \sqrt{(\underline{Z}_b - \underline{Z}_d)^2 + 4 [\underline{Z}_a (\underline{Z}_b + \underline{Z}_d) + \underline{Z}_b \underline{Z}_d]}{2} = \underline{Z}_o,$$

relație cunoscută\*.

**13.1.4.2. Repartiția tensiunilor de-a lungul unui lanț de izolatori.** Fie un lanț de izolatori al unei linii de înaltă tensiune format din  $n$  elemente (fig. 13.4, a).

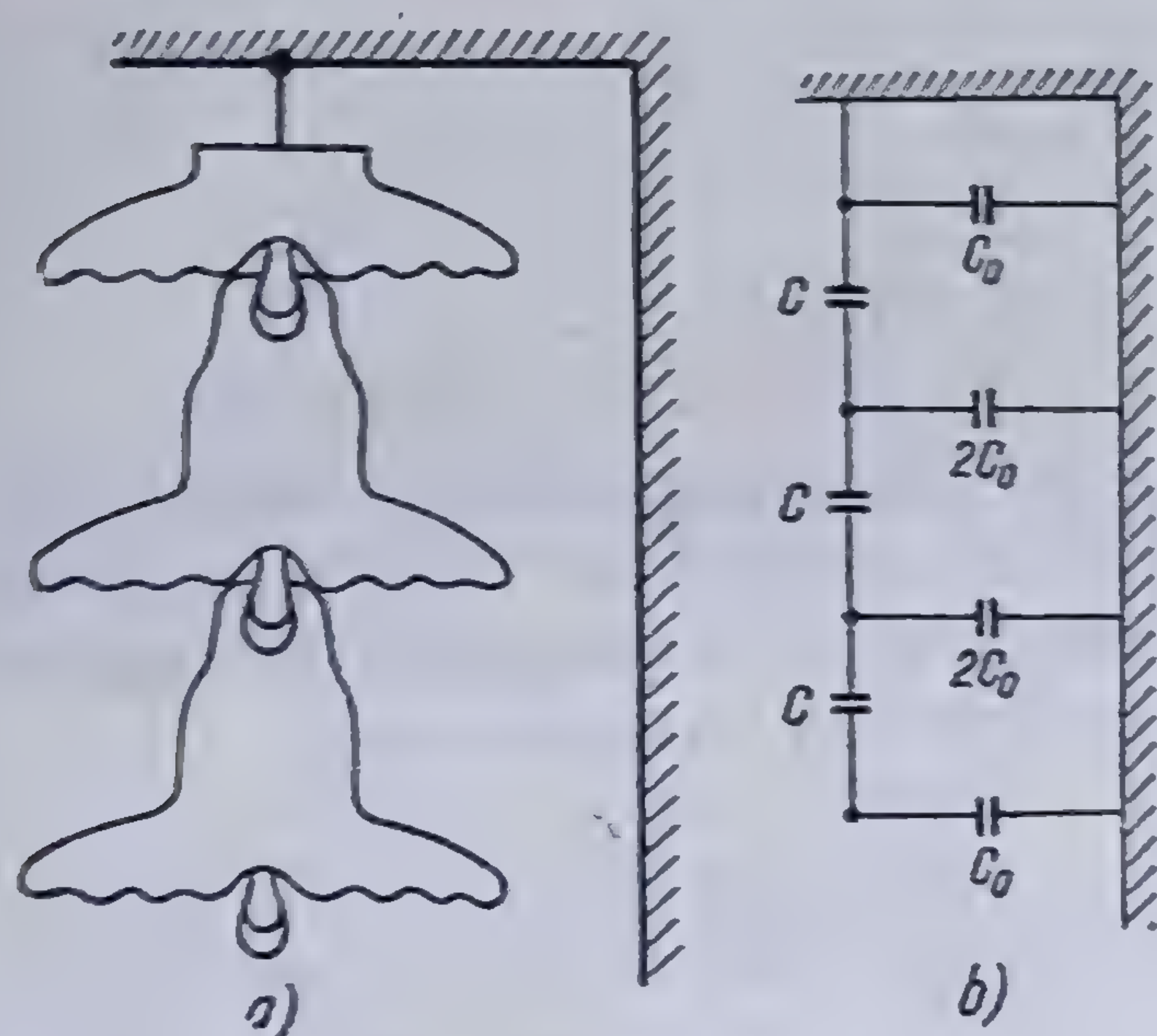


Fig. 13.4. Lanț de izolatori: a) și circuitul electric echivalent b).

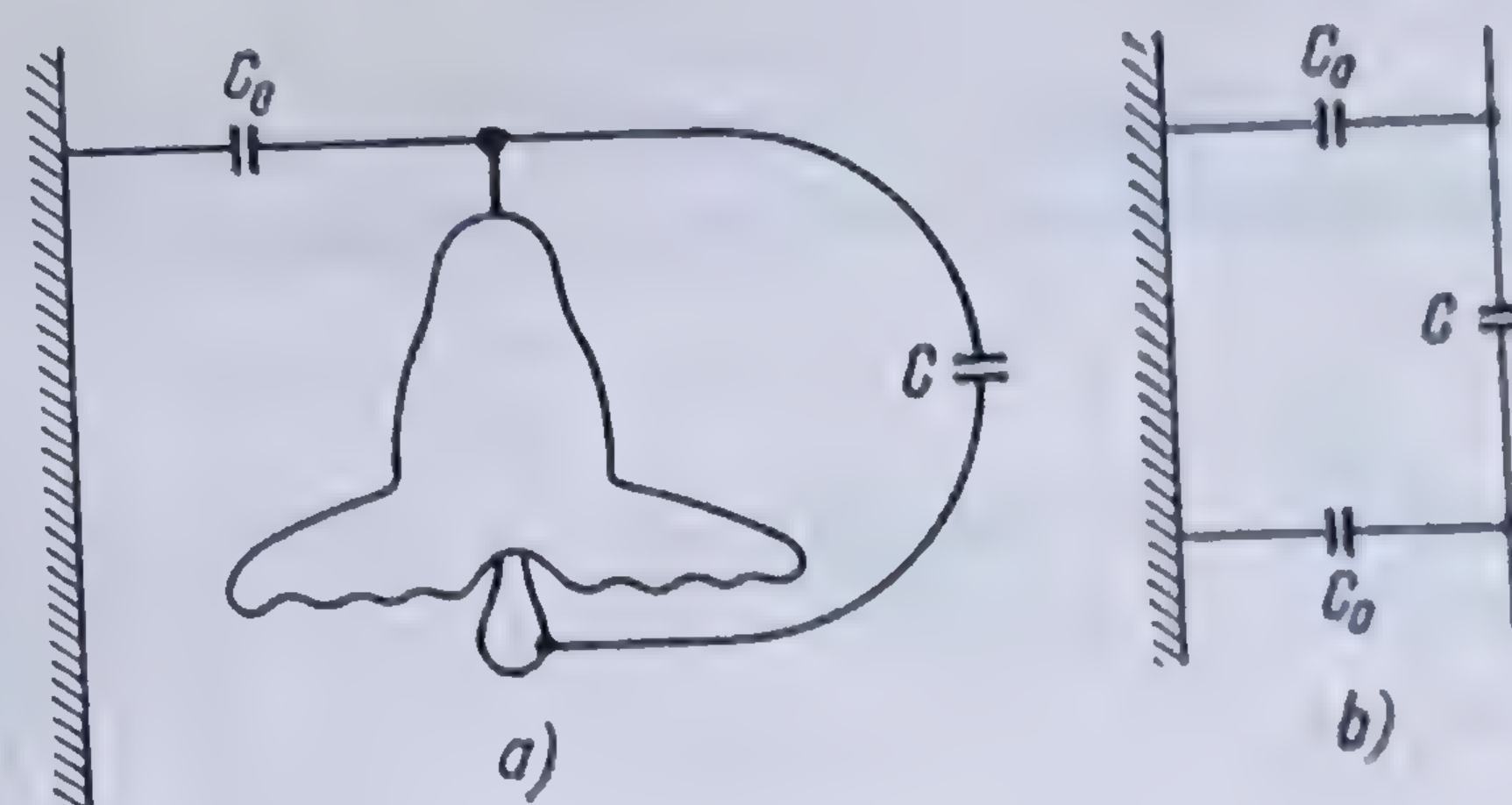


Fig. 13.5. Element de izolator: a) și circuitul său echivalent b).

Fiecare element al acestui lanț de izolatori are o capacitate  $C$  între două arături consecutive și capacitatea  $C_0$  între armătură și stîlp (pămînt) (fig. 13.5, a); pentru fiecare element se poate construi un circuit echivalent sub forma unui cuadripol în  $\pi$  (fig. 13.5, b). Circuitul echivalent al lanțului de izolatori poate fi asemuit cu un lanț de cuadripoli în  $\pi$  (fig. 13.4, b) pentru care

$$\underline{Z} = \frac{1}{j C \omega} \quad \text{și} \quad \underline{Y} = j 2 C_0 \omega.$$

Din relațiile (13.4), ținînd seama de relațiile (13.14) și (13.6), precum și de relația (6.139), rezultă

$$\text{ch } \underline{\gamma} = \text{ch } (\alpha + j\beta) = \frac{\underline{A} + \underline{D}}{2} = 1 + \underline{Y} \underline{Z} = 1 + \frac{2C_0}{C} = \lambda, \quad (13.30)$$

\* Vezi 6.4.4.8., relația (6.131)



$\lambda$  fiind un număr real și mai mare ca 1. Dezvoltînd cosinusul hiperbolic se obține

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta + j \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = \lambda,$$

ecuație care este satisfăcută pentru

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = \lambda; \quad \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0.$$

Din a doua ecuație rezultă  $\operatorname{sh} \alpha = 0$  și  $\sin \beta = 0$ . Prima soluție nu corespunde întrucît în acest caz  $\operatorname{ch} \alpha = 1$  și  $\cos \beta = \lambda > 1$  ceea ce nu este posibil. Luînd  $\sin \beta = 0$ , rezultă  $\cos \beta = 1$  și deci

$$\operatorname{ch} \alpha = \lambda.$$

Luînd  $\beta = 0$ , din relațiile (13.30) rezultă

$$\underline{\gamma} = \alpha.$$

Lanțul de izolatori fiind suspendat de stîlp, tensiunea de intrare în lanțul de cuadripoli este nulă ( $\underline{U}_0 = 0$  și  $m = 0$ ) prima relație (13.5) dă

$$\underline{M}_1 = -\underline{M}_2$$

și deci

$$\underline{U}_m = \underline{M}_1 (\varepsilon^{\underline{\gamma} m} - \varepsilon^{-\underline{\gamma} m}) = 2 \underline{M}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} m.$$

Pe de altă parte, ultimul element al lanțului de izolatori are tensiunea nominală a liniei față de pămînt. Fie  $\underline{U}$  această tensiune; ea este aceeași cu tensiunea de ieșire a lanțului de cuadripoli considerat. Vom avea deci,

$$\underline{U} = 2 \underline{M}_1 \operatorname{sh} \underline{\gamma} n$$

și rezultă

$$\underline{U}_m = \underline{U} \frac{\operatorname{sh} \underline{\gamma} m}{\operatorname{sh} \underline{\gamma} n} = \underline{U} \frac{\operatorname{sh} \alpha m}{\operatorname{sh} \alpha n}, \quad (13.31)$$

care dă distribuția de tensiune în raport cu pămîntul pe armăturile fiecărui izolator al lanțului, parametrul  $\alpha$  fiind determinat prin relația (13.30) cînd se cunoaște raportul capacităților  $\frac{C_0}{C}$ . În figura 13.6 este reprezentată această distribuție de tensiune la un izolator cu  $n = 10$  elemente și pentru raportul capacităților  $\frac{C_0}{C} = 0; 0,025; 0,05; 0,25$ .

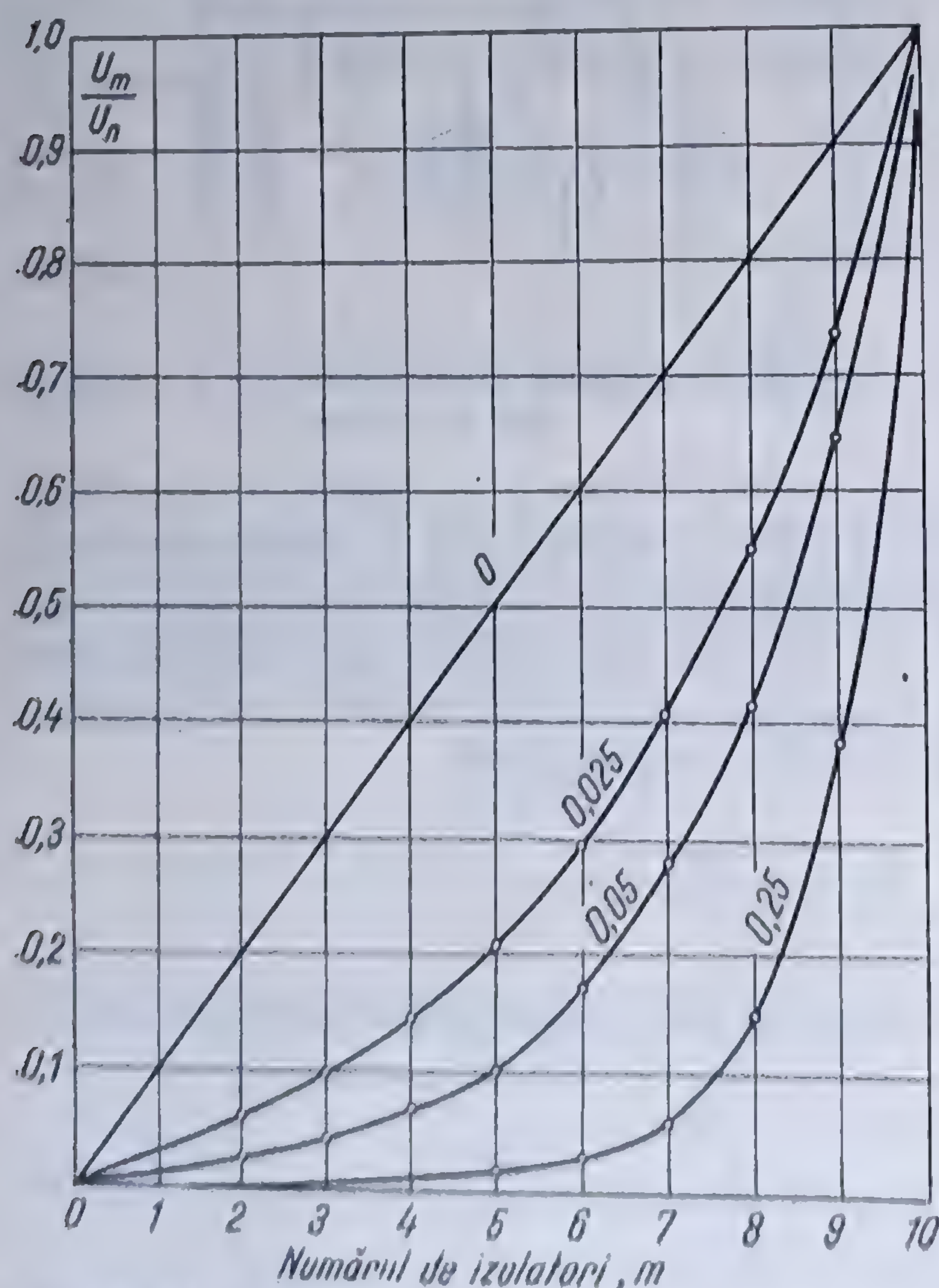


Fig. 13.6. Repartiția tensiunii pe un lanț de izolatori.

Rezultă din această diagramă că, cu



oit raportul  $\frac{C_0}{C}$  este mai mic cu atît distribuția tensiunii pe lanțul de izolatori se apropie mai mult de o dreaptă.

Diferența de potențial aplicată unui element al lanțului de izolatori este

$$\Delta U_m = U_m - U_{m-1} = \frac{U}{\text{sh } \alpha_n} [\text{sh } \alpha m - \text{sh } \alpha (m-1)],$$

numărătoarea făcîndu-se de sus în jos. Pentru ultimul izolator ( $m = n$ ) se obține

$$\Delta U_m = U \left[ 1 - \frac{\text{sh } \alpha (n-1)}{\text{sh } \alpha n} \right]. \quad (13.32)$$

Pentru izolatoare foarte lungi ( $n \gg 1$ ) se poate lua  $\text{sh } \alpha n = \frac{1}{2} e^{\alpha n}$  și relația (4.125) devine

$$\frac{\Delta U_m}{U} = 1 - e^{-\alpha},$$

de unde rezultă, că diferența de potențial la care este supus ultimul izolator este independentă de numărul elementelor lanțului de izolatori; în consecință, este inutil a mări numărul elementelor unui lanț de izolatori peste o anumită limită compatibilă cu buna funcționare a liniei.

**13.1.4.3. Linie electrică defectă.** Să considerăm o linie de înaltă tensiune prevăzută cu un conductor de gardă (fig. 13.7). La un moment dat, dintr-un motiv oarecare (trăznet, punere la pămînt a unei faze etc.), din cauza capacității liniei, sau din cauza altor legături, apare un curent de scurgere la pămînt prin stîlp. Din cauza rezistenței mari de punere la pămînt a stîlpului,  $R_s$ , poate să apară la baza stîlpului o tensiune mare. Din cauza prezenței conductorului de gardă, prin care se poate scurge în ambele părți ale liniei o parte din curentul de punere la pămînt, această tensiune este mult redusă. Căile de curent constituie un circuit lanț, sub forma unui cuadripol în  $T$ , care are impedanțele longitudinale  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R_0$  (rezistența conductorului de gardă între doi stîlpi) și impedanța transversală  $\frac{1}{Y} = R_s$ . Dacă linia este lungă\*, atunci schema echi-



Fig. 13.7. Linie electrică cu fir conductor de gardă.

valentă a punctului de pătrundere a curentului în stîlp este aceea din figura 13.8. Relația (6.137) ne dă imediat valoarea impedanței caracteristice. Linia

\* Înlocuită printr-un lanț de cuadripoli.



fiind considerată ca fiind formată din cuadripoli în  $T$ , pentru care  $\underline{C} = \underline{Y}$ ,  
 $\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}$ , se obține

$$\underline{Z}'_c = \underline{Z}'_s = \sqrt{R_c R_s} \sqrt{2 + \frac{R_c}{R_s}}. \quad (13.33)$$

Tensiune a stîlpului față de pămînt este

$$U = \frac{1}{2} Z'_c I;$$

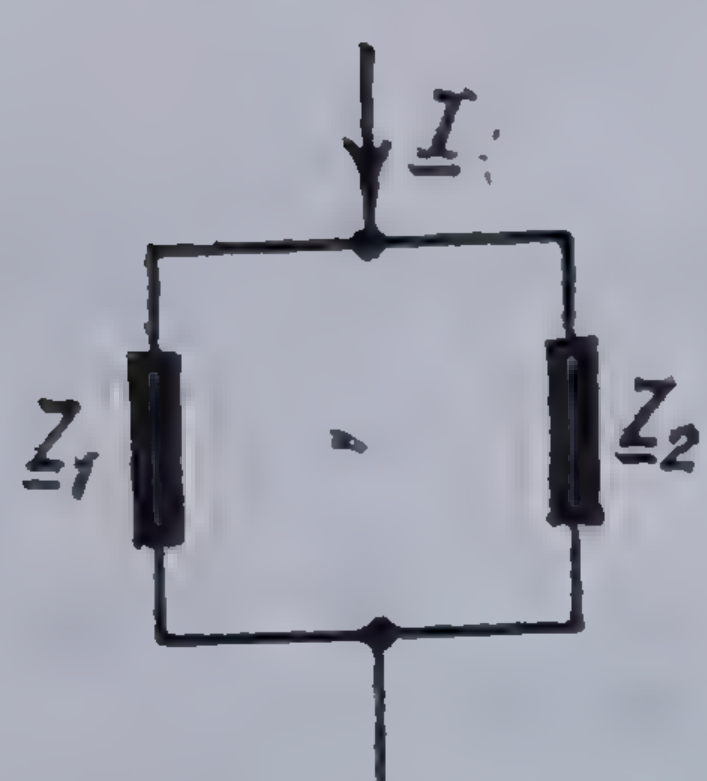


Fig. 13.8. Circuitul echivalent la locul defectului.

prin stîlp trece curentul

$$I_s = \frac{U}{R_s}$$

iar prin conductorul de gardă se scurge, în fiecare parte, curentul  $I_c = \frac{1}{2} (I - I_s)$ .

Pentru a ne da seama de efectul conductorului de gardă, să examinăm următorul exemplu numeric:\*  $R_c = 1\Omega$ ,  $R_s = 20\Omega$ ,  $I = 100$  A. Din relația (13.33) rezultă

$$Z'_c = \sqrt{20} \sqrt{2 + \frac{1}{20}} = 6,4 \Omega.$$

Avem apoi,

$$U = \frac{1}{2} I Z'_c = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 6,4 = 320 \text{ V}.$$

Fără fir de gardă, tensiunea stîlpului față de pămînt este

$$R_s I = 20 \times 100 = 2000 \text{ V}.$$

Din cauza conductorului de gardă, prin stîlp se va scurge numai curentul

$$I_s = \frac{U}{R_s} = \frac{320}{20} = 16 \text{ A};$$

firul de gardă conduce în cele două părți curenți egali cu

$$\frac{1}{2} (I - I_s) = 42 \text{ A}.$$

\* Vezi [161] pag. 419.



## 13.2. LANTURI DE CUADRIPOLI FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TRANZITORIU

### 13.2.1. ECUAȚIILE UNUI LANȚ DE CUADRIPOLI FUNCȚIONÎND ÎN REGIM TRANZITORIU

În cazul cuadripolilor pasivi și liniari, dacă condițiile inițiale ale variabilelor — curenți și tensiuni — sînt nule, atunci ecuațiile generale ale cuadripolilor la funcționarea în regim tranzitoriu au aceeași structură ca și în cazul funcționării în regim permanent. Ele se obțin aplicînd transformarea lui LAPLACE (10.30) ecuațiilor generale ale cuadripolului (6.103). Se găsește astfel

$$\mathcal{L}u_1 = A\mathcal{L}u_2 + B\mathcal{L}i_2,$$

$$\mathcal{L}i_1 = C\mathcal{L}u_2 + D\mathcal{L}i_2,$$

între coeficienții acestui cuadripol existînd evident relația de legătură (6.104)

$$AD - BC = 1.$$

Pentru un lanț de cuadripoli, pasiv, liniar și omogen, ecuațiile cuadripolului de rangul  $m$  din structură vor avea forma

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_{m-1} &= A\mathcal{L}u_m + B\mathcal{L}i_m, \\ \mathcal{L}i_{m-1} &= C\mathcal{L}u_m + D\mathcal{L}i_m, \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

notațiile fiind aceleași ca în cazul regimului permanent\*. Ecuațiile (13.34) avînd aceeași structură ca și ecuațiile (13.1) din cazul regimului permanent, rezolvarea lor se va face în același mod ca și în cazul regimului permanent. Se va găsi astfel :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \left( \operatorname{ch} m\gamma + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \right) \mathcal{L}u_0 - \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}i_0, \\ \mathcal{L}i_m &= -\frac{2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}u_0 + \left( \operatorname{ch} m\gamma - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \right) \mathcal{L}i_0. \end{aligned} \right\} \quad (13.35)$$

Scriînd acum mărimile de intrare în funcție de mărimile de ieșire, ecuațiile (13.35) devin

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_0 &= \left( \operatorname{ch} m\gamma - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \right) \mathcal{L}u_m + \frac{2Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}i_0, \\ \mathcal{L}i_0 &= \frac{2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \cdot \mathcal{L}u_m + \left( \operatorname{ch} m\gamma + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \operatorname{sh} m\gamma \right) \mathcal{L}i_0. \end{aligned} \right\} \quad (13.36)$$

\* Vezi p. 13.1.2.1.



În cazul unui lanț de cuadripoli care este omogen și simetric, ecuațiile (13.35) și (13.36) devin

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \mathcal{L}u_0 \operatorname{ch} m\gamma - Z_c \mathcal{L}i \operatorname{sh} m\gamma, \\ \mathcal{L}i_m &= -\frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c} \operatorname{sh} m\gamma + \mathcal{L}i_0 \operatorname{ch} m\gamma \end{aligned} \right\} \quad (13.37)$$

și

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_0 &= \mathcal{L}u_m \operatorname{ch} m\gamma + Z_c \mathcal{L}i_0 \operatorname{sh} m\gamma, \\ \mathcal{L}i_0 &= \frac{\mathcal{L}u_m}{Z_c} \operatorname{sh} m\gamma + \mathcal{L}i_0 \operatorname{ch} m\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

Trebuie să observăm, că în toate relațiile scrise în acest paragraf mărimile respective sînt scrise *operațional*, adică de forma\*

$$a + sb,$$

în care  $a$  și  $b$  sînt numere reale, iar  $s = \sigma + j\omega$ , cu condiția  $\Re(s) > 0$ .

### 13.2.2. CAZURI PARTICULARE

13.2.2.1. Lanț de cuadripoli cuplat la ieșire pe o impedanță  $Z(s)$ . Pentru simplificare, să considerăm ecuațiile (13.37) de funcționare ale unui lanț de cuadripoli pasivi, omogen și simetric și să presupunem că la ieșire el are legată o impedanță oarecare  $Z(s)$ . În acest caz

$$\mathcal{L}u_m = Z(s) \mathcal{L}i_n$$

și ecuațiile (13.37) dau

$$\mathcal{L}u_0 \operatorname{ch} n\gamma - Z_c \mathcal{L}i_0 \operatorname{sh} n\gamma = -\frac{Z(s)}{Z_c} \mathcal{L}u_0 \operatorname{sh} n\gamma + Z(s) \mathcal{L}i_0 \operatorname{ch} n\gamma.$$

de unde rezultă

$$\mathcal{L}i_0 = \frac{Z_c \operatorname{ch} n\gamma + Z(s) \operatorname{sh} n\gamma}{Z(s) \operatorname{ch} n\gamma + Z_c \operatorname{sh} n\gamma} \cdot \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c}.$$

Introducînd această valoare în ecuațiile (13.37), după efectuarea unor calcule elementare se obține

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \frac{Z(s) \operatorname{sh} (n-m)\gamma + Z_c \operatorname{sh} (n-m)\gamma}{Z(s) \operatorname{ch} n\gamma + Z_c \operatorname{sh} n\gamma} \cdot \mathcal{L}u_0, \\ \mathcal{L}i_m &= \frac{Z(s) \operatorname{sh} (n-m)\gamma + Z_c \operatorname{ch} (n-m)\gamma}{Z(s) \operatorname{ch} n\gamma + Z_c \operatorname{sh} n\gamma} \cdot \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (13.39)$$

\* Vezi 10.4.1.



Ecuatiile (13.39) sînt suficiente pentru rezolvarea oricărei probleme de regim tranzitoriu în funcționarea unui lanț de cuadripoli pasivi, simetric și omogen, obținîndu-se răspunsul la bornele de ieșire ale cuadripolului de rangul  $m$  din lanț, atunci cînd la bornele de intrare în lanț se aplică un semnal  $u_0$  oarecare.

**13.2.2.2. Lanț de cuadripoli în gol la ieșire, căruia i se aplică la intrare o tensiune oarecare.** Considerînd tot cazul lanțului de cuadripoli pasiv, omogen și simetric, făcînd în relațiile (13.39)

$$Z(s) = \infty$$

se obține :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \frac{\text{ch}(n-m)\gamma}{\text{ch } n\gamma} \mathcal{L}u_0, \\ \mathcal{L}i_m &= \frac{\text{sh}(n-m)\gamma}{\text{ch } n\gamma} \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (13.40)$$

În particular, la ieșirea din lanțul de cuadripoli,  $m=n$ , vom avea

$$\mathcal{L}u_n = \frac{\mathcal{L}u_0}{\text{ch } n\gamma} \quad \text{și} \quad \mathcal{L}i_n = 0.$$

**13.2.2.3. Lanț de cuadripoli în scurtcircuit la ieșire, căruia i se aplică la intrare o tensiune oarecare.** Pentru lanțul de cuadripoli pasiv, simetric și omogen, din ecuațiile (13.39), în care se face de data aceasta

$$Z(s) = 0,$$

se obține

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \frac{\text{sh}(n-m)\gamma}{\text{sh } n\gamma} \mathcal{L}u_0, \\ \mathcal{L}i_m &= \frac{\text{ch}(n-m)\gamma}{\text{sh } n\gamma} \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (13.41)$$

La ieșirea din lanțul de cuadripoli,  $m=n$ , se obține

$$\mathcal{L}u_n = 0 \quad \text{și} \quad \mathcal{L}i_n = \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c \text{sh } n\gamma},$$

ceea ce verifică ipoteza făcută.

**13.2.2.4. Lanț de cuadripoli cuplat la ieșire pe impedanța sa caracteristică și căruia i se aplică la intrare o tensiune oarecare.** Considerînd același lanț de cuadripoli, simetric și omogen, dacă în ecuațiile (13.39) se face

$$Z(s) = Z_c,$$



ecuațiile respective devin

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u_m &= \frac{\mathcal{L}u_0}{\operatorname{ch} m\gamma + \operatorname{sh} m\gamma} = \mathcal{L}u_0 \varepsilon^{-m\gamma} \\ \mathcal{L}i_m &= \frac{1}{\operatorname{ch} m\gamma + \operatorname{sh} m\gamma} \cdot \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c} = \frac{\mathcal{L}u_0}{Z_c} \varepsilon^{-m\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (13.42)$$

Trebuie să observăm că și în regimul tranzitoriu

$$\frac{\mathcal{L}u_m}{\mathcal{L}i_m} = Z_c,$$

ca și în cazul regimului permanent și că, și în acest caz, nu există undă reflectată.

### 1.3.2.3. EXEMPLE DE APLICAȚIE

13.2.3.1. Aplicarea unei tensiuni treaptă la bornele unui lanț de cuadripoli, omogen și simetric, format din impedanțe fără pierderi și cuplat la ieșire pe o impedanță neinductivă. Pentru a arăta modul de rezolvare a regimului tranzitoriu de funcționare a unui lanț de cuadripoli, se va considera cazul simplu a unui lanț de cuadripoli identici, fiecare format dintr-o bobină de inductanță  $L$  și un condensator de capacitate  $C$  (fig. 13.9). Acest lanț de cuadripoli este cuplat la ieșire pe o

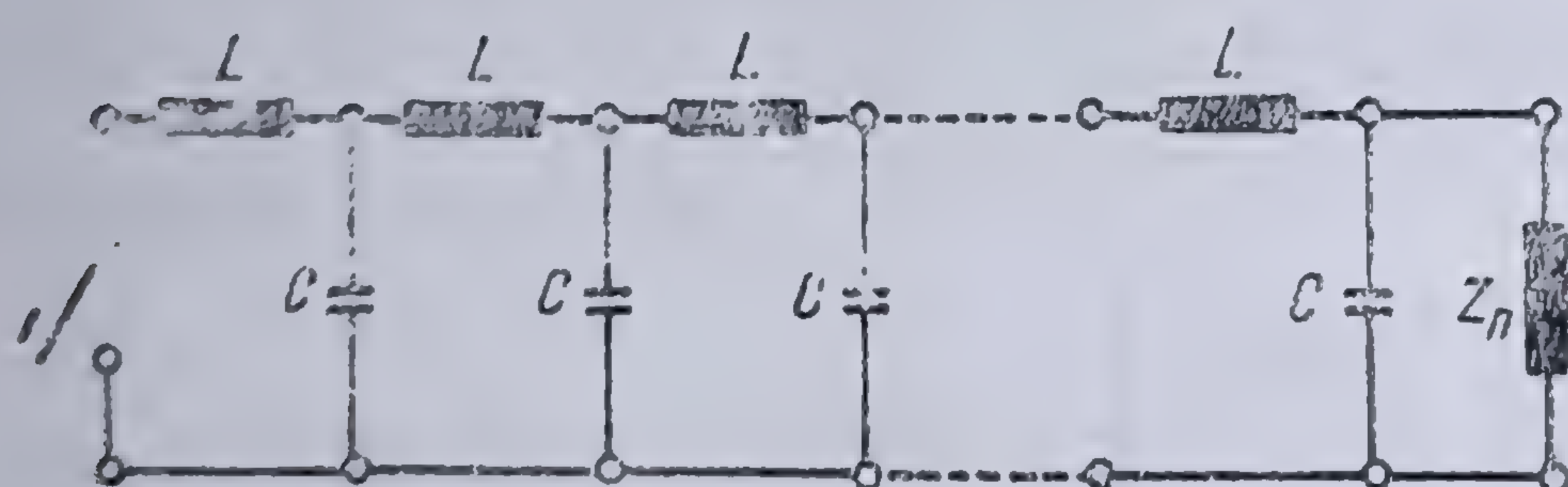


Fig. 13.9. Lanț de cuadripoli nedisipativ.

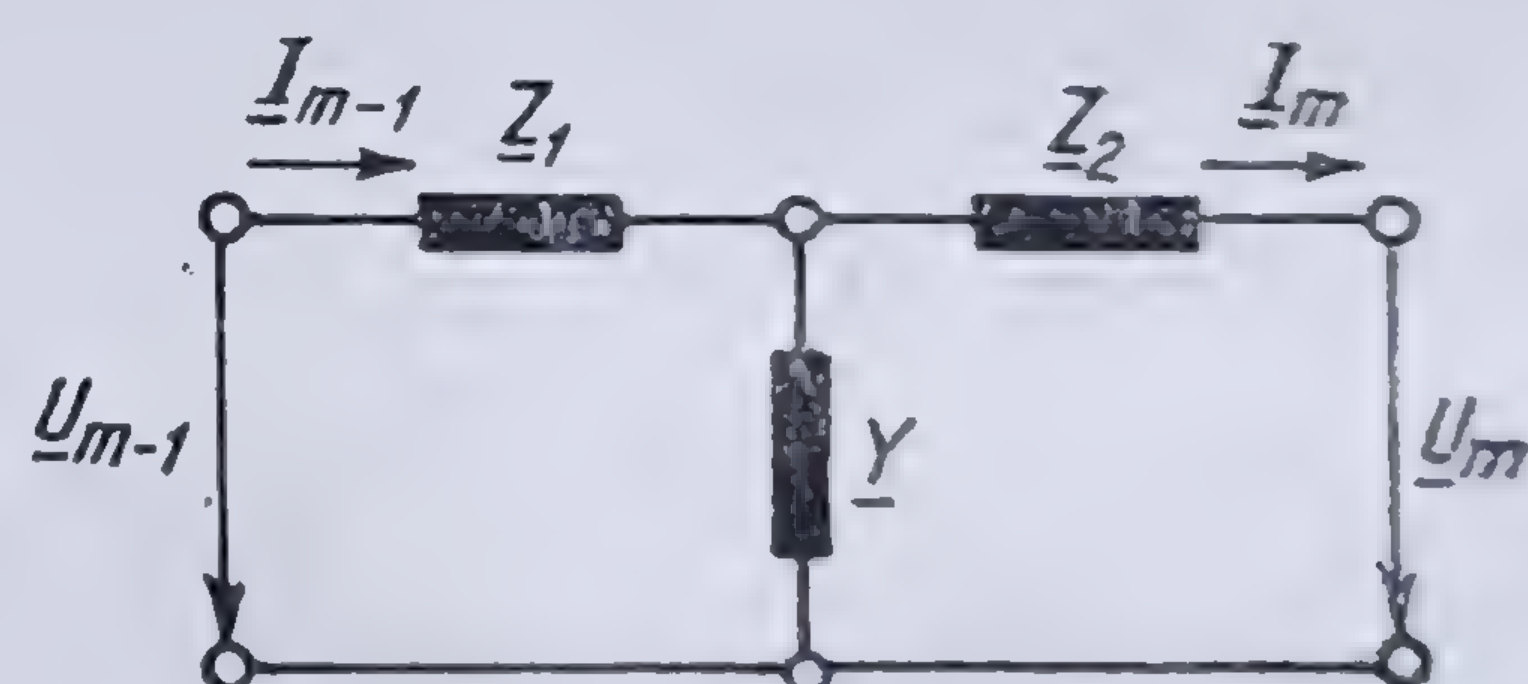


Fig. 13.10. Circuitul echivalent în  $T$  a unui cuadripol gama întors.

impedanță neinductivă  $Z_n$  și la timpul  $t=0$  i se aplică tensiunea constantă  $E$ . Se presupune că la timpul  $t=0$ , valorile inițiale ale curentului și tensiunii sînt nule\*. Ne propunem să găsim expresia tensiunii și curentului la bornele de ieșire ale cuadripolului de rangul  $m$ , respectiv la extremitatea de ieșire a lanțului.

Fiecare celulă din lanțul de cuadripoli poate fi înlocuită cu un cuadripol în  $T$ , nesimetric (fig. 13.10) pentru care

$$Z_1 = sL, \quad Z_2 = 0, \quad Y = sC,$$

\* Cazul particular studiat nu restringe generalitatea problemei — metoda de urmat fiind aceeași; se simplifică numai calculele.



astfel încît, parametrii cuadripolului sînt\* :

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 + Z_1 Y = 1 + s^2 LC, \\ B &= Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y = sL, \\ C &= Y = sC, \\ D &= 1 + Z_2 Y = 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.43)$$

Ținînd seama că, în condițiile problemei expresia imaginii tensiunii este de forma

$$\mathcal{L}u_m = \frac{V(s)}{s W'(s)},$$

originalul căutat este dat de a doua teoremă a dezvoltării lui HEAVISIDE\*\*

$$u_m = \frac{V(0)}{W(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)} \varepsilon^{s_i t}. \quad (10.72)$$

În cazul problemei studiate

$$V(s) = [Z_n \operatorname{ch}(n - m)\gamma + Z_c \operatorname{sh}(n - m)\gamma] E,$$

$$W(s) = Z_n \operatorname{ch} n\gamma + Z_c \operatorname{sh} n\gamma,$$

$$\gamma = f(s),$$

$$W'(s) = n(Z_n \operatorname{sh} n\gamma + Z_c \operatorname{ch} n\gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial s}.$$

Din relația (13.6), ținînd seama de relațiile (13.43), rezultă

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + \frac{1}{2} s^2 LC. \quad (13.44)$$

În consecință, pentru  $s = 0$ ,  $\operatorname{ch} \gamma = 1$  și deci  $\gamma = 0$ , astfel că

$$V(0) = Z_n E \text{ și } W(0) = Z_n;$$

rezultă

$$\frac{V(0)}{W(0)} = E.$$

Să găsim acum rădăcinile ecuației

$$Z_n \operatorname{ch} n\gamma + Z_c \operatorname{sh} n\gamma = 0$$

\* Vezi 6.4.4.9.

\*\* Vezi 10.4.4.5.



sau

$$\operatorname{th} n\gamma = -\frac{Z_n}{Z_c}.$$

Punînd

$$\frac{Z_n}{Z_c} j \operatorname{tg} \xi \quad \left( j = 1 \left| \frac{\pi}{2} = \sqrt{-1} \right. \right) \quad (13.45)$$

se obține

$$\frac{1}{j} \operatorname{tg} j n \gamma = -j \operatorname{tg} \xi$$

sau

$$\operatorname{tg} j n \gamma = \operatorname{tg} \xi,$$

de unde, rezultă

$$\gamma_i = -j \left( \frac{\xi}{r} + \frac{i\pi}{n} \right) = j \left( \frac{i\pi}{n} - \frac{\xi}{n} \right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Introducînd această valoare în relația (13.44) se obține

$$\operatorname{ch} \left[ j \left( \frac{i\pi}{n} - \frac{\xi}{n} \right) \right] = \cos \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right) = 1 + \frac{1}{2} s_i^2 LC,$$

de unde, rezultă

$$s_i^2 = \frac{2}{LC} \left[ \cos \left( \frac{i\pi}{n} - \frac{\xi}{n} \right) - 1 \right] = -\frac{4}{LC} \sin^2 \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right)$$

și deci

$$s_i = \pm j \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right). \quad (13.46)$$

Este ușor de văzut că suma din formula lui HEAVISIDE trebuie făcută pentru valorile lui  $i \in (-\infty, \infty)$ , însă nu toate aceste valori dau soluții distincte. Într-adevăr, pentru  $\pm i$  se obțin aceleași valori pentru  $s_i^2$ . De asemenea, există valori ale lui  $i$  pentru care valorile lui  $s_i^2$  încep să se repete; pentru aceasta trebuie ca

$$\sin^2 \left( \frac{i+r}{2n} \pi + \frac{\xi}{2n} \right) = \sin^2 \left( \frac{i-r}{2n} \pi + \frac{\xi}{2n} \right) \quad (13.47)$$

ceea ce are loc pentru\*

$$r = 2n.$$

---

\* Într-adevăr, din relația (13.47) rezultă

$$-\frac{i+r}{2n} \pi + \frac{\xi}{2n} - \left( \frac{i-r}{2n} \pi + \frac{\xi}{2n} \right) = 2\pi$$

de unde  $r=2n$ .



Ținând seama de cele ce preced, se poate scrie

$$u_m = \frac{V(0)}{W(0)} + \sum_{i=0}^n \frac{V(s_i)}{s_i W(s_i)} \varepsilon^{s_i t} + \sum_{i=0}^n \frac{V(-s_i)}{-s_i W(-s_i)} \varepsilon^{-s_i t}. \quad (13.48)$$

Avem apoi

$$\begin{aligned} V(s_i) &= [Z_n \operatorname{ch}(n-m)\gamma + Z_c \operatorname{sh}(n-m)\gamma] E = \\ &= \left[ Z_n \operatorname{ch}(n-m) j \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right) + Z_c \operatorname{sh}(n-m) \left[ -j \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right) \right] \right] E = \\ &= \left[ Z_n \cos \frac{n-m}{n} (i\pi + \xi) - j Z_c \sin \frac{n-m}{n} (i\pi + \xi) \right] E \end{aligned}$$

și

$$V(s_i) = V(-s_i);$$

într-adevăr, dacă ținem seama de expresia (13.46) a rădăcinilor lui  $s_i$ , notînd cu  $s'_i$  rădăcina cu semnul plus și cu  $s''_i$  rădăcina cu semnul minus, atunci

$$s_i = s'_i \quad \text{și} \quad -s_i = s''_i.$$

Din relația (13.44) se deduce

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{s LC}{\operatorname{sh} \gamma}$$

și deci

$$W'(s) = n LC s \left( Z_n \frac{\operatorname{sh} n\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} + Z_c \frac{\operatorname{ch} n\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \right).$$

Însă

$$\operatorname{sh} n\gamma = \operatorname{sh} \left[ -j \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right) n \right] = -j \sin(i\pi + \xi),$$

$$\operatorname{ch} n\gamma = \operatorname{ch} \left[ -j \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right) n \right] = \cos(i\pi + \xi),$$

$$\operatorname{sh} \gamma = \operatorname{sh} \left[ -j \left( \frac{i\pi}{n} + \frac{\xi}{n} \right) \right] = -j \sin \frac{i\pi + \xi}{n}.$$

Rezultă :

$$s_i W'(s_i) = n LC s_i^2 \left[ Z_n \frac{\sin(i\pi + \xi)}{\sin \frac{i\pi + \xi}{n}} + j Z_c \frac{\cos(i\pi + \xi)}{\sin \frac{i\pi + \xi}{n}} \right]$$



și este evident

$$sW'(s) = -sW'(-s).$$

În consecință, relația (13.48) devine

$$u_m = \frac{V(0)}{W(0)} + 2 \sum_{i=0}^n \frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)} \operatorname{ch} s_i t.$$

Vom avea apoi,

$$\frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)} = -\frac{E}{n} \cdot \frac{Z_n \cos \frac{n-m}{n} (i\pi + \xi) - j Z_c \sin \frac{n-m}{n} (i\pi + \xi)}{4 \sin^2 \frac{i\pi + \xi}{2n} [Z_n \sin (i\pi + \xi) + j Z_c \cos (i\pi + \xi)]}.$$

Această relație se mai poate simplifica; într-adevăr, după efectuarea unor calcule simple avem

$$\frac{4 \sin \frac{i\pi + \xi}{2n}}{\sin \frac{i\pi + \xi}{n}} = 2 \operatorname{tg} \frac{i\pi + \xi}{2n},$$

$$\begin{aligned} Z_n \cos \frac{n-m}{n} (i\pi + \xi) - j Z_c \sin \frac{n-m}{n} (i\pi + \xi) &= \\ &= j \frac{Z_c}{\cos \xi} \cos \left( \frac{n-m}{n} i\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n} \xi \right). \end{aligned}$$

$$Z_n \sin (i\pi + \xi) + j Z_c \cos (i\pi + \xi) = (-1)^i j \frac{Z_c}{\cos \xi},$$

astfel, că se obține

$$\frac{V(s_i)}{s_i W'(s_i)} = -\frac{E}{n} (-1)^i \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{i\pi + \xi}{2n} \cos \left( \frac{n-m}{n} \cdot i\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n} \xi \right).$$

Punînd acum

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{i\pi + \xi}{2n},$$

rezultă

$$\operatorname{ch} s_i t = \operatorname{ch} j \Omega_i t = \cos \Omega_i t.$$

În consecință, expresia căutată a tensiunii este

$$u_m = E \left[ 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \operatorname{ctg} \frac{i\pi + \xi}{2n} \cos \left( \frac{n-m}{n} \cdot i\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{m}{n} \xi \right) \cos \Omega_i t \right]. \quad (13.49)$$



13.2.3.2. Cazuri particulare. 1. Lanț de cuadripoli funcționând în gol la ieșire. În acest caz  $Z_n = \infty$  și din relația (13.45) rezultă  $\operatorname{tg} \xi = \infty$  și deci  $\xi = \frac{\pi}{2}$ . Relația (13.49) devine astfel

$$U_m = E \left[ 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \operatorname{ctg} \frac{2i+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{n-m}{n} (2i+1) \frac{\pi}{4} \cos \Omega_i t \right]$$

în care

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{2i+1}{n} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

La extremitatea lanțului de cuadripoli,  $m = n$ , expresia tensiunii de ieșire este

$$U_n = E \left[ 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \operatorname{ctg} \left( \frac{2i+1}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \right) \cos \Omega_i t \right].$$

În figura 13.11 au fost date curbele de variație a tensiunii la extremitatea unui lanț de cuadripoli, care modelează o linie de

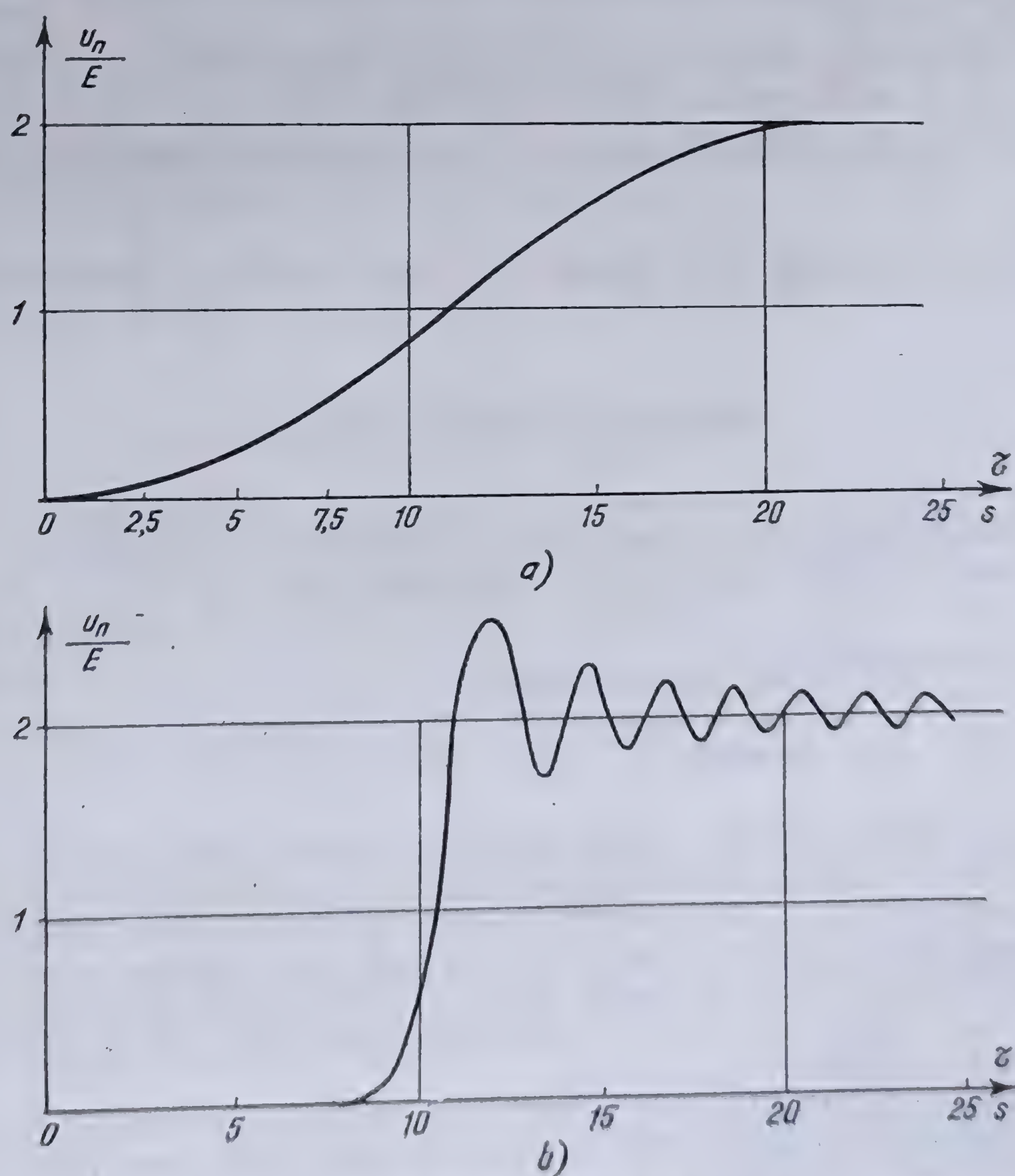


Fig. 13.11. Variația tensiunii la bornele de ieșire ale unui lanț de cuadripoli, la un semnal treaptă: a) pentru  $n = 1$ ; b) pentru  $n = 2$ .



1000 km, de 400 kV, căreia i se aplică la intrare o tensiune treaptă  $E = 10^6 \text{V}$ , linia fiind în gol\*.

Este ușor de văzut că se ajungea la același rezultat, dacă se căuta originalul primei expresii din relațiile (13.40).

2. Lanț de cuadripoli funcționând în scurtcircuit la ieșire. În acest caz,  $Z_n = 0$ ,  $\text{tg } \xi = 0$  și rezultă  $\xi = 0$ . Relația (13.49) devine

$$U_m = E \left[ 1 - \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ctg} \frac{i\pi}{2n} \sin \frac{im\pi}{n} \cos \Omega_i t \right],$$

în care,

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{4i+1}{n} \cdot \frac{\pi}{8}$$

și deoarece

$$\frac{V(0)}{W(0)} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} E \frac{\text{sh}(n-m)}{\text{sh } n\gamma} = \left( 1 - \frac{m}{n} \right) E.$$

Rezultatul se poate obține direct, dacă se caută originalul primei expresii din relațiile (13.41).

Se verifică ușor că, la ieșirea din lanțul de cuadripoli,  $m = n$  și  $U_n = 0$ .

3. Lanț de cuadripoli cuplat pe impedanța sa caracteristică la ieșire. Făcînd  $Z_n = Z_c$ , din relația (13.45) rezultă  $\xi = \frac{\pi}{4}$ ; în acest caz, relația (13.49) se scrie

$$U_m = E \left[ 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \text{ctg} \left( \frac{4i+1}{n} \right) \cos \left[ \frac{n-m}{n} (4i+1) \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] \cos \Omega_i t, \right]$$

în care

$$\Omega_i = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin \frac{4i+1}{n} \cdot \frac{\pi}{8}.$$

**OBSERVAȚIE.** În același mod se calculează și originalul curenților; lăsăm în seama cititorului să facă aceste exerciții.

### 13.3 FILTRE DE FRECVENȚĂ

#### 13.3.1. DEFINIȚII

**13.3.1.1. Filtru electric ideal.** Un filtru electric ideal (sau teoretic) este un circuit electric format dintr-un cuadripol pasiv, fără pierderi, (sau dintr-un lanț de cuadripoli pasivi, fără pierderi) căruia aplicîndu-i-se la intrare o tensiune  $u_1$ , în general nesinusoidală, lasă să treacă fără să le atenueze anumite frecvențe aparținînd la anumite benzi, numite benzi de trecere, și atenuează, mai mult sau mai puțin, frecvențele aparținînd celorlalte benzi ale spectrului, numite benzi atenuate sau oprite.

În consecință, un filtru este ideal, dacă curba reprezentînd variațiile tensiunii  $u_2$ , la ieșirea din filtru, în funcție de frecvența  $f$  are forma arătată în figura 13.12.

\* Vezi [21].



Frecvențele  $f_1$  și  $f_2$  se numesc frecvențele de tăiere; în general  $f_1 < f_2$ . Dacă  $f_1 = 0$ , filtrul se numește *trece jos*; dacă  $f_2 \rightarrow \infty$ , filtru se numește *trece sus*; dacă  $f_1 \neq 0$  și  $f_2 \neq \infty$ , filtrul se numește *trece bandă*; un filtru trece jos combinat într-un anumit mod cu un filtru trece sus, realizează un filtru *oprește bandă*.

**13.3.1.2. Filtru electric real.** Un filtru electric real sau un filtru de frecvență real este un circuit electric format dintr-un cuadripol pasiv (sau dintr-un lanț de cuadripoli pasivi) căruia, aplicându-i-se la intrare o tensiune nesinusoidală  $u_1$ , lasă să treacă cu o slabă atenuare undele avînd o anumită frecvență și atenuează foarte mult undele a căror frecvență aparține restului spectrului de frecvență al undei de tensiune.

În cazul unui filtru electric real, nu se poate realiza niciodată curba ideală din figura 13.12. Pentru a se obține o curbă cît mai apropiată de cea ideală se fac diverse combinații de circuite electrice. Există astfel, o mare diversitate de filtre electrice reale, în raport cu problema ce trebuie rezolvată.

Filtrele electrice reale pot fi clasificate în două mari grupe:

a) *Filtre multicelulare pur reactive* sau filtre compuse dintr-un anumit număr de celule sau semicelule simple, cuplate în lanț, ansamblul acestor celule permițînd obținerea unei curbe de răspuns cît mai apropiate de curba de răspuns ideală.

b) *Filtre electrice diverse* sau filtre bazate pe proprietăți sau pe structuri speciale, studiul fiecărui tip fiind cu totul aparte (filtre CAUER, filtre cu cuarț etc.) \*.

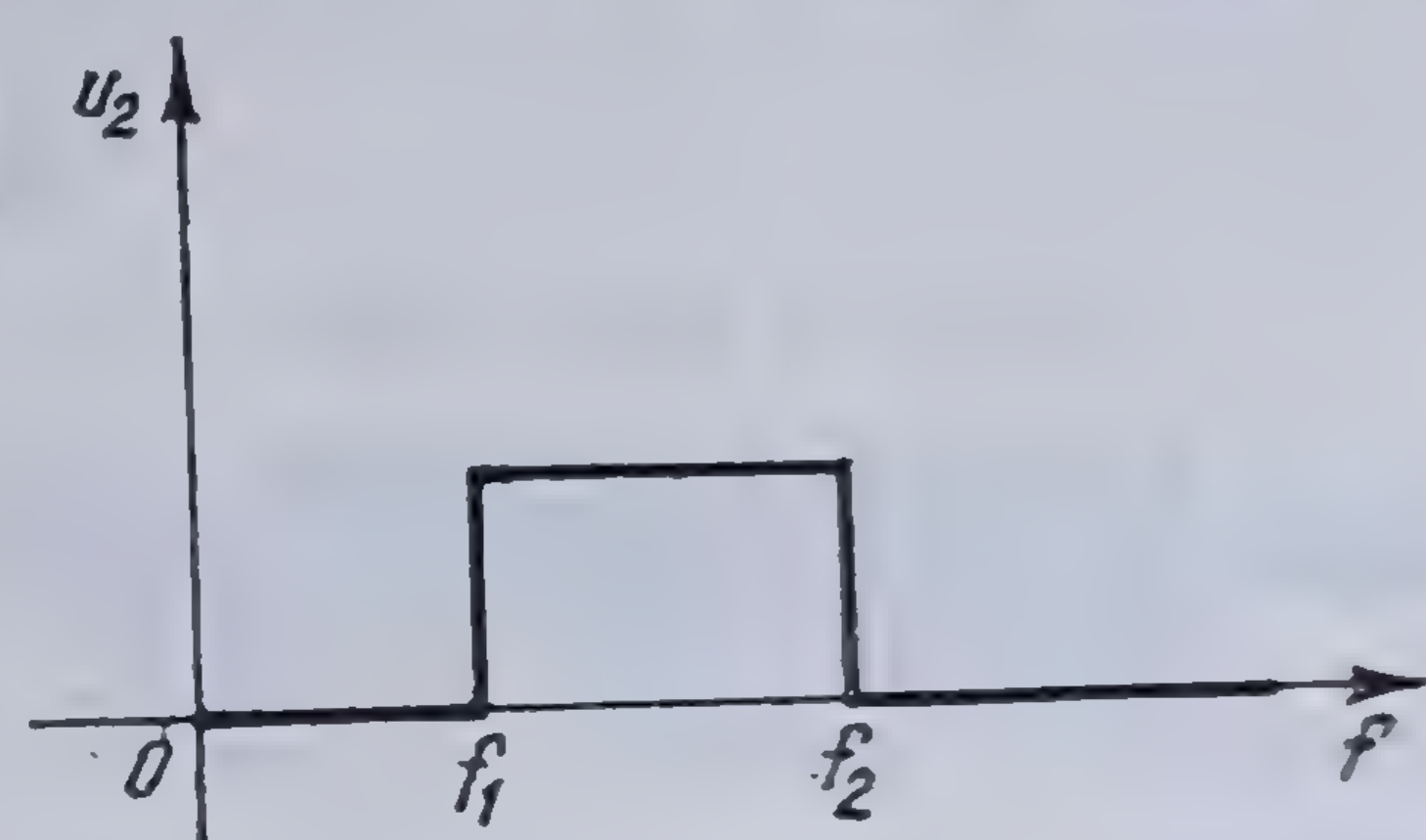


Fig. 13.12. Curba de variație a tensiunii la bornele de ieșire în cazul unui filtru ideal.

### 13.3.2. FILTRE MULTICELULARE PUR REACTIVE

**13.3.2.1. Condiții de funcționare.** Să considerăm un cuadripol în  $T$  (sau circuitul echivalent în  $T$  a lanțului de cuadripoli) care formează un filtru electric și fie  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  și  $\underline{Y}$  elementele sale constitutive (fig. 13.13).

Ținînd seama de relațiile (6.139), relația (13.6) se scrie

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} = \frac{A + D}{2} = 1 + \underline{Y} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2} = \lambda', \quad (13.50)$$

$\lambda'$  fiind un număr real, întrucît elementele constitutive ale cuadripolului  $T$  sînt reactanțe pure.

În cazul cînd circuitul echivalent al filtrului este un cuadripol în  $\pi$  (fig. 13.14), ținînd seama de relațiile (6.141) se obține

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} = \frac{A + D}{2} = 1 + \underline{Z} \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} = \lambda'', \quad (13.51)$$

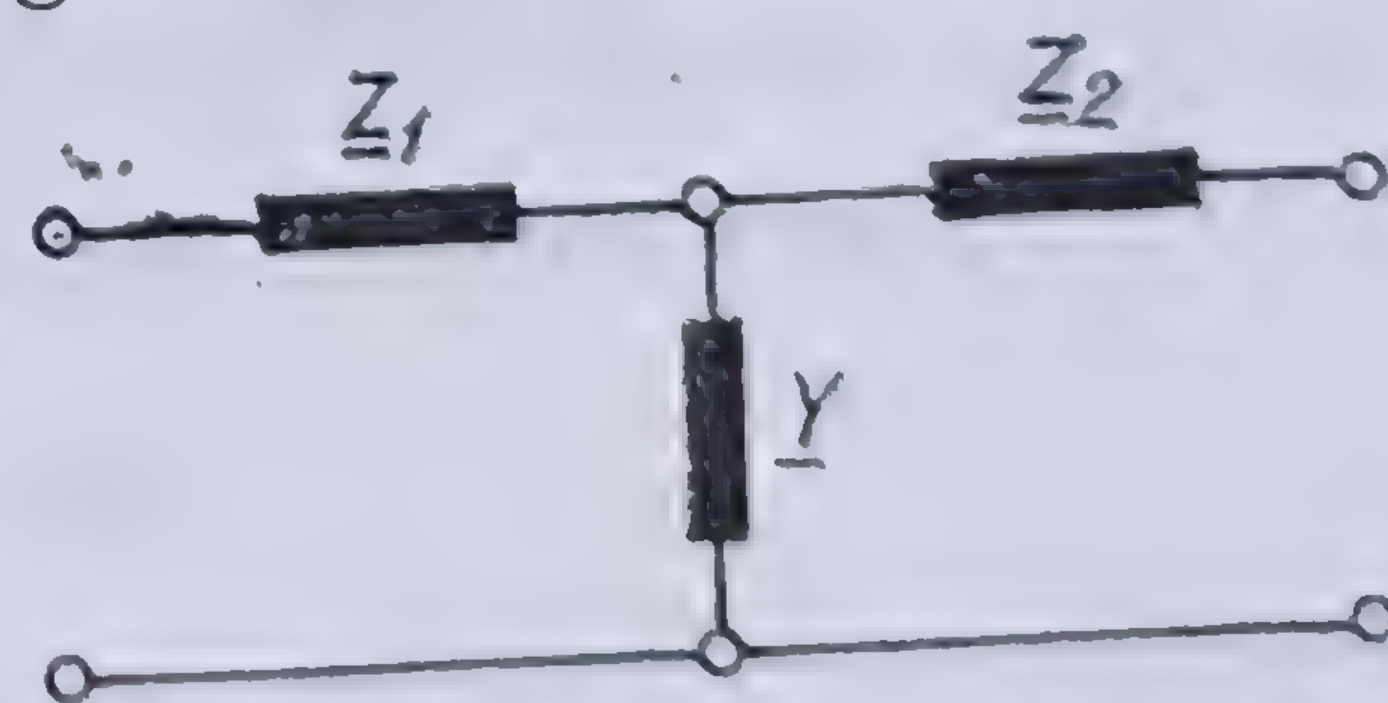


Fig. 13.13. Celulă de filtru electric în  $T$ .

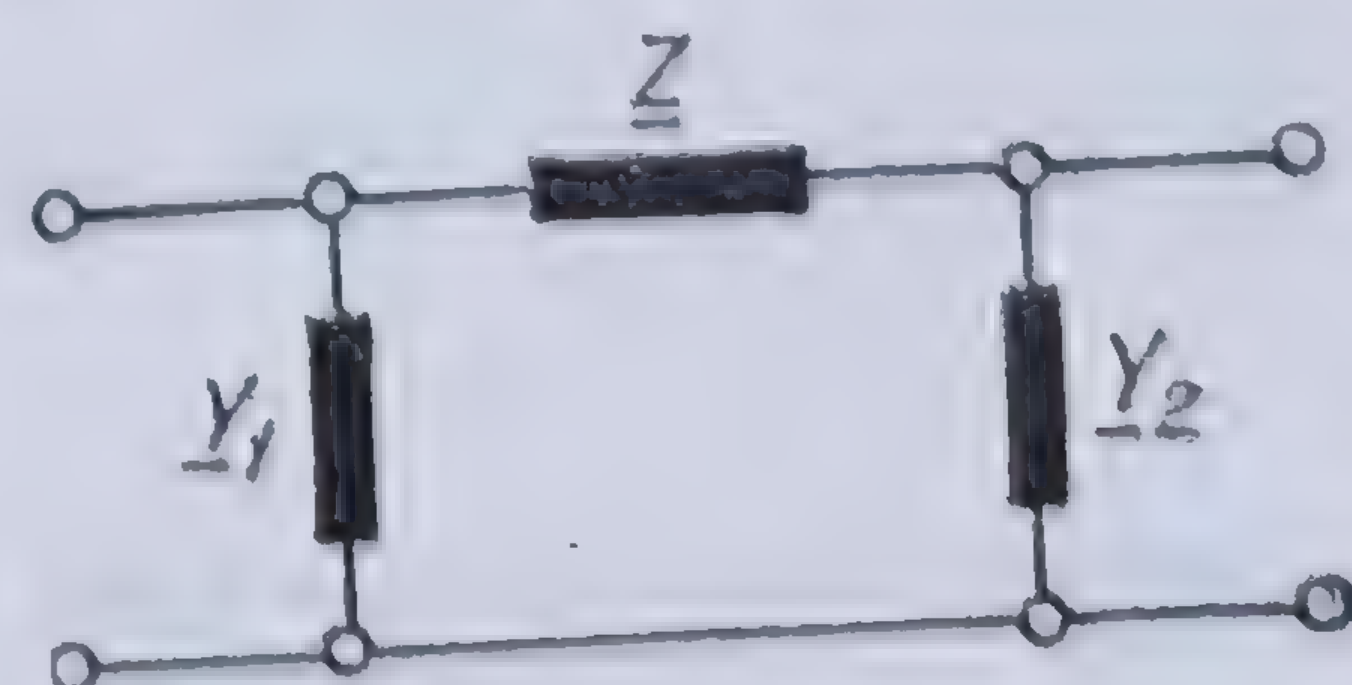


Fig. 13.14. Celulă de filtru electric în  $\pi$ .

\* Vezi pentru aceasta [77] sau [265].



În cazul cînd cuadripolii sînt și simetrice, se obține, pentru ambele tipuri de cuadripoli aceeași expresie; pentru  $\text{ch } \underline{\gamma}$  și anume

$$\text{ch } \underline{\gamma} = \underline{A} = 1 + \underline{Z} \underline{Y} = \lambda. \quad (13.52)$$

Cele două tipuri de cuadripoli se deosebesc însă prin impedanța lor caracteristică și anume,  
— pentru circuitul în  $T$ , ținînd seama de relațiile (6.139),

$$\underline{Z}_{cT} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} \sqrt{2 + \underline{Y} \underline{Z}} \quad (13.53)$$

— pentru circuitul în  $\pi$ , ținînd seama de relațiile (6.141),

$$\underline{Z}_{c\pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + \underline{Y} \underline{Z}}}. \quad (13.54)$$

Întrucît reactanțele constitutive ale cuadripolului ( $T$  sau  $\pi$ ) sînt funcții directe de frecvența  $f$ , rezultă că și  $\lambda$  este o funcție de această frecvență.

Ținînd seama de relația (13.14), expresia (13.50) poate fi scrisă\*

$$\text{ch } \underline{\gamma} = \text{ch } \alpha \cos \beta + j \text{sh } \alpha \sin \beta = \lambda,$$

de unde, separînd părțile reale de cele complexe rezultă

$$\text{ch } \alpha \cos \beta = \lambda; \quad \text{sh } \alpha \sin \beta = 0. \quad (13.55)$$

A doua din aceste ecuații este satisfăcută pentru

$$\alpha = 0, \text{ dacă } \beta \neq k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

sau pentru

$$\beta = k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \text{ dacă } \alpha \neq 0.$$

În aceste condiții, din prima ecuație (13.55) rezultă

$$\cos \beta = \lambda, \text{ dacă } \alpha = 0, \quad (13.56)$$

sau

$$\text{ch } \alpha = \pm \lambda, \text{ dacă } \beta = k\pi. \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (13.57)$$

Cum pentru orice valoare a lui  $\beta$

$$|\cos \beta| \leq 1$$

și pentru orice valoare a lui  $\alpha$

$$\text{ch } \alpha \geq 1,$$

\* Raționamentul este același, fie că se aplică relațiilor (13.50), (13.51) sau (13.52).



rezultă că soluțiile (13.56) ale sistemului (13.55) corespund cazului când  $\lambda$  este cuprins în intervalul  $-1$  și  $+1$ , iar soluțiile (13.55) cazului când  $\lambda$  se găsește în afara acestui interval.

Pentru a găsi interpretarea soluțiilor obținute, să figurăm valoarea parametrului  $\lambda$  în funcție de frecvență și să trasăm și dreptele  $\lambda = \pm 1$  (fig. 13.15).

În cazul soluțiilor (13.56), atenuarea este nulă; în consecință, curenții alternativi, pentru care frecvențele sînt astfel încît  $\lambda \in (-1, 1)$ , vor trece prin filtru fără a suferi vreo atenuare a amplitudinii lor. Regiunea în care atenuarea este nulă se numește *domeniul de permeabilitate* a filtrului și ea este cuprinsă între frecvențele  $f_1$  și  $f_2$ ,  $f_3$  și  $f_4$  (fig. 13.15).

În cazul soluțiilor (13.57), atenuarea poate avea orice valoare, amplitudinile undelor respective putînd fi reduse oricît de mult, chiar anulate. Această regiune de funcționare a filtrului se numește *domeniul de zăvorîre* și este cuprinsă între frecvențele zero și  $f_1$ , între  $f_2$  și  $f_3$  și între  $f_4$  și infinit (fig. 13.15).

Limitele de demarcație între aceste două domenii se numesc *limitele de frecvență* sau *frecvențele de tăiere*.

Funcționarea unui filtru poate fi interpretată și în funcție de impedanțele care alcătuiesc celula sa\*. Reluînd relațiile (13.55), pe care să le scriem sub forma

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 1 + \underline{Z} \underline{Y}; \quad \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0,$$

se pot distinge trei cazuri de funcționare a filtrului.

*Cazul I* corespunde soluțiilor (13.56)

$$\alpha = 0; \quad \cos \beta = 1 + \underline{Z} \underline{Y}.$$

Întrucît  $-1 \leq \cos \beta \leq 1$ , rezultă că această soluție este valabilă numai atunci, cînd sînt satisfăcute inegalitățile

$$-2 \leq \underline{Z} \underline{Y} \leq 0$$

sau

$$-1 \leq \frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2} \leq 0;$$

în acest caz atenuarea este nulă și defazarea undei poate lua orice valoare între  $-\pi$  și  $\pi$ .

Scriind relația (13.56) sub forma

$$\sin \frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \pm \sqrt{-\frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2}},$$

\* Vezi [77] pag. 198

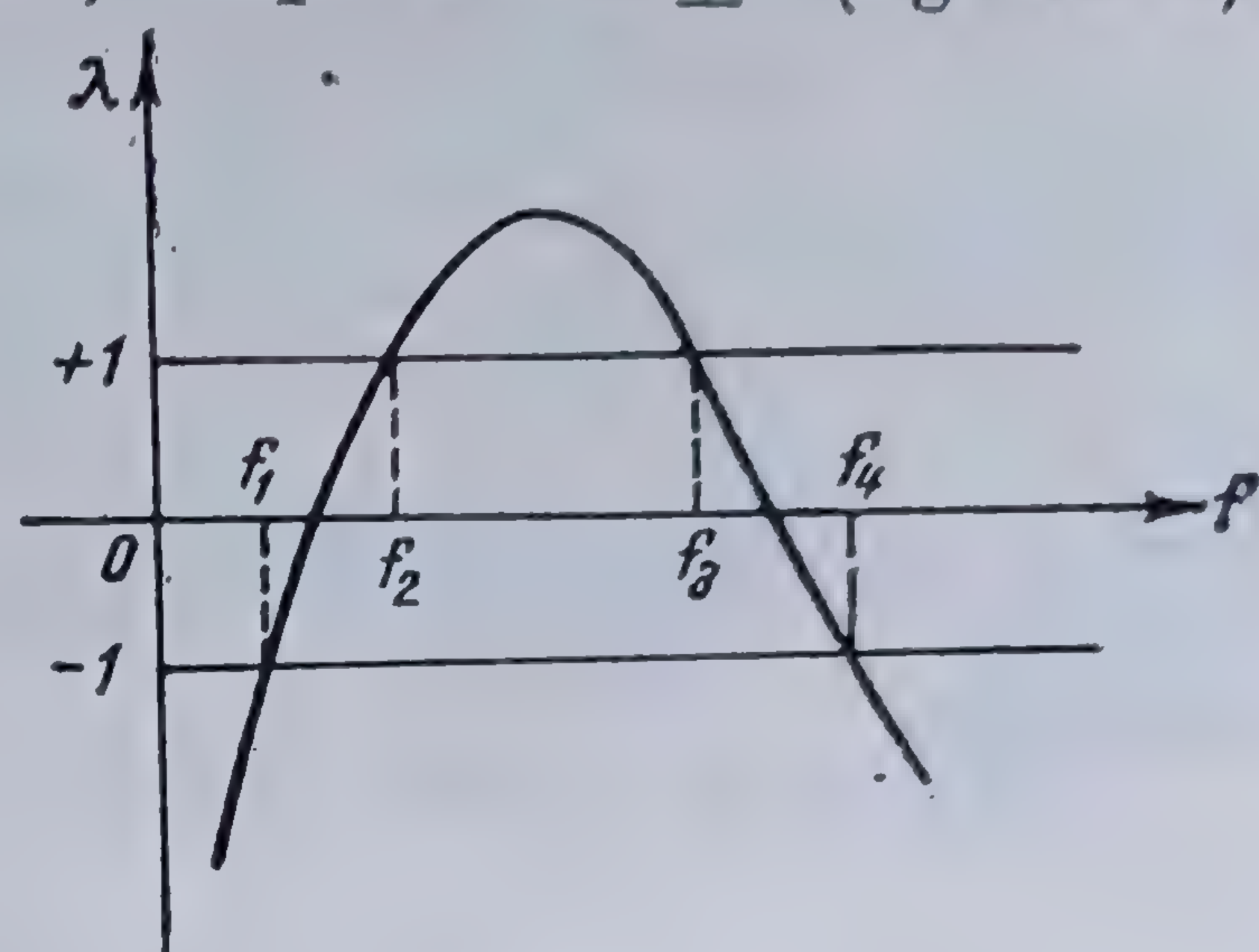


Fig. 13.15. Curba  $\lambda = \varphi(f)$ .



relație care poate fi folosită pentru calculul constantei de distorsiune  $\beta$ , se vede că pentru  $\beta$  rezultă două valori egale și de semn contrar, cuprinse între  $-\pi$  și  $+\pi$ ; semnul dinaintea radicalului trebuie astfel ales, încât  $\beta$  să fie crescător cu frecvența.

Cazul II corespunde soluțiilor (13.57)

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \underline{Z} \underline{Y}; \quad \beta = k\pi \quad (k = 0, 2, 4, \dots, 2n). \quad (13.58)$$

Deoarece  $\alpha \geq 1$ , această soluție este valabilă numai atunci când

$$\underline{Z} \underline{Y} \geq 0.$$

În acest caz, constanta de atenuare ia valoarea dedusă din relația (13.58), constanta de distorsiune fiind nulă; funcționarea filtrului este deci, în bandă de atenuare.

Din relația (13.58) se poate deduce

$$\operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{2}} = \sqrt{\frac{\underline{Z} \underline{Y}}{2}}.$$

Cazul III corespunde tot soluțiilor (13.57) luate sub forma

$$\operatorname{ch} \alpha = -(1 + \underline{Z} \underline{Y}); \quad \beta = \pm k\pi; \quad (k = 1, 3, 5, \dots, 2n+1). \quad (13.59)$$

Această soluție este valabilă numai atunci, când

$$\underline{Z} \underline{Y} \leq -1.$$

Și în acest caz filtrul funcționează în bandă de atenuare.

Relația (13.59) poate fi pusă și sub forma

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\underline{Z} \underline{Y}}{2}}.$$

Pentru diferite valori ale frecvenței de lucru, expresia  $\frac{1}{2} \underline{Z} \underline{Y}$  poate lua valori corespunzătoare celor trei cazuri examinate, care definesc condițiile de

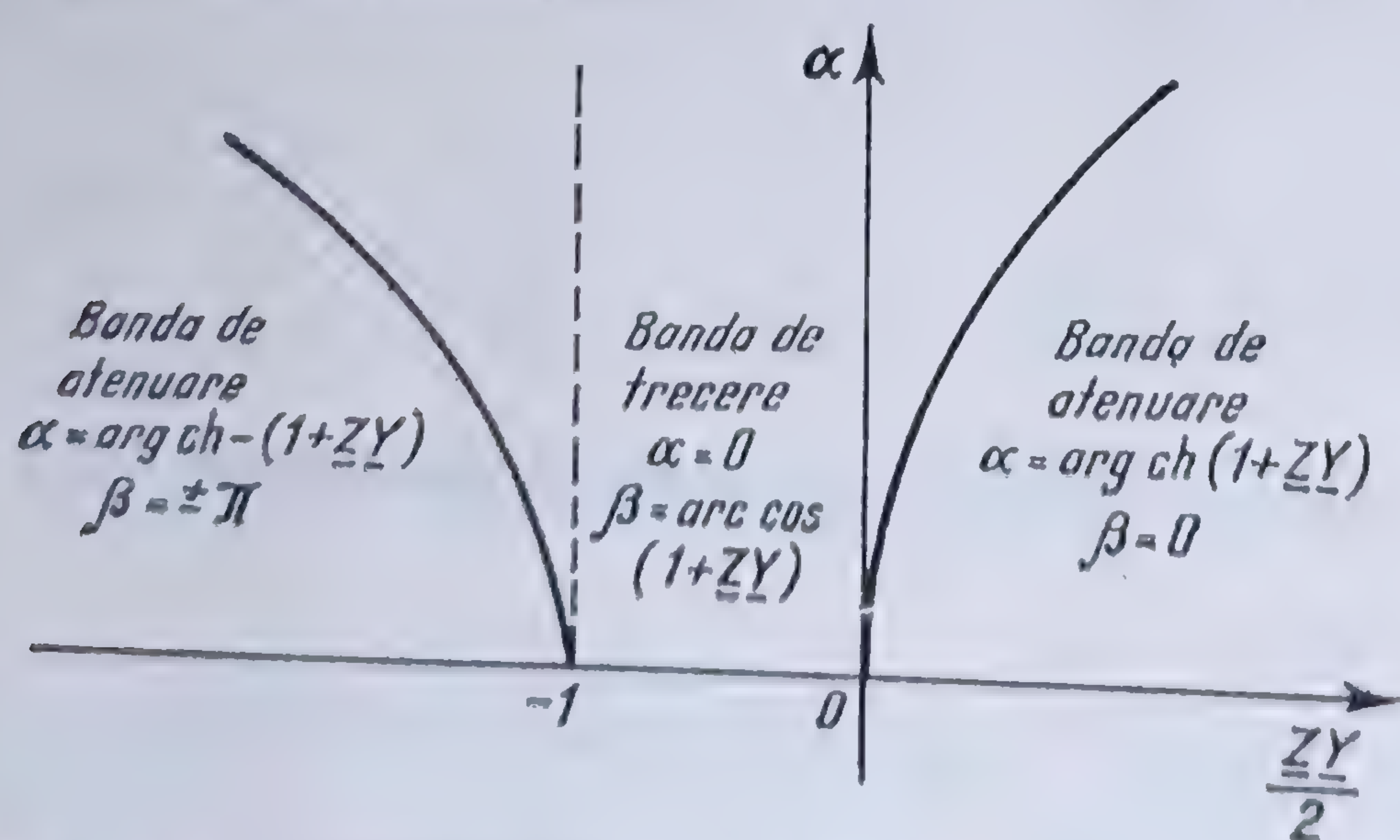


Fig. 13.16. Curbele atenuării  $\alpha = \psi\left(\frac{ZY}{2}\right)$  pentru filtrele în lanț.

lucru ale filtrului la aceste frecvențe; se pot determina astfel, benzile de trecere și de atenuare și frecvențele de tăiere.

În figura 13.16 este reprezentată variația constantei de atenuare  $\alpha$  în funcție de mărimea  $\frac{1}{2} \underline{Z} \underline{Y}$ , corespunzătoare tipului de filtre examinat.

Este ușor de văzut, că dacă  $\frac{1}{2} \underline{Z} \underline{Y}$  ia toate valorile între  $-\infty$  și  $+\infty$ , atunci



cînd frecvența ia valori cuprinse între 0 și  $\infty$ , se realizează toate cele trei cazuri analizate.

Frecvențele de tăiere corespund frecvențelor pentru care

$$\frac{1}{2} \underline{Z} \underline{Y} + 1 = 0 \quad \text{și} \quad \underline{Z} \underline{Y} = 0.$$

**13.3.2.2. Aplicație : Filtru trece bandă.** Să considerăm un lanț cu cuadripoli în care impedanțele  $\underline{Z}$  sînt constituite dintr-o bobină de inductanță  $L$  în serie cu un condensator de capacitate  $C_1$  iar admitanțele  $\underline{Y}$  dintr-un condensator de capacitate  $C_2$ ; în aceste condiții, o celulă în  $\pi$  a filtrului este formată din impedanța  $\underline{Z}_\pi = j \left( L\omega - \frac{1}{C_1\omega} \right)$ , iar admitanțele respective  $\underline{Y} = j \frac{1}{2} C_2\omega$  (fig. 13.17).

Din relația (13.52) se deduce imediat

$$\text{ch } \underline{\gamma} = -1 + \frac{1}{2} \frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{2} LC_2\omega^2 = \lambda, \quad (13.60)$$

care se vede că este o mărime reală. De asemenea, este ușor de văzut că funcția  $\lambda = f(\omega)$  este o parabolă cu vîrf pe axa ordonatelor (fig. 13.18).

Frecvențele de tăiere se obțin din relația (13.60) în care se face pe rînd  $\lambda = \pm 1$ . Se obține

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}}, \quad (13.61)$$

care corespunde rezonanței laturii longitudinale, și

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{LC_1} + \frac{4}{LC_2}}. \quad (13.62)$$

În afara benzii de trecere, factorul de atenuare este dat de relația (13.58), care, în cazul de față, ținînd seama de relațiile (13.61) și (13.62), poate fi scrisă

$$\pm \text{ch } \alpha = 1 - 2 \frac{\left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 - 1}{\left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 - 1}. \quad (13.63)$$

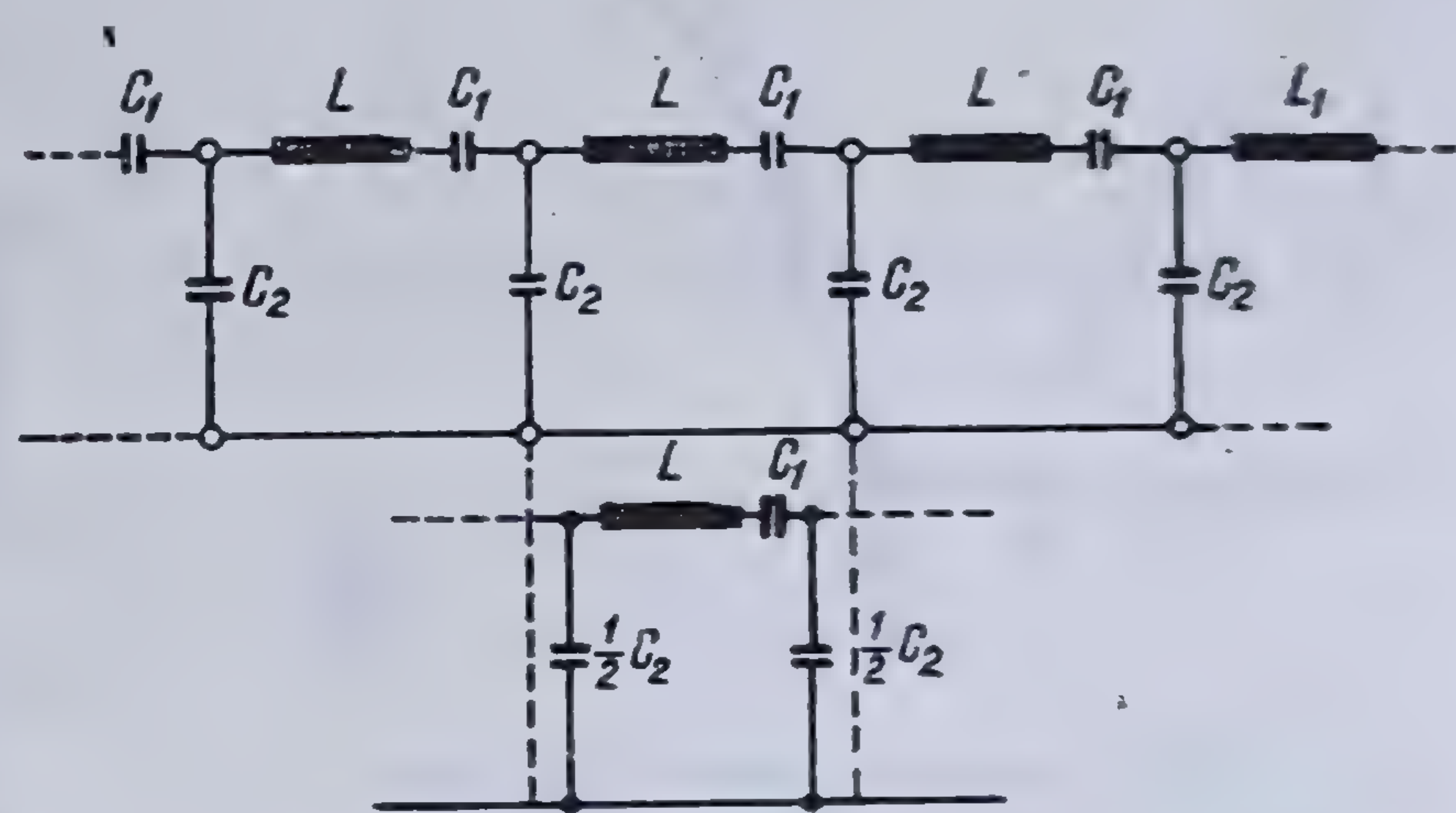


Fig. 13.17. Filtru în lanț și celula corespunzătoare.

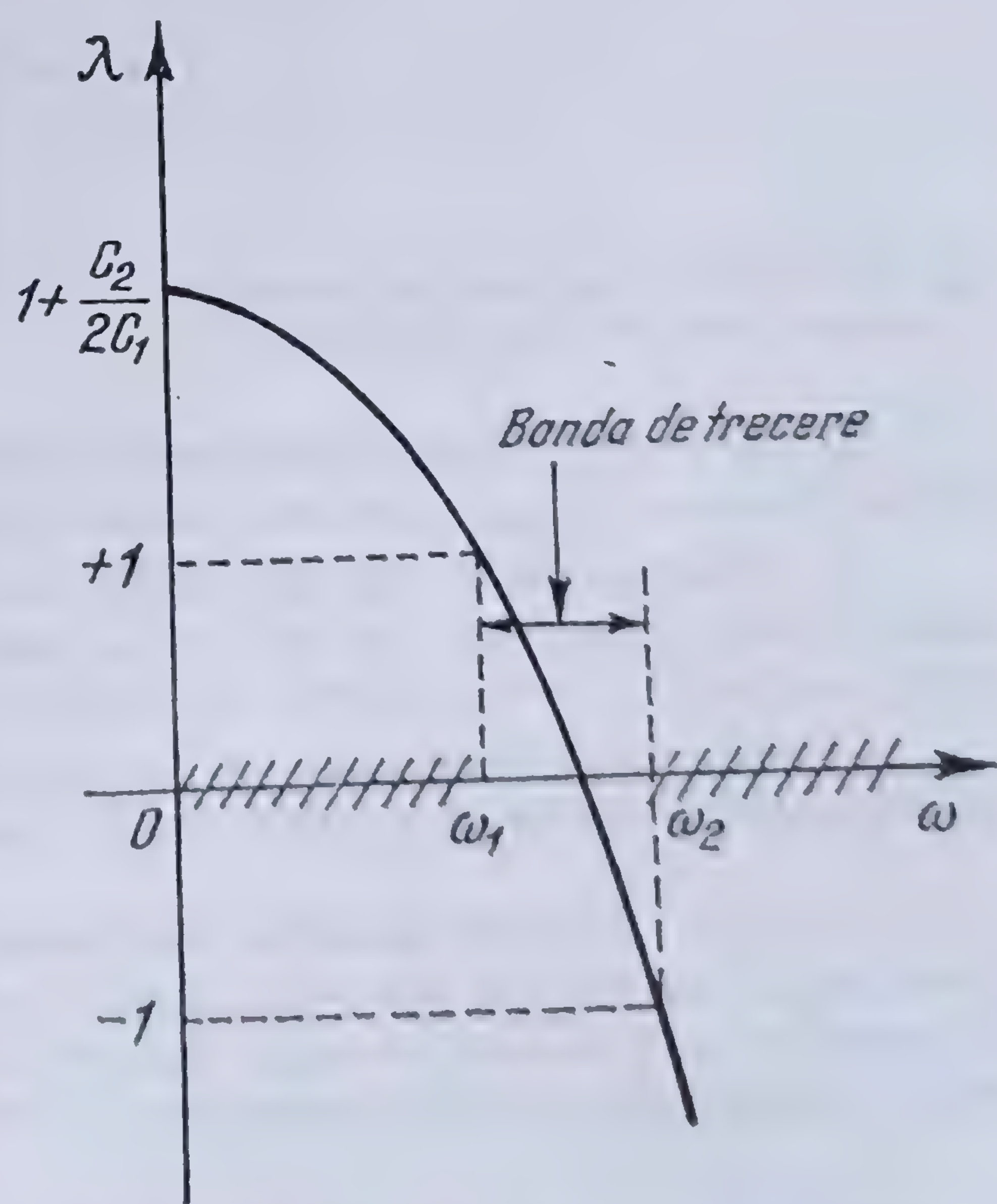


Fig. 13.18. Determinarea benzii de trecere.



Valoarea lui  $\alpha$  se obține din tabele sau, dacă este suficientă o anumită aproximație, din dezvoltarea în serie a funcției  $\text{ch } \alpha$  și reținând primii doi termeni

$$\text{ch } \alpha = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2.$$

Semnul care trebuie luat în relație (13.63) este acela pentru care

$$\text{ch } \alpha > 0.$$

În figura 13.19 este dată variația coeficientului de atenuare în funcție de frecvență.

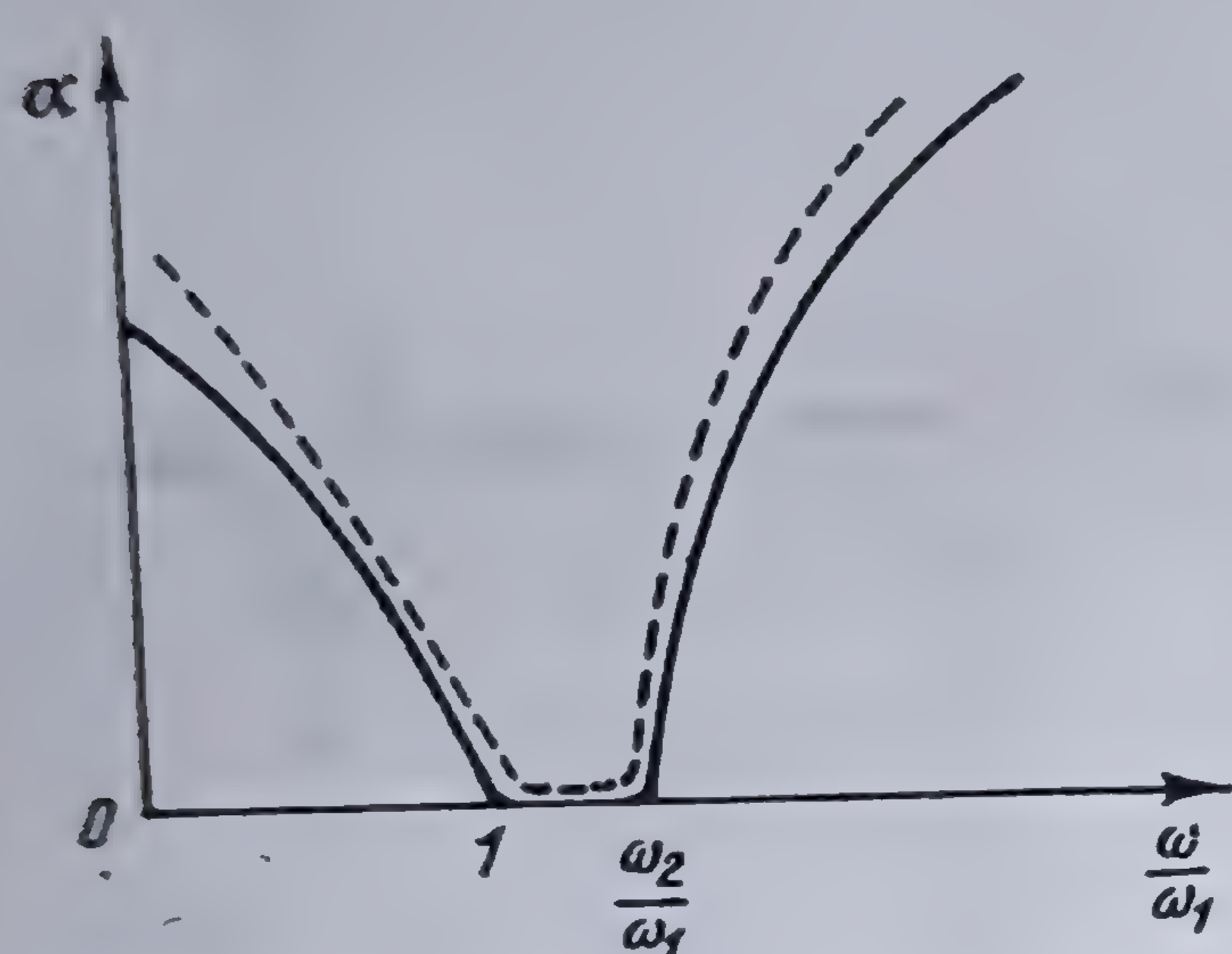


Fig. 13.19. Variația atenuării filtrului în funcție de frecvență.

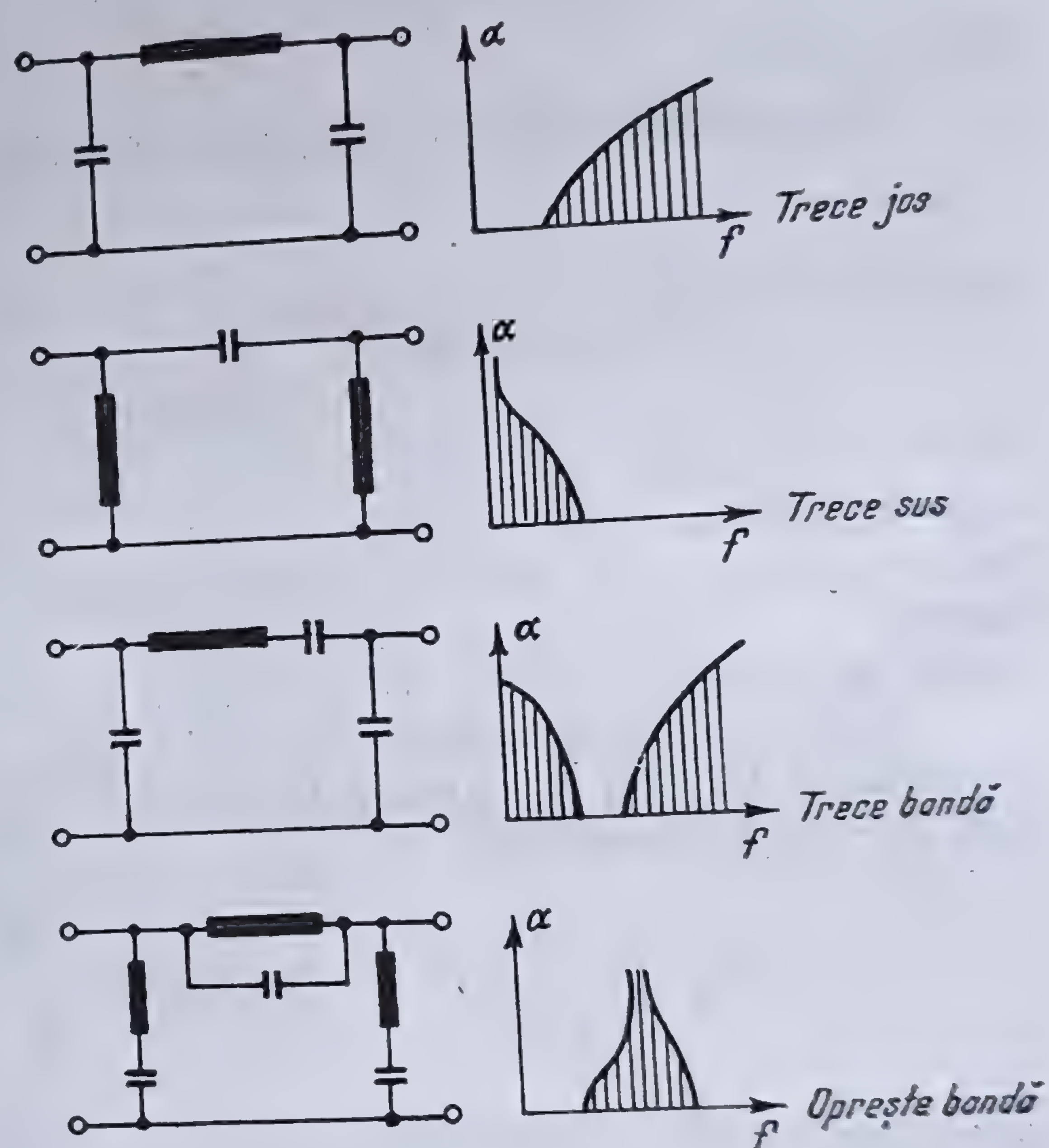


Fig. 13.20. Scheme de principiu pentru diverse celule de filtre electrice.

În cazul când filtrul este format dintr-un lanț de  $n$  celule identice, frecvențele de tăiere  $\omega_1$  și  $\omega_2$  apar mai nete întrucât atenuarea este în acest caz  $n\alpha$ .

Se observă ușor, că în cazul când capacitatea condensatorului  $C_1$  este infinită, deci impedanța sa este nulă, ceea ce se poate realiza dacă este scurtcircuitat, atunci  $\omega_1 = 0$  și filtrul devine un filtru trece jos\*.

Cu titlu de informație, în figura 13.20 au fost date scheme de principiu pentru celulele de bază a celor patru tipuri de filtre în lanț\*\*.

**13.3.2.3. Filtrele electrice multicelulare reactive reale.** Atît bobinele cît și condensatoarele, cu ajutorul cărora se realizează un filtru electric multicelular reactiv, în practică nu sînt lipsite de pierderi active, aceasta deoarece, nu poate exista bobină fără rezistență electrică și dielectric fără pierderi. Din

\* Vezi 13.3.1.1.

\*\* Pentru mai multe detalii a se vedea [265].



această cauză, banda de trecere a unui filtru electric nu are o atenuare nulă; valoarea atenuării care apare în banda de trecere se poate calcula, dacă în ecuațiile (13.50), (13.51) sau (13.52) considerăm că  $\lambda$  nu este un număr real, ci un număr complex de forma

$$\underline{\lambda} = \lambda_1 + j\lambda_2.$$

Sistemul de ecuații (13.55) devine în acest caz

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta = \lambda_1; \quad \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = \lambda_2,$$

care rezolvat dă

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \sqrt{\frac{1}{4} (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 + \lambda_2^2}$$

și

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{\lambda_2}{\sin \beta}.$$

Curba reprezentată punctat în figura 13.19 arată modul cum se modifică curba de atenuare din cauza pierderilor.



## Capitolul XIV

# PROPAGAREA CURENȚILOR ELECTRICI ȘI CÎMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎN CONDUCTOARE MASIVE, ÎN REGIM ARMONIC SINUSOIDAL. EFECTUL PELICULAR

## 14.1. DISTRIBUIREA CURENTULUI ELECTRIC ÎNTR-UN CONDUCTOR MASIV DE FORMĂ DREPTUNGHILARĂ

### 14.1.1. GENERALITĂȚI

Dacă un conductor masiv de lungime infinită este străbătut de un curent electric variabil în timp, experiența ne arată că acest curent nu se repartizează uniform pe întreaga secțiune a conductorului; el are tendința să se localizeze către periferie, astfel că densitatea de curent este mai redusă în centrul conductorului, decât la periferie. Acest efect este cu atât mai pronunțat, cu cât secțiunea dreaptă a conductorului este mai mare și cu cât variația curentului este mai rapidă. În cazuri limită, un conductor masiv se comportă aproape ca un tub cilindric găurit de același diametru, ceea ce ne arată că, în asemenea cazuri, materialul nu este bine utilizat. Ca o consecință, atunci când este necesar ca materialul de instalații să fie ușor (pe bordul avioanelor, sau al navelor) se utilizează curenți de înaltă frecvență și conductoare tubulare.

Fenomenul poate fi explicat ușor calitativ. Să considerăm un conductor cilindric. Curentul care circulă în acest conductor, paralel cu axa sa și în sensul săgeții (fig. 14.1) produce un câmp magnetic în însuși interiorul conductorului: liniile de câmp sînt cercuri concentrice. Curentul variind, va varia și fluxul produs de acest câmp; din această cauză, în diverse secțiuni longitudinale vor apărea forțe electromotoare de inducție și deci, curenți care vor produce fluxuri

ce vor căuta să se opună cauzei care i-a produs, conform legii lui LENZ. Astfel, într-o secțiune oarecare, curenții simetrici  $mnpq$  și  $m'n'p'q'$  și care se produc de o parte și de alta a axei, au același sens cu sensul curentului principal către periferia conductorului și sens contrar cu acesta către centru. În consecință, ei au tendința să întărească curentul către periferie și să-l micșoreze către centru.

Cum valoarea cîmpului magnetic variază în interiorul cilindrului proporțional cu raza\*, fenomenul va fi mai accentuat la periferie decât în ax. Pe de altă parte, acești curenți paraziți nu sînt în fază cu curentul principal; rezultă, că în secțiune va varia și faza curentului rezultat.

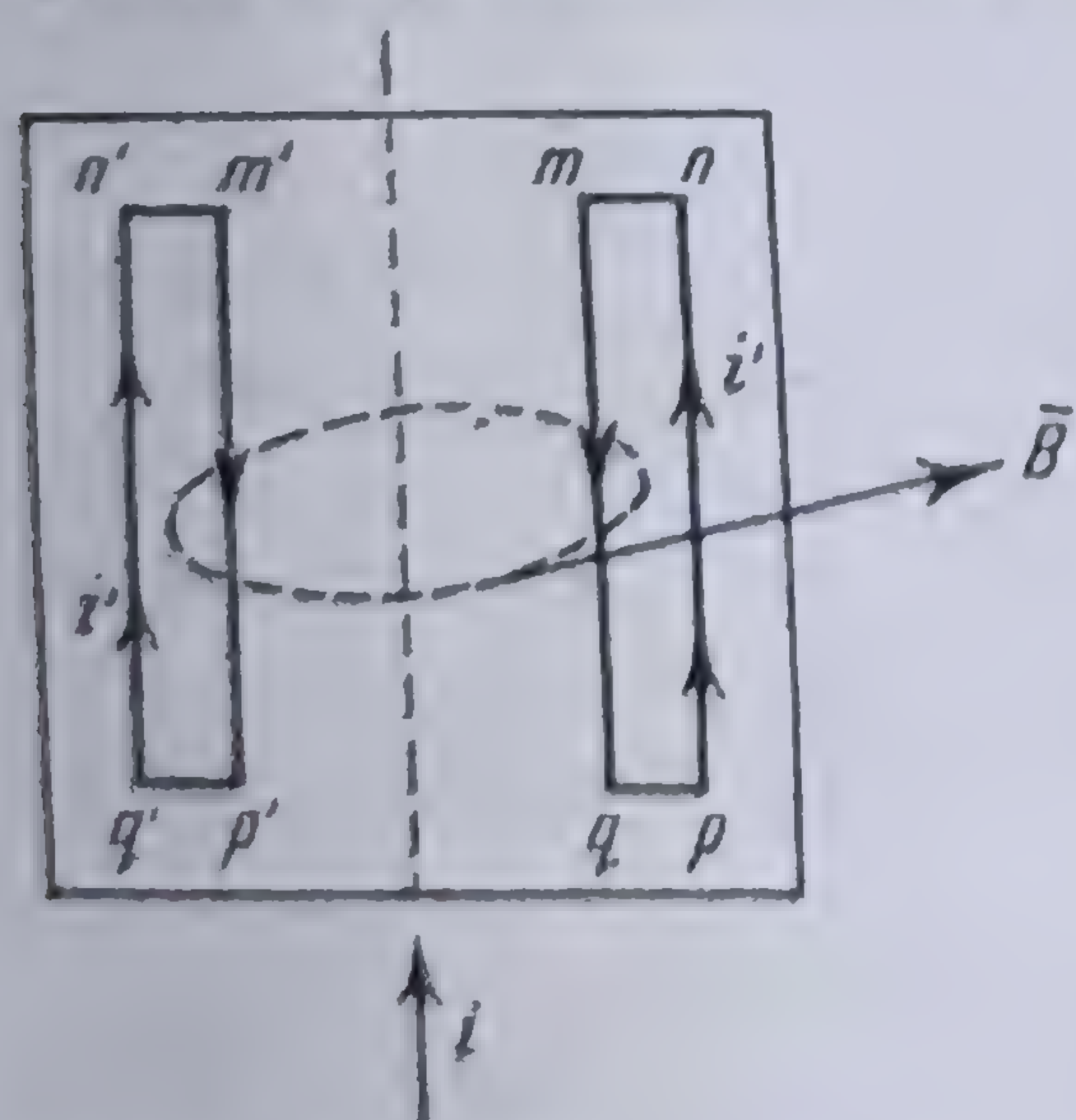


Fig. 14.1. Producerea fenomenului de concentrare a densității de curent la periferia conductorului.

\* Vezi 3.2.5.2.



#### 14.1.2. STUDIUL CANTITATIV AL FENOMENULUI IN CAZUL UNEI BARE DE SECȚIUNE DREPTUNGHILARĂ, DE LUNGIME INFINITĂ ȘI A CĂREI LĂȚIME ESTE MICĂ IN RAPORT CU ÎNĂLȚIMEA

14.1.2.1. Stabilirea ecuației generale de propagare. Fie o bară infinit lungă, avînd secțiunea  $ABCD$  dreptunghiulară cu înălțimea sa  $2b$  și lățimea de exemplu o bară colectoare dintr-o cameră de conexiuni a unei centrale electrice. Să presupunem că ea e străbătută de un curent electric  $i$ . Ne propunem să găsim repartiția acestui curent în secțiunea dreaptă a acestei bare. Presupunînd că bara este destul de îndepărtată de orice conductor exterior, singurul cîmp care poate modifica repartiția de curent este cîmpul propriu al curentului  $i$ . Din cauze de simetrie, densitatea de curent va fi aceeași în doua puncte situate simetric în raport cu axa  $yy'$  a secțiunii drepte.

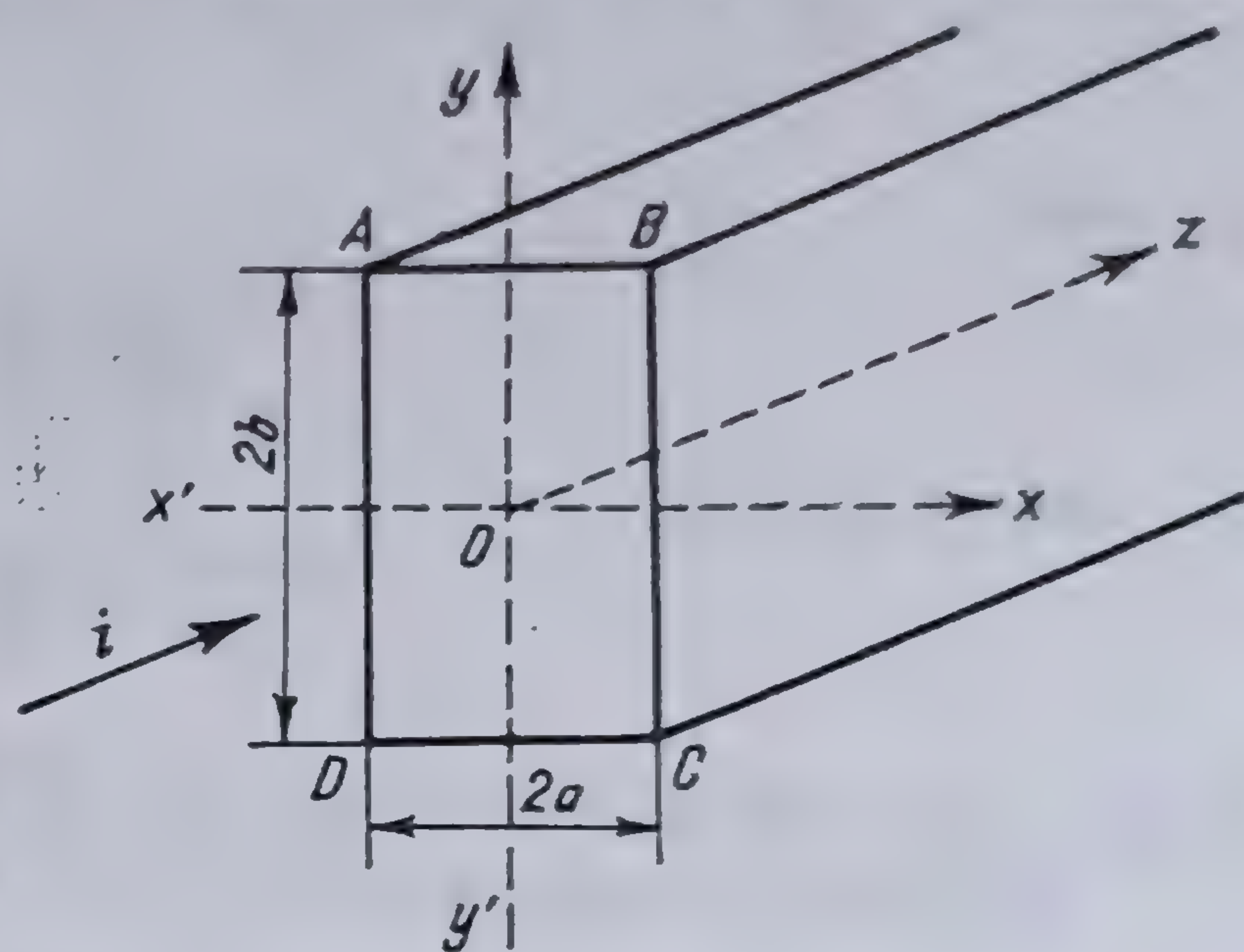


Fig. 14.2. Bara de secție dreptunghiulară.

Înălțimea barei  $2b$ , fiind presupusă foarte mare față de lățimea sa, putem admite că liniile de cîmp de inducție magnetică sînt paralele cu axa  $y'y$  și că ele se închid sub forma unor bucle dreptunghiulare; de asemenea, admitem că densitatea de curent este uniformă în orice plan paralel cu fețele laterale. Aceste ipoteze sînt posibile dacă se neglijează fenomenele ce se produc la extremitățile  $AB$  și  $CD$  ale secțiunii drepte.

Utilizînd ecuațiile lui MAXWELL

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

și relațiile\*

$$\epsilon \bar{E} = \bar{D}; \quad \bar{B} = \mu \bar{H}; \quad \bar{\delta} = \gamma \bar{E}; \quad \text{div } \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon}; \quad \text{div } \bar{H} = 0; \quad \text{div } \bar{\delta} = -\frac{d\rho}{dt},$$

pentru conductorul dat se poate scrie

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (14.1)$$

și

$$\text{rot } \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (14.2)$$

\*  $\gamma$  este conductivitatea conductorului și  $\rho$  este sarcina electrică volumetrică.



La frecvențe mici ( $f < 10^{-11}$  Hz), pentru conductoare uzuale, curentul de deplasare este neglijabil față de curentul de conducție ( $z \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \ll \gamma \bar{E}$ ). În aceste condiții, din relația (14.1) rezultă

$$\bar{E} = \frac{1}{\gamma} \text{rot } \bar{H}$$

și deci,

$$\text{div } \bar{E} = 0$$

de unde, rezultă

$$\rho = 0 \text{ și } \text{div } \bar{\delta} = 0,$$

(14.3)

pentru curentul de conducție  $\bar{\delta} = \gamma \cdot \bar{E}$ .  
Aplicând rotorul ecuației (14.2) se obține

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \bar{E} &= \frac{1}{\gamma} \text{rot rot } \bar{\delta} = -\frac{1}{\gamma} \Delta \bar{\delta} + \frac{1}{\gamma} \text{grad div } \bar{\delta} = -\mu \text{rot } \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \bar{H}, \end{aligned}$$

sau ținând seama de relațiile (14.1) și (14.3) se obține

$$\Delta \bar{\delta} = \mu \gamma \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial t}, \quad (14.4)$$

care este ecuația generală de distribuție a curenților în secțiunea conductorului.

În cazul particular considerat, densitatea  $\delta$  a curentului de conducție, de-a lungul axei  $z$  în întreg conductorul, nu-și schimbă sensul și nu depinde decât de  $x$ , ecuația (14.4) se poate scrie

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \mu \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (14.5)$$

**14.1.2.2. Integrarea ecuației de repartiție a densității de curent în cazul regimului armonic sinusoidal permanent.** Fie

$$i = I \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi),$$

curentul alternativ sinusoidal ce străbate bara. Densitatea de curent corespunzătoare poate fi scrisă în mărimi complexe sub forma

$$\underline{\delta} = \delta \underline{|\omega t + \psi|}$$



și atunci, ecuația (14.5) se poate scrie

$$\frac{d^2 \underline{\delta}}{dx^2} = j\omega\mu\gamma \underline{\delta},$$

sau punând

$$\underline{k} = m + jn = \sqrt{j\omega\mu\gamma} = m(1 + j), \quad (14.6)$$

în care\*

$$m = n = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}, \quad (14.7)$$

ecuația de repartitie a densității de curent devine

$$\frac{d^2 \underline{\delta}}{dx^2} = \underline{k}^2 \underline{\delta} \quad (14.8)$$

ecuația analoagă cu ecuația liniilor lungi\*\*. Integrala generală a acestei ecuații este

$$\underline{\delta} = \underline{A}_1 \varepsilon^{-\underline{k}x} + \underline{A}_2 \varepsilon^{-\underline{k}x}.$$

Ținând seama de faptul, că din cauză de simetrie, densitatea de curent trebuie să fie aceeași de o parte și de alta a axei  $y'y$ , rezultă  $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = \underline{A}$  și deci

$$\underline{\delta} = \underline{A} (\varepsilon^{\underline{k}x} + \varepsilon^{-\underline{k}x}) = 2 \underline{A} \operatorname{ch} \underline{k}x = 2 \underline{A} \operatorname{ch} (1 + j) mx. \quad (14.9)$$

Fie  $\underline{\delta}_a$  densitatea de curent pe fețele laterale ale barei ( $x = a$ ); ecuația (14.9) devine în acest caz

$$\underline{\delta}_a = 2 \underline{A} \operatorname{ch} \underline{k} a$$

și eliminând pe  $\underline{A}$  între această relație și ecuația (14.9) se obține

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{\operatorname{ch} \underline{k} x}{\operatorname{ch} \underline{k} a}. \quad (14.10)$$

Sub această formă, ecuația care dă repartitia densității pe secțiunea conductorului este identică cu aceea a curentului pe o linie lungă, cu constantele uniform răspândite și cu extremitatea receptoare legată în scurtcircuit\*\*\*.

\* Ridicând la pătrat relația (14.6) se găsește

$m^2 + n^2 + 2jmn = j\omega\mu\gamma$ , de unde  $m^2 - n^2 = 0$  și  $2mn = \omega\mu\gamma$ , de unde,  $m = n = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$ .

\*\* Vezi 12.1.3.2.

\*\*\* Vezi 12.1.0.5.



Ținând seama de expresia (14.6) a lui  $\underline{k}$ , relația (14.10) se poate scrie

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{\text{ch } mx \cos mx + j \text{ sh } mx \sin mx}{\text{ch } ma \cos ma + j \text{ sh } ma \sin ma}. \quad (14.11)$$

Valoarea efectivă a densității de curent este

$$\delta = \delta_a \sqrt{\frac{\text{ch } 2mx + \cos 2mx}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}}, \quad (14.12)$$

în care  $\delta_a$  este valoarea efectivă a lui  $\underline{\delta}_a$ . Defazajul lui  $\underline{\delta}$  față de  $\underline{\delta}_a$  este dat de relația

$$\psi = \arctg (\text{th } mx \cdot \text{tg } mx) - \\ - \arctg (\text{th } ma \cdot \text{tg } ma).$$

În figura 14.3 este dată variația densității de curent în raport cu lățimea barei.

În cazul când  $\omega$  tinde către zero,  $m$  tinde de asemenea către zero\* și  $\delta$  tinde către  $\underline{\delta}_a$ , oricare ar fi  $x$ : rezultă că densitatea de curent de la periferia conductorului va fi aceeași cu densitatea de curent  $\underline{\delta}$  din interiorul secțiunii, oricare ar fi  $x$ ; este cazul curentului continuu pentru care densitatea de curent este uniformă pe toată secțiunea.

Dacă  $ma$  este mare, adică, dacă grosimea conductorului este mare, sau frecvența este mare, sau permeabilitatea mediului este mare, densitatea de curent în centrul secțiunii tinde către zero și curentul tinde să se localizeze către periferia conductorului.

**14.1.2.3. Impedanța proprie a conductorului.** Prin definiție această impedanță este egală cu raportul dintre diferența de potențial  $\underline{U}$  între două secțiuni drepte ale barei, situate la o distanță  $l$  între ele și curentul  $\underline{I}$  total care trece prin conductor

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}.$$

Curentul total care trece prin secțiunea de grosime  $2a$  și de înălțime  $2b$  este

$$\underline{I} = 2b \int_{-a}^a \underline{\delta} d\omega = \frac{2b \underline{\delta}_a}{\text{ch } \underline{k} a} \int_{-a}^a \text{ch } \underline{k} \omega d\omega = \frac{4b \underline{\delta}_a}{\underline{k}} \text{th } \underline{k} a.$$

\* Vezi relația (14.7)



Rezultă

$$\underline{Z} = \frac{k}{4} \frac{\underline{U}}{b \underline{\delta}_a} \operatorname{cth} \underline{k} a.$$

Densitatea de curent  $\underline{\delta}_a$  este aceea care s-ar găsi în conductor dacă frecvența ar fi infinit mică; deci  $\underline{\delta}_a$  este în fază cu  $\underline{U}$  (fluxul exterior conductorului fiind neglijat); rezultă dar, că

$$R_0 = \frac{U}{4ab\delta_a}$$

reprezintă rezistența conductorului în curent continuu.  
Putem scrie deci

$$\underline{Z} = \underline{k} a R_0 \operatorname{cth} \underline{k} a \quad (14.13)$$

sau

$$\underline{Z} = a R_0 m (1 + j) \frac{\operatorname{ch} ma \cos ma + j \operatorname{sh} ma \sin ma}{\operatorname{sh} ma \cos ma + j \operatorname{ch} ma \sin ma}.$$

Înmulțind cu conjugata numitorului, expresia lui  $\underline{Z}$  devine

$$\underline{Z} = a R_0 m (1 + j) \frac{\operatorname{sh} 2ma - j \sin 2ma}{\operatorname{ch} 2ma - \cos 2ma}. \quad (14.14)$$

Rezistența efectivă a conductorului este partea reală a expresiei (14.14)

$$R = R_0 ma \frac{\operatorname{sh} 2ma + \sin 2ma}{\operatorname{ch} 2ma - \cos 2ma}, \quad (14.15)$$

iar reactanța efectivă a conductorului este partea complexă a expresiei (14.14)

$$\lambda \omega = X = R_0 ma \frac{\operatorname{sh} 2ma - \sin 2ma}{\operatorname{ch} 2ma - \cos 2ma}. \quad (14.16)$$

Dacă  $ma$  este mare, adică, dacă grosimea barei este mare sau frecvența curentului alternativ este mare, funcțiile trigonometrice, la care amplitudinea nu depășește valoarea 1, pot fi neglijate față de funcțiile hiperbolice și deci  $\operatorname{tgh} 2ma$  poate fi confundat cu unitatea\*. Se va putea scrie deci

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda \omega}{R_0} = a \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}} = ma, \quad (14.17)$$

\* Avem  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x = 1$ . De exemplu, pentru  $ma = 2$ ,  $\operatorname{sh} 2ma = 27,29$  și  $\operatorname{ch} 2ma = 27,3$  și rezultă  $\operatorname{tgh} 2ma \approx 1$ .



Rezultă dar, că pentru valorile mari ale frecvenței, rezistența efectivă este egală cu reactanța interioară a conductorului.

Din punct de vedere al pierderilor prin efect JOULE, se poate admite că totul se petrece ca și cum curentul ar fi localizat la periferie, mod uniform, într-o coajă fictivă de grosime  $\alpha$  astfel, încât

$$\frac{R}{2a \cdot 2b} = \frac{R_0}{2\alpha \cdot 2b}. \text{ Rezultă } \alpha = \frac{1}{m}. \quad (14.18)$$

Invers, dacă calculând această coajă fictivă, se găsește că ea este egală cu un sfert din grosimea  $2a$  sau mai mică decât aceasta, atunci se poate aplica direct relația aproximativă (14.17).

Fie de exemplu, să calculăm coaja fictivă a unui conductor de cupru la o frecvență  $f = 5\,000$  Hz. Avem pentru cupru

$$\mu_r = 1; \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}; \gamma = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}; \omega = 2\pi \cdot 5\,000 = 10^4 \pi$$

și rezultă

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = \sqrt{\frac{2}{10^4 \pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 56 \cdot 10^6}} = 0,95 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Dacă bara are grosimea  $2a = 20$  mm, raportul dintre rezistența efectivă a barei și rezistența în curent continuu este, conform relației (14.15)

$$\frac{R}{R_0} = \frac{a}{\alpha} = \frac{10}{0,95} \cong 10,5.$$

În cazul particular considerat, al unei bare de cupru, relația (14.18) poate fi scrisă

$$\alpha = \frac{1}{150 \sqrt{f}}, \quad (14.19)$$

în care  $f$  este frecvența curentului alternativ. Se poate determina astfel, pentru diverse frecvențe, grosimea de pătrundere. În tabloul 14.1 sînt date această grosime de pătrundere și raportul rezistențelor pentru o bară de cupru avînd o grosime de 20 mm

Tabelul 14.1

$f$ (Hz)	50	5000	$10^4$	$10^6$	$10^8$	$10^{10}$
$\alpha$ (mm)	9,4	0,95	0,66	$66 \cdot 10^{-3}$	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$
$R/R_0$	1,06	10,5	15,1	151	1510	15100



14.1.2.4. Disiparea de energie în conductor. Încălzirea prin inducție. Ținând seama de expresia diferențială a legii lui JOULE\*, puterea disipată în conductor prin efectul JOULE pe unitatea de suprafață liberă este

$$p_s = \int_{-a}^a \frac{\delta^2}{\gamma} dx,$$

sau ținând seama de expresia (14.12) a densității de curent,

$$p_1 = \frac{\delta_a^2}{\gamma_m} \cdot \frac{\text{sh } 2ma + \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \sin 2ma} = \frac{\delta_a^2}{\gamma_m} f(ma).$$

Dat fiind, că pentru  $ma$  mare  $f(ma)$  tinde către 1, se poate scrie cu suficientă aproximație

$$p_1 = \frac{\delta_a^2}{\gamma_m} = \frac{\delta_a^2}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma}} = E_a^2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\omega \mu}}, \quad (14.20)$$

deoarece  $\bar{\delta}_a = \gamma \bar{E}_a$ .

Din ecuațiile (14.1) și (14.2), ținând seama de condițiile (14.3) se deduc ecuațiile de propagare a cîmpului electric sau magnetic sub forma

$$\Delta \bar{E} = \mu \gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (14.21)$$

și

$$\Delta \bar{H} = \mu \gamma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (14.22)$$

ceea ce arată că propagarea cîmpului electromagnetic se face în același mod ca și densitatea de curent  $\bar{\delta}$ .

Cunoscînd densitatea de curent, cîmpul electric se determină imediat din relația  $\bar{\delta} = \gamma \bar{E}$  și pentru cazul particular al regimului armonic este

$$\underline{E} = \frac{\partial_a}{\gamma} \frac{\text{ch } \underline{k} x}{\text{ch } \underline{k} a} = \underline{E}_a \frac{\text{ch } \underline{k} x}{\text{ch } \underline{k} a}. \quad (14.23)$$

Cîmpul electric are aceeași direcție cu  $\bar{\delta}$  și deci nu depinde decît de  $x$ . Pentru determinarea cîmpului magnetic  $\bar{H}$  se pornește de la relația (14.2); ținând seama că rezultă

$$E_x = E_y = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial \bar{E}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = 0$$

rezultă

$$-\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial x}, \quad (14.24)$$

\* Vezi 2.1.43. relația (2.28)



În cazul curentului alternativ și înlocuind pe  $\underline{E}$  cu valoarea sa dată de relația (14.23), se obține

$$\underline{H} = \frac{1}{j\omega\mu} k \underline{E}_a \frac{\text{sh } k x}{\text{sh } k a},$$

sau ținând seama de relația (14.6), după calcule simple, relația de mai sus devine

$$\underline{H} = \underline{H}_a \frac{\text{sh } k x}{\text{ch } k a}, \quad (14.25)$$

unde

$$\underline{H}_a = \frac{\gamma \underline{E}_a}{(1 + j)m} = \frac{\gamma \underline{E}_a}{k}. \quad (14.26)$$

Din relația (14.24) rezultă că vectorul intensității câmpului magnetic este îndreptat în sensul axei  $oy$  și este deci, perpendicular pe vectorul intensității câmpului electric  $\underline{E}$  care este îndreptat în sensul axei  $Oz$ . Vectorul lui POYNTING corespunzător\*

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

ne arată că unda corespunzătoare câmpului electromagnetic respectiv se propagă din exteriorul conductorului către interiorul lui\*\*.

Ca funcție de timp, relația (14.26) ne arată că intensitatea câmpului magnetic este în urma intensității câmpului electric cu argumentul  $\frac{\pi}{2}$ .

Disiparea de energie electrică, determinată mai sus, este utilizată în încălzirea materialelor prin inducție; în această operație, piesa de încălzit este supusă, fără un contact material, unui câmp electromagnetic de intensitate mare  $\underline{E}_a$  și  $\underline{H}_a$  pentru care adâncimea de pătrundere și deci frecvența de utilizat, este în funcție de grosimea zonei de încălzit. Astfel, pentru piese subțiri sau pentru călire superficială se va utiliza o frecvență înaltă; pentru o încălzire mai profundă se vor utiliza frecvențe joase\*\*.

Efectul pelicular studiat poate fi folosit și pentru a proteja o porțiune din spațiu contra unei unde electromagnetice perturbatoare, cu ajutorul unui acoperământ metalic în care unda respectivă nu pătrunde la adâncimi mai mari de 5 sau 6 ori  $\alpha$ . Acestea sînt blindajele electromagnetice cu ajutorul cărora se ecranază diverse montaje, cabluri etc. și care se pot realiza foarte ușor atunci cînd frecvențele sînt foarte mari și deci  $\alpha$  este foarte mic\*\*\*.

**14.1.2.5. Efectul de vecinătate\*\*\*\*.** Dacă două conductoare parcurse de curent alternativ sînt așezate paralel, unul lîngă altul, au loc fenomene asemănătoare cu efectul pelicular, cu următoarele consecințe:  
— dacă cei doi curenți au același sens, densitatea de curent scade în părțile mai apropiate ale conductoarelor și crește în părțile mai depărtate;

\* Vezi 15.2.1.1.

\*\* Vezi și 14.1.3.2.

\*\*\* Vezi tabloul 14.1

\*\*\*\* Vezi [190] pag. 268



— dacă cei doi curenți au sensuri inverse, densitatea crește în părțile apropiate și scade în cele depărtate.

Acest fenomen poartă numele de *efectul de vecinătate* și are aceleași consecințe ca și efectul pelicular, privitor la creșterea rezistenței în curent alternativ.

#### 14.1.3. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU DE STABILIRE A CURENTULUI ELECTRIC INTR-UN CONDUCTOR MASIV DE FORMĂ DREPTUNGHILARĂ

14.1.3.1. Stabilirea ecuației generale. Reluând ecuația (14.5) care dă repartitia densității de curent

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \mu \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t},$$

căreia i se aplică transformarea LAPLACE \*, se obține

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L} \delta}{\partial x^2} = \mu \gamma s \mathcal{L} \delta - \mu \gamma \delta_0 \quad (14.27)$$

în care  $\mathcal{L} \delta$  este imaginea densității de curent căutată și  $\delta_0$  densitatea de curent, existentă în secțiune la momentul inițial.

Pentru integrarea ecuației (14.27) să notăm

$$k = \sqrt{\mu \gamma s} = m \sqrt{s}, \quad (14.28)$$

unde  $m = \sqrt{\mu \gamma}$ .

Cu acestea, ecuația (14.27) poate fi scrisă

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L} \delta}{\partial x^2} - k^2 \mathcal{L} \delta = -m^2 \delta_0.$$

Integrând această ecuație fără membrul doi, se obține

$$\mathcal{L} \delta = A_1 \varepsilon^{kx} + A_2 \varepsilon^{-kx},$$

sau ținând seama de simetria secțiunii ( $A_1 = A_2 = A$ ),

$$\mathcal{L} \delta = 2A \operatorname{ch} kx.$$

Fie  $\mathcal{L} \delta_1$  o soluție particulară a ecuației (14.27); rezultă

$$-k^2 \mathcal{L} \delta_1 = -m^2 \delta_0$$

și deci,

$$\mathcal{L} \delta_1 = \frac{m^2}{k^2} \delta_0 = \frac{\delta_0}{s},$$

\* Vezi justificarea aplicării transformării LAPLACE primului membru al ecuației în 12.2.2.



astfel, că soluția generală a ecuației (14.27) este

$$\mathcal{L} \delta = 2A \operatorname{ch} kx + \frac{\delta_0}{s}.$$

Pentru determinarea constantei de integrare, se presupune că la marginea conductorului ( $x = a$ ), densitatea respectivă este constantă și are valoarea  $\delta_a$ .

Punând

$$\frac{\delta_0}{s} = \mathcal{L} \delta_0,$$

rezultă

$$\mathcal{L}(\delta_a - \delta_0) = 2A \operatorname{ch} ka$$

și deci,

$$2A = \frac{\mathcal{L}(\delta_a - \delta_0)}{\operatorname{ch} ka},$$

astfel, că soluția generală a ecuației (14.27) este

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \delta &= \mathcal{L}(\delta_a - \delta_0) \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} ka} + \mathcal{L} \delta_0, \\ \mathcal{L}(\delta - \delta_0) &= \mathcal{L}(\delta_a - \delta_0) \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} ka} \end{aligned} \right\} \quad (14.29)$$

**14.1.3.2. Aplicație. Stabilirea unui curent electric staționar.** Fie o bară de lățime  $2a$ , înălțime  $2b$  și lungime  $l$ , a cărei conductanță este  $\gamma$  și careia la timpul  $t = 0$ , i se aplică la extremități tensiunea constantă  $U$ ; se presupune că înaintea acestui moment, bara respectivă nu era străbătută de nici un curent. În aceste condiții

$$\delta_0 = 0 \text{ și } \delta_a = \frac{U\gamma}{l} = \text{Const.}$$

și relația (14.29) devine

$$\mathcal{L} \delta = \frac{\delta_a}{s} \cdot \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} ka}. \quad (14.30)$$

Pentru găsirea originalului expresiei (14.30) se aplică formula dezvoltării lui HEAVISIDE

$$\delta = \frac{\Lambda(0)}{B(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{\Lambda(s_i)}{s_i \cdot B'(s_i)} \cdot e^{s_i t},$$



în care, în cazul problemei studiate,

$$A(s) = \delta_a \operatorname{ch} kx, \quad B(s) = \operatorname{ch} ka,$$

și

$$B'(s) = \frac{am}{2\sqrt{s}} \operatorname{sh} ka,$$

ținând seama de expresia (14.28) a lui  $k$ .

Rădăcinile numitorului ecuației (14.30), în afară de  $s = 0$ , sînt date de ecuația

$$\operatorname{ch} ka = 0 \quad \text{sau} \quad \cos(-jka) = 0.$$

Ținînd seama de relația (14.28), rădăcinile acestei ecuații sînt

$$s_n = -\frac{(2n+1)^2}{a^2 m^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2, \quad n \in [0, \infty). \quad (14.31)$$

Se obține deci,

$$A(s_n) = \delta_a \operatorname{ch} j(2n+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a} = \delta_a \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{a},$$

$$s_n B'(s_n) = -\frac{1}{2}(2n+1) \frac{\pi}{2} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}(2n+1) \frac{\pi}{2} (-1)^n,$$

$$A(0) = \delta_a \text{ și } B(0) = 1;$$

rezultă astfel :

$$\delta = \frac{U \cdot \gamma}{l} \left[ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \varepsilon^{-\beta_n t} \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{x}{a} \right],$$

unde s-a notat

$$\beta_n = \frac{(2n+1)^2}{a^2 m^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4\pi\mu\gamma} \left[ \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \right]^2.$$

Cunoscînd expresia densității de curent, se poate determina expresia curentului; se obține

$$i = 2b \int_{-a}^a \delta dx = \frac{4abU\gamma}{l} \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{-\beta_n t}}{(2n+1)^2} \right].$$

Rezistența în regim permanent, în curent continuu fiind

$$R_0 = \frac{l}{4ab\gamma},$$



conductanța transitorie a conductorului este

$$g = \frac{I}{U} = \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n t}}{(2n+1)^2} \right] G_c.$$

Rezultă dar, că în timpul regimului tranzitoriu, rezistența conductorului este mai mare decât în curent continuu; aceasta înseamnă că secțiunea utilizată va fi de forma unei cruste periferice, de grosime  $\alpha$ , a cărei valoare nulă la momentul inițial, crește în funcție de timp. Scriind că și în acest caz efectul JOULE este același, adică

$$g \cdot 2a \cdot 2b = 2\alpha \cdot 2b G_c$$

rezultă

$$\alpha = \frac{g}{G_c} a = a \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta_n t}}{(2n+1)^2} \right].$$

Pe de altă parte, factorul de amortizare

$$\beta_n = \frac{1}{4\pi\mu\gamma} \left[ \frac{2n+1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \right]^2,$$

fiind invers proporțional cu permeabilitatea  $\mu$  și cu conductivitatea  $\gamma$ , timpul de stabilire a unui curent continuu va fi mai mare într-o bară de fier decât într-una de cupru.

Este interesant de observat că, întrucît la  $t = 0$   $\alpha = 0$  și la  $t = \infty$   $\alpha = a$ , rezultă că un curent staționar se stabilește în secțiunea respectivă de la periferie către interior, ceea ce confirmă și în acest mod cele stabilite în paragraful 14.1.2.4.

#### 14.1.4. REPARTIȚIA CURENTULUI ELECTRIC ÎN BARE MASIVE AȘEZATE ÎN CRESTĂTURI

14.1.4.1. Generalități. Fie o bară foarte lungă — în raport cu dimensiunile liniare ale secțiunii — așezată în fundul unei crestături dreptunghiulare, tăiată într-un material feromagnetic a cărui saturație este redusă astfel, încît permeabilitatea sa poate fi presupusă infinit mare față de permeabilitatea aerului (fig. 14.4,a); în aceste condiții, liniile de cîmp produse de curentul ce străbate conductorul masiv, sînt sensibil linii drepte perpendiculare pe cele două fețe ale crestăturii. Fundul crestăturii fiind o suprafață echipotențială magnetică, conductorul se găsește în aceleași condiții ca și un conductor de grosime dublă și de lățime infinită așezat în aer (fig. 14.4,b). Se obține aceeași situație ca cea studiată în paragraful 14.1.2.2.

Rezultă, că în acest caz curentul tinde să părăsească fundul crestăturii și să se localizeze în partea superioară a conductorului.

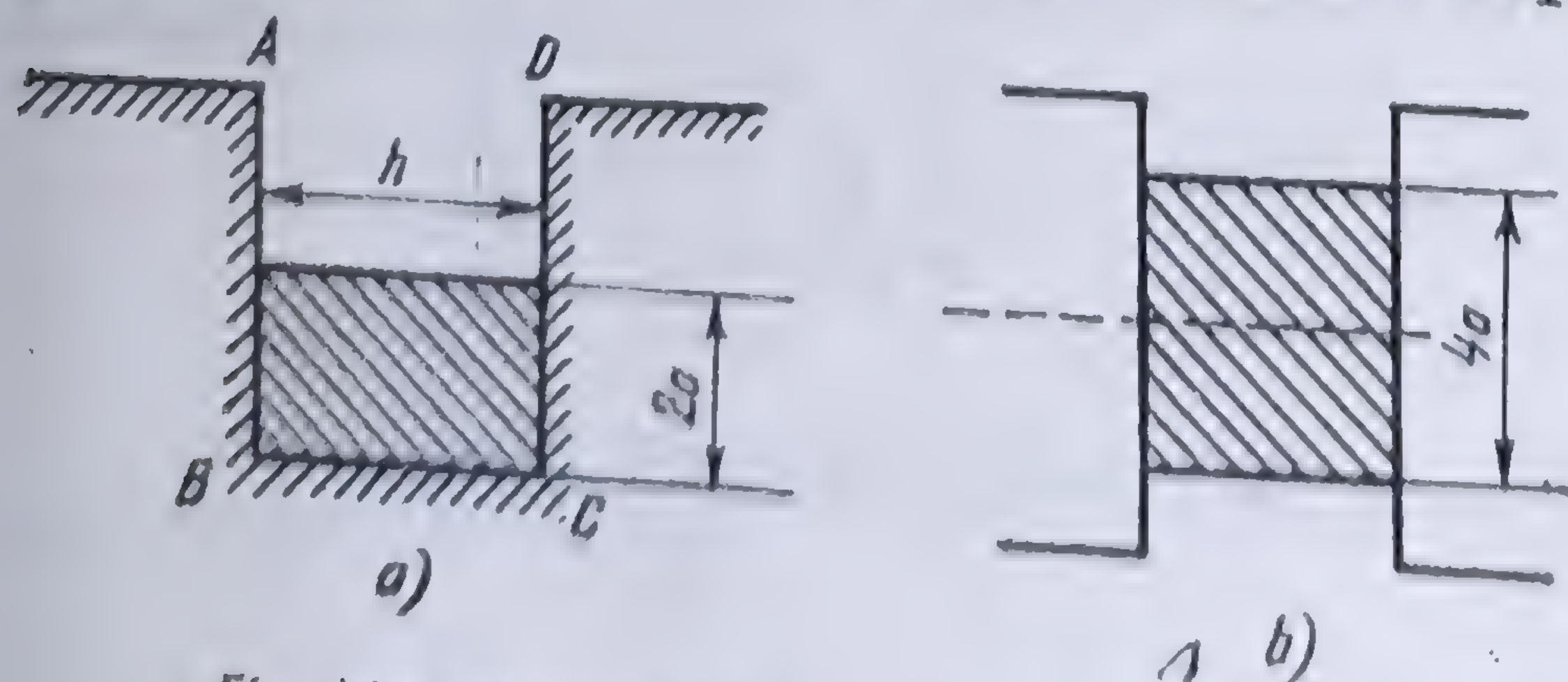


Fig. 14.4. Bară masivă în fund de crestătură:  
a) bara simplă; b) bara și imaginea ei.



14.1.4.2. Calculul densității de curent în conductoarele așezate într-o creștătură de curenți alternativi. Să considerăm o creștătură — de exemplu creștătura unei mașini electrice — în care se găsește așezate bare identice de secțiune dreptunghiulară având grosimea  $a$  și înălțimea  $h$ , formând  $p$  straturi (fig. 14.5). Să presupunem că fiecare conductor este străbătut respectiv de curenți alternativi sinusoidali  $\underline{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n, \dots, p$ ) diferiți între ei. Fie  $\underline{H}$  intensitatea cîmpului magnetic într-un plan situat la distanța  $x$  de fundul creștăturii\* și  $\underline{\delta}$  densitatea de curent căutată. Calculul se simplifică dacă se presupune că întreaga secțiune a creștăturii este ocupată de conductoare. În acest caz însă, trebuind ca solenafia să nu se schimbe, rezultă că va trebui să se mărească rezistivitatea barelor în raportul  $h/b$  și deci, conductivitatea barelor se va micșora în raportul  $b/h$ .

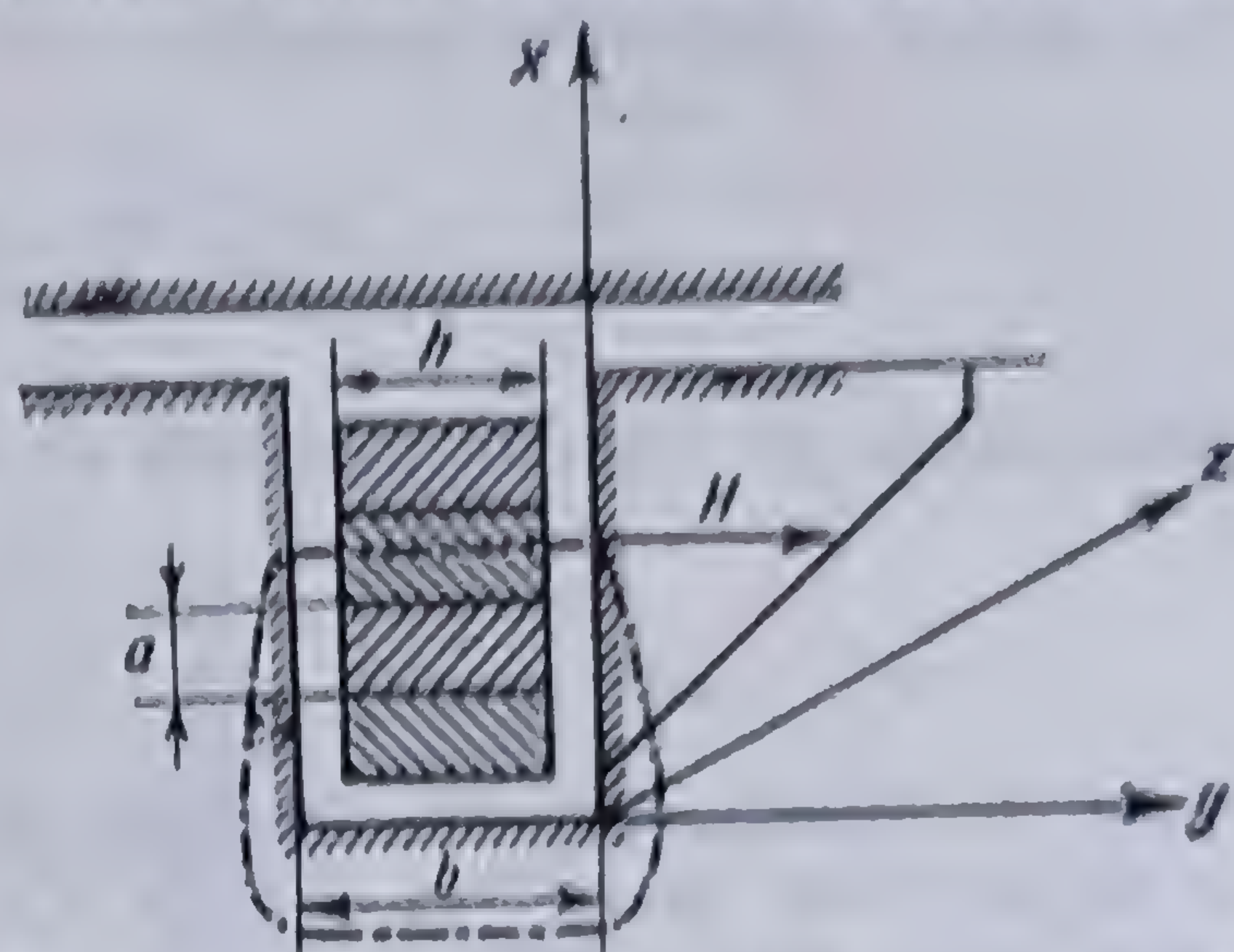


Fig. 14.5. Creștătură deschisă conținând mai multe conductoare parcurse de curenți alternativi.

Luînd un sistem de axe în care  $ox$  este paralelă cu pereții verticali ai creștăturii, axa  $oy$  paralelă cu fundul creștăturii și axa  $oz$  de-a lungul barelor și ținînd seama de ipotezele făcute ( $a \ll h$ ), rezultă\*\* că  $\underline{E}_x = \underline{E}_y = 0$  și  $\underline{H}_x = \underline{H}_y = 0$ , existînd astfel componente pentru  $\underline{E}$  (și deci și pentru  $\underline{\delta}$ ) numai de-a lungul axei  $z$  și pentru  $\underline{H}$  numai de-a lungul axei  $y$ . În acest caz, ecuațiile (14.1) și (14.2) se vor scrie

$$\frac{\partial \underline{H}}{\partial x} = \underline{\delta} = \frac{b}{h} \gamma \underline{E}, \quad (14.32)$$

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial x} = j \omega \mu \underline{H}. \quad (14.33)$$

Eliminînd pe  $\underline{E}$  între aceste două relații se obține

$$\frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial x^2} = j \frac{b}{h} \omega \mu \gamma \underline{H} = k^2 \underline{H},$$

unde am notat  $k^2 = (1+j)m'$  și  $m' = \sqrt{\frac{b}{h} \omega \mu \gamma}$ , care integrată dă

$$\underline{H} = \underline{A} \operatorname{ch} \underline{k}x + \underline{B} \operatorname{sh} \underline{k}x. \quad (14.34)$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se procedează în modul următor: Luînd originea axelor de coordonate la baza conductorului de ordinul  $i$  se obține pentru  $x = 0$  și  $x = a$ , corespunzător suprafeței superioare a aceluiași conductor,  $\underline{H}_0 = \underline{A}$  și  $\underline{H}_a = \underline{A} \operatorname{ch} \underline{k}a + \underline{B} \operatorname{sh} \underline{k}a$ , de unde rezultă valoarea constantei  $\underline{B}$ . Pe de altă parte, aplicînd legea circuitului magnetic o dată pe la baza acestui conductor și a doua oară pe la partea superioară a lui se găsește

$$\underline{H}_0 = \frac{J_{i-1}}{b} \quad \text{și} \quad \underline{H}_a = \frac{J_i}{b}$$

\* Vezi 3.2.5.3.

\*\* Vezi 14.1.2.1.



unde am notat

$$\underline{J}_{i-1} = \sum_{i=0}^{i-1} \underline{I}_i \text{ și } \underline{J}_i = \underline{J}_{i-1} + \underline{I}_i. \quad (14.35)$$

Cu aceste elemente, expresia (14.34) a intensității cîmpului magnetic devine

$$\underline{H} = \frac{\underline{J}_{i-1}}{b} \cdot \frac{\text{sh} \underline{k}(a-x)}{\text{sh} \underline{k} a} + \frac{\underline{J}_i \text{sh} \underline{k} x}{b \text{sh} \underline{k} a}.$$

Densitatea de curent căutată se deduce din relația (14.32) și se obține

$$\underline{\delta} = \frac{\underline{k} \underline{J}_i \text{ch} \underline{k} x}{b \text{sh} \underline{k} a} - \frac{\underline{k} \underline{J}_{i-1} \text{ch} \underline{k}(a-x)}{b \text{sh} \underline{k} a}. \quad (14.36)$$

Dacă în relația (14.36) se face pe rînd  $i = 1, 2, \dots, p$  se obține repartitia densității de curent în fiecare din cei  $p$  conductori așezați în creștătură. În particular cînd

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \dots = \underline{I}_p = \underline{I},$$

repartitia densității în conductorul de ordinul  $p$  se obține făcînd în relațiile (14.35)  $\underline{J}_{p-1} = (p-1)\underline{I}$  și  $\underline{J}_p = p\underline{I}$ , găsindu-se

$$\underline{\delta} = \frac{\underline{k} \underline{I}}{b} \cdot \frac{p \text{ch} \underline{k} x - (p-1) \text{ch} \underline{k}(a-x)}{\text{sh} \underline{k} a}, \quad (14.37)$$

relație cunoscută\*.

Pierderile prin efect JOULE într-o porțiune din conductorul de ordinul  $i$  de înălțime  $dx$  se obțin pornind de la relația (2.28); pierderile totale în conductor sînt

$$P = \frac{hl}{\gamma} \int_0^a \delta^2 dx,$$

unde  $l$  este lungimea conductorului.

Dacă se notează cu  $R_i$  rezistența efectivă a conductorului, definită prin relația

$$P = R_i I_i^2$$

și cu

$$R_0 = \frac{1}{\gamma ah}$$

rezistența în curent continuu, se obține\*\*

$$\frac{R_i}{R_0} = \varphi(m'a) + (i-1) i \psi(m'a) \quad (14.38)$$

în care

$$\varphi(m'a) = m'a \frac{\text{sh} 2m'a + \sin 2m'a}{\text{ch} 2m'a - \cos 2m'a}$$

\* Vezi [161] pag. 322.

\*\* Vezi [161] pag. 323.



și

4.35)

$$\psi(m'a) = 2m'a \frac{\text{sh } m'a - \sin m'a}{\text{ch } m'a + \cos m'a},$$

evine

4.36)

rtiția  
ă. În

atiile

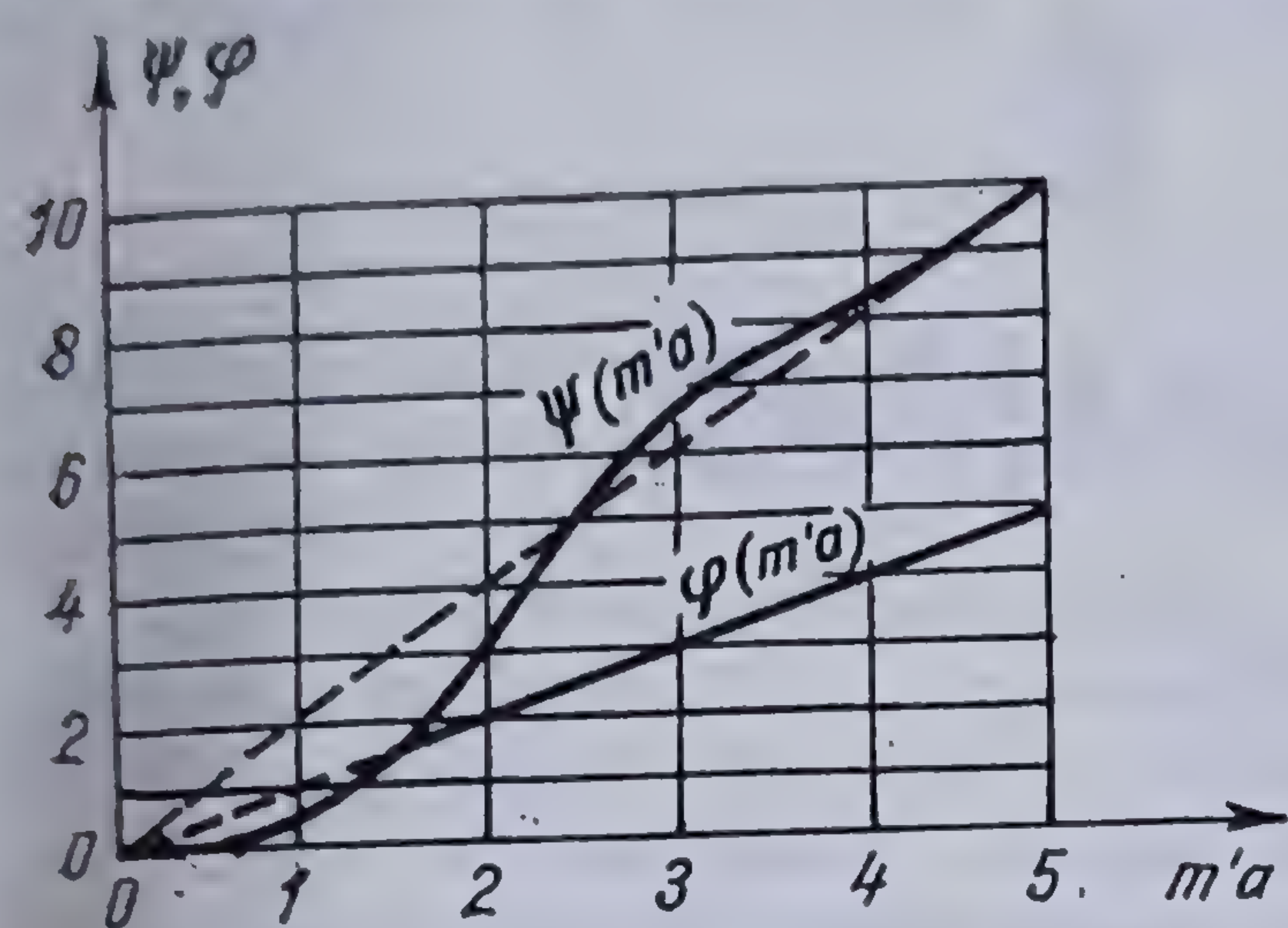


Fig. 14.6. Variația funcțiilor  $\varphi(m'a)$  și  $\psi(m'a)$ .

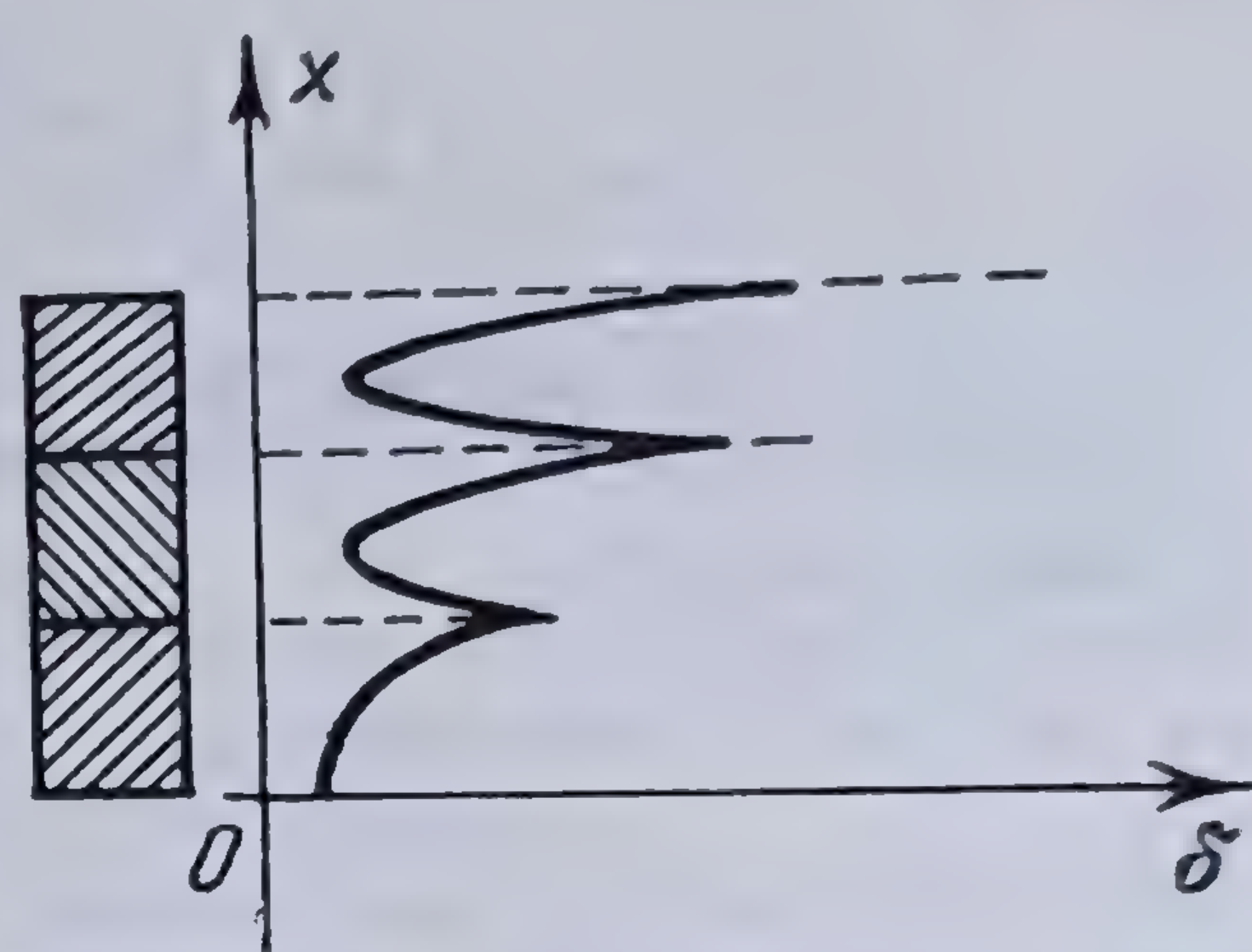


Fig. 14.7. Distribuția de curent în cele trei conductoare din crestătură.

nul  $i$   
nduc-

dedesubtul conductorului considerat și care sînt străbătuți de curenții respectivi. În figura 14.6 este dată variația funcțiilor  $\varphi(m'a)$  și  $\psi(m'a)$ , iar în figura 14.7 este dată repartiția densității de curent în conductoarele dintr-o crestătură pentru \*\*  $i = 3$  și  $m'a = 3$ .

## 14.2. PROPAGAREA CÎMPULUI MAGNETIC ÎN LAME

### 14.2.1. STABILIREA ECUAȚIEI GENERALE

prin

Fie o bară plată de lungime infinită, așezată într-un cîmp magnetic variabil, a cărui linii de cîmp sînt în orice punct, normale pe secțiunea  $ABCD$  a barei (fig. 14.8). Acest cîmp poate fi produs de un curent variabil care străbate o bobină așezată în jurul barei. Cîmpul acesta va induce în bară curenți, care din motive de simetrie și deoarece s-a presupus că lățimea  $2a$  a barei este mică față de înălțimea sa  $h$ , vor avea un traseu paralel cu axa  $yy'$  și se vor închide prin bucle rectangulare. Ne propunem să găsim legea de repartiție a inducției magnetice în bară.

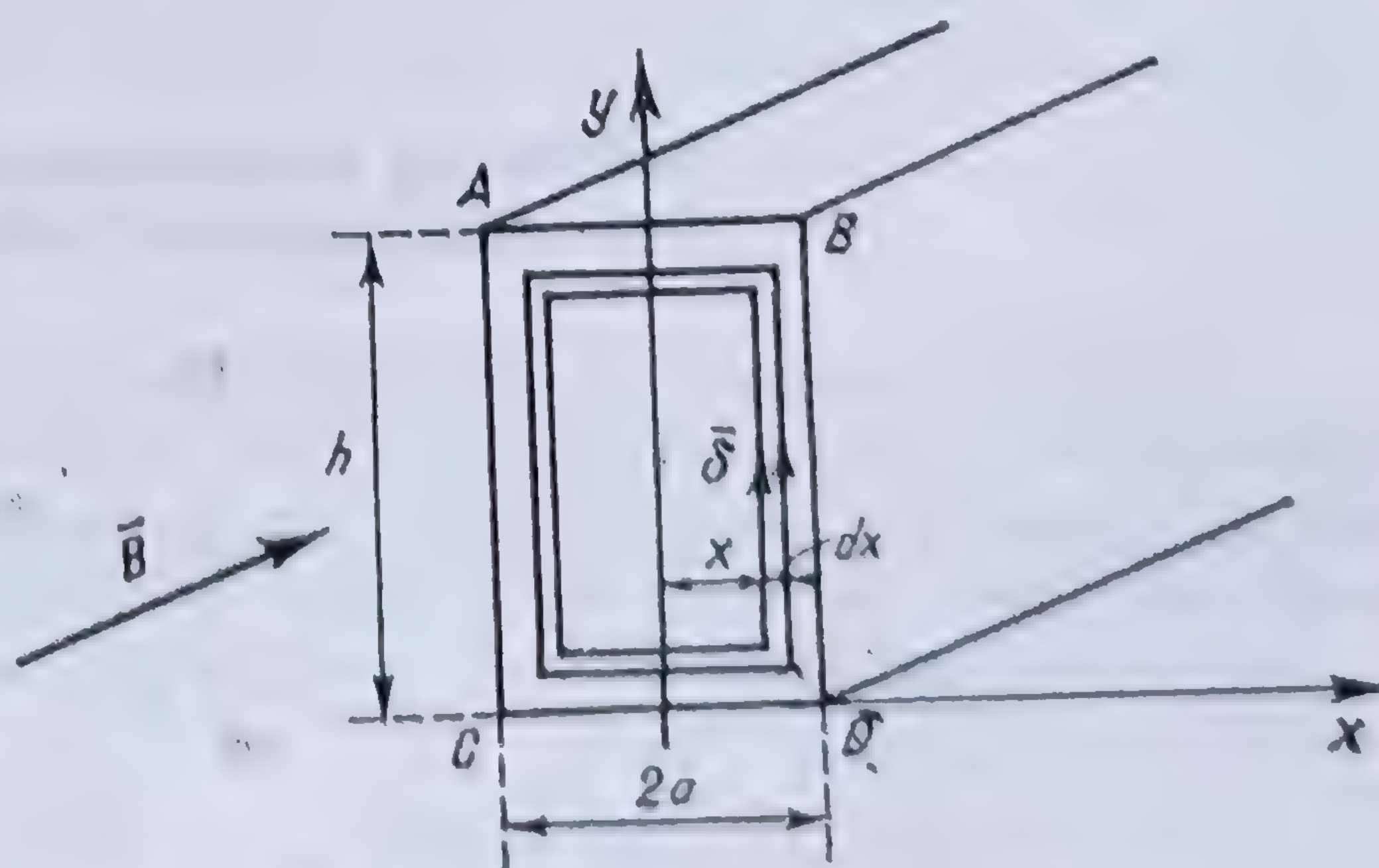


Fig. 14.8. Lamă plată în cîmpul magnetic.

\* Vezi [161] pag. 324.



Pornind de la ecuațiile lui MAXWELL, în care se presupune că densitatea curentului de deplasare este neglijabilă, împărțind ecuația (14.1) cu  $\gamma$  și ținând seama de legile de material corespunzătoare, se obține

$$\frac{1}{\mu\gamma} \operatorname{rot} \bar{B} = \bar{E};$$

introducând această valoare în ecuația (14.2) rezultă

$$\frac{1}{\mu\gamma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{B} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

sau

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{B} = -\Delta \bar{B} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{B} = -\mu\gamma \frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

de unde, rezultă

$$\Delta \bar{B} = \mu\gamma \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (14.39)$$

care este ecuația de propagare a câmpului de inducție magnetică pe secțiunea plană a lamei considerate. Această ecuație este de aceeași formă cu ecuația (14.4) și în consecință, legea de propagare a câmpului de inducție magnetică este analoagă cu aceea a distribuirii densității de curent electric pe secțiunea dreaptă, a unui conductor masiv, de formă dreptunghiulară.

Și în acest caz, ținând seama că  $2a \ll h$ , se poate scrie

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu\gamma \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (14.40)$$

În același mod, se găsește și ecuația repartiției densității curentului de inducție care apare în lama respectivă

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} = \mu\gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (14.41)$$

#### 14.2.2. INTEGRAREA ECUAȚIILOR DE PROPAGARE ÎN CAZUL UNUI REGIM PERMANENT ARMONIC SINUSOIDAL

Aplicând rezultatele obținute în cazul studiului distribuirii curentului electric într-un conductor masiv cu secțiunea dreptunghiulară\* se vor găsi ușor soluțiile problemei de față. Fie  $B_a$  inducția magnetică pe suprafețele exterioare ale barei în cazul unui regim permanent armonic sinusoidal de pulsație  $\omega$ ; inducția magnetică la o distanță  $x$  de axa lamei va fi

$$B = B_a \frac{\operatorname{ch} (1+j)mx}{\operatorname{ch} (1+j)ma} = B_a \frac{\operatorname{ch} mx \cos mx + j \operatorname{sh} mx \sin mx}{\operatorname{ch} ma \cos ma + j \operatorname{sh} ma \sin ma}, \quad (14.42)$$

\* Vezi 14.1.2.2.



în care,

$$m = \sqrt{\frac{\omega \mu \gamma}{2}}.$$

Amplitudinea inducției magnetice este

$$B = B_a \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2mx + \cos 2mx}{\operatorname{ch} 2ma + \cos 2ma}},$$

iar defazajul său față de  $\underline{B}_a$  este

$$\psi_B = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{th} mx \operatorname{tg} mx) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{th} ma \operatorname{tg} ma).$$

Variația repartității cîmpului de inducție magnetică în secțiunea lamei este dată de aceeași figură 14.3, fiind analoagă cu variația repartității de curent în secțiunea respectivă.

În cazul cînd  $\omega$  tinde către zero,  $m$  tinde de asemenea către zero și  $\underline{B}$  tinde către  $\underline{B}_a$ , oricare ar fi  $x$ ; în consecință, inducția magnetică este uniformă pe întreaga secțiune, ceea ce corespunde curentului continuu.

Dacă  $ma$  este mare, corespunzînd fie unei grosimi mari a lamei, fie unei frecvențe ridicate, fie unei permeabilități mari a materialului, inducția magnetică în centrul secțiunii tinde către zero și inducția maximă se va găsi la periferia conductorului \*.

#### 14.2.3. IMPEDANȚA APARENTĂ A CIRCUITULUI DE EXCITAȚIE

14.2.3.1. Determinarea reluctanței proprii a lamei. Fluxul total care străbate secțiunea de lățime  $2a$  și de înălțime  $h$  va fi

$$\underline{\Phi} = h \int_{-a}^a \underline{B} dx = \frac{2 h \underline{B}_a}{(1+j)m} \operatorname{th} (1+j) ma.$$

Inducția periferică  $B_a$  nu este modificată de curenții induși în masa lamei; ea este aceeași cu aceea care ar produce o forță magnetomotoare constantă, de aceeași mărime cu amplitudinea forței magnetomotoare considerată; fluxul continuu corespunzător acestei forțe magnetomotoare constante va fi deci

$$\Phi_0 = 2ah B_a$$

și în consecință,

$$\frac{\underline{\Phi}}{\Phi_0} = \frac{1}{(1+j)ma} \operatorname{th} (1+j) ma;$$

reluctanța efectivă, raportată la reluctanța în curent continuu \*\* este

$$\underline{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_0 (1+j) ma \operatorname{cth} (1+j) ma = \mathcal{R}_0 (1+j) ma \frac{\operatorname{sh} 2ma - j \sin 2ma}{\operatorname{ch} 2ma - \cos 2ma}. \quad (14.43)$$

\* Vezi și 14.1.2.4

\*\* Din  $\underline{\mathcal{R}} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \underline{\Phi}}$  și  $\mathcal{R}_0 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Phi_0}$  rezultă  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_0 \frac{\Phi_0}{\underline{\Phi}}$ .



Ea cuprinde o parte reală (corespunzând unui flux în fază cu forța magnetomotoare)

$$\mathfrak{R}_1 = ma R_0 \frac{\text{sh } 2ma + \sin 2ma}{\text{ch } 2ma - \cos 2ma}$$

și o parte complexă (corespunzând unui flux în cuadratură și în urmă cu forța magnetomotoare)

$$\mathfrak{R}_2 = ma R_0 \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma - \cos 2ma}.$$

**14.2.3.2. Impedanța aparentă a circuitului de excitație.** Fie un circuit magnetic închis, format din tole și excitat cu ajutorul unei înfășurări avînd  $N$  spire (fig. 14.9). Fie  $\underline{I}$  curentul de excitație și  $\underline{U}$  tensiunea sinusoidală aplicată la borne,  $R$  rezistența înfășurării. Dacă  $\underline{\Phi}$  este fluxul din circuitul magnetic, atunci se poate scrie

$$\underline{U} = R\underline{I} + jN\underline{\Phi}\omega.$$

Însă,

$$\underline{\Phi} = \frac{N\underline{I}}{\mathfrak{R}} \text{ și deci } \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j \frac{N^2\omega}{\mathfrak{R}}.$$

Înlocuind pe  $\mathfrak{R}$  prin valoarea sa dată de relația (14.43), se obține

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{R}} &= \frac{1}{\mathfrak{R}_0 (1 + j)ma \text{cth}(1 + j)ma} = \\ &= \frac{1 - j}{2ma \mathfrak{R}_0} \text{th}(1 + j)ma = \frac{1 - j}{2ma \mathfrak{R}_0} \frac{\text{sh } 2ma + j \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} \end{aligned}$$

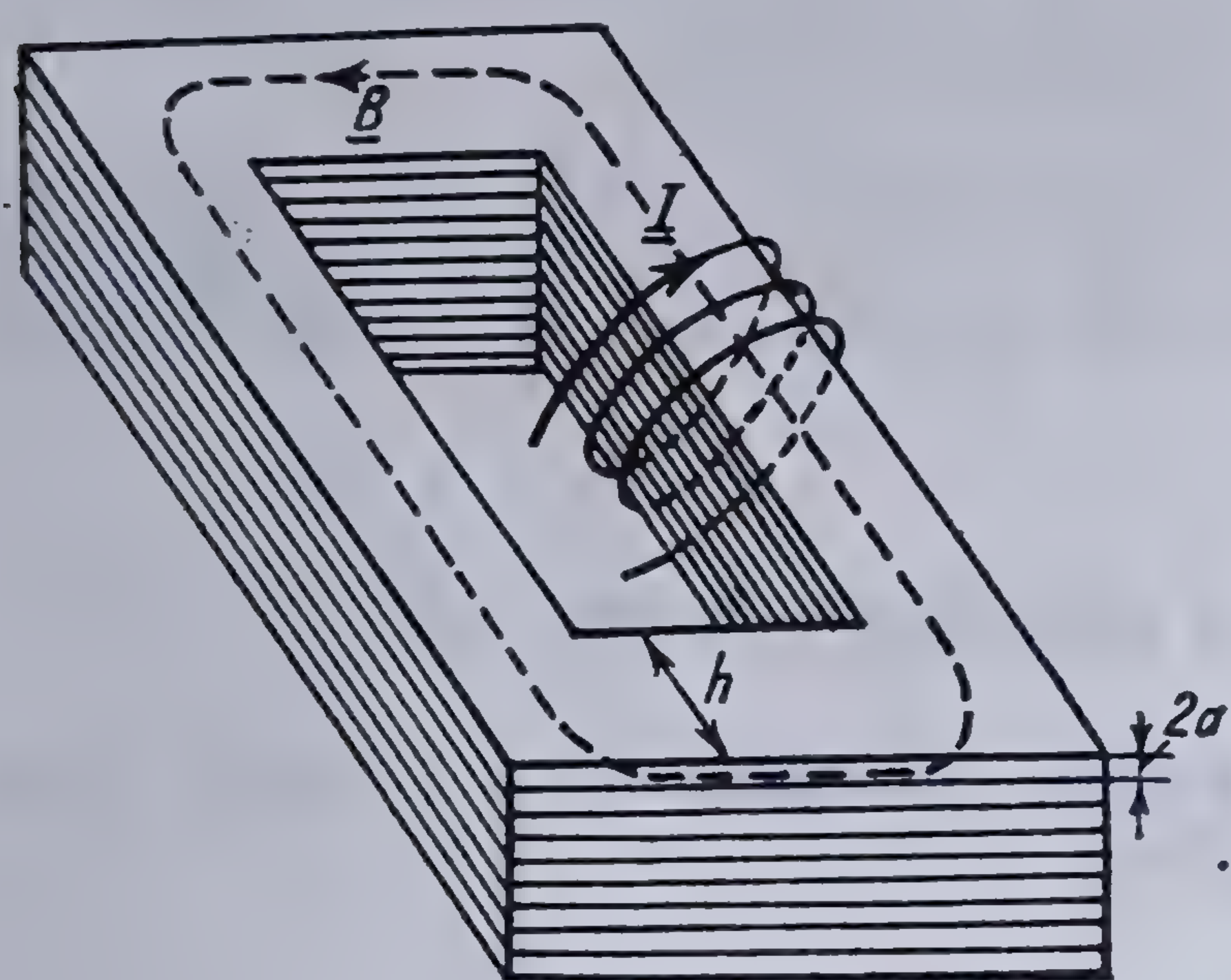


Fig. 14.9. Circuit magnetic excitat.

și deci

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \frac{1 + j}{2ma} \cdot \frac{N^2\omega}{\mathfrak{R}_0} \frac{\text{sh } 2ma + j \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}. \quad (14.44)$$

Observînd că  $\frac{N_0}{\mathfrak{R}} = L_0$  este inductanța bobinei în cazul cînd n-ar exista fier, relația (14.44) se poate scrie

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \frac{1 + j}{2ma} L_0 \omega \frac{\text{sh } 2ma + j \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} = \\ &= \left[ R + \frac{L_0 \omega}{2ma} \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} \right] + j \left[ \frac{L_0 \omega}{2ma} \frac{\text{sh } 2ma + \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} \right]. \quad (14.45) \end{aligned}$$

Din relația (14.45) rezultă, că în cazul unei bobine cu miez de fier, rezistența aparentă este mărită cu

$$R_1 = \frac{L_0 \omega}{2ma} \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma},$$



care tinde către  $\frac{L_0\omega}{2ma}$  când  $ma$  întrece câteva unități; reactanța aparentă  $L\omega$  este însă micșorată, tinzând tot către  $\frac{L_0\omega}{2ma}$  când  $ma$  crește.

Într-adevăr, s-a văzut că \*, pentru  $ma = 2$ ,  $\text{sh } 2ma = 27,29$ ,  $\text{ch } 2ma = 27,3$ ,  $\sin 2ma = 0,76$ ,  $\cos 2ma = 0,65$  și în consecință, liniile trigonometrice pot fi neglijate față de cele hiperbolice și  $\text{tg h } 2ma = 1$ .

În figura 14.10 este dată variația mărimilor \*\*

$$\frac{R_1}{L_0\omega} = \frac{1}{2ma} \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} \quad \text{și} \quad \frac{L\omega}{L_0\omega} = \frac{1}{2ma} \frac{\text{sh } 2ma + \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}.$$

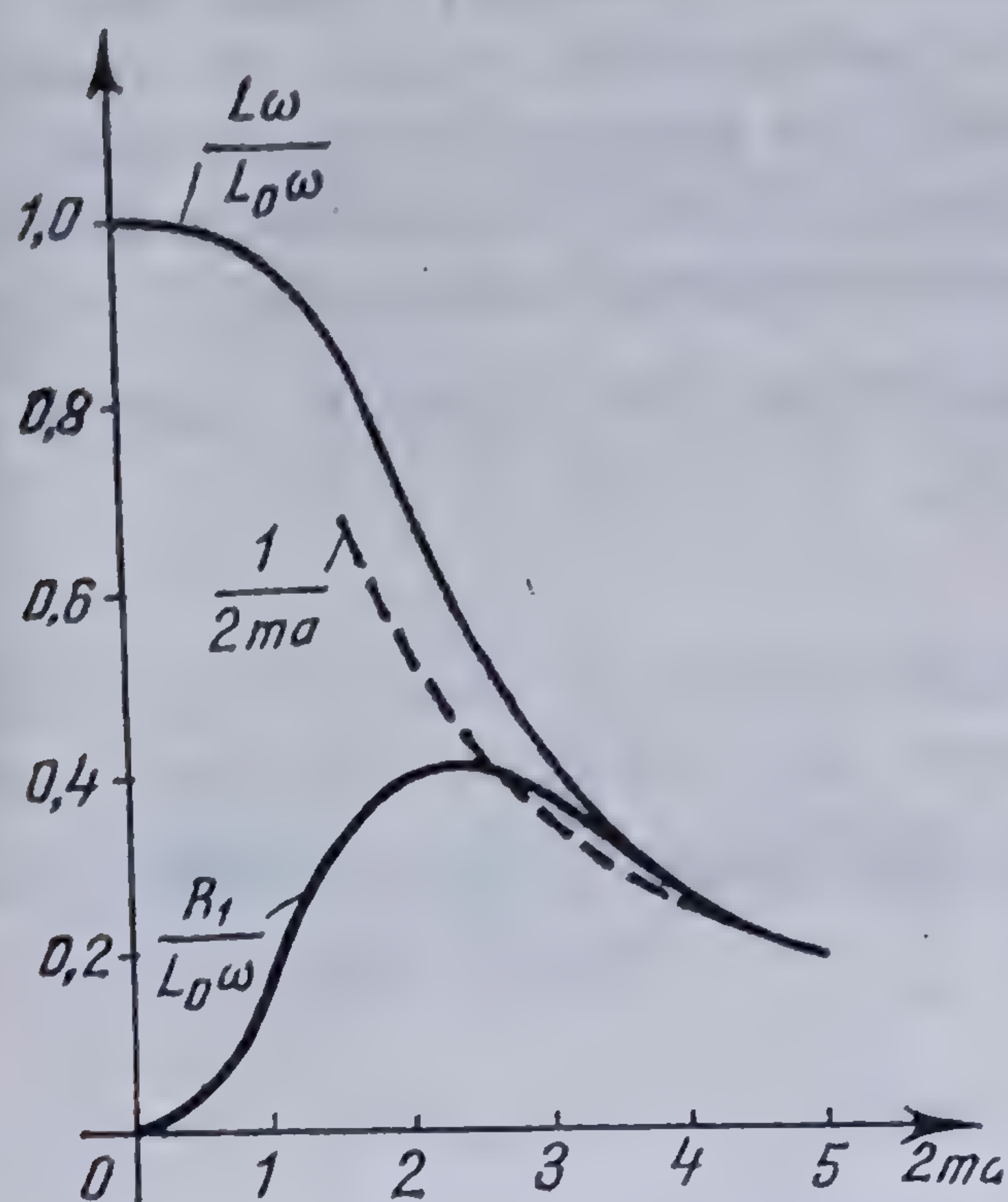


Fig. 14.10. Variația mărimilor  $R_1/L_0\omega$  și  $L\omega/L_0\omega$  în funcție de  $2ma$ .

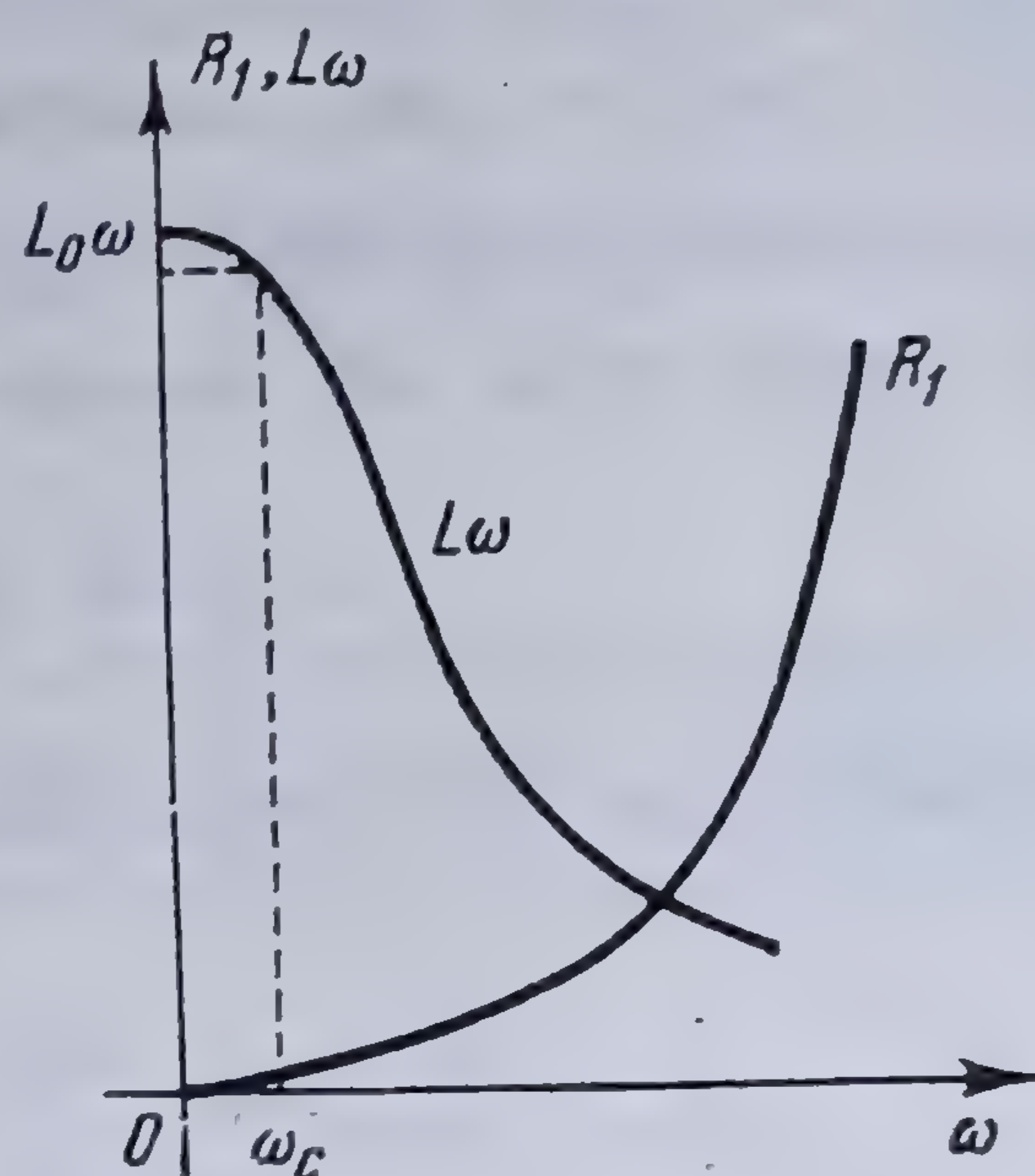


Fig. 14.11. Variația mărimilor  $R$  și  $L\omega$  în funcție de  $\omega$ .

Dacă  $ma$  este foarte mic, atunci \*\*\*

$$\frac{R_1}{L_0\omega} \cong \frac{(ma)^2}{6} = \frac{a^2}{3} \mu\gamma\omega \quad \text{și} \quad \frac{L\omega}{L_0\omega} = 1.$$

Dacă  $ma$  este mare, rezultă

$$R_1 \cong L\omega \cong \frac{L_0\omega}{2ma} = \frac{L_0}{2a} \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

În figura 14.11 sînt date \*\*\*\* curbele de variație a lui  $R_1$  și  $L\omega$  în funcție de pulsția  $\omega$ .

Din figura 14.10 se vede că limita de la care scăderea reactanței este importantă, cu alte cuvinte scăderea fluxului produs de bobina de excitație este mare, este pentru  $2ma = 1$ . Această valoare definește, pentru o anumită grosime de toată frecvența critică după care utilizarea tolei este neeconomică; valoarea acestei frecvențe se deduce din relația

$$2ma = 1$$

\* Vezi 14.1.2.3. exemplul numeric.

\*\* Vezi [115, II], pag. 249.

\*\*\* Se obține prin dezvoltarea în serie a funcțiilor trigonometrice și hiperbolice.

\*\*\*\* Vezi [115, II] pag. 249.



și este

$$f_c = \frac{1}{(2a)^2 \pi \mu \gamma}.$$

Reciproc, pentru o frecvență dată se definește în același mod grosimea critică a unei tole după care aceasta începe să fie prost utilizată.

#### 14.2.4. PIERDERI DE ENERGIE IN CIRCUITELE MAGNETICE

14.2.4.1. Pierderi prin curenți FOUCAULT în miezuri construite din tole feromagnetice. Efectul pelicular descris în paragraful 14.2.1. se manifestă și în pachetele de tole feromagnetice care constituie miezurile magnetice; curenții de inducție — curenții FOUCAULT — îmbrățișează fluxul de inducție în interiorul fiecărei tole. Pentru a găsi ecuația care descrie repartitia de curenți în interiorul tolei, se pornește de la prima ecuație a lui MAXWELL (14.1) pentru care  $\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \ll \gamma \bar{E}$  și care se poate pune sub forma

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{B}. \quad (14.46)$$

Ținând seama de modul cum a fost ales sistemul de referință, se poate scrie

$$B_x = B_y = 0; \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \text{ și rezultă } \delta_x = \delta_z = 0$$

și deci, ecuația (14.46) se poate scrie, în cazul unui regim permanent armonic sinusoidal

$$\underline{\delta} = - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \underline{B}}{\partial x}.$$

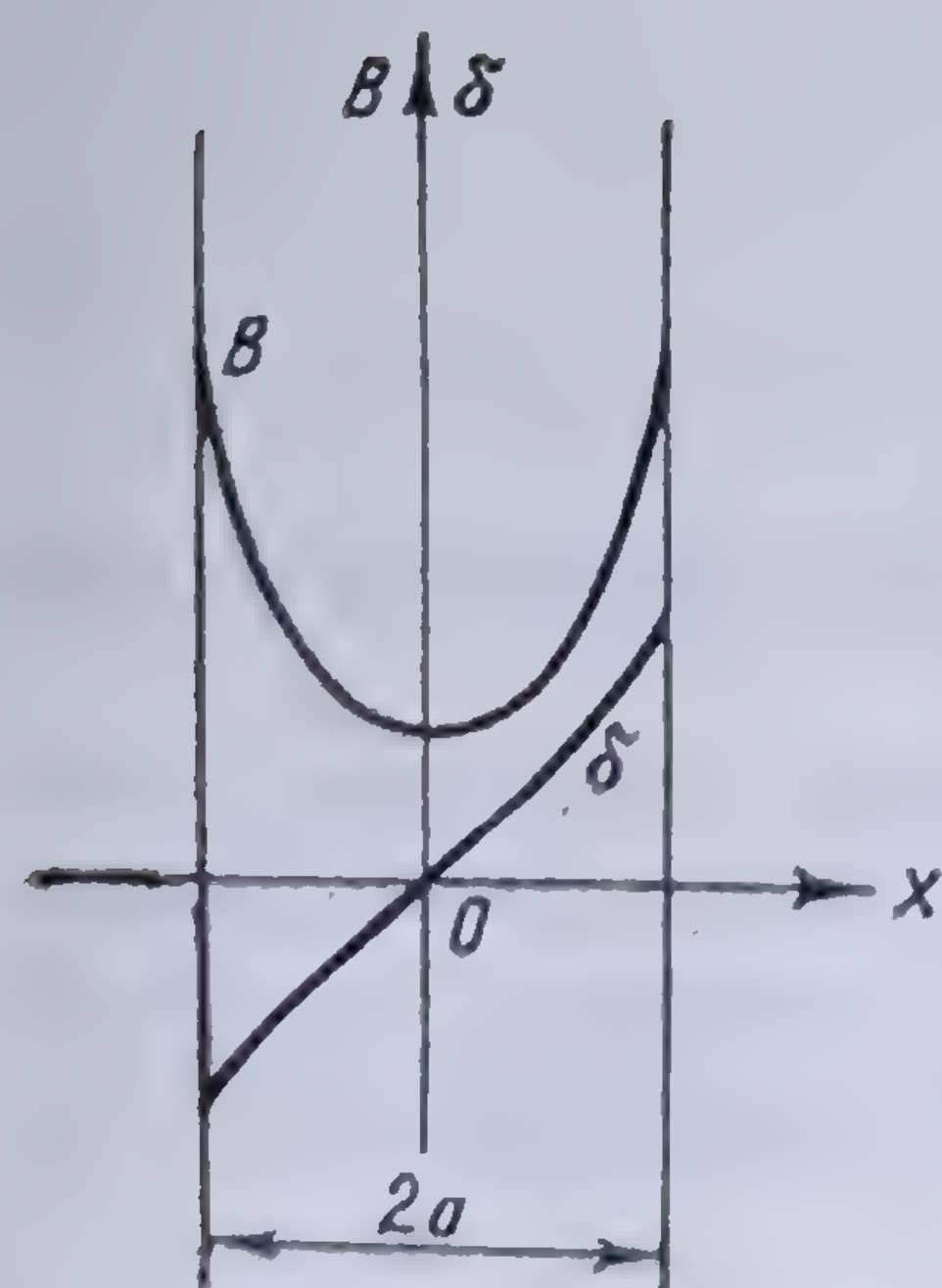


Fig. 14.12. Distribuția câmpului de inducție magnetică și a densității de curent într-o toală de fier.

Ținând seama de valoarea lui  $B$  dată de relația (14.42) se obține

$$\underline{\delta} = - \frac{(1+j)m}{\mu} B_a \frac{\text{sh } (1+j)mx}{\text{ch } (1+j)ma}, \quad (14.47)$$

a cărei valoare efectivă este

$$\delta = \frac{m\sqrt{2}}{\mu} B_a \sqrt{\frac{\text{ch } 2mx - \cos 2mx}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma}}. \quad (14.48)$$

În figura 14.12 sînt date \* distribuția câmpului de inducție magnetică și a densității de curent într-o secțiune dreaptă a tolei; liniile de câmp de inducție sînt împinse din centru către exterior.

\* Vezi [161] pag. 327



Pierderile de energie în tola de fier pe unitatea de timp și de volum sînt date de relația (2.28)

$$p_{Fe} = (1/\gamma) \delta_{med}^2 = \frac{1}{2a\gamma} \int_{-a}^a \delta^2 dx$$

sau, ținînd seama de relația (14.48) și punînd  $B_M = \sqrt{2} B_a$  inducția maximă la periferia lamei, se obține

$$p_{Fe} = \frac{mB_M^2}{2\mu^2 a\gamma} \cdot \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma};$$

înlocuind pe  $m$  cu valoarea sau  $\sqrt{\frac{1}{2} \omega \mu \gamma}$ , rezultă

$$p_{Fe} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{f}{\mu^3 \gamma}} \cdot \frac{B_M^2}{a} \cdot \frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} \cdot 10^{-6} \text{ W/cm}^3, \quad (14.49)$$

toate mărimile fiind exprimate în unități MKSA.

Dacă  $2ma$  este suficient de mare pentru a se putea neglija funcțiile trigonometrice față de cele hiperbolice și confunda  $\text{tg } 2ma$  cu unitatea, cu alte cuvinte dacă coaja fictivă  $\alpha = \frac{1}{m}$  este cel mult 1/4 din grosimea lamei \*, atunci

$$P_F \cong \sqrt{\frac{f}{\mu^3 \gamma}} \frac{B_M^2 \sqrt{\pi}}{2a} 10^{-6} \text{ W/cm}^3. \quad (14.50)$$

Dezvoltînd în serie funcțiile trigonometrice și hiperbolice din relația (14.49), se obține:

$$\frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} = \frac{\frac{(2ma)^3}{3!} + \frac{(2ma)^7}{7!} + \dots}{1 + \frac{(2ma)^4}{4!} + \dots}$$

Presupunînd pe  $ma$  foarte mic astfel, încît să putem neglija pe  $\frac{(2ma)^4}{4!}$  față de unitate și oprindu-ne la primul termen al dezvoltării seriei de la numărător, rezultă

$$\frac{\text{sh } 2ma - \sin 2ma}{\text{ch } 2ma + \cos 2ma} \cong \frac{(2ma)^3}{3!}$$

și deci,

$$p_{Fe} = \frac{\pi^2}{6} (2a)^2 \gamma f^2 B_M^2 10^{-6} \text{ W/cm}^3. \quad (14.51)$$

\* Vezi 14.1.2.3.



În cazul cînd  $ma$  este mare, conductivitatea intră la numitorul expresiei (14.50) a pierderilor; pierderile cresc cu temperatura. Dacă  $ma$  este mic, conductivitatea intră la numărătorul expresiei pierderilor (14.51) și deci, acestea scad cu temperatura.

Practic aceste pierderi se calculează cu o relație de forma

$$p_F = C_F \left( \frac{f}{100} \right)^2 B^2$$

în care  $C_F$  este un coeficient dat în tabloul 14.2.

Pentru micșorarea pierderilor de putere prin curenți turbionari, în curent alternativ circuitul magnetic se realizează în condiții speciale și anume:

— Construcția este astfel concepută, încît să limiteze posibilitățile de închidere a curenților turbionari, ceea ce în instalațiile de joasă frecvență se obține executînd circuitul magnetic din table de oțel (tole) așezate paralel cu liniile de cîmp ale cîmpului și izolate între ele cu hîrtie sau lac; metoda are dezavantajul că scumpește construcția și mărește secțiunea totală necesară circuitului magnetic, prin introducerea straturilor izolante, inutile din punct de vedere al conducerii fluxului. În același scop, în instalațiile de frecvență mare circuitul magnetic se realizează din pulberi feromagnetice presate cu o umplutură neconductoare.

— Materialul magnetic din circuit trebuie să aibă o rezistivitate mare, ceea ce, în cazul tolelor, se realizează prin adaos de siliciu; tolele devin însă casante și se prelucurează greu, producînd o mare uzură a sculelor.

Trebuie menționat că pierderile de putere prin curenți turbionari apar atît în cazul circuitului magnetic imobil situat într-un cîmp magnetic variabil, așa cum s-a presupus mai sus, cît și în cazul unui circuit magnetic mobil situat într-un cîmp magnetic constant, mai ales cînd direcția deplasării este perpendiculară pe direcția liniilor de cîmp ale acestuia. În ultimul caz frecvența  $f$  reprezintă frecvența de magnetizare.

Curenții turbionari produc un flux (de reacție) care, conform principiului lui LENZ, se opune fluxului inițial (inductor) așa încît fluxul  $\Phi$  rezultat în circuitul magnetic este mai mic decît fluxul inductor. Datorită acestui fapt inductanța bobinei se micșorează de asemenea ( $L = \Phi/I$ ).

**14.2.4.2. Pierderi de energie prin fenomenul de histerezis\*.** După cum s-a arătat la descrierea unui ciclu complet de histerezis, pe unitatea de volum a circuitului magnetic se pierde energia

$$W = \oint_0 H dB.$$

Practic această energie se calculează cu o relație de forma  $W = \eta B^n$ , în care  $\eta$  este un coeficient care depinde de natura materialului,  $B$  este valoarea maximă a inducției, iar exponentul  $n$  are valoarea 1,6 pentru  $B < 1$  T sau valoarea 2 pentru  $B > 1$  T. Alți autori propun formule de forma

$$W = \alpha' B + \beta' B^2,$$

în care termenul  $\alpha' B$  poate fi neglijat pentru  $B > 1$  T.

\* Vezi și 3.7.3.4.



În curent alternativ, se descrie un ciclu de histerezis complet la fiecare perioadă, adică în timpul  $T = \frac{1}{f}$ , așa încît la această pierdere de energie, corespunde o putere pierdută

$$p_H = \frac{W}{T} = fW.$$

Menționăm de asemenea că în formulele practice puterea pierdută se raportează nu la unitatea de volum, ci la unitatea de masă (kg) a circuitului magnetic. Una din aceste formule practice este

$$p_H = \frac{f}{100} (\alpha B + \beta B^2) \frac{W}{kg},$$

în care, pentru tolele obișnuite din construcția mașinilor și transformatoarelor, coeficienții  $\alpha$  și  $\beta$  sînt dați de tabloul 14.2.

Tabloul 14.2

	Grosimea tolelor mm	$\alpha$	$\beta$	$C_H$	$C_F$	Pierderi totale pe kilogram la inducția $B = 1$ T W/kg
Tolă de dinam (tole obișnuite)	0,5	0,9	3,5	4,4	5,6	3,6
	0,35	0,9	3,8	4,7	3,2	3,15
Tolă de transformator	0,5	0,4	2,6	3,0	1,2	1,8
	0,35	0,3	2,1	2,4	0,6	1,35

Pentru inducții  $B > 1$  T se folosește relația

$$p_H = C_H \frac{f}{100} B^2,$$

coeficientul  $C_H = \alpha + \beta$  fiind de asemenea indicat în tabloul 14.2.

14.2.4.3. Pierderi în fier. Prin pierderi în fier se înțelege suma

$$p_H + p_F = p_{Fe}$$

a pierderilor prin histerezis și curenți turbionari. Pentru un material și o frecvență dată aceste pierderi depind de valoarea inducției. Pentru caracterizarea calităților materialelor magnetice se obișnuiește să se dea valoarea pierderilor în fier la inducția de 1 T. Pentru cîteva categorii de tole obișnuite, laminate la cald, aceste pierderi sînt indicate în ultima coloană a tabloului 14.2, și au valori de 1,35—3,6 W/kg. Trebuie însă menționat, că în ultimii 15 ani s-au realizat tole laminate la rece, într-un singur sens, supuse unor tratamente termice speciale în atmosferă inertă; la aceste tole, dacă liniile de cîmp ale cîmpului sînt paralele cu direcția laminării cifra de pierderi la inducția de 1 T coboară sub 0,8 W/kg; dacă însă, liniile de cîmp sînt perpendiculare pe direcția laminării se obțin rezultate mai slabe decît cu tolele obișnuite.



În cele ce preced, fenomenele de histerezis și curenți turbionari au fost considerate numai sub aspectul lor negativ. Ele pot avea însă și aplicații practice. Astfel, cu ajutorul curenților turbionari induși de un câmp alternativ într-o placă de aluminiu sau cupru se pot obține motoare mici, cu randament mic, dar simple, pentru acționarea dispozitivelor de înregistrare la contoare, acționarea discurilor de patefon etc., sau se pot obține frâne prin așezarea unui disc mobil de cupru sau de aluminiu într-un câmp constant. Mai importantă este aplicarea la cuptoarele de inducție pentru topit. Aceste cuptoare, conținând încărcătura de topit, sînt înconjurare de un conductor (inductor) prin care trece curent alternativ, de obicei de o frecvență mai mare de 50 Hz; materialul din cuptor se încălzește cu ajutorul „pierderilor în fier”. De asemenea trebuie menționat că în ultimul timp fenomenele de „pierderi în fier” au fost aplicate și la încălzirea sau călirea metalelor. Piesa care trebuie încălzită sau călită este introdusă într-un câmp magnetic alternativ cu frecvența de valoare cuprinsă între 500 Hz pînă la mai multe sute de mii Hz, în funcție de dimensiunile piesei și adîncimea stratului care urmează să fie încălzit. Se obține o încălzire mult mai rapidă și mai ușor de controlat; întregul proces tehnologic poate fi automatizat cu mijloace simple\*.

### 14.3. REPARTIȚIA CURENTULUI ELECTRIC ÎN CONDUCTOARE CILINDRICE

#### 14.3.1. STABILIREA ECUAȚIEI GENERALE

Fie o bară cilindrică, de lungime infinită, de rază  $a$ , de conductivitate  $\gamma$  și permeabilitate  $\mu$ , parcursă de un curent  $i$  (fig. 14.13).

Ecuția care dă distribuția densității de curent în secțiunea dreaptă a acestui conductor se obține ca și în cazurile precedente integrînd sistemul de ecuații a lui MAXWELL scrise în acest caz particular. Vom avea deci,

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{\delta},$$

$$\text{rot } \bar{\delta} = -\mu \gamma \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

cele două ecuații, în care  $\bar{\delta}$  este numai densitatea de curent de conducție.

Derivînd prima ecuație în raport cu  $t$  se obține

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \bar{H} = \text{rot } \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial t}, \quad (14.52)$$

Aplicînd rotorul celei de a doua ecuații obținem

$$\text{rot rot } \bar{\delta} = -\Delta \bar{\delta} + \text{grad div } \bar{\delta} = -\mu \gamma \text{rot } \frac{\partial \bar{H}}{\partial t},$$

\* Vezi și 14.1.2.4.



de unde, ținând seama de relația (14.3),

$$\text{rot } \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \Delta \bar{E} = \frac{1}{\gamma \mu} \Delta \bar{\delta}. \quad (14.53)$$

Comparând relațiile (14.52) și (14.53) se obține ecuația căutată

$$\Delta \bar{\delta} = \mu \gamma \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial t}. \quad (14.54)$$

Vectorul  $\bar{\delta}$  nevariind în direcție, ci numai în mărime, ecuația poate fi scrisă numai pentru module:

$$\Delta \delta = \mu \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (14.55)$$

Laplacianul din membrul întâi

$$\Delta \delta = \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}$$

se reduce numai la primii doi termeni, ultimul termen fiind nul deoarece densitatea de curent nu variază decât în planul secțiunii.

Trecând la coordonate polare,  $r$  fiind distanța de la centru la punctul considerat, ecuația generală (14.55) devine

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} = \mu \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (14.56)$$

#### 14.3.1. INTEGRAREA ECUAȚIEI ÎN CAZUL UNUI CURENT ALTERNATIV SINUSOIDAL, ÎN REGIM PERMANENT

Fie

$$\underline{\delta} = \delta | \underline{\psi}$$

o densitate de curent alternativă sinusoidală în timp.

Introducând această valoare în ecuația (14.56) se obține

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} = j \mu \omega \gamma \underline{\delta},$$

sau punând

$$\underline{k} = m + jn = \sqrt{j \mu \omega \gamma},$$

în care

$$m = n = \sqrt{\frac{1}{2} \mu \omega \gamma} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}},$$

ecuația devine

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} = \underline{k}^2 \underline{\delta}, \quad (14.57)$$



care mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} + (j\underline{k})^2 \underline{\delta} = 0$$

sau

$$\frac{\partial^2 \underline{\delta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{\delta}}{\partial r} - j\lambda^2 \underline{\delta} = 0. \quad (14.58)$$

Ecuatia (14.58) este o ecuație de tip BESSEL de ordinul zero avind soluția generală \*

$$\underline{\delta} = A_1 J_0(r\lambda j^{3/2}) + A_2 Y_0(r\lambda j^{3/2}),$$

în care  $J_0(z)$  este funcția BESSEL de ordinul zero iar  $Y_0(z)$  este funcția NEUMANN de ordinul zero \*\*. Variația acestor funcții este dată în figura 14.14.

Pentru  $Z \rightarrow 0$  funcția  $Y_0$  tinde către infinit. Întrucât densitatea de curent este finită și în centrul conductorului ( $r = 0$ ) chiar atunci când  $\gamma = \infty$ , trebuie ca  $A_2 = 0$ .

În consecință, soluția ecuației (14.57) este

$$\underline{\delta} = A_1 J_0(r\lambda j^{3/2}).$$

Pentru determinarea constantei  $A_1$  scriem că la periferia conductorului,  $r = a$  densitatea de curent  $\underline{\delta} = \underline{\delta}_a$ ; rezultă imediat

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{J_0(r\lambda j^{3/2})}{J_0(a\lambda j^{3/2})}, \quad (14.59)$$

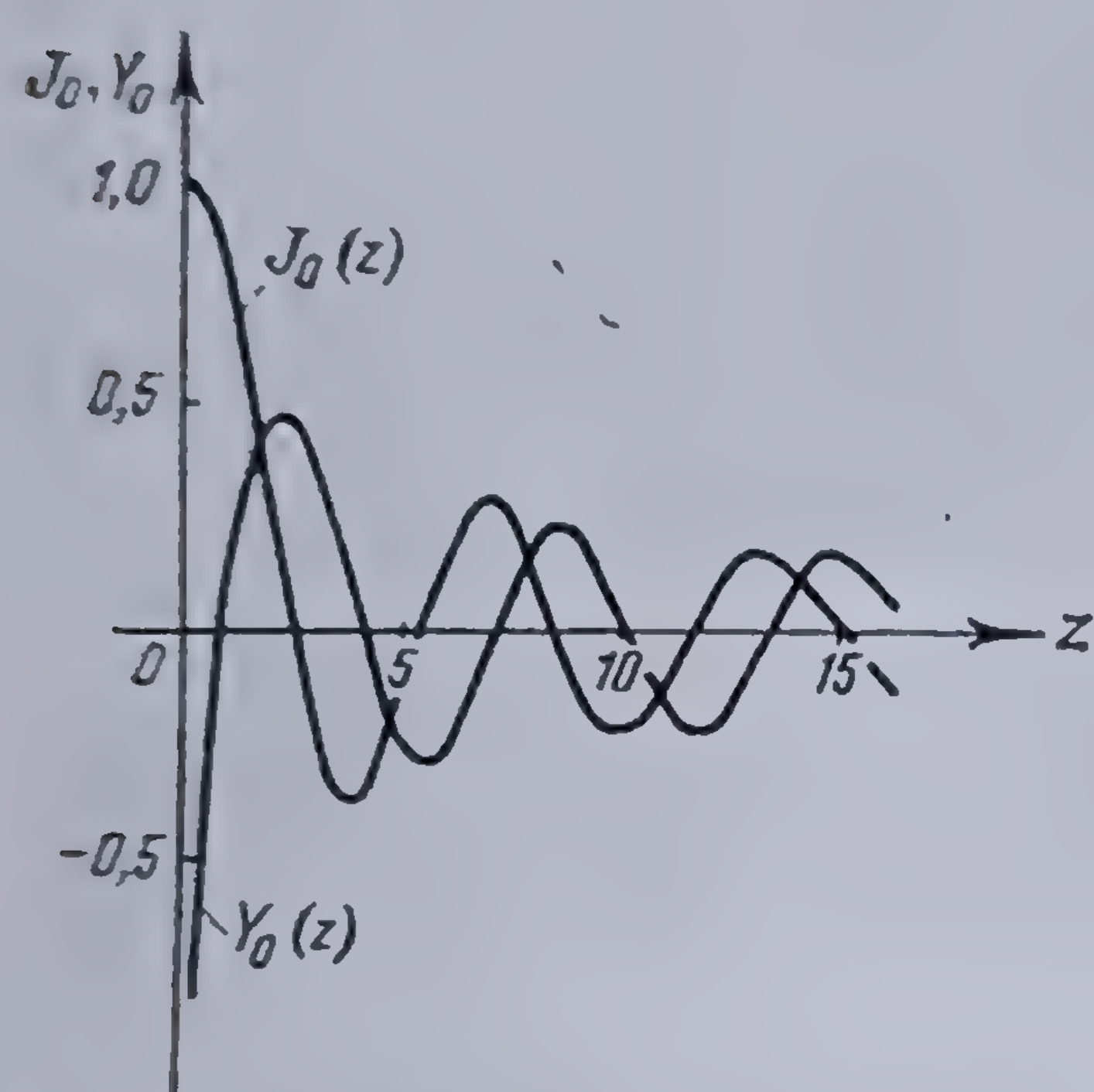


Fig. 14.14. Variația funcțiilor BESSEL și NEUMANN de ordinul zero.

relație analoagă cu relația (14.10) obținută în cazul conductoarelor cu secțiunea rectangulară.

Funcțiile BESSEL de ordinul zero din expresia (14.59) avind argumentul complex, sînt ele însăși numere complexe. Pe de altă parte, ele nu pot fi calculate cu ajutorul tabelor. Se introduc funcțiile KELVIN de argument real prin relația \*\*\*

$$J_0(z j^{3/2}) = \text{ber } z + j \text{ bei } z,$$

unde  $\text{ber } z$  (BESSEL real) și  $\text{bei } z$  (BESSEL imaginar) sînt funcțiile KELVIN atașate funcției BESSEL  $J_0(z j^{3/2})$ .

Cu aceste funcții, relația (14.59) se poate scrie

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}_a \frac{\text{ber}(\lambda r) + j \text{bel}(\lambda r)}{\text{ber}(\lambda a) + j \text{bel}(\lambda a)}, \quad (14.60)$$

\* Se poate rezolva ecuația (14.57) încercînd o soluție de forma

$$\underline{\delta} = \underline{A}_0 + \underline{A}_1 r + \underline{A}_2 r^2 + \dots + \underline{A}_n r^n + \dots$$

și prin identificare se găsește rezultatul dat de relația (14.60)

\*\* Vezi [4] pag. 381

\*\*\* Vezi [4] pag. 378.



relație analoagă cu relația (14.11) stabilită în cazul barelor de secțiune rectangulară.

Expresia (14.60) poate fi pusă și sub o altă formă. Dacă se notează

$$\operatorname{ber} z + j \operatorname{bei} z = M_0(z) \mid \underline{\theta_0(z)}$$

în care

$$M_0(z) = \sqrt{\operatorname{ber}^2 z + \operatorname{bei}^2 z}$$

și

$$\theta_0(z) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{bei} z}{\operatorname{ber} z},$$

atunci se obține

$$\underline{\delta} = \underline{\delta_a} \frac{M_0(\lambda r)}{M_0(\lambda a)} \mid \underline{\theta_0(\lambda r) - \theta_0(\lambda a)}. \quad (14.61)$$

Luînd ca origine de fază unghiul corespunzător suprafeței conductorului, expresia (14.61) devine

$$\underline{\delta} = \underline{\delta_a} \frac{M_0(\lambda r)}{M_0(\lambda a)} \mid \underline{\theta_0(\lambda r)}.$$

Dacă  $\lambda r$  este mare \*, unghiul de fază  $\theta_0(\lambda r)$  poate trece mult peste  $2\pi$ . Pot exista deci, în interiorul conductorului domenii în care curenții să fie în opoziție (fig. 14.15). Raportul

$$\underline{\delta_a} \frac{M_0(\lambda r)}{M_0(\lambda a)},$$

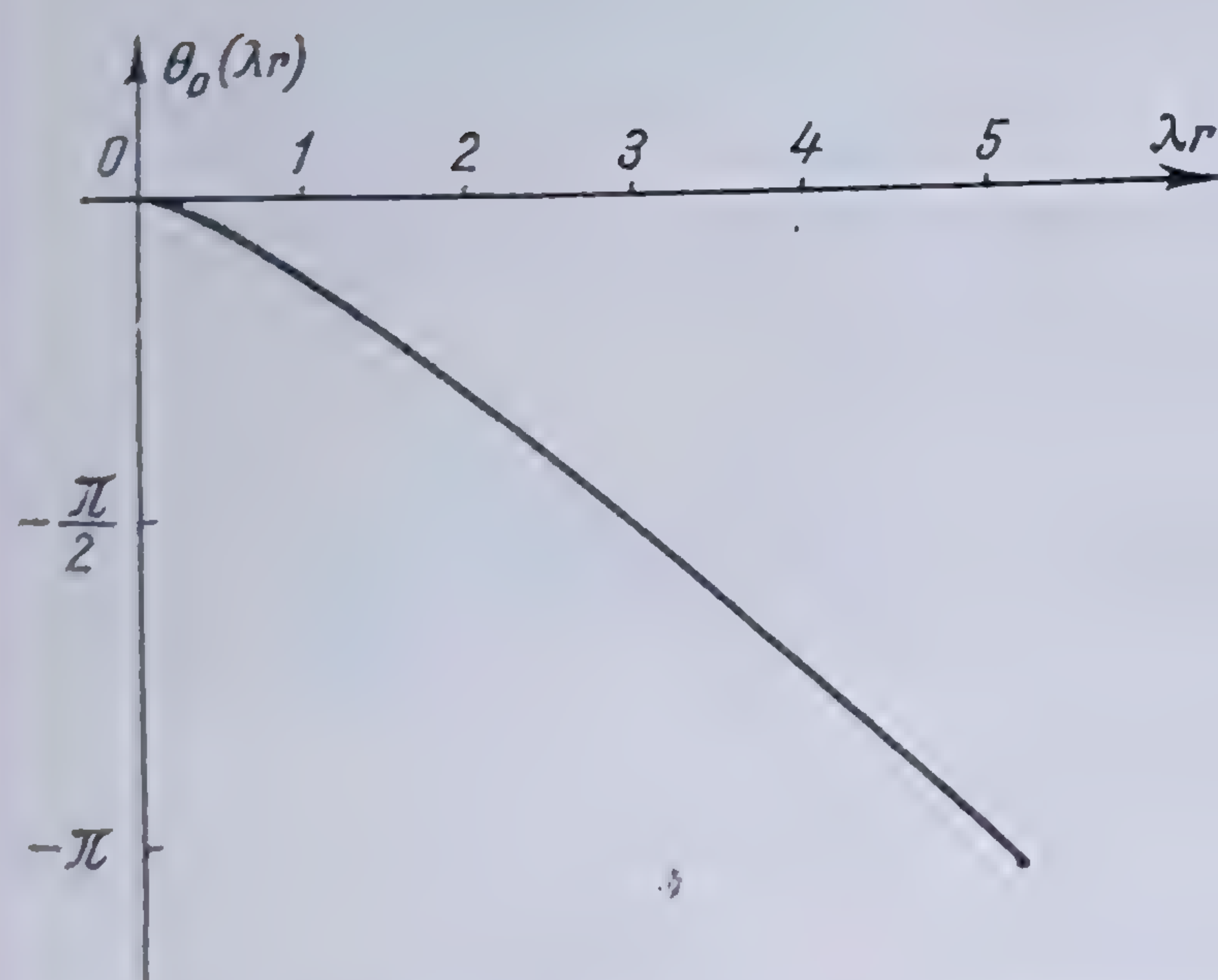


Fig. 14.15. Variația defazajului în raport cu parametrul  $\lambda r$ .

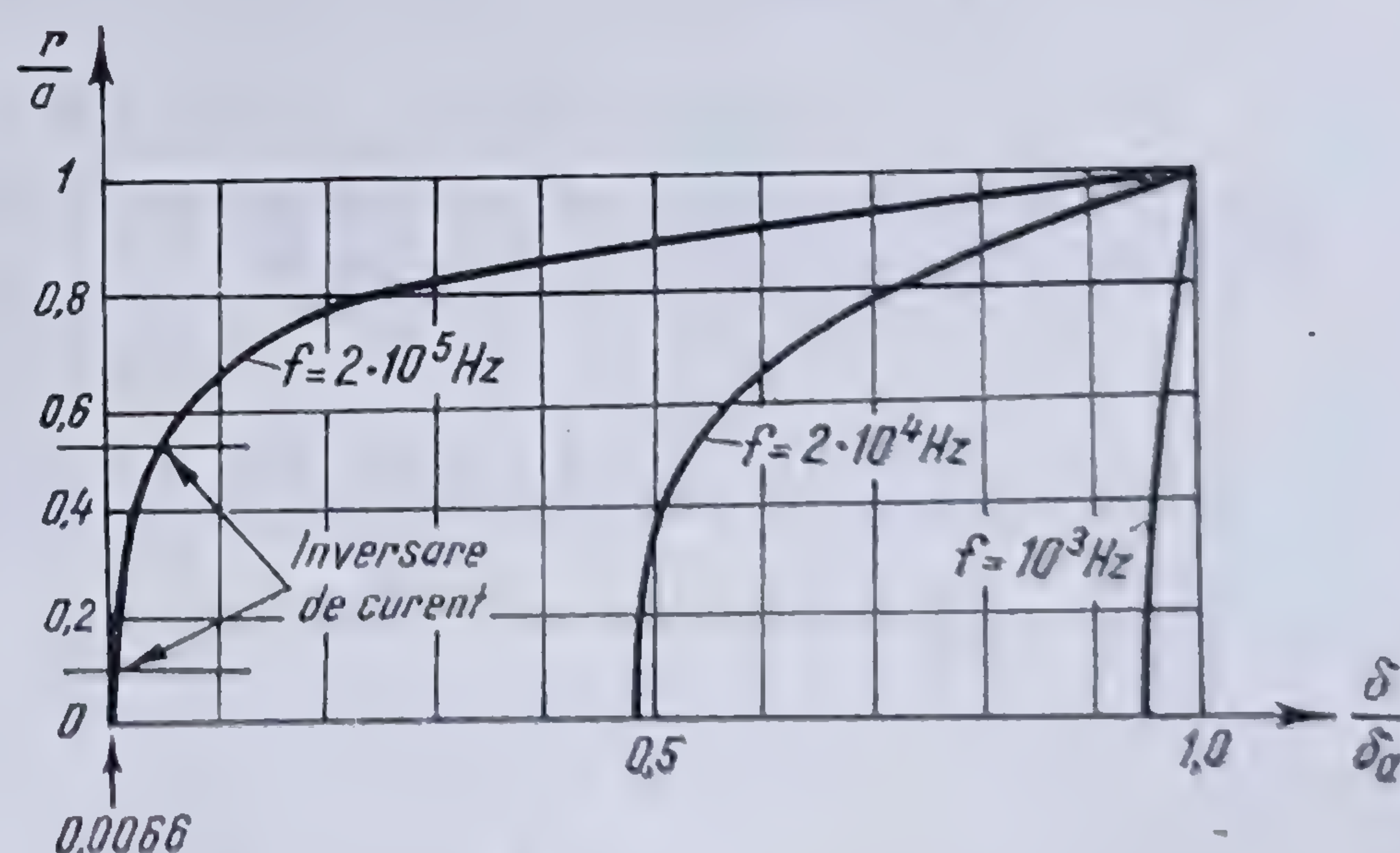


Fig. 14.16. Diagrama de pătrundere a curentului electric într-un conductor cilindric.

dă valoarea amplitudinii densității de curent în interiorul conductorului la o distanță  $r$  de axa acestuia.

În figura 14.16 este dată o reprezentare a pătrunderii curentului sau a densității de curent în funcție de distanța de la axa unui conductor cilindric,

\*  $\lambda = \mu\omega\gamma$  poate fi mare dacă permeabilitatea  $\mu$  este mare, dacă frecvența  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ) este mare sau dacă conductivitatea  $\gamma$  este mare.



avînd diametrul  $2a=2$  mm și pentru curenți alternativi cu frecvențele de 1000 Hz, 20 000 Hz și 200 000 Hz. Trebuie observat, că pentru frecvența  $f = 50$  Hz efectul pelicular respectiv este abia simțit.

### 14.3.3. DETERMINAREA IMPEDANȚEI PROPRII A UNUI CONDUCTOR CILINDRIC

14.3.3.1. Stabilirea expresiei curențului. Printr-o secțiune inelară de grosime  $dr$ , situată la distanța  $r$  de centrul conductorului, trece un curent

$$d\underline{I} = 2\pi r \underline{\delta} dr.$$

Curentul total care va trece prin întreaga secțiune a conductorului, va fi dat de relația

$$\underline{I} = 2\pi \int_0^a \underline{\delta} r dr$$

sau, ținînd seama de relația (14.60),

$$\underline{I} = \frac{2\pi \cdot \underline{\delta}_a}{\text{ber}(\lambda a) + \text{bei}(\lambda a)} \int_0^a [\text{ber}(\lambda r) + j \text{bei}(\lambda r)] r dr.$$

Pentru calculul integralei, se pornește de la relațiile cunoscute \*

$$\int_0^a z \text{ber } z dz = |z \text{bei}' z|_0^a \quad \text{și} \quad \int_0^a z \text{bei } z dz = -|z \text{ber}' z|_0^a,$$

în care  $\text{ber}' z$  și  $\text{bei}' z$  sînt derivatele funcțiilor  $\text{ber } z$  și  $\text{bei } z$ . Punînd  $z = \lambda r$ , vom avea pentru prima integrală

$$\int_0^a \lambda r \text{ber}(\lambda r) d(\lambda r) = \lambda^2 \int_0^a r \text{ber}(\lambda r) dr = \lambda |r \text{bei}'(\lambda r)|_0^a,$$

de unde, rezultă

$$\int_0^a r \text{ber}(\lambda r) dr = \frac{a}{\lambda} \text{bei}'(\lambda a).$$

În același mod se găsește și

$$\int_0^a r \text{bei}(\lambda r) dr = \frac{a}{\lambda} \text{ber}'(\lambda a).$$

\* Vezi [141] pag. 230.



Astfel, că expresia căutată a curentului este \*

$$I = \frac{2\pi a \delta_a}{\lambda} \frac{\text{ber}'(\lambda a) - j \text{ber}(\lambda a)}{\text{ber}(\lambda a) + j \text{bei}(\lambda a)} \quad (14.62)$$

a cărui modul este

$$I = \frac{2\pi a \delta_a}{\lambda} \sqrt{\frac{[\text{ber}'(\lambda a)]^2 + [\text{ber}(\lambda a)]^2}{[\text{ber}(\lambda a)]^2 + [\text{bei}(\lambda a)]^2}}$$

și are argumentul

$$\varphi = \arctg \frac{\text{ber}'(\lambda a)}{\text{bei}'(\lambda a)} - \arctg \frac{\text{bei}(\lambda a)}{\text{ber}(\lambda a)},$$

față de curentul la periferia conductorului luat ca origine de fază. Trebuie să observăm, că acest curent este egal cu curentul continuu ce ar străbate conductorul și a cărui valoare  $I_0 = \pi a^2 \delta_a$ .

14.3.3.2. Calculul impedanței. Impedanța proprie a conductorului este

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\lambda a U}{2 I_0} \frac{\text{ber}(\lambda a) + j \text{bei}(\lambda a)}{\text{bei}'(\lambda a) - j \text{ber}'(\lambda a)},$$

$U$  este tensiunea aplicată la extremitățile conductorului și care s-a luat ca origine de fază. În curent continuu, rezistența corespunzătoare este

$$R_0 = \frac{U}{I_0}.$$

Raportul dintre impedanța  $\underline{Z}$  și rezistența  $R_0$  va fi deci

$$\frac{\underline{Z}}{R_0} = \frac{I_0}{\underline{I}} = \frac{\lambda a}{2} \cdot \frac{\text{ber}(\lambda a) + j \text{bei}(\lambda a)}{\text{bei}'(\lambda a) - j \text{ber}'(\lambda a)} = \frac{R + j L \omega}{R_0}.$$

Rezistența efectivă a conductorului raportată la rezistența în curent continuu este

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda a}{2} \cdot \frac{\text{ber}(\lambda a) \text{bei}'(\lambda a) - \text{ber}'(\lambda a) \text{bei}(\lambda a)}{[\text{ber}'(\lambda a)]^2 + [\text{bei}'(\lambda a)]^2},$$

\* Calculul curentului se putea face și cu ajutorul relației (14.59) găsindu-se

$$\underline{I} = \frac{2\pi a \delta_a}{\lambda} \frac{J_1(\lambda a j^{3/2})}{J_0(\lambda a j^{3/2})} \Big|_{-\frac{3\pi}{4}},$$

în care  $J_1(z)$  este funcția Bessel, de ordinul unu. Expresia curentului se obține ținând seama de relația cunoscută (Vezi [4] pag. 361)  $\int_{z_1}^{z_2} z J_0(z) dz = [z J_1(z)]_{z_1}^{z_2}$  și de faptul că  $j^{-3/2} = 1 \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}$ .



iar reactanța internă a conductorului, raportată la aceeași rezistență, este

$$\frac{L\omega}{R_0} = \frac{\lambda a \operatorname{ber}(\lambda a) \operatorname{ber}'(\lambda a) + \operatorname{bei}(\lambda a) \operatorname{bei}'(\lambda a)}{[\operatorname{ber}'(\lambda a)]^2 + [\operatorname{bei}'(\lambda a)]^2}.$$

În tabloul 14.3 este dată variația raportului  $\frac{R}{R_0}$  în funcție de

$$\lambda a = a \sqrt{\mu \omega \gamma},$$

toate valorile fiind exprimate în unități MKSA :

Tabloul 14.3

$\lambda a$	$\frac{R}{R_0}$
0	1
0,5	1,0000
1	1,0056
1,5	1,0258
2	1,0805
2,5	1,1747
3	1,3180
3,5	1,4920
4	1,6778
4,5	1,8628
5	2,0430
5,5	2,2190
6	2,3937
8	3,0956
10	3,7980
15	5,5620
20	7,3277
30	10,876

Construind curba  $\frac{R}{R_0} = f(\lambda a)$  (fig. 14.17) se vede, că pentru valorile lui  $\lambda a$  mai mari ca 10, variația lui  $\frac{R}{R_0}$  în funcție de  $\lambda a$  devine sensibil liniară și poate fi înlocuită cu asimptota ei avînd ecuația \*

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda a}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{16} = 0,353(\lambda a) + 0,265. \quad (14.63)$$

Dacă  $\lambda a$  devine atît de mare, încît să se poată neglija al doilea termen al ecuației (14.63), ceea ce se întîmplă atunci cînd raza cilindrului este mare sau frecvența foarte mare, se poate scrie

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\lambda a}{2\sqrt{2}} = \frac{am}{2}; \quad (14.64)$$

totul se întîmplă ca și cum secțiunea conductorului ar fi redusă în raportul  $2/am$ , cu alte cuvinte, conductorul cilindric plin de diametru  $2a$  ar fi înlocuit cu un cilindru găurit de rază  $a$  și grosime  $\alpha$  astfel ca

$$\frac{R}{\pi a^2} = \frac{R_0}{2\pi a \alpha},$$

de unde, rezultă ținînd seama de relația (14.64)

$$\frac{R_0 \frac{am}{2}}{\pi a^2} = \frac{R_0}{2\pi a \alpha}$$

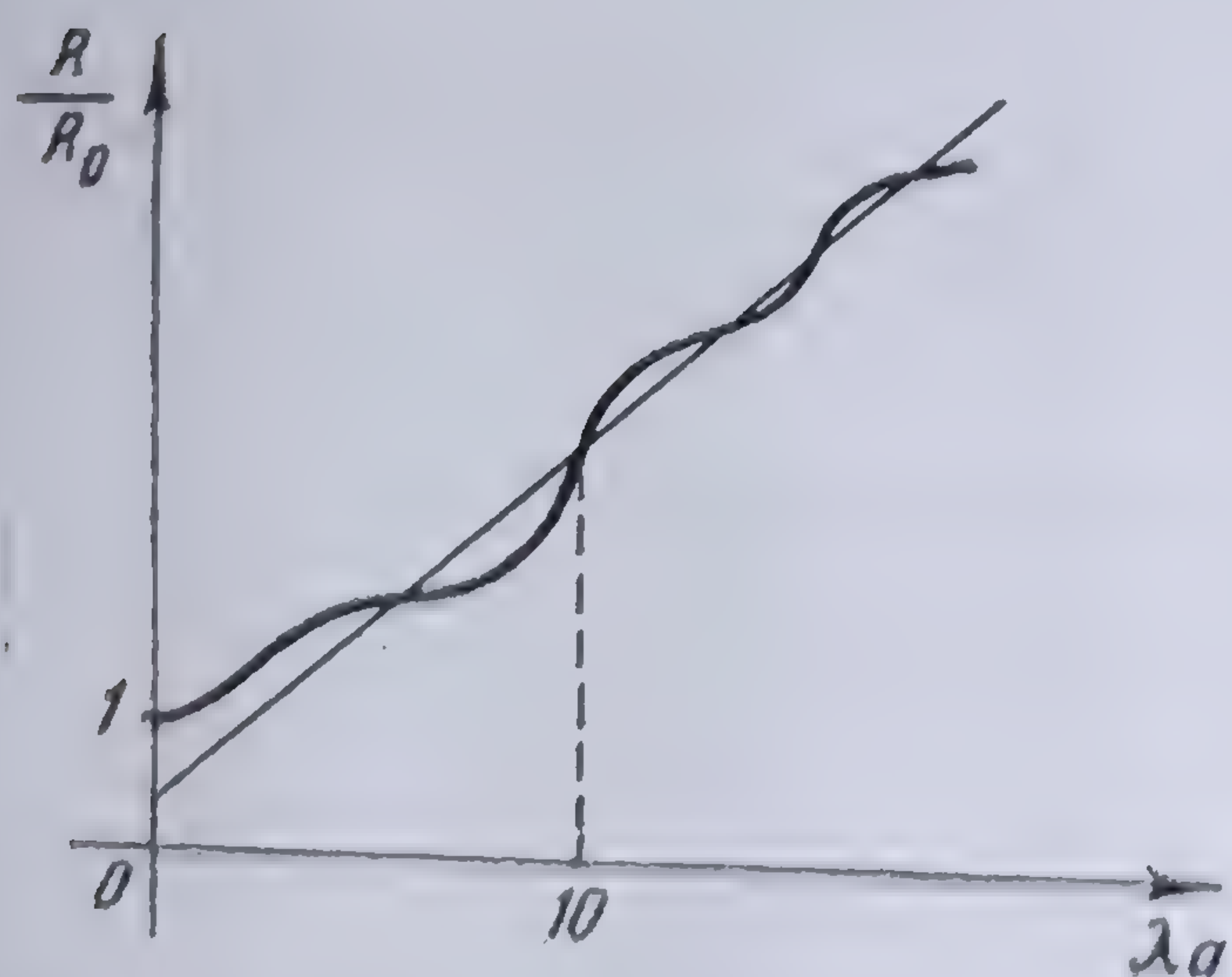


Fig. 14.17. Curba  $(R/R_0) = f(\lambda a)$ .

\* Vezi [141] pag. 235.



și deci,

$$\alpha = \frac{1}{m},$$

adică, aceeași grosime ca și în cazul barelor plate \*.

#### 14.3.4. CABLUL DIVIZAT \*\*

Fie un conductor cilindric format dintr-un mare număr de conductoare toronate astfel, ca să formeze un cablu.

Dacă lungimea pasului de cablare este foarte mare în raport cu diametrul cablului, se poate admite că toți curenții rămân paraleli cu axa cablului și că planurile care cuprind liniile de câmp magnetic sînt normale pe această axă a cablului.

În acest caz :

1. Dacă permeabilitatea relativă a metalului este egală cu unitatea, nimic nu se schimbă în raport cu conductorul masiv, raportul  $\frac{R}{R_0}$  va fi dat, cu suficientă aproximație de relațiile stabilite mai înainte.

2. În cazul cînd cablul este constituit din materiale feromagnetice (cabluri de oțel-aluminiu, de exemplu), reluctanța tuburilor de câmp magnetic concentrice cu axa cablului va fi mult mai mare, decît aceea a aceluiași tuburi în cazul conductorului masiv și asta din cauza multiplelor întrefieruri care separă firele unele de altele ; cu alte cuvinte, permeabilitatea  $\mu$  care intervine în expresia lui  $m$  este mult mai mică decît aceea a unui cilindru masiv de aceleași dimensiuni.

În acest caz raportul  $\frac{R}{R_0}$  va fi mult mai mic decît în cazul cilindrului plin, de aceleași dimensiuni.

3. Se poate omogeniza repartiția de curenți în fiecare fir a cablului și utiliza astfel la maximum metalul care le constituie, dacă se transpun regulat conductoarele astfel că, pe lungimea utilizată, fiecare fir să ocupe pe rînd toate pozițiile posibile.

În cazul cînd pasul de cablaj nu este foarte mare față de diametrul secțiunii drepte, planurile tuburilor de câmp sînt înclinate față de secțiunea dreaptă și inducția comportă o componentă dirijată în sensul axei cablului ; această componentă produce pierderi suplimentare și mărește astfel valoarea rezistenței efective.

\* Vezi 14.1.2.3.

\*\* Vezi [107] pag. 811.



## Capitolul XV

# PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

## 15.1. UNDE ELECTROMAGNETICE

### 15.1.1. GENERALITĂȚI

Curenții electrici variabili în timp, care străbat un circuit produc în vecinătatea acestuia un câmp magnetic variabil; sarcinile variabile în timp produc în întreg spațiul înconjurător un câmp electric variabil. Câmpuri electrice sau magnetice variabile pot produce și corpurile electrizate sau magnetizate în mișcare.

S-a arătat, că aceste două fenomene, câmp magnetic variabil și câmp electric variabil, sînt inseparabile unul de altul: producerea unuia dintre acestea într-o regiune a spațiului atrage după sine producerea celuilalt.

Legătura care există între aceste câmpuri și curenții electrici corespunzători sînt date de ecuațiile lui MAXWELL care au fost stabilite mai înainte\*

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H} &= \bar{\delta} + \frac{d\bar{D}}{dt}, \\ \operatorname{div} \bar{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \bar{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{d\bar{B}}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

completate cu relațiile de legătură

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}; \quad \bar{B} = \mu \bar{H}; \quad \bar{\delta} = \gamma \bar{E}, \quad (15.2)$$

valabile pentru un dielectric perfect, un mediu magnetic perfect și un conductor liniar.

În cazul unui dielectric perfect, de permitivitate  $\epsilon$ ,  $\bar{\delta} = 0$  și prima ecuație (15.1) se poate scrie

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \epsilon \frac{d\bar{E}}{dt}; \quad (15.3)$$

analog

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\mu \frac{d\bar{H}}{dt}, \quad (15.4)$$

care arată strînsa legătură dintre cele două câmpuri.

\* Vezi 3.1.8 și 3.3.2.



Să examinăm, în raport cu cele două ecuații fundamentale ale câmpului electromagnetic\*, mecanismul producerii unui câmp magnetic\*\*. Fie, pentru aceasta, circuitul simplu din figura 15.1, care este alimentat de o sursă de ten-

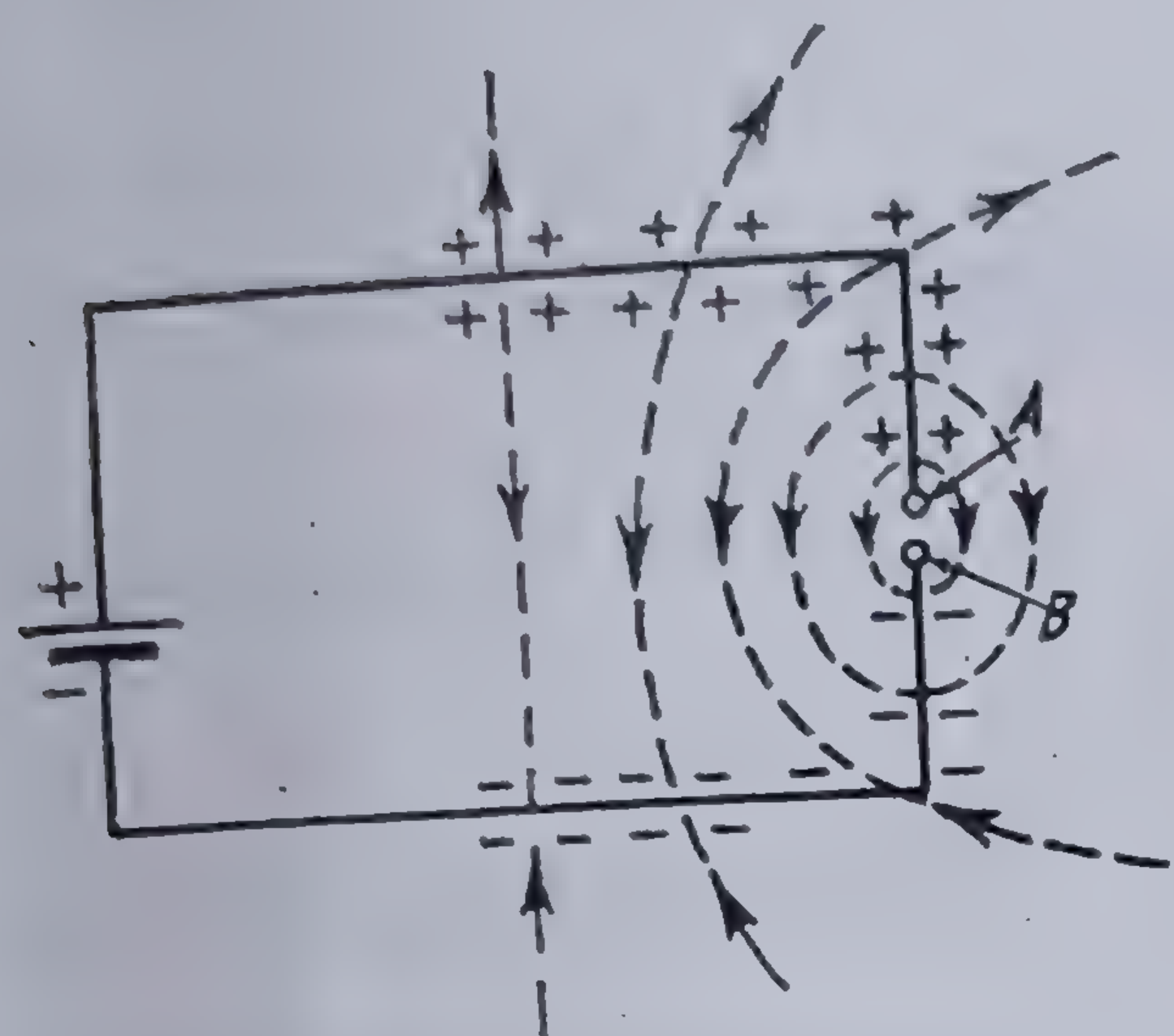


Fig. 15.1. Câmpul electrostatic în vecinătatea unei întreruperi într-un circuit electric.

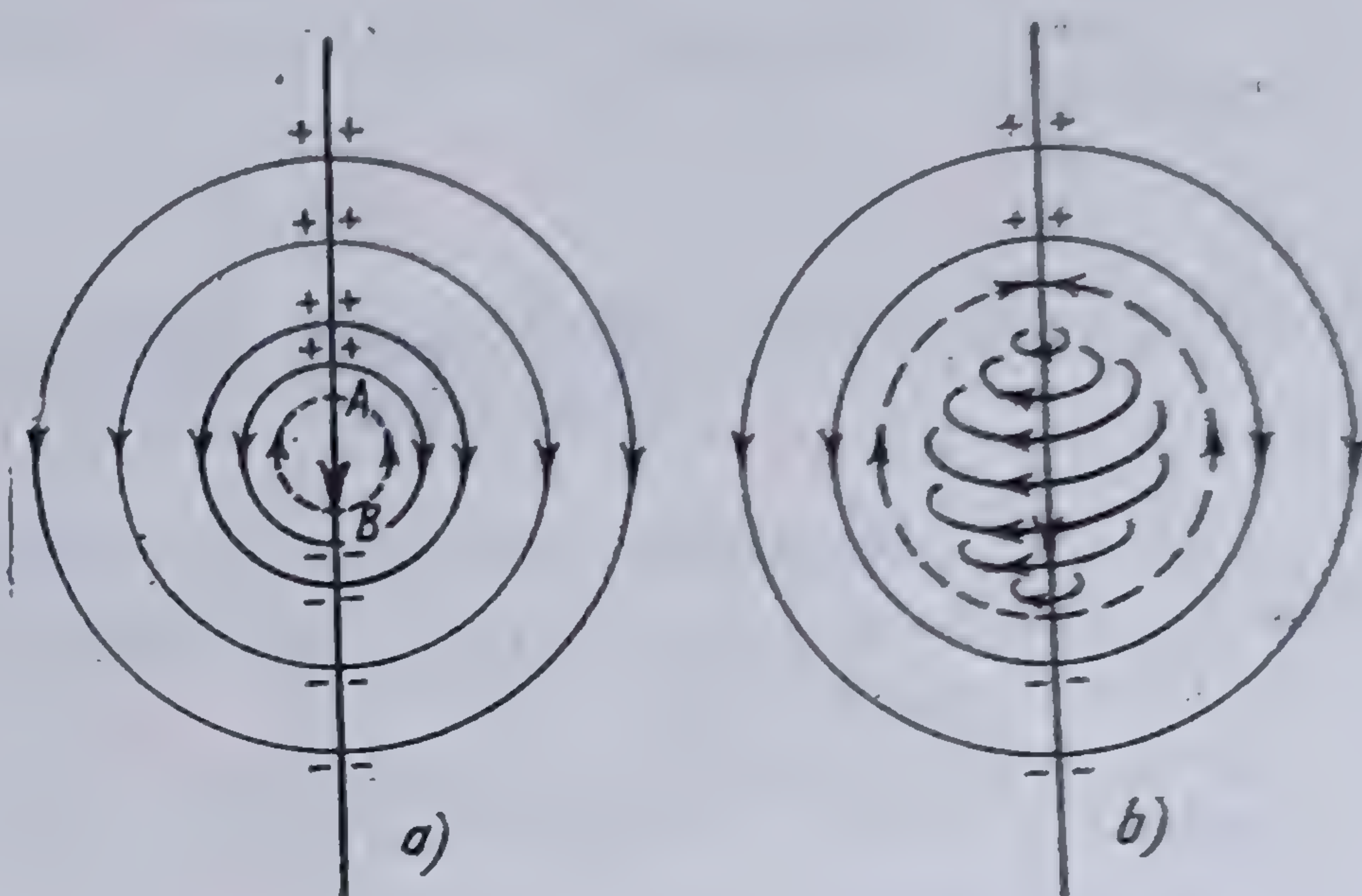


Fig. 15.2. Mecanismul producerii unui câmp magnetic.

siune constantă și care este întrerupt într-un punct oarecare. Diferența de potențial care apare între extremitățile circuitului la locul întreruperii și care este menținută constantă de sursă, se traduce prin existența unui câmp electric, materializat prin liniile de câmp corespunzătoare; în afară de aceasta, suprafața conductorului legat la borna pozitivă a sursei este acoperit cu sarcini pozitive, celălalt fiind acoperit cu sarcini negative. Legând bornele *A* și *B* împreună, sarcinile electrice vecine, de semn contrar, sînt puse în mișcare sub acțiunea forțelor electrice și caută să se neutralizeze (fig. 15.2, *a*); mișcarea acestor sarcini acționează ca un curent electric dirijat de la *A* către *B*, într-un element de curent care leagă cele două puncte de contact. Câmpul electric dispare în timp ce ia naștere un curent de deplasare îndreptat de jos în sus și ale cărui linii de curent (punctate pe figura 15.2, *a*) închid liniile de curent ale curentului de conducție dintre *A* și *B*. Această distribuție de curenți produce la rîndul său un câmp magnetic, ale cărui linii de câmp sînt cercuri concentrice pe conductorul respectiv, și care este localizat în volumul aproape sferic în care apare curentul de deplasare. Acest câmp magnetic produce la rîndul său un câmp electric a cărui linii de câmp înconjură liniile de câmp magnetic. Forța electromotoare indusă de-a lungul conturului format din liniile de curent ale curenților de conducție și de deplasare este opusă — conform legii lui LENZ-FARADAY — sensului acestor curenți. În consecință, efectul câmpului magnetic este să se opună stabilirii curentului, deci a dispariției câmpului electric inițial. Această forță electromotoare de inducție este cu atît mai mare cu cît viteza stabilirii curentului — deci a câmpului magnetic — este mai mare. După un anumit timp configurația câmpului este aceea dată în figura 15.2, *b*: neutralizarea sarcinilor electrice este realizată pe o porțiune însemnată a circuitului și câmpul electric este nul în spațiul înconjurător, care este astfel sediul unui câmp magnetic. Însă, în spațiul din afara acestei zone, câmpul electric are încă aceleași proprietăți pe care le-a

\* Ecuațiile (15.3) și (15.4)

\*\* Vezi [161] p. 471



avut înainte de închiderea circuitului. Fenomenele precedente se extind astfel, din aproape în aproape, pînă cînd spațiul întreg este sediul unui cîmp magnetic. Ansamblul acestor fenomene de propagare a cîmpurilor electrice și magnetice constituie *unda electromagnetică*. O asemenea undă electromagnetică ia naștere, ori de cîte ori un circuit electric este supus unei variații oarecare a curenților și tensiunilor.

### 15.1.2. PROPAGAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE ÎN MEDII DIELECTRICE

15.1.2.1. Stabilirea ecuațiilor de propagare. Fenomenul electromagnetic este descris de ansamblul celor șase mărimi  $\rho$ ,  $\delta$ ,  $\bar{E}$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{B}$ , și  $\bar{H}$  legate prin cele șase\* ecuații independente (15.1) și (15.2). Pentru determinarea unei unde electromagnetice este deci necesar să se rezolve sistemul de ecuații fundamentale, ținîndu-se seama de condițiile la limită, care caracterizează fiecare caz în parte.

Pentru simplificarea problemei, să presupunem că mediul dielectric este omogen și liniar; de asemenea, presupunem că în acest mediu nu există sarcini libere, deci  $\rho = 0$ .

Să luăm derivata parțială a relației (15.3) în raport cu timpul; observînd că

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \bar{H}) = \text{rot } \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

și ținînd seama de relația (15.4), se obține

$$\mu\epsilon \frac{d^2 \bar{E}}{dt^2} = -\text{rot rot } \bar{E}; \quad (15.5)$$

dar,

$$\text{rot rot } \bar{E} = -\Delta \bar{E} + \text{grad div } \bar{E}.$$

Aplicînd divergența relației (15.3), se obține:

$$\text{div rot } \bar{H} = 0 = \epsilon \text{div } \frac{d \bar{E}}{dt} = \epsilon \frac{d}{dt} \text{div } \bar{E}.$$

Cum în spațiu nu există sarcini, ecuația lui POISSON dă  $\text{div } \bar{D} = 0$  și rezultă

$$\text{div } \bar{E} = 0,$$

\* Ținînd seama că din ultima ecuație (15.1), prin aplicarea divergenței rezultă  $\text{div } \bar{B} = 0$ , din punct de vedere matematic a treia relație (15.1) constituie o consecință și deci numărul de ecuații independente se reduce la șase.



astfel, că relația (15.5) devine :

$$\frac{d^2 \bar{E}}{dt^2} = v^2 \Delta \bar{E}, \quad (15.6)$$

în care s-a notat  $v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$ .

Relația (15.6) reprezintă ecuația de propagare a câmpului electric variabil. În mod analog, pornind de la relația (15.4) se obține

$$\frac{d^2 \bar{H}}{dt^2} = v^2 \Delta \bar{H}, \quad (15.7)$$

care reprezintă ecuația de propagare a câmpului magnetic variabil.

**15.1.2.2. Potențialele retardate. Relația lui LORENTZ.** Determinarea componentelor câmpului electromagnetic se poate face ușor, utilizând ecuațiile lui MAXWELL și relațiile de legătură, pentru mediile omogene și în cazul sistemului staționar sau cuasistaționar\*. Determinarea acestor componente se face prin ecuațiile

$$\bar{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}, \quad (15.8)$$

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A}, \quad (15.9)$$

în care potențialele  $V$  și  $\bar{A}$  sînt soluțiile ecuațiilor (1.42)

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

și (3.73)

$$\Delta \bar{A} + \mu \bar{\delta} = 0$$

și sînt\*\*

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r} \\ \bar{A} &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\bar{\delta} d\tau}{r} \end{aligned} \right\} \quad (15.10)$$

cu  $\text{div } \bar{A} = 0$ .

Potențialele  $V$  și  $\bar{A}$ , care se obțin astfel într-un punct situat la distanța  $r$  de sarcinile și curenții electrici și la momentul  $t$ , se numesc potențiale instantanee și din expresia lor nu se poate vedea propagarea undelor electromagnetice. Cazul acesta corespunde sistemelor staționare. Pentru a studia un regim variabil

\* Se numește cîmp cuasistaționar acela care variază puțin în intervalul de timp  $T$  (de ordinul unei perioade) în care lumina parcurge dimensiunile maxime  $l$  a unui corp ( $CT \gg 1$ ) astfel că viteza de propagare finită a cîmpului nu joacă nici un rol (Vezi [147] pag. 177).

\*\* Vezi 1.2.1. și 3.8.2.1.



oarecare, este necesar ca în expresia (15.10) a potențialului magnetic vector să se considere densitatea curentului total hertzian, adică, la densitatea  $\bar{\delta}$  a curentului de conducție să se adauge densitatea  $\partial \bar{D}/\partial t$  a curentului de deplasare. În aceste condiții, potențialul magnetic vector  $\bar{A}$ , care este acum o funcție integrală de  $\partial \bar{D}/\partial t$  și de  $\bar{\delta}$ , nu mai constituie un mijloc comod de calcul a lui  $\bar{B}$ , și mai ales a lui  $\bar{E}$  și  $\bar{D}$  căci el necesită cunoașterea prealabilă a câmpului de inducție electrică  $\bar{D}$  și a derivatei sale.

Luând în considerare potențialul magnetic vector, definit de relația (3.66)

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A},$$

relația (15.4) se poate scrie

$$\text{rot} \left( \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

ceea ce arată că mărimea din paranteză derivă dintr-un potențial scalar, obținându-se o relație analoagă cu relația (15.8)

$$\bar{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}.$$

Ținând seama de această relație, din legea fluxului electric\* rezultă

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \bar{A} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (15.11)$$

De asemenea, aplicând rotorul relației (3.66) și ținând seama de prima ecuație (15.1) se obține

$$\text{rot } \bar{B} = \text{rot rot } \bar{A} = \mu \left( \bar{\delta} + \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right),$$

sau, dezvoltând dublul rotor a lui  $\bar{A}$  și ținând seama de relația (15.8) se obține

$$-\Delta \bar{A} + \text{grad div } \bar{A} = \mu \left( \bar{\delta} - \epsilon \text{grad } \frac{\partial V}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} \right), \quad (15.12)$$

Relațiile (15.11) și (15.12) se pot scrie sub forma\*\*

$$\left. \begin{aligned} \Delta V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \text{div } \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \\ \Delta \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \mu \bar{\delta} &= \text{grad} \left( \text{div } \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right), \end{aligned} \right\} \quad (15.13)$$

în care s-a notat  $\epsilon\mu = 1/v^2$ .

\* Vezi relația (1.38)  $\text{div } \bar{D} = \rho$  sau  $\text{div } \bar{E} = \rho/\epsilon$ .

\*\* Adăugând ambilor membri ai relației (15.11) expresia  $-\epsilon\mu \partial^2 V / \partial t^2$ .



Ținând seama că din relația (3.66), potențialul vector nu este determinat decât în raport cu gradientul unei funcții scalare arbitrare, iar din relația (15.8) rezultă că potențialul  $V$  nu este determinat decât în raport cu derivata în timp a aceleiași funcții scalare, se poate pune condiția ca potențialele  $\bar{A}$  și  $V$  să îndeplinească condiția

$$\operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (15.14)$$

care este *relația lui LORENTZ*. Relația (15.14) mai poate fi interpretată în sensul că parantezele din membrul doi ale relațiilor (15.13) sînt independente de timp.

În aceste condiții, ecuațiile (15.13) pot fi scrise sub forma

$$\Delta V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = \square V + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0, \quad (15.15)$$

$$\Delta \bar{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} + \mu \bar{\delta} = \square \bar{A} + \mu \bar{\delta} = 0, \quad (15.16)$$

ecuații care generalizează ecuațiile (1.42) și respectiv (3.73), în care laplacianul  $\Delta$  este înlocuit cu dalembertianul  $\square^*$ .

Ecuațiile (15.15) și (15.16) — numite ecuațiile lui d'ALEMBERT, sînt *ecuațiile undelor electromagnetice neomogene* sau cu *membru doi*. Primul membru al lor este funcție de coordonatele  $x, y, z$  și de timpul  $t$ . Soluțiile lor sînt legate prin relația lui LORENTZ (15.14), ceea ce se verifică ușor\*\*. Ecuația (15.14) — relația lui LORENTZ — reprezintă *ecuația undelor omogene* sau *fără membru doi*, care descrie un fenomen ondulat fără surse exterioare.

Pentru a integra\*\*\* ecuațiile (15.15) și (15.16) se consideră la timpul  $t$  într-un punct  $P$  o sarcină  $q(t)$ , situată într-un volum foarte mic, de formă sferică. La distanța  $r$  în jurul acestei sarcini, laplacianul lui  $V$  se scrie

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2}$$

și ecuația (15.15) devine

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0, \quad (15.17)$$

\* Operatorul  $\Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \square$  se numește dalembertian.

\*\* Luînd divergența relației (15.16) și adăugînd derivata în raport cu  $t$  a relației (15.15) înmulțită cu  $1/v^2$ , se obține, după calcule simple

$$\square \left( \operatorname{div} \bar{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu \left( \operatorname{div} \bar{\delta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0,$$

membru al doilea al acestei egalități fiind tocmai ecuația continuității curentului electric (2.5). Vezi [147] pag. 199.

\*\*\* Vezi [115] vol. II, pag. 182



sau, întrucît în afara sarcinii considerată  $\rho$  e nul,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(rV)}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (15.18)$$

Soluția acestei ecuații este de forma\*

$$rV = F_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + F_2\left(t + \frac{r}{v}\right).$$

Întrucît singura sursă este sarcina  $q(t)$ , funcția  $F_2$  nu există și potențialul căutat este

$$V(t) = \frac{F\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad (15.19)$$

ținînd seama că distanța  $r$  e foarte mică, ecuația (15.17) poate fi confundată cu ecuația lui POISSON (1.54) a cărei soluție este în acest caz

$$V = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon r}$$

și în consecință, funcția  $F\left(t - \frac{r}{v}\right) = r V(t)$  devine

$$F(t) = \frac{q(t)}{4\pi r}$$

și deci, relația (15.19)

$$V_r(t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r}.$$

În cazul unei repartiții oarecare de sarcini, potențialele într-un punct se adună și atunci, expresia generală a potențialului  $V_r$  căutat este\*\*

$$V_r(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\tau. \quad (15.20)$$

Întrucît, expresiile proiecțiilor potențialului vector dau pentru ecuația (15.16) ecuații formal identice cu ecuația (15.15), soluția acestei ecuații este:

$$A_r(t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\bar{\delta}\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} d\tau. \quad (15.21)$$

\* Vezi [271] pag. 221

\*\* S-a notat cu  $V_r$  și  $A_r$  pentru a indica potențiale retardate sau întârziate. Vezi [297] pag. 166.



Soluțiile (15.20) și (15.21) ale sistemului de ecuații (15.15) și (15.16) generalizează, în cazul unui regim electromagnetic oarecare soluțiile (1.47) și (3.74) ale sistemului de ecuații (1.42) și (3.73).

Se obține astfel, în funcție de sarcini și de curenți acționând la momentul  $t - \frac{r}{v}$ , potențialele  $V_r$  și  $A_r$  la momentul  $t$  și la distanța  $r$ , cu întârzierea  $r/v$ , ceea ce explică durata de propagare.

Aceste potențiale  $V_r$  și  $A_r$  sînt *potențialele retardate* sau *întîrziate*.

Întrucît, potențialele retardate satisfac relația lui LORENTZ (15.14), prin intermediul ecuațiilor (3.66) și (15.8) se pot găsi cu ajutorul lor soluțiile în  $\vec{E}$  și  $\vec{B}$  ale ecuațiilor lui MAXWELL.

**15.1.2.3. Undele electromagnetice plane și propagarea lor.** O undă electromagnetică se zice că este plană atunci cînd mărimile care o caracterizează depind numai de o singură coordonată, de exemplu de  $z$ . O astfel de undă este, cu suficientă aproximație, unda radiată de o antenă, dacă această undă se studiază într-un punct al spațiului situat la o distanță mare de punctul de radieră.

În cazul unei surse de dimensiuni foarte mici și un cîmp electromagnetic care radiază în toate direcțiile din această sursă, undele obținute sînt unde sferice care corespund unei alte soluții a ecuației de propagare

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} = v^2 \Delta \vec{E}.$$

În apropiere de sursă, cele două cîmpuri nu sînt în fază și viteza lor de propagare nu mai este  $v$ . Numai la o distanță mare de sursă, în raport cu lungimea de undă, atunci cînd raza de curbură a sferei este suficient de mare în raport cu această lungime de undă se poate face aproximația că undele sînt plane și deci, poate fi aplicată teoria ce urmează\*. În acel punct, distanța  $\overline{NO}$ , de la sursă la punctul considerat, formează un triedru al lui AMPÈRE împreună cu direcțiile cîmpurilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ , iar acestea sînt în fază și se propagă cu viteza  $v$ .

Pe de altă parte, amplitudinea scade pe măsură ce ne îndepărtăm de sursă și unda se desfășoară pe o sferă de o suprafață mai mare; la o distanță mare de sursă se poate spune că amplitudinea scade invers proporțional cu distanța.

Antena produce atît cîmp magnetic cît și cîmp electric variabil în timp. Dacă se presupune că pămîntul este un conductor perfect,  $\gamma = \infty$ , atunci vectorul  $\vec{E}$  poate fi admis normal pe suprafața pămîntului. Într-adevăr, în acest caz, curenții induși în pămînt nu produc o cădere de tensiune în pămînt și deci vectorul  $\vec{E}$  nu are o componentă tangențială față de pămînt.

Presupunem de asemenea că axa  $Oz$  este îndreptată de la antenă de-a lungul pămîntului și fie o suprafață  $\Sigma$  care se găsește în planul  $xoy$  situată la o mare

Fig. 15.3. Antena și efectul ei la distanță mare.



\* Studiul undelor sferice nu se face în această lucrare el ieșind din cadrul ei.



distanță de antenă și a cărei dimensiuni sînt mici față de această distanță (fig. 15.3). În acest caz, în suprafața  $\Sigma$  considerată, care poate fi presupusă plană, întrucît raza ei de curbură este foarte mare, vectorul  $\vec{E}$  este constant, căci el nu depinde de coordonatele  $x$  și  $y$ . Același lucru se poate spune și despre vectorul  $\vec{H}$ . Ambii vectori depind de coordonata  $z$ , căci o modificare a acesteia, modifică distanța de la centrul de radieră.

Fie  $\tau$  volumul din punctul considerat, limitat de suprafața  $\Sigma$ , la care presupunem că dimensiunile sale sînt de asemenea foarte mici față de distanța de la antenă. În acest volum, toate razele ce se pot duce din centrul de radieră prin punctele suprafeței  $\Sigma$  pot fi presupuse paralele cu axa  $oz$ . Aceasta ne dă posibilitatea să admitem că mărimile  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ , în regiunea din spațiu, limitată de volumul  $\tau$  nu depind decît de coordonata  $z$  și deci, unda care se propagă în dielectric să fie considerată plană.

Scriind că vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sînt independenți de coordonatele  $x$  și  $y$ , se obține

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0$$

și deci  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sînt funcții numai de  $z$  și  $t$ .

În aceste condiții, ecuațiile lui MAXWELL (15.3) și (15.4) pot fi scrise :

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (a) \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (b) \\ 0 = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (c) \end{array} \right\} (15.26) \quad \left. \begin{array}{l} -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (a) \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (b) \\ 0 = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (c) \end{array} \right\} (15.27)$$

Întrucît, cîmpurile produse de sursă nu conțin componente continue, ele nefiind produse de curenți continui sau sarcini continue, rezultă că, cele două cîmpuri nu pot avea componente care să fie independente de timp și ecuațiile (15.26) și (15.27) dau

$$E_z = \text{Const.} = 0 \quad \text{și} \quad H_z = \text{Const.} = 0.$$

Alegem axele  $ox$  și  $oy$  astfel, încît vectorul  $\vec{E}$  să fie îndreptat de-a lungul axei  $ox$ . În acest caz  $E_y = 0$  și relațiile (15.26) și (15.27) dau

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0$$

și rezultă,

$$H_x = \text{Const.} = 0.$$

Rezultă că vectorul  $\vec{H}$  nu are componentă, decît de-a lungul axei  $oy$  și deci,

$$\vec{E} \perp \vec{H} \quad (15.28)$$

adică, în unda electromagnetică, care se propagă liber într-un mediu dielectric omogen și izotrop, vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sînt perpendiculari unul pe altul.



Cu aceste elemente, ecuațiile vectoriale de propagare (15.6) și (15.7) devin ecuații diferențiale simple, de ordinul doi, cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}, \quad (15.29)$$

$$\frac{d^2 H_y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 H_y}{dz^2}. \quad (15.30)$$

În aceste ecuații — ca și în cazul general —  $v$  reprezintă viteza de propagare a undelor și este

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n},$$

în care  $c$  este viteza luminii și  $n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$  este indicele de refracție al mediului care, în cazul general, pentru  $\mu_r \cong 1$ , este dat de relația lui MAXWELL  $n' = \sqrt{\epsilon_r}$ . Soluțiile acestor ecuații sînt de forma\*

$$\left. \begin{aligned} E_x &= F_1(z - vt) + F_2(z + vt) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [F_1(z - vt) - F_2(z + vt)] \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

Întrucît  $E_x$  și  $H_y$  nu au componente care să nu depindă de timp, nici funcțiile  $F_1$  și  $F_2$  nu vor avea asemenea componente.

Să interpretăm acum sensul soluțiilor particulare

$$\left. \begin{aligned} E_{x_1} &= F_1(z - vt), \\ H_{y_1} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z - vt). \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

În orice punct al spațiului, care se mișcă de-a lungul axei  $Oz$  cu viteză  $\frac{dz}{dt} = v$ , valorile  $E_x$  și  $H_y$  rămîn constante. În adevăr, poziția unui asemenea punct este determinată de coordonata

$$z = vt + z_0$$

și deci  $E_x$  și  $H_y$  în acest punct au valorile

$$E_{x_1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = \text{Const.},$$

$$H_{y_1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z_0) = \text{Const.}$$

Rezultă de aici, că diversele valori ale lui  $E_{x_1}$  sau  $H_{y_1}$  se propagă înspre partea pozitivă a axei  $Oz$  cu viteza  $v$ . În consecință, ecuațiile (15.32) determină unda electromagnetică care se propagă cu viteza  $v$ , în direcția pozitivă a axei  $Oz$ . Această undă se numește undă directă.

\* Vezi [271], pag. 221.



Cu aceste elemente, ecuațiile vectoriale de propagare (15.6) și (15.7) devin ecuații diferențiale simple, de ordinul doi, cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}, \quad (15.29)$$

$$\frac{d^2 H_y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2 H_y}{dz^2}. \quad (15.30)$$

În aceste ecuații — ca și în cazul general —  $v$  reprezintă viteza de propagare a undelor și este

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n},$$

în care  $c$  este viteza luminii și  $n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$  este indicele de refracție al mediului care, în cazul general, pentru  $\mu_r \cong 1$ , este dat de relația lui MAXWELL  $n' = \sqrt{\epsilon_r}$ . Soluțiile acestor ecuații sînt de forma\*

$$\left. \begin{aligned} E_z &= F_1(z - vt) + F_2(z + vt) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [F_1(z - vt) - F_2(z + vt)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.31)$$

Întrucît  $E_z$  și  $H_y$  nu au componente care să nu depindă de timp, nici funcțiile  $F_1$  și  $F_2$  nu vor avea asemenea componente. Să interpretăm acum sensul soluțiilor particulare

$$\left. \begin{aligned} E_{x_1} &= F_1(z - vt), \\ H_{y_1} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z - vt). \end{aligned} \right\} \quad (15.32)$$

În orice punct al spațiului, care se mișcă de-a lungul axei  $Oz$  cu viteză  $\frac{dz}{dt} = v$ , valorile  $E_z$  și  $H_y$  rămîn constante. În adevăr, poziția unui asemenea punct este determinată de coordonata

$$z = vt + z_0$$

și deci  $E_z$  și  $H_y$  în acest punct au valorile

$$E_{x_1} = F_1(vt + z_0 - vt) = F_1(z_0) = \text{Const.},$$

$$H_{y_1} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z_0) = \text{Const.}$$

Rezultă de aici, că diversele valori ale lui  $E_{x_1}$  sau  $H_{y_1}$  se propagă înspre partea pozitivă a axei  $Oz$  cu viteza  $v$ . În consecință, ecuațiile (15.32) determină unda electromagnetică care se propagă cu viteza  $v$ , în direcția pozitivă a axei  $Oz$ . Această undă se numește unda directă.

\* Vezi [271], pag. 221.



În același mod se arată că soluția particulară

$$\left. \begin{aligned} E_{x_1} &= F_2(z + vt) \\ H_{y_1} &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_2(z + vt) \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

determină unda electromagnetică care se mișcă cu viteza  $v$ , în direcția negativă a axei  $Oz$ . Această undă se numește *unda inversă*.

Dacă axa  $Oz$  este îndreptată de la sursă către un punct oarecare, atunci unda fundamentală este unda directă. Unda inversă apare ca rezultat al reflexiei undei directe de un obstacol oarecare.

Între valorile absolute ale cîmpurilor electrice și magnetice, atât ale undei directe cât și ale undei inverse, există relația

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z_c, \quad (15.34)$$

care este o mărime reală avînd dimensiunile unei impedanțe; această impedanță se numește *impedanța caracteristică* sau *impedanța de undă a mediului*. Pentru vid, valoarea numerică a impedanței de undă este

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 377 \, \Omega.$$

Pentru un dielectric oarecare, impedanța caracteristică este

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} Z_0 \cong \frac{1}{n'} Z_0.$$

Din relația (15.34) rezultă

$$\frac{\mu H^2}{2} = \frac{\epsilon E^2}{2}, \quad (15.35)$$

ceea ce, arată că în cazul cînd există numai undă electromagnetică directă (sau numai undă inversă) energiile cîmpurilor magnetic și electric sînt egale între ele.

Unda electromagnetică descrisă în cele ce preced, în care vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  rămîn fiecare paraleli cu cîte o direcție fixă, normale pe direcția de propagare constituie o *unda electromagnetică plană polarizată liniar*.

**15.1.2.4. Unda electromagnetică plană sinusoidală.** Fie cazul particular în care  $E_x$  și  $H_y$  sînt funcții de timp, armonice sinusoidale. Să presupunem că nu există decît unda directă. Ecuațiile (15.32) se vor scrie

$$\left. \begin{aligned} E_x &= F_1(z - vt) = E_m \cos(\omega t + \psi) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m \cos(\omega t + \psi) = H_m \cos(\omega t + \psi), \end{aligned} \right\} \quad (15.36)$$

în care  $\omega$  este pulsația oscilațiilor.



Pentru ca sistemele (15.32) și (15.36) să fie identice, trebuie ca

$$\omega t + \psi = k(z - vt), \quad (15.37)$$

în care  $k$  este o constantă ce trebuie determinată. Această relație trebuind să fie identică pentru orice valoare a lui  $t$ , va fi satisfăcută și pentru  $t = 0$ ; rezultă  $\psi = kz$ , valoare care introdusă în relația (15.37) dă  $k = -\omega/v$  și deci,  $\psi = -\omega z/v$ . În consecință expresiile (15.36) ale celor două câmpuri devin:

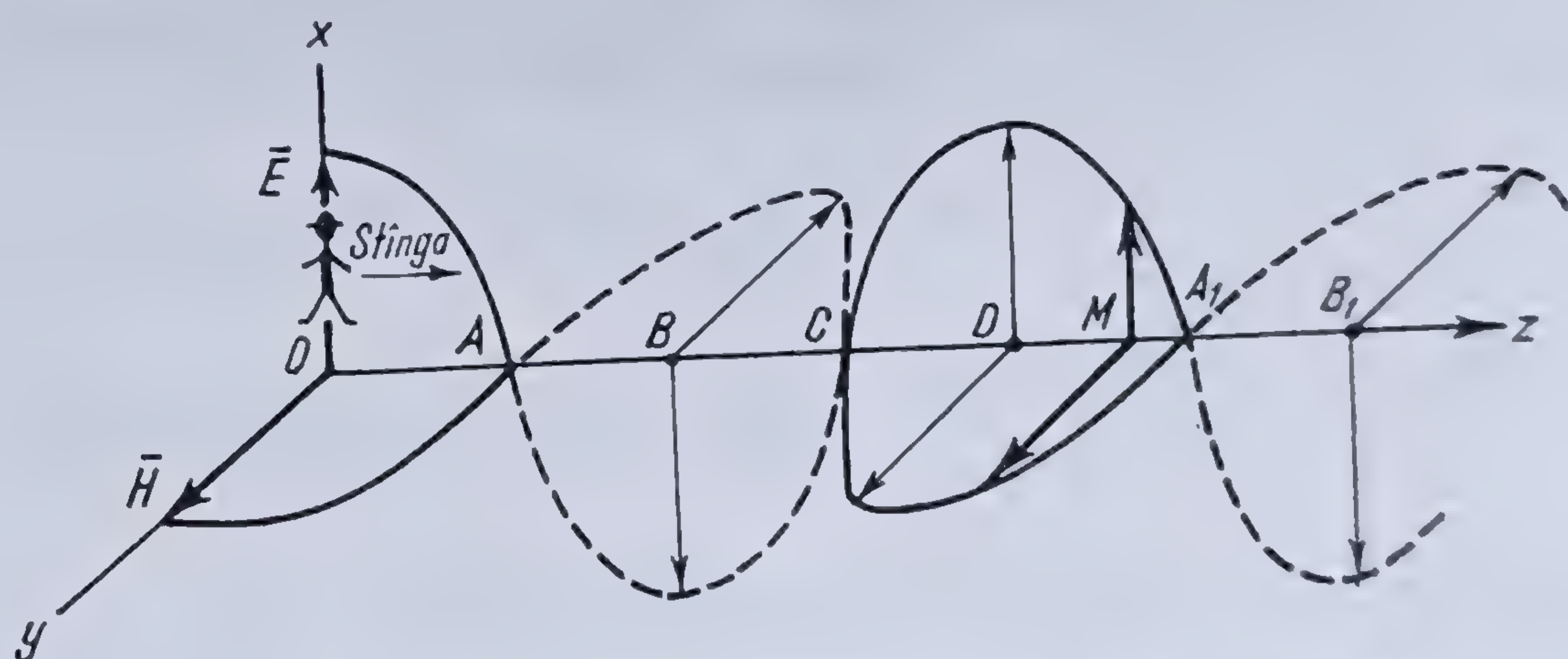
$$E_x = E_m \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad (15.38)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) = H_m \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right). \quad (15.39)$$

Să figurăm, pentru fiecare punct al axei  $Oz$ , vectorii câmp electric și câmp magnetic la timpul  $t = 0$  (fig. 15.4); diagramele acestor vectori, care se reduc la componentele lor

$$E_x = E_m \cos \frac{\omega z}{v} \text{ și } H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m \cos \frac{\omega z}{v} = H_m \cos \frac{\omega z}{v},$$

Fig. 15.4. Variația câmpurilor electrice și magnetice în raport cu distanța pentru o undă plană sinusoidală.



sînt două sinusoidale în planele  $xOz$  și  $yOz$ , care intersectează axa  $z$  în aceleași puncte și a căror ordonate maxime corespund de asemenea aceluiași abscise respective.

Sensul de propagare este acel dat de AMPÈRE: pentru un observator așezat de-a lungul câmpului electric  $E$  ce privește în direcția câmpului magnetic  $H$ , undele se propagă către stînga sa.

Dacă dorim să trasăm curbele din figura 15.3 nu la momentul  $t = 0$  ci la un moment  $t$  oarecare, într-un punct  $M'$ , situat la o distanță  $z'$  de origine, trebuie duse în ordonate mărimi proporționale cu

$$\cos \frac{\omega(z' - vt)}{v} = \cos \omega \left( t - \frac{z'}{v} \right).$$

Aceste ordonate sînt identice cu acelea care corespund la timpul  $t = 0$  punctului  $M$ , și care sînt proporționale cu  $\cos \frac{\omega z}{v}$ , dacă  $z' - vt = z$  sau  $MM' = z' - z = vt$ ;



este suficient a se deplasa cele două sinusoide în direcția  $Oz$  cu o lungime  $vt$ ; această reprezentare geometrică se poate face în felul acesta, deoarece undele se propagă cu viteza  $v$  în sensul  $Oz$  și parcurg o distanță  $vt$  în timpul  $t$ .

La un moment dat, vectorii  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  au aceeași valoare în două puncte  $M$  și  $M_1$ , astfel alese încât cantitățile  $\frac{\omega z}{v}$  și  $\frac{\omega z_1}{v}$  să difere cu  $2\pi$ . Lungimea  $(z_1 - z)$ , care este perioada în spațiul sinusoidelor trasate, se numește *lungimea de undă*, a unei electromagnetice. Avem

$$z_1 - z = 2\pi \frac{v}{\omega} = vT = \lambda. \quad (15.40)$$

Lungimea de undă este distanța cea mai mică a două plane de undă în care câmpurile electric și magnetic au aceeași fază.

În vid, și în aer, lungimea de undă este mai mare decât într-un mediu oarecare.

Atunci când se definește perioada unei oscilații electrice prin lungimea sa de undă, se înțelege întotdeauna lungimea de undă în vid. Lungimea de undă din aer diferă foarte puțin de aceasta.

### 15.1.3. UNDA ELECTROMAGNETICĂ STAȚIONARĂ

15.1.3.1. Producerea undelor electromagnetice staționare. Să reluăm ecuațiile (15.31) ale undelor plane

$$E_x = F_1(z-vt) + F_2(z+vt),$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} [F_1(z-vt) - F_2(z+vt)],$$

care în cazul undelor sinusoidale devin

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_m \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) + E_m \cos \omega \left( t + \frac{z}{v} \right), \\ H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m \cos \omega \left( t + \frac{z}{v} \right); \end{aligned} \right\} \quad (15.41)$$

ele se compun din undele directă și inversă, unda inversă provenind din reflec-tarea undei directe pe un obstacol.

Ecuațiile (15.41) pot fi scrise, dacă se transformă suma cosinusurilor în produs:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 2E_m \cos \frac{\omega z}{v} \cos \omega t, \\ H_y &= 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_m \sin \frac{\omega z}{v} \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (15.42)$$



a cărei variație pentru  $t = 0$ ,  $t = \frac{T}{8}$ ,  $t = \frac{2T}{8}$  și  $t = \frac{3T}{8}$ , sînt date în figura 15.5.

Ocele două cîmpuri în fiecare punct al spațiului unde se suprapun au aceeași fază și sînt în cuadratură unul față de celălalt, atât în spațiu, cît și în timp.

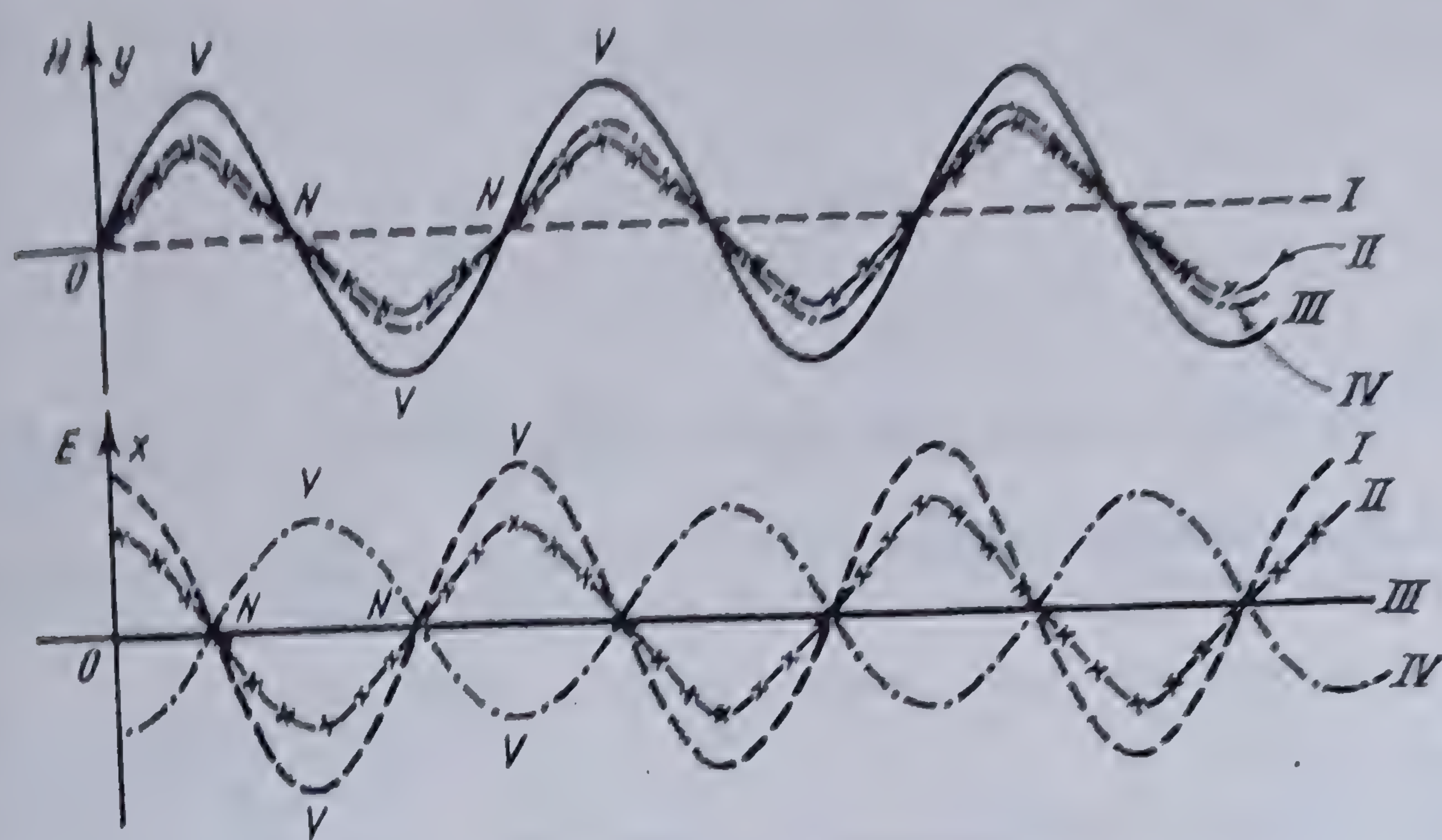


Fig. 15.5. Unde electromagnetice staționare.

Amplitudinea variației cîmpului magnetic\*

$$2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m \sin \frac{\omega z}{v} = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_m \sin \frac{2\pi z}{\lambda}$$

este nulă pentru punctele  $N$ , pentru care

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = k\pi$$

adică pentru punctele pentru care distanța de la origine este

$$z = k \frac{\lambda}{2};$$

și este maximă pentru punctele  $V$  pentru care

$$\frac{2\pi z}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2},$$

adică pentru care distanța de la origine este

$$z = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

\* Din  $\lambda f = v$  rezultă  $f = v/\lambda$  și  $\omega = 2\pi f = 2\pi v/\lambda$ .



Punctele  $N$  sînt *nodurile* cîmpului magnetic, iar punctele  $V$  sînt *ventrele* acestui cîmp.

Definind și în acest caz lungimea de undă ca fiind distanța dintre două puncte,  $z_1$  și  $z_2$ , pentru care avem la același timp  $t$  aceeași amplitudine pentru unda cîmpului electric sau pentru aceea a cîmpului magnetic, se obține

$$\frac{\omega}{v} z_2 - \frac{\omega}{v} z_1 = 2\pi$$

și deci,

$$z_2 - z_1 = \frac{2\pi}{\omega} v = \frac{v}{f} = \lambda;$$

se obține deci, pentru lungimea de undă aceeași expresie ca și în cazul undelor mobile.

Pentru cîmpul electric situația este inversă : la nodurile cîmpului magnetic corespund ventre pentru cîmpul electric și reciproc. Este ușor de văzut că, în funcțiile de lungimea de undă *ventrele* apar la distanțele  $k \frac{\lambda}{2}$  ( $k = 0, 1, \dots$ )

pentru cîmpul electric și la distanțele  $(2k + 1)\lambda/4$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) pentru cîmpul magnetic ; *nodurile* apar în cuadratură față de precedentele și anume, la distanțele  $(2k + 1)\lambda/4$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) pentru cîmpul electric și la distanțele  $k\lambda/2$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) pentru undele magnetice.

În cazul propagării unei unde unice, cîmpurile electrice și magnetice ating valorile lor maxime succesive în toate punctele spațiului.

În cazul propagării a două unde identice, dar în sens contrariu, cîmpurile sînt nule sau ating valorile lor maxime succesive în puncte fixe în spațiu.

Aceste unde, obținute din suprapunerea a două unde identice, dar care se propagă în sensuri contrarii cu aceeași viteză, poartă numele de *unde staționare*.

**15.1.3.2. Experiențele lui HERTZ.** Teoriile lui MAXWELL privind propagarea undelor electromagnetice, deduse de acesta în 1864 numai prin procesul de gîndire pornind de la descoperirile lui AMPÈRE și FARADAY, au fost verificate de HERTZ în 1888, adică după aproape 25 ani.

În circuitele electrice închise, formate dintr-un condensator ale cărui armături sînt legate între ele printr-un fir conductor și în care se produc oscilații electrice, radierea energiei electromagnetice este foarte mică. În adevăr, (fig. 15.6), dacă se consideră două elemente opuse ale circuitului,  $MN$  și  $M'N'$ , parcurse la timpul  $t$  de același curent de intensitate  $i$ , ele produc într-un punct  $P$  mai îndepărtat, cîmpuri magnetice opuse care se anulează aproape complet. De asemenea, cîmpul electric este foarte slab în afara spațiului limitat de armăturile condensatorului. Cea mai mare parte a energiei electrostatice rămîne localizată în acest spațiu aproape închis, precum și cea mai mare parte a energiei magnetice rămîne localizată în vecinătatea imediată a circuitului oscilant.

Pentru a obține o radiație mai intensă, HERTZ a folosit un *oscilator deschis*. Oscilatorul lui HERTZ este format din două sfere metalice,  $AB$ , care formează

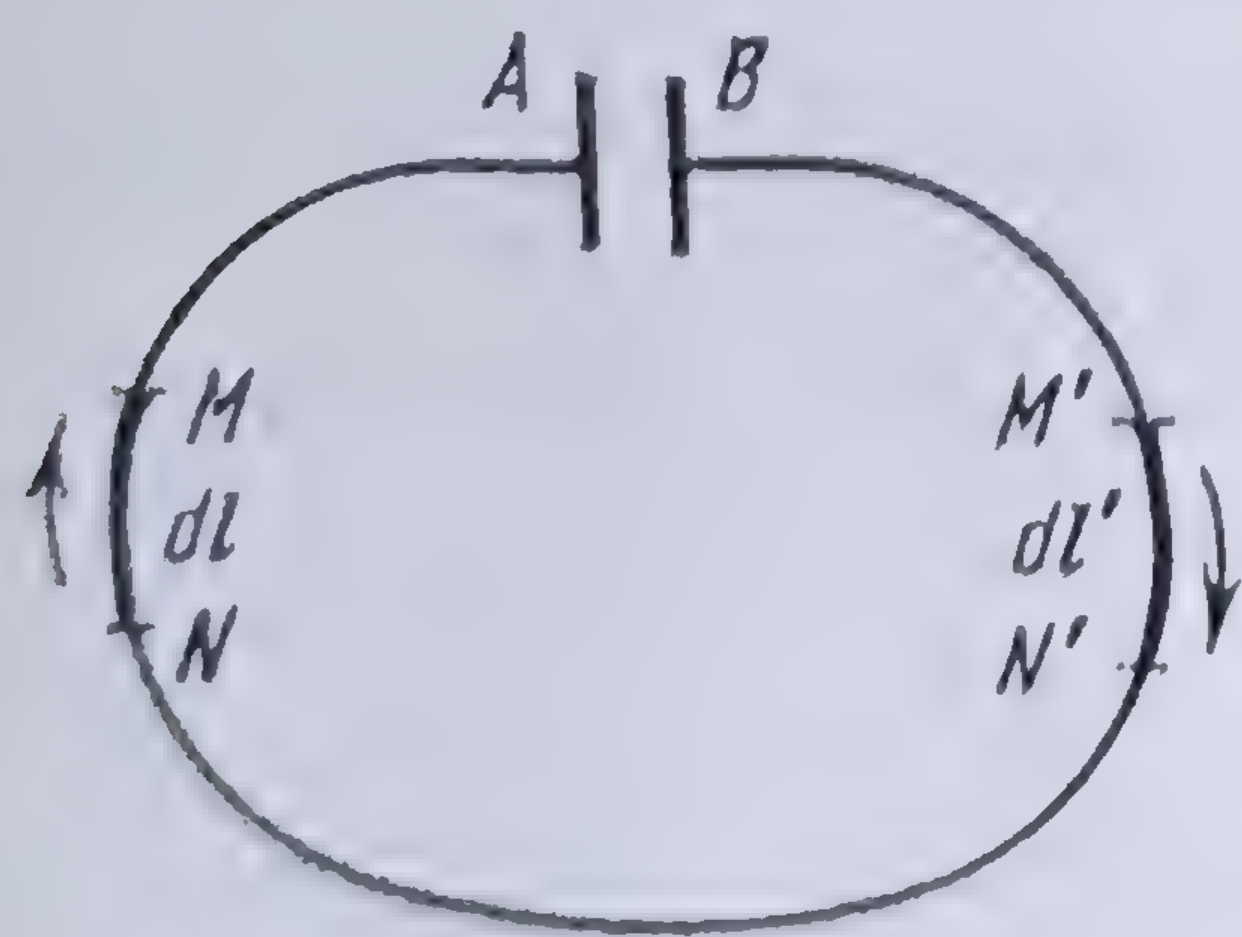


Fig. 15.6. Circuit electric cu condensator.



armăturile condensatorului din figura 15.6; circuitul de descărcare este redus la două tije conductoare  $TT'$  terminate prin două sfere  $EE'$ , între care țighește scînteia oscilantă (fig. 15.7). Aparatul este încărcat, legînd cele două borne  $P$  și  $Q$  la bornele unei bobine de inducție, o sursă de unde. Acest oscilator are aceeași simetrie ca și un sistem format din două sarcini electrice egale și de sens contrar, așezate în două puncte  $A$  și  $B$  și reunite printr-un element de circuit (fig. 15.8); într-un punct  $M$ , situat în planul perpendicular pe  $AB$  în mijlocul său  $O$ , cîmpul electric  $\vec{E}$  este paralel cu  $AB$  și cîmpul magnetic  $\vec{H}$  este perpendicular pe planul  $ABM$ ; dacă distanța  $OM$  este mare în raport cu lungimea de

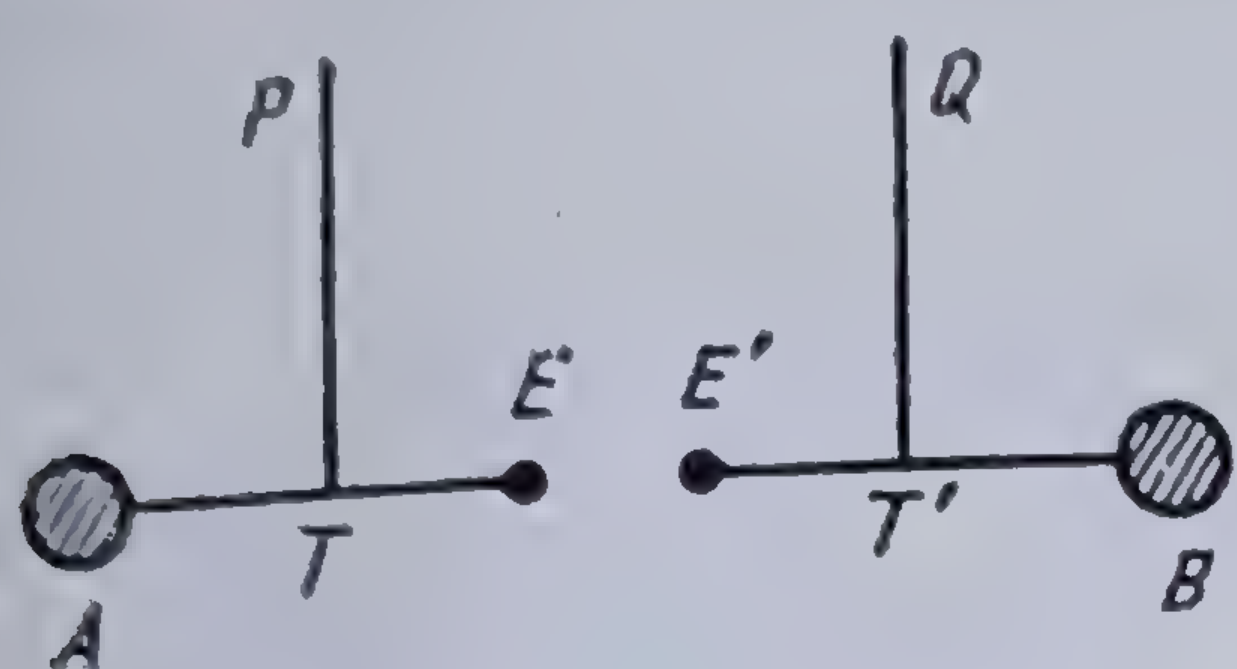


Fig. 15.7. Oscilatorul lui HERTZ.



Fig. 15.8. Sistemul echivalent al oscilatorului lui HERTZ.

undă, cîmpurile  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  formează o undă ale căror proprietăți pot fi asemuite cu acelea ale unei unde plane.

Descărcarea oscilantă care străbate oscilatorul este amortizată; undele care le reprezintă sînt unde amortizate și relațiile stabilite în subparagraful 15.1.2.4. nu le reprezintă decît aproximativ. Sinusoidele care reprezintă cîmpurile la un moment dat în diferitele puncte ale spațiului, precum și acelea care reprezintă variația cîmpului în raport cu timpul într-un punct oarecare, trebuie înlocuite cu undele din figura 15.9, iar fiecărei scînteii îi corespunde în oscilator un *tren de oscilații* iar în spațiu, un *tren de unde* (fig. 15.10).

Pentru obținerea de unde continue, se utilizează un alt tip de oscilator (fig. 15.11), care este constituit dintr-un emițător (circuit oscilant) cu antena respectivă\*.

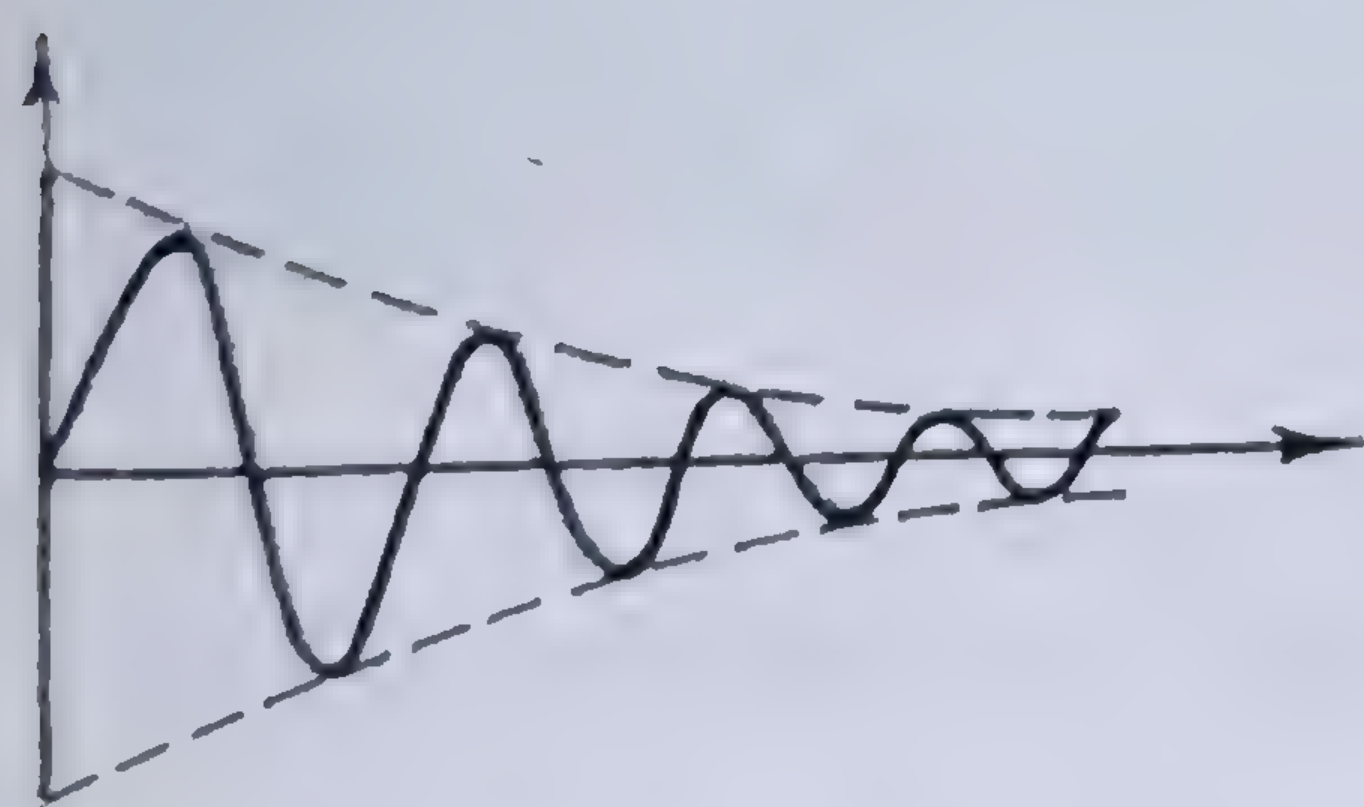


Fig. 15.9. Unde amortizate (pseudosinusoidale).



Fig. 15.10. Tren de unde.

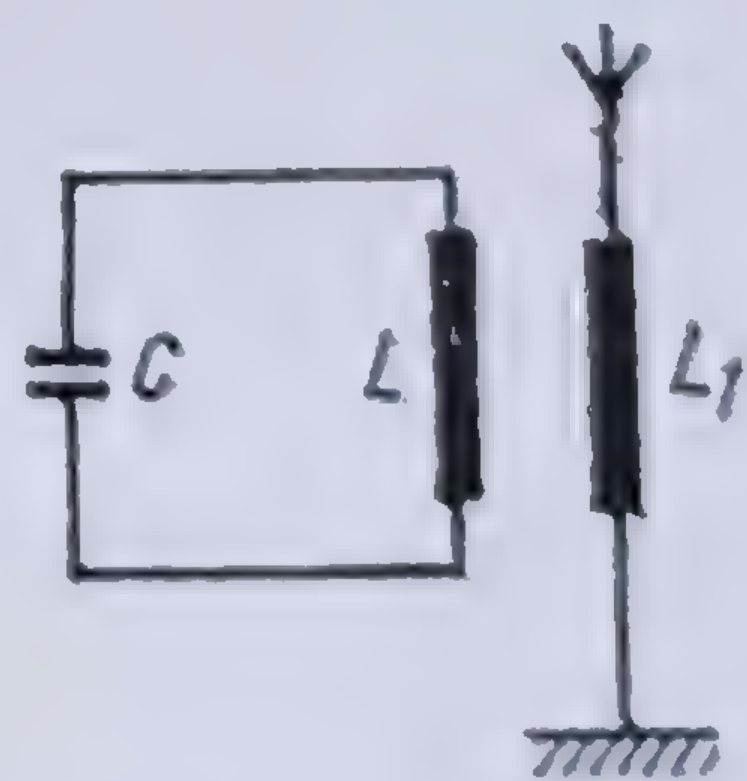


Fig. 15.11. Circuit oscilant cu antenă.

Cu oscilatorul lui HERTZ la care capacitatea este redusă la capacitatea sferelor și inductanța la aceea a firului conductor, lungimea de undă, care se calculează cu relația

$$\lambda = 2\pi v \sqrt{LC}$$

este de ordinul de 2 mm, ceea ce corespunde la o frecvență de  $15 \cdot 10^{10}$  Hz.

\*.Studiul emițătorului și antenei respective lese din cadrul lucrării de față.



Căutarea, în spațiu, a câmpului electromagnetic care se propagă, se face cu ajutorul rezonatorilor. Aceștia sînt circuite în care se produc curenți oscilanți.

Rezonatorul lui HERTZ este format dintr-un cerc de cupru, de secțiune suficientă (fig. 15.12), întrerupt printr-o secțiune îngustă  $BV$ , între o sferă și vârful unui șurub reglabil : trecerea curentului electric prin rezonator se manifestă printr-o scînteie ce apare între vârful șurubului și sfera respectivă.

Experiențele lui HERTZ au următorul substrat teoretic : să presupunem că o undă electromagnetică se propagă de-a lungul direcției  $Oz$ , câmpul electric fiind paralel cu axa  $Ox$ , iar câmpul magnetic paralel cu axa  $Oy$  ; se obține astfel, unda electromagnetică. Dacă se așază un rezonator ca în poziția I (fig. 15.13),

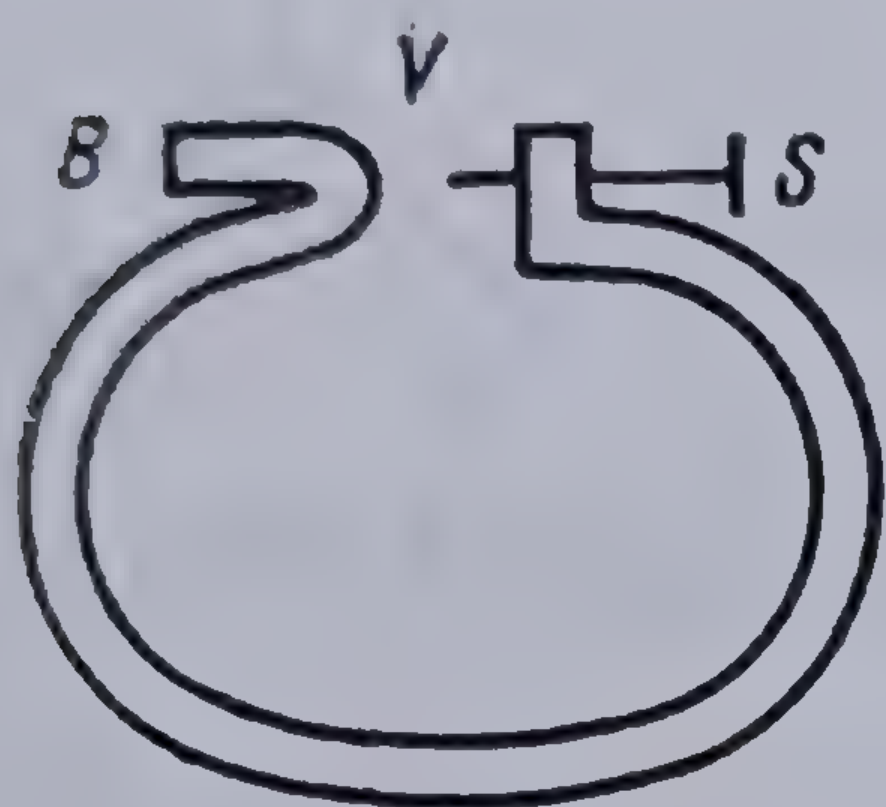


Fig. 15.12. Rezonatorul lui HERTZ.

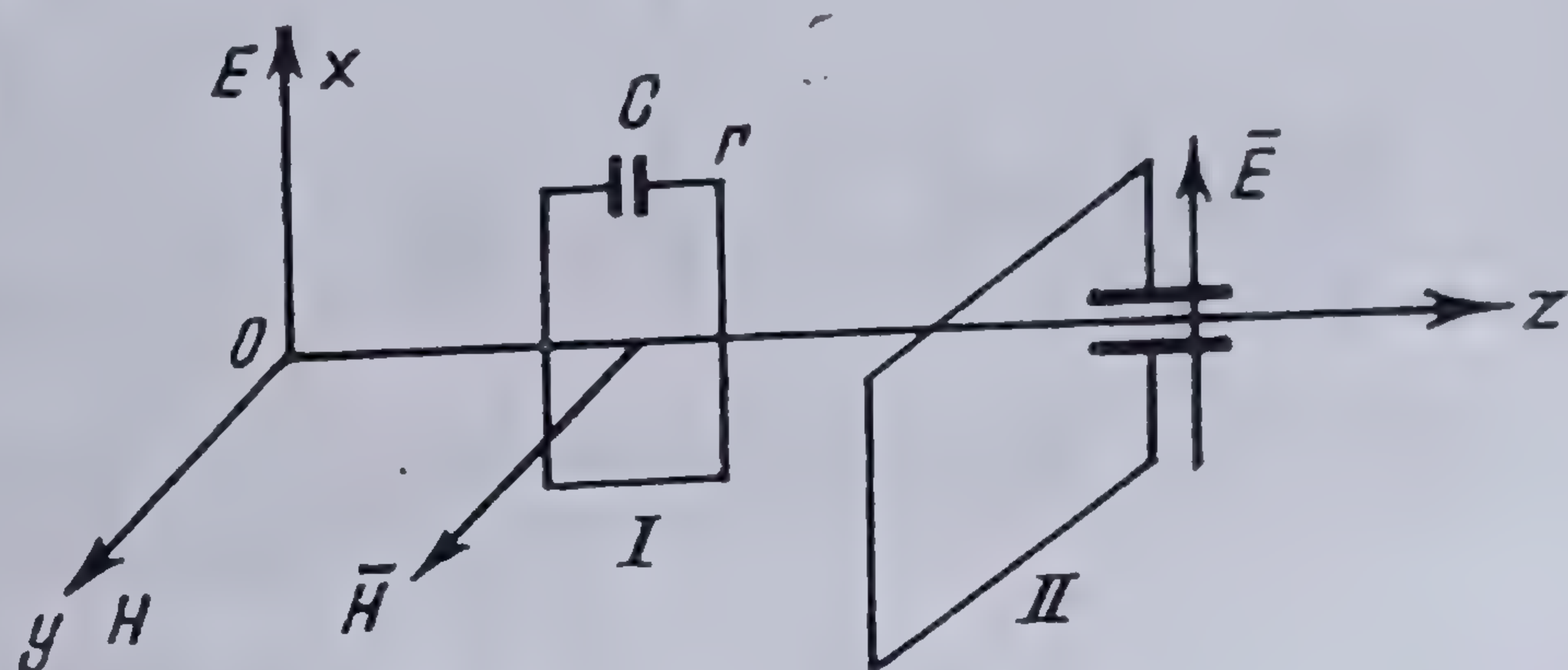


Fig. 15.13. Experiența lui HERTZ.

cu circuitul  $\Gamma$  în planul  $xoz$  și cu plăcile condensatorului paralele cu planul  $xoy$ , câmpul electric, paralel cu plăcile condensatorului, nu exercită asupra acestora nici o influență ; însă circuitul  $\Gamma$ , străbătut de câmpul  $\vec{B} = \mu\vec{H}$ , este sediul unei forțe electromotoare de inducție și deci a unui curent electric alternativ, a cărui intensitate măsoară variațiile amplitudinilor câmpului magnetic. Dacă se așază rezonatorul în poziția II, cu circuitul  $\Gamma$  în planul  $xoy$  și plăcile condensatorului paralele cu planul  $yOz$ , câmpul magnetic, paralel cu planul circuitului  $\Gamma$  nu mai produc nici un fenomen de inducție ; în schimb câmpul electric alternativ  $\vec{E}$  produce, prin influență electrostatică, sarcini electrice, alternativ pozitive și negative, pe plăcile condensatorului : trecerea lor prin circuitul  $\Gamma$  produce un curent alternativ a cărui intensitate măsoară amplitudinea variației câmpului electric.

## 15.2 ENERGIA TRANSMISĂ DE UNDELE ELECTROMAGNETICE

### 15.2.1. PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

15.2.1.1. Cazul undelor plane directe. Să considerăm cazul undelor plane care se propagă numai într-o singură direcție. Fie un element de volum  $d\tau$  situat într-un punct  $M$ . În acest punct câmpurile electrice și magnetice sînt date de relațiile (15.32) sau (15.33). Fie de exemplu, unda directă

$$E_x = F_1(z - vt)$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z - vt).$$



Un element de volum  $d\tau$  conține, la timpul  $t$ , o energie  $dW$ , care este suma energiilor electrostatică și electromagnetică localizată în acest element:

$$dW = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) d\tau = \frac{1}{2} \left[ \epsilon E \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H + \mu H \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \right] d\tau = \sqrt{\epsilon\mu} EH d\tau =$$

$$= \frac{1}{v} ED d\tau = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1^2 (z_0 - vt) d\tau.$$

În momentul  $t'$  posterior lui  $t$ , elementul de volum  $d\tau$ , situat în punctul  $M$ , va conține o energie diferită sau poate nici una; un element de volum egal, dar situat în punctul  $M'$ , astfel ca  $MM' = z' - z = v(t' - t)$  va conține exact aceeași energie  $dW$ , pe care a conținut-o elementul de volum  $d\tau$  în punctul  $M$  la timpul  $t$ . Într-adevăr energia corespunzătoare este

$$dW' = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1^2 (z' - vt') d\tau = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1^2 [z + v(t' - t) - vt'] d\tau =$$

$$= \frac{1}{v} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1^2 (z - vt) d\tau = dW$$

căci  $z' - vt' = z + v(t' - t) - vt' = z - vt$ . În conformitate cu principiul conservării energiei, se poate spune că energia electromagnetică  $dW$  a fost transportată din punctul  $M$  în punctul  $M'$ . În consecință, *undele electromagnetice transportă energia electromagnetică în sensul de propagare a lor; această energie se propagă cu viteza  $v$ , normal pe planul undelor.*

Fie un element de suprafață  $MNPQ$  a planului undei trecând prin punctul  $M$  (fig. 15.14). Energia  $dW$  care trece prin acest element de suprafață, de arie  $d\Sigma$ , între timpurile  $t$  și  $t + dt$  este energia care era localizată la timpul  $t$  în elementul de volum

$$d\tau = d\Sigma dz = v d\Sigma dt$$

și anume,

$$dW = \frac{1}{v} EH d\tau = EH d\Sigma dt.$$

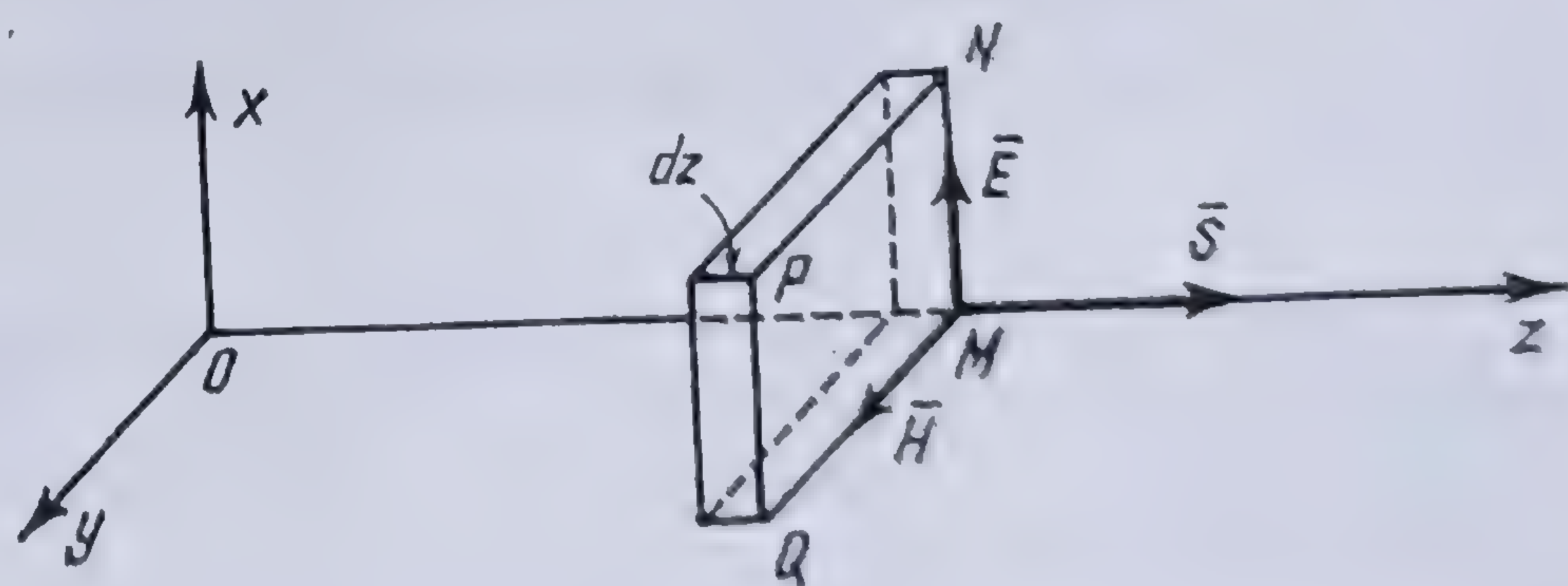


Fig. 15.14. Stabilirea vectorului POYNTING.

Pe unitatea de suprafață și în unitatea de timp, apare energia

$$\frac{dW}{d\Sigma dt} = EH = S; \quad (15.43)$$

această mărime are dimensiunile unei *densități superficiale* de putere; ea este normală pe suprafața  $d\Sigma$  și este îndreptată în sensul de propagare și deci în sensul



vectorului viteză  $\vec{v}$ . Direcția ei este deci, perpendiculară pe planul vectorilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$ ; ea poate fi reprezentată prin vectorul

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (15.44)$$

care se numește *vectorul fluxului de energie electromagnetică* sau *vectorul radiant* sau *vectorul POYNTING*.

Sensul lui este dat de sensul triedrului lui AMPÈRE și este întotdeauna în direcția propagării.

Expresia (15.44) a fost stabilită în cazul particular al unui mediu omogen și izotrop și în cazul că există sau numai unda directă sau numai unda inversă. Ea este adevărată însă și în cazul general.

Trebuie subliniat că mărimile lui  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  din expresia lui  $\vec{S}$  trebuie să fie cele două componente ale câmpului electromagnetic, adică trebuie să fie legate între ele prin ecuațiile lui MAXWELL (15.3) și (15.4).

În adevăr, fie cazul unei simple suprapuneri de câmpuri continui electric și magnetic (fig. 15.15), independente unul de altul, realizate cu ajutorul unui

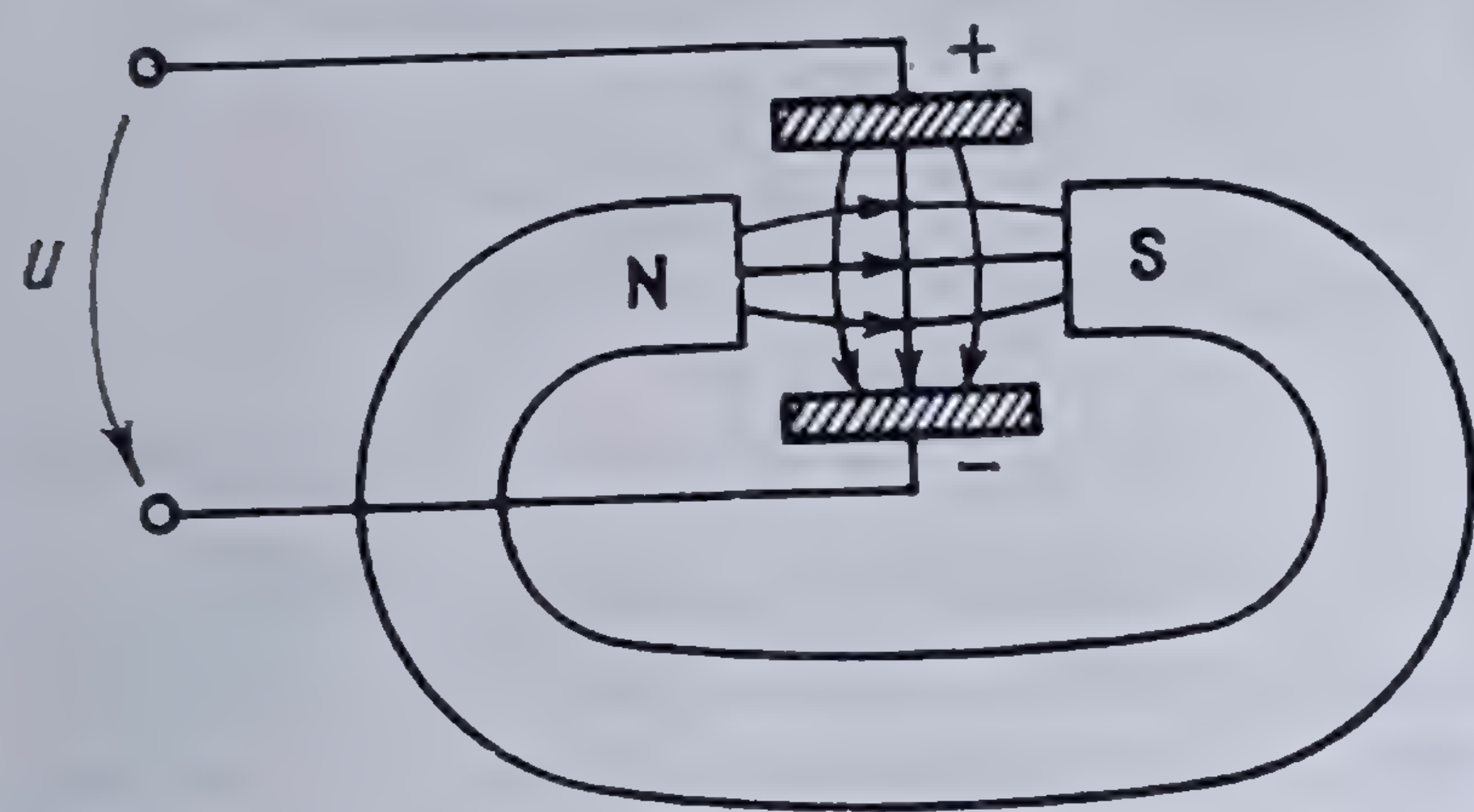


Fig. 15.15. Câmpuri, electric și magnetic, care nu satisfac ecuațiilor lui MAXWELL.

o legătură, ci numai o simplă suprapunere a celor două câmpuri, electric și magnetic, în spațiul  $\tau$ ; cele două câmpuri nu formează deci componentele unui vector radiant; în consecință, nu se produce vreo deplasare de energie electromagnetică.

**15.2.1.2. Propagarea energiei electromagnetice în cazul general.** Fie un mediu neomogen și anizotrop, în care se presupune că proprietățile electrice (permitivitatea  $\epsilon$  și conductivitatea  $\gamma$ ) sînt independente de intensitatea câmpului electric  $\vec{E}$ , cele magnetice (permeabilitatea  $\mu$ ) sînt independente de intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$ , însă rămîn constante în fiecare punct al spațiului.

Fie un volum oarecare  $\tau$  în acest spațiu, limitat de o suprafață  $\Sigma$ . Energia câmpurilor electrice și magnetice cuprinsă în volumul  $\tau$  poate fi pusă sub forma

$$W_e + W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) d\tau.$$

Presupunem că această energie variază în timp în volumul dat. Scăderea acestei energii este dată de relația

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \vec{D} + \vec{H} \vec{B}) d\tau.$$



În cazul general, vectorul  $\bar{D}$  nu coincide în direcție cu vectorul  $\bar{E}$ . Se poate scrie succesiv

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\bar{E} \cdot \bar{D}) &= \frac{\partial}{\partial t} (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2) = \\ &= \left( E_x \frac{\partial D_x}{\partial t} + E_y \frac{\partial D_y}{\partial t} + E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} \right) = \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}.\end{aligned}$$

La fel se arată că

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{H} \cdot \bar{B}) = \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Se obține deci :

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = - \int_{\tau} \left( \bar{E} \cdot \frac{d\bar{D}}{dt} + \bar{H} \cdot \frac{d\bar{B}}{dt} \right) d\tau.$$

Presupunem că în volumul respectiv există curenți de conducție, sarcini electrice libere și surse de energie electromagnetică, ce transformă energia de o formă oarecare în energie electromagnetică (cîmpuri electrice imprimare  $\bar{E}_i$ ). Vom avea în acest caz

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_e + \rho \bar{v} \quad \text{și} \quad \bar{\delta}_e = \gamma (\bar{E} + \bar{E}_i);$$

rezultă

$$\bar{E} = \frac{\bar{\delta}_e}{\gamma} - \bar{E}_i.$$

Din prima ecuație a lui MAXWELL, ținînd seama de relațiile precedente, se deduce

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \text{rot } \bar{H} - \bar{\delta}_e - \rho \bar{v},$$

iar din a doua

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = - \text{rot } \bar{E}.$$

Introducînd aceste expresii în relația (15.45) se obține

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = - \int_{\tau} \delta_e \bar{E}_i d\tau + \int_{\tau} \frac{\delta_e^2}{\gamma} d\tau + \int_{\tau} \rho \bar{v} \bar{E} d\tau - \int_{\tau} (\bar{E} \text{ rot } \bar{H} - \bar{H} \text{ rot } \bar{E}) d\tau. \quad (15.46)$$

Dar

$$\bar{E} \text{ rot } \bar{H} - \bar{H} \text{ rot } \bar{E} = - \text{div } [\bar{E} \times \bar{H}] \quad \text{și} \quad \int_{\tau} \text{div } [\bar{E} \times \bar{H}] d\tau = \int_{\Sigma} [\bar{E} \times \bar{H}] d\bar{\Sigma}$$



astfel, că relația (15.46) se poate scrie

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = -\int_{\tau} \bar{\delta}_e \bar{E}_t d\tau + \int_{\tau} \frac{\delta e^2}{\gamma} d\tau + \int_{\tau} \rho \bar{v} \bar{E} d\tau + \int_{\Sigma} \bar{S} d\bar{\Sigma} \quad (15.47)$$

ținând seama de (15.44).

Înmulțind relația (15.47) cu  $dt$  și scriind-o sub forma

$$dt \int_{\tau} \bar{\delta}_e \bar{E}_t d\tau = \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) dt + dt \int_{\tau} \frac{\delta e^2}{\gamma} d\tau + dt \int_{\tau} \rho \bar{v} \bar{E} d\tau + dt \int_{\Sigma} \bar{S} d\bar{\Sigma} \quad (15.48)$$

sau

$$dW_s = dW_J + dW_m + \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) dt + dW_{rad}, \quad (15.49)$$

care se interpretează după cum urmează :

— termenul  $dW_s = dt \int_{\tau} \bar{\delta}_e \bar{E}_t d\tau$  reprezintă energia dată de sursă în volumul  $\tau$  considerat ;

— termenul  $dW_J = dt \int_{\tau} \frac{\delta e^2}{\gamma} d\tau$  reprezintă energia absorbită în volumul  $\tau$  din cauza conductibilității mediului, adică energia care se transformă în căldură ;

— termenul  $dW_m = dt \int_{\tau} \rho \bar{v} \bar{E} d\tau$ , reprezintă energia cheltuită pentru accelerarea sarcinilor libere care se găsesc în volumul  $\tau$ , adică pentru mărirea energiei cinetice a acestor sarcini\* ;

— termenul  $\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) dt$  reprezintă variația energiei electromagnetice în volumul  $\tau$  ;

— termenul  $dW_{rad} = \left( \int_{\Sigma} \bar{S} d\bar{\Sigma} \right) dt$  reprezintă energia radiantă ce iese din volumul  $\tau$ .

Relația (15.48) a fost stabilită în ipoteza că în volumul  $\tau$  nu se consumă nici un lucru mecanic pentru deplasarea corpurilor conductoare încărcate cu sarcini electrice sau circuite străbătute de curenți, ceea ce s-a exprimat prin aceea că parametrii  $\epsilon$ ,  $\mu$  și  $\gamma$  au fost considerați constanți în orice punct al spațiului și independenți de câmpul electromagnetic existent ; aceasta înseamnă, că atât conductoarele cât și mediul au fost considerate în repaus.

Relația (15.48) reprezintă legea conservării energiei electromagnetice într-un asemenea caz.

În cazul când sistemul dat nu cuprindea surse de energie electromagnetică în interiorul volumului  $\tau$ , rezultă  $\bar{E}_t = 0$  și relația (15.49) se poate scrie

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) dt = dW_J + dW_m + dW_{rad}, \quad (15.50)$$

\* Avem succesiv

$$\rho \bar{v} \bar{E} d\tau = \bar{v} \bar{E} dq = \bar{v} d\bar{F} = d\bar{F} \frac{dl}{dt}$$

care reprezintă lucrul mecanic pe unitatea de timp a forțelor ponderomotoare ale câmpului electric cheltuit pentru accelerarea sarcinilor electrice.



relație care arată că bilanțul energetic este realizat în dauna micșorării energiei câmpului electromagnetic care se găsește în volumul respectiv.

### 15.2.2. PREZENȚA FENOMENELOR REACTIVE ÎN PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE

G. I. BUDEANU a arătat\* că propagarea energiei electromagnetice este însoțită de fenomene reactive. Considerînd același regim de funcționare ca și în subparagraful precedent\*\*, prima ecuație a lui MAXWELL scrisă între vectori complecși conjugați și a doua între vectorii complecși simpli dau

$$\text{rot} \underline{\underline{H}}^* = \underline{\underline{\delta}}^* + \rho \underline{\underline{V}}^* - j \omega \varepsilon \underline{\underline{E}}^* \quad \text{și} \quad \text{rot} \underline{\underline{E}} = -j \omega \mu \underline{\underline{H}}. \quad (15.51)$$

Introducînd aceste expresii, precum și relația  $\underline{\underline{\delta}}_c = \gamma (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{H}}_t)$  în relația

$$\underline{\underline{E}} \text{rot} \underline{\underline{H}}^* - \underline{\underline{H}}^* \text{rot} \underline{\underline{E}} = -\text{div} [\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{H}}^*]$$

se obține

$$(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\delta}}_c^*) = \frac{\delta_c^2}{\gamma} + j 2 \omega \left[ \left( \frac{1}{2} \mu H^2 - \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right) + \frac{1}{2} \rho_m v^2 \right] + \text{div} [\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{H}}^*], \quad (15.52)$$

în care\*\*\*  $\rho_m$  este densitatea de masă, a corpusculilor avînd densitatea de sarcină electrică volumetrică  $\rho$ .

Ecuația (15.52) reprezintă forma punctuală a principiului conservării, aplicat acestui fenomen radiant.

Integrînd ecuația (15.52) pe un volum  $\tau$  și aplicînd teorma divergenței, se obține

$$\int_{\tau} (\underline{\underline{E}}_a \cdot \underline{\underline{\delta}}_c^*) d\tau = \int_{\tau} \frac{\delta_c^2}{\gamma} d\tau + j 2 \omega [(W_m - W_e)] + \int_{\Sigma} [\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{H}}^*] d\Sigma \quad (15.53)$$

în care primul termen reprezintă puterea complexă produsă în interiorul volumului  $\tau$ ,  $\int_{\tau} (\delta_c^2/\gamma) d\tau$  este puterea activă consumată prin efect JOULE,  $W_m$  și  $W_e$  valorile medii ale energiilor câmpurilor magnetice și electrice,  $W_e$  valoarea medie a energiei cinetice a sarcinilor libere, toate în interiorul aceluiași volum. Ultimul termen este puterea complexă transmisă către exterior prin suprafața  $\Sigma$ : expresia  $[\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{H}}^*] = \underline{\underline{S}}$  este forma complexă a vectorului radiant.

Dacă mediul este lipsit de sarcini libere oscilante, relația (15.53) se reduce la forma

$$\int_{\tau} (\underline{\underline{E}}_t \cdot \underline{\underline{\delta}}_c^*) d\tau = \int_{\tau} \frac{\delta_c^2}{\gamma} d\tau + j 2 \omega (W_m - W_e) + \int_{\Sigma} [\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{H}}^*] d\Sigma \quad (15.54)$$

\* Vezi [66]

\*\* Vezi 15.2.1.2.

\*\*\* Termenul  $j 2 \omega (1/2) \rho_m v^2$  provine din  $\rho \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{v}}^* = j \rho_m \omega \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}^*$ .

Aceasta presupune că în acest fenomen de convecție sarcinile electrice libere oscilează cu pulsația câmpului electric  $\underline{\underline{E}}$  și fără frecare.



Primul și ultimul termen al relației (15.54) pot fi puși sub forma explicită

$$\int_{\tau} (\bar{E}_i \cdot \bar{\delta}_e) d\tau = \int_{\tau} (\bar{E}_i \cdot \bar{\delta}_e) (\cos \varphi + j \sin \varphi) d\tau \quad (15.55)$$

$$\int_{\Sigma} [\bar{E} \times \bar{H}^*] d\bar{\Sigma} = \int_{\Sigma} [\bar{E} \times \bar{H}] (\cos \varphi + j \sin \psi) d\bar{\Sigma}, \quad (15.56)$$

în care  $\varphi$  și  $\psi$  reprezintă defazajele în timp între  $E_i$  și  $\delta$ , respectiv  $E$  și  $H$ ; unghiurile  $\varphi$  și  $\psi$  sînt funcții de punct, primul în volumul  $\tau$  iar al doilea pe suprafața  $\Sigma$ . Introducînd relațiile (15.55) și (15.56) în relația (15.54) și separînd părțile reale și cele complexe, se obține

$$P = \int_{\tau} (\bar{E}_i \cdot \bar{\delta}_e) \cos \varphi d\tau = \int_{\tau} \frac{\delta_e^2}{r} d\tau + \int_{\Sigma} [\bar{E} \times \bar{H}] \cos \psi d\bar{\Sigma} \quad (15.57)$$

$$Q = \int_{\tau} (\bar{E}_i \cdot \bar{\delta}_e) \sin \varphi d\tau = 2 \omega (W_m - W_e) \tau + \int_{\Sigma} [\bar{E} \times \bar{H}] \sin \psi d\bar{\Sigma}. \quad (15.58)$$

Relațiile (15.57) și (15.58) reprezintă expresiile conservării puterilor activă și reactivă în volumul  $\tau$ . Toți termenii relației (15.58) au semnificații de puteri reactive; primul termen este puterea reactivă produsă în interiorul volumului  $\tau$ ; ultimul termen este puterea reactivă transmisă către exteriorul volumului  $\tau$ ; termenul  $2\omega (W_m - W_e)$  este puterea reactivă absorbită\* de mediul magnetic și electric din același volum  $\tau$ .

Rezultă dar, că se poate vorbi de putere reactivă și de conservarea ei și în fenomene energetice radiante, întocmai ca și în cazul rețelelor electrice cu frecvență constantă\*\*.

Puterea reactivă (14.48) transmisă de fenomenul radiant din volumul  $\tau$  în spațiul înconjurător  $\tau'$  este la rîndul ei absorbită sub forma  $2\omega (W_m - W_e)$  în acest nou spațiu și diferența este retransmisă mai departe și așa mai departe. Dacă în acest nou spațiu nu există un cîmp imprimat activ, atunci primul membru din relațiile (15.42), (15.53), (15.54), (15.57) și (15.58) se anulează; în special, relația (15.58) devine

$$2\omega(W_m - W_e) + \int_{\Sigma'} [\bar{E} \times \bar{H}] \sin \psi d\bar{\Sigma}' = 0, \quad (15.59)$$

care exprimă puterea reactivă primită (negativă) de la spațiul anterior  $\tau$  și cea transmisă mai departe (pozitivă),  $\Sigma'$  fiind suprafața care limitează noul spațiu.

Pînă la o anumită distanță, socotită din punctul unde este aplicat cîmpul imprimat complex  $\bar{E}_i$ , mare în raport cu lungimea de undă ( $r \gg \lambda$ ), orice putere reactivă este absorbită în spațiile respective. De la această distanță mai departe nu mai există fenomene reactive. Se regăsește, pe această cale, că în toate punctele îndepărtate energiile specifice magnetică și electrică trebuie să fie egale\*\*\*.

\* Expresia  $2\omega [(1/2) \mu H^2 - (1/2) \epsilon E^2]$  din relația (15.52) reprezintă puterea reactivă specifică.

\*\* Vezi 4.3.7.5.

\*\*\* Vezi și 15.1.2.3.



De asemenea, se regăsește că în această regiune, câmpurile  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  trebuie să fie în fază ( $\psi = 0$ ). În vecinătatea unui circuit străbătut de un curent ( $r \ll \lambda$ ), puterea reactivă specifică se reduce la  $2\omega W_m$ , deoarece în acest caz  $(1/2) \epsilon E^2 \ll \ll (1/2) \mu H^2$ .

### 15.2.3. PROPAGAREA ENERGIEI ELECTROMAGNETICE PE LINIILE ELECTRICE

**15.2.3.1. Cazul curentului alternativ sinusoidal armonic.** Să presupunem că la extremitatea  $O$  a unui fir conductor cilindric foarte lung  $Oz$  se aplică un potențial alternativ de frecvență  $f = \omega/(2\pi)$ , (fig. 15.16)\*; în conductor se va produce un curent alternativ de aceeași frecvență, a cărui intensitate într-un element de conductor  $MM'$ , la timpul  $t$ , este  $i$ .

Curentul  $i$ , a cărui densitate este  $\bar{\delta}$ , produce în punctul  $P$  din vecinătatea suprafeței elementului un câmp magnetic  $\vec{H}$ , perpendicular pe planul definit de axa  $Oz$  a cilindrului și de punctul  $P$ .

Diferitele puncte ale conductorului sînt la potențiale diferite; fie  $u$  potențialul elementului de conductor  $MM'$ ,  $q$  sarcina electrică răspîndită pe suprafața conductorului și  $\vec{E}$  intensitatea câmpului electric în punctul  $P$  din vecinătatea conductorului; câmpul  $\vec{E}$  este normal pe suprafața conductorului și în direcția razei.

Cîmpurile  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  sînt legate între ele prin ecuațiile lui MAXWELL (15.1) și (15.2); ele formează o undă plană care se propagă în direcția  $Oz$ , cu viteza  $\bar{v}$ , corespunzătoare mediului înconjurător, vectorul POYNTING fiind  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ .

Se poate admite că, în punctul  $P$ , câmpul electric  $\vec{E}$  este proporțional cu potențialul  $u$  — din care derivă — și câmpul  $\vec{H}$  este proporțional cu curentul  $i$  — care îl produce. Rezultă că, undelor electromagnetice din mediul dielectric

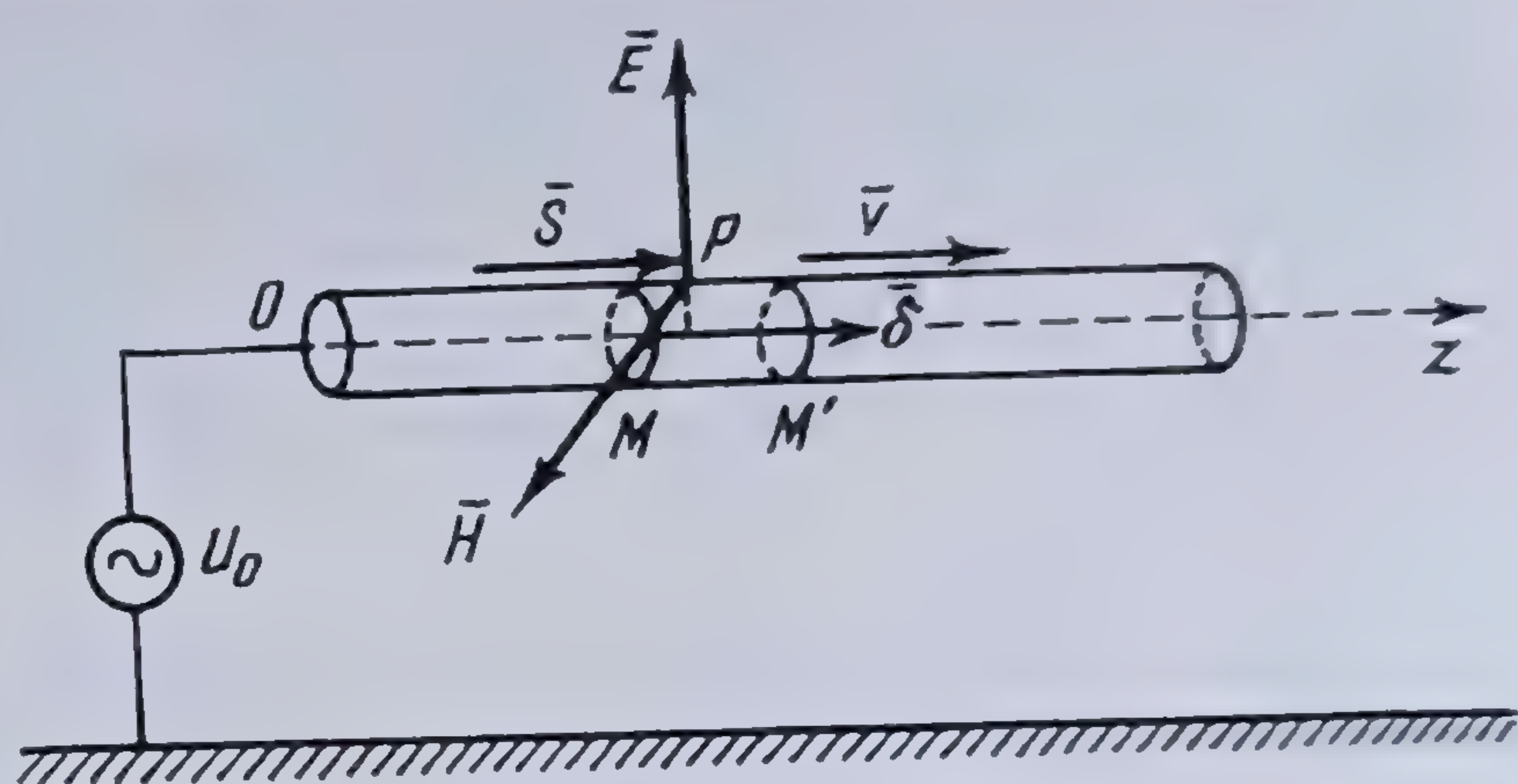


Fig. 15.16. Linie de curent alternativ.

$$E_x = F_1(z-vt) = E_m \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right),$$

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} F_1(z-vt) = H_m \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right)$$

le corespund oscilațiile din conductor

$$u = \varphi(z-vt) = U \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right),$$

$$i = \sqrt{\frac{c}{l}} \varphi(z-vt) = I \cos \omega \left( t - \frac{z}{v} \right),$$

\* De fapt o diferență de potențial față de pământ.



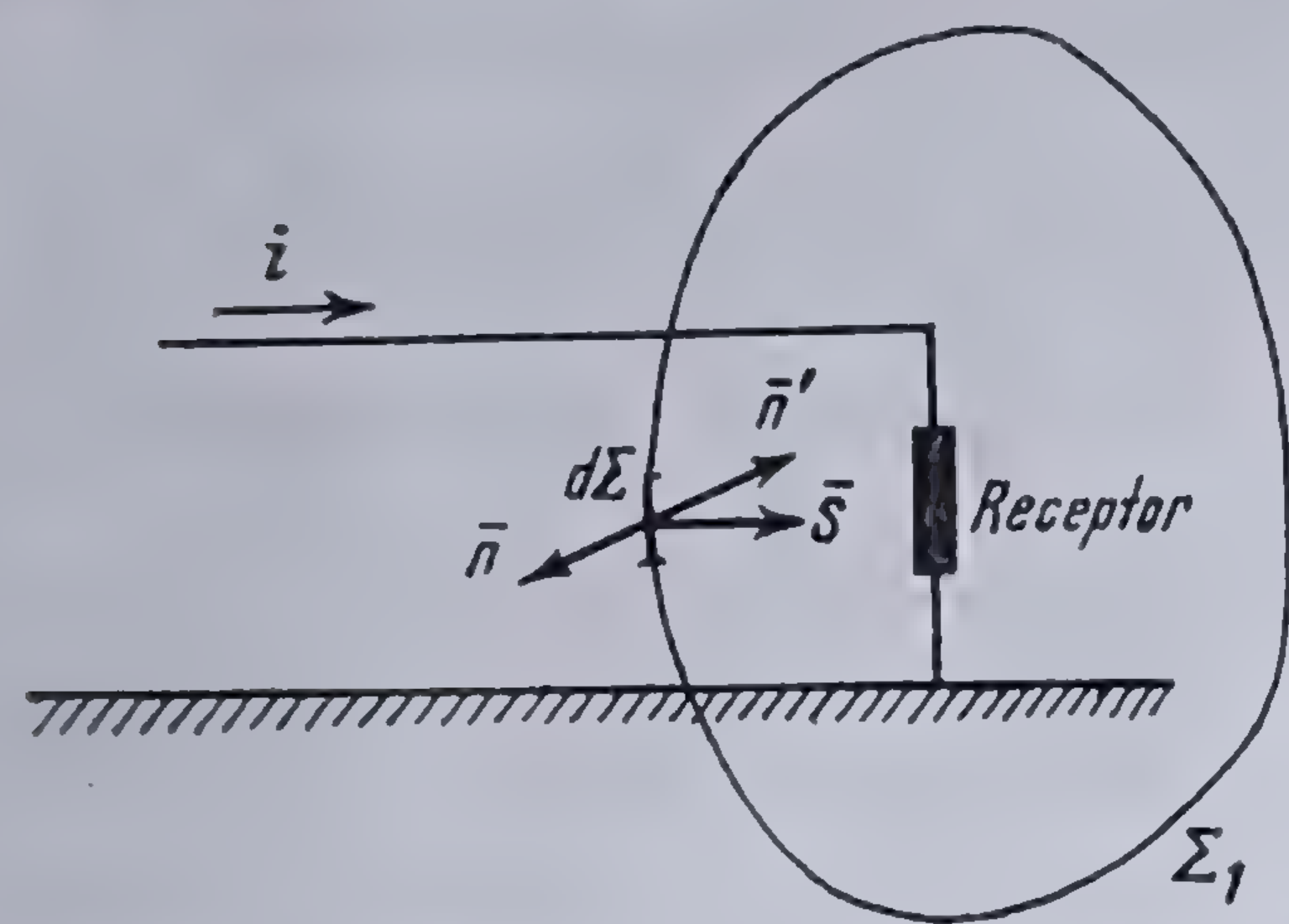
în care  $c$  și  $l$  sînt capacitatea și inductivitatea lineică a conductorului și  $v = 1/\sqrt{lc}$ .

În consecință, în curent alternativ transmisia energiei electromagnetice pe o linie electrică se realizează prin intermediul cîmpurilor electromagnetice care se propagă în dielectric de-a lungul conductoarelor liniei. Aceasta rezultă ca o consecință logică, a faptului că energia potențială a curentului electric — energia electromagnetică — se localizează în mediul dielectric. Energia, adusă de alternator în punctul  $O$  se propagă printr-o undă electromagnetică și curentul  $i$ , pe care această undă îl induce în conductor, nu este decît un fenomen accesoriu al cărui efect principal este să canalizeze energia electromagnetică de-a lungul conductorului și să o împiedice să radieze în toate direcțiile.

Dacă se examinează acum situația la receptor, unde neexistînd un cîmp electric imprimat și făcînd ipoteza că în dielectric nu există sarcini electrice libere, relația (15.47) se poate scrie

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_{\tau} \frac{\delta_c^2}{\gamma} d\tau + \int_{\Sigma} \bar{S} d\bar{\Sigma}. \quad (15.60)$$

Să închidem receptorul printr-o suprafață închisă oarecare  $\Sigma_1$ ; ținînd seama de convenția obișnuit făcută că versorul normalei este pozitiv atunci cînd sensul acesteia este din interior către exterior, în cazul de față, vectorul radiant pătrunde din exteriorul suprafeței către interiorul ei și deci (fig. 15.17)  $d\bar{\Sigma}_1 = -d\bar{\Sigma}$ . Relația (15.60) poate fi scrisă deci



$$\int_{\Sigma_1} \bar{S} d\bar{\Sigma}_1 = \int_{\tau} \frac{\delta_c^2}{\gamma} d\tau + \frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m), \quad (15.61)$$

Fig. 15.17. Receptor la capătul unei linii electrice de curent alternativ.

a cărei interpretare este imediată: energia consumată prin efect JOULE în linie și receptor precum și variația energiei electromagnetice în receptor este compensată de energia radiantă ce pătrunde prin suprafața  $\Sigma$ .

**15.2.3.2. Cazul curentului continuu.** În cazul curentului continuu, propagarea energiei electromagnetice se realizează prin micșorarea sarcinilor electrice sub acțiunea unui cîmp electric  $\bar{E}$ , luat în sens larg. Cîmpul  $\bar{E}$  este îndreptat, de-a lungul conductorului, în sensul de propagare, adică de la sursă către receptor.

Ținînd seama că, în cazul curentului continuu  $\partial(W_e + W_m)/\partial t = 0$ , relația (15.61) devine

$$\int_{\Sigma} \bar{S} d\bar{\Sigma}_1 = \int_{\tau} \frac{\delta_c^2}{\gamma} d\tau,$$

ceea ce înseamnă că întreaga energie radiantă, adusă de cîmpul electromagnetic, se transformă în energie JOULE (căldură), energia radiantă pătrunzînd în conductor prin suprafața laterală  $\Sigma$  a acestuia. Într-adevăr, la limită, cîmpul electric



$\vec{E}$  este tangent la conductor și paralel cu axa acestuia (fig. 15.18); cîmpul magnetic  $\vec{H}$  este de asemenea tangent la conductor într-un plan perpendicular pe axa acestuia. Rezultă dar că vectorul radiant este îndreptat către interiorul conductorului.

Pentru exemplificare, fie  $r$  raza conductorului considerat,  $l$  lungimea lui și  $R$  rezistența sa electrică. În aceste condiții, se obține :

$$S = E_i H = \frac{Ri}{l} \cdot \frac{i}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r l} \cdot Ri^2 = \frac{Ri^2}{\Sigma}$$

și deci

$$S \cdot \Sigma = Ri^2 = P_J.$$

Trebuie observat însă, că în realitate, cîmpul  $\vec{E}$  este rezultanta dintre cîmpul imprimat  $E_i$ , care produce mișcare sarcinilor electrice și deci curentul electric, al cărui sens și direcție este paralelă cu axa conductorului și în sensul de propagare (fig. 15.19) și cîmpul coulombian datorit sarcinilor electrice din

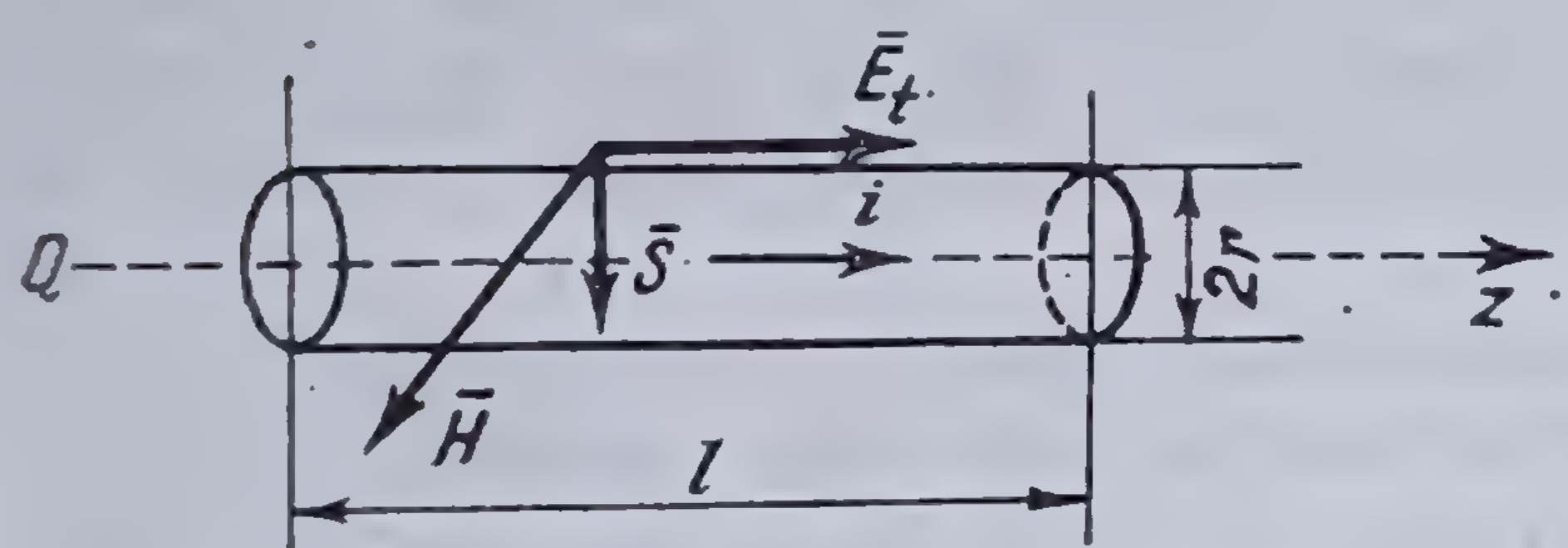


Fig. 15.18. Pătrunderea energiei radiante într-un conductor de curent continuu.

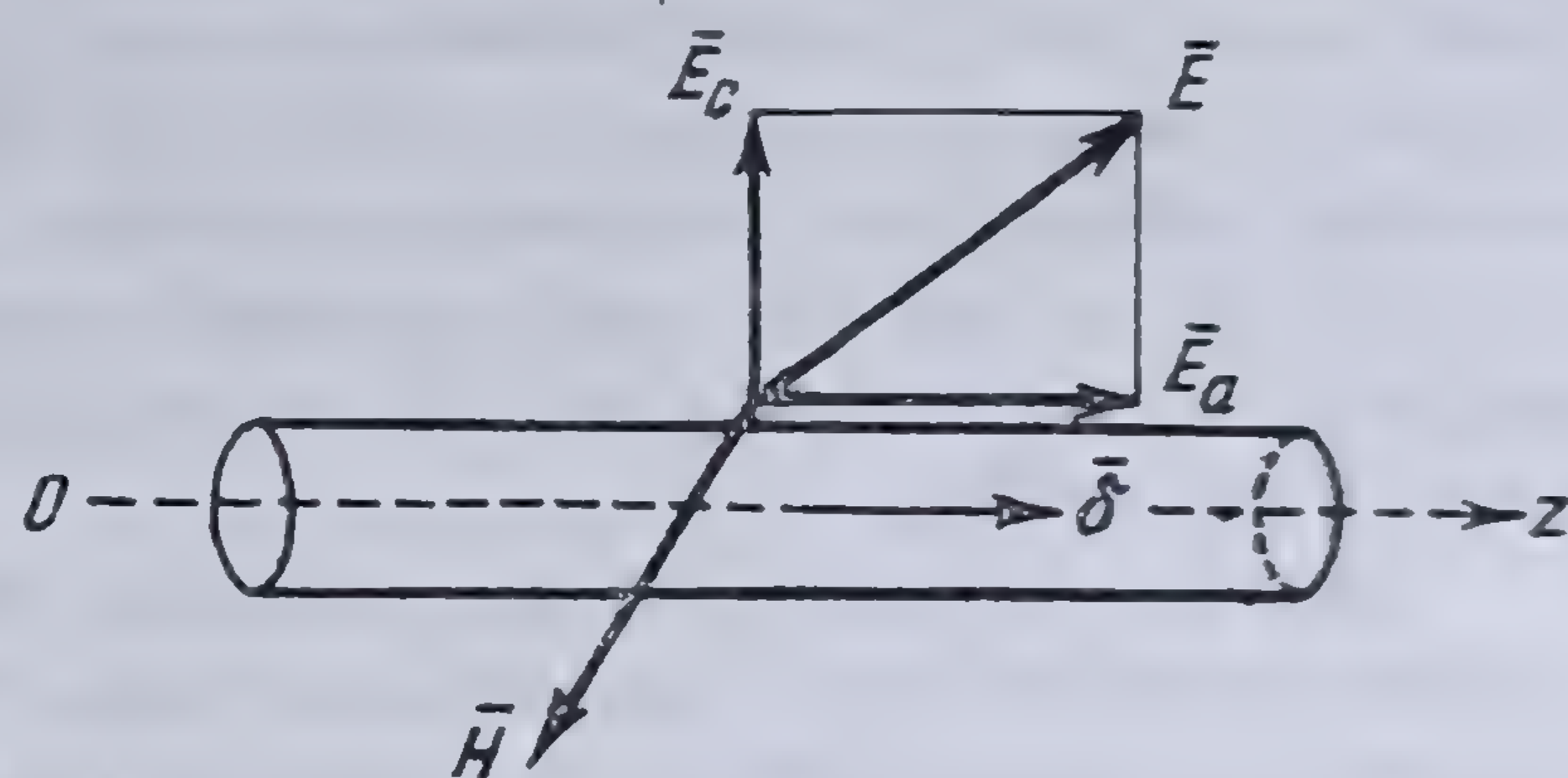


Fig. 15.19. Conductor de curent continuu.

conductor\* care este normal pe suprafața conductorului. Cum cîmpurile  $\vec{E}_c$  și  $\vec{H}$  sînt constante și nu sînt legate prin ecuațiile lui MAXWELL, ele nu produc un vector radiant POYNTING și deci în curent continuu energia electromagnetică nu se propagă prin cîmp.

**15.2.3.3. Valabilitatea ipotezelor făcute în studiul curenților electricei cuasistaționari\*\*.** În studiul curenților cuasistaționari — curenții alternativi — s-a făcut ipoteza că intensitatea curentului electric este, în fiecare moment, aceeași în toate punctele circuitului. Studiul propagării energiei electromagnetice de-a lungul conductoarelor\*\*\* arată că, această intensitate a curentului electric este, în diferitele puncte ale liniei electrice și în același moment, o funcție periodică de distanță, perioada corespunzătoare fiind egală cu lungimea de undă din mediul înconjurător. În consecință, în cazul cînd lungimea circuitului este neglijabilă în raport cu lungimea de undă a oscilațiilor electromagnetice ce-l parcure, se pot neglija variațiile de la un punct la altul al circuitului și ipoteza unui curent electric constant este întotdeauna valabilă.

Această condiție este în general satisfăcută și în cazul circuitelor oscilante închise, funcționînd în regim tranzitoriu. Prezența condensatorului de capaci-

\* Vezi 2.1.2 regimul fiind staționar, numărul de sarcini în unitatea de volum este constant.

\*\* Vezi 4.3.3.2

\*\*\* Vezi și cap. XII



tate foarte mare în raport cu capacitatea proprie a conductoarelor circuitului, are ca efect producerea unei perioade  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  destul de mare, căreia îi corespunde lungimea de undă  $\lambda = \frac{2\pi}{n} c_0 \sqrt{LC}$ , foarte mare în raport cu lun-

gimea circuitului; în această relație  $c_0$  este viteza luminii și  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ . Această condiție este întotdeauna satisfăcută în rețelele de distribuție de curent alternativ pentru care frecvența fiind de 50 Hz, lungimea de undă corespunzătoare este de 6000 km; ea este satisfăcută adesea și în cazul liniilor telefonice pentru care frecvența e de ordinul 1000 Hz la care corespunde o lungime de undă de 300 km. Trebuie observat totuși că liniile telefonice ating adesea lungimi de 300 km și că anumite linii electrice de transmitere de energie electrică ating astăzi lungimi importante, al căror ordin de mărime ating sfertul de undă. Pentru studiul acestor feluri de linii se va utiliza întotdeauna teoria corespunzătoare, singura care poate da soluția problemei studiate\*.

În studiul cîmpului magnetic produs de curenții alternativi s-au folosit aceleași metode ca și în cazul curentului staționar, făcîndu-se ipoteza, că în același moment, curentul este același în orice punct al circuitului. Și în acest caz ipoteza nu este valabilă decît cu condiția ca distanța punctului considerat la diversele elemente ale circuitului să fie neglijabile față de lungimea de undă a undelor oscilațiilor electromagnetice. Această ipoteză este valabilă în toate cazurile în afară de acela al oscilatorului deschis\*\*, căci în acest caz cîmpul magnetic este nul de îndată ce ne îndepărtăm de circuitul închis parcurs de curentul electric.

În cazul unui circuit oscilant cu condensator, curenții de deplasare care închid circuitul sînt limitați la spațiul cuprins între armăturile condensatorilor; distanțele respective nu formează decît o lungime extrem de mică din circuitul total și în consecință, curenții de deplasare corespunzători pot fi neglijăți în aplicarea legilor electromagnetismului acestor circuite. În cazul circuitelor oscilante deschise acest lucru nu mai este posibil și studiul acestor circuite se face utilizînd legile electromagnetismului ținînd seama de acești curenți de deplasare, utilizînd în consecință ecuațiile lui MAXWELL.

În sfîrșit, în cazul frecvențelor înalte și pentru conductoare altele decît acelea care au o secțiune foarte mică (conductoare practic filiforme), nu se mai poate aplica legea lui OHM decît cu condiția de a se ține seama de forțele electromotoare de inducție care există în masa conductorului\*\*\*. De asemenea, legea JOULE, valabilă sub forma sa obișnuită pentru fiecare element al unui circuit simplu format din conductoare filiforme sau fiecărui element al secțiunii unui conductor gros, nu poate fi aplicat ansamblului acestui conductor decît cu condiția de a se introduce în calcul o valoare a rezistenței variabilă cu frecvența\*\*\*\*.

\* Vezi Cap. XII.

\*\* Vezi 15.1.3.2.

\*\*\* Vezi 3.3.2.4.

\*\*\*\* Vezi 14.1.2.4.



## Index alfabetic\*

### A

ANASON, E. *I*, 17; *II*, 346  
 admitanță *I*, 335, 545  
 admitanța ciclică *I*, 612  
 admitanța lineică *II*, 552  
 admitanță (tensor) *I*, 242  
 AMPÈRE, A.M. *I*, 16, 295, 425  
 amperieni (curenți) *I*, 430  
 AMUZESCU, A. *I*, 18  
 ANTONIU, S. I. *I*, 18  
 armonici (analiză) *II*, 342  
 armonici (compunere) *II*, 323, 333  
 armonici (interferență) *II*, 340  
 ARNOLD, E. *I*, 17.  
 atenuare (constanta de) *II*, 560, 619, 643

### B

bilanț energetic *I*, 209  
 BIOT J. B. *I*, 324  
 BLONDEL, A. *I*; 16, 372  
 BOUCHEROT, P. *I*, 16, 566  
 BRÎNZARU, L. *I*, 18  
 bucle (metoda) *I*, 212, 243; *II* 32, 41, 73  
 BUDEANU, C. I. *I*, 15, 17; *II*, 324, 381, 388, 566

### C

capacitate (calcul) *I*, 85  
 capacitatea electrică *I*, 83  
 capacitate lineică *II*, 551  
 capacități de serviciu *I*, 105  
 CARSON J.R. *I*, 17; *II*, 435  
 cavități goală (cîmp) *I*, 72, 128, 443  
 CEAUȘESCU, N. *I*, 13, 14, 16  
 CHATELAIN, M. *I*, 17  
 circuitul magnetic (calcul de cîmp) *I*, 322  
 circuitul magnetic (legea) *I*, 309  
 circuite magnetice *I*, 451  
 circuite nelinare *I*, 263; *II*, 493  
 circuite tip *II*, 78  
 cîmp electric *I*, 24  
 cîmp de inducție electrică *I*, 434

cîmp de inducție magnetică *I*, 297  
 cîmp magnetic (calcul) *I*, 314  
 cîmp magnetic învîrtilor *I*, 618  
 cîmp magnetic învîrtilor circular *I*, 619  
 cîmp magnetic învîrtilor eliptic *II*, 319  
 coeficient de potențial *I*, 99  
 condensator (cuplare) *I*, 91  
 condensator electric *I*, 85  
 conductanța electrică *I*, 172  
 conductanță lineică *II*, 549  
 conducție (curent) *I*, 163  
 conductivitate *I*, 172  
 conectarea poligon *I*, 598  
 conectarea sistemelor polifazate *I*, 397  
 conectarea stea *I*, 597  
 conexiune (matricea) *I*, 245, 257; *II*, 308  
 conservarea puterilor *I*, 209, 565; *II*, 388  
 constanta de propagare *II*, 559, 619  
 CONSTANTINESCU L. *I*, 18  
 continuitate (ecuație) *I*, 165  
 continuitatea cîmpului electric *I*, 42  
 continuitatea componentelor  
     cîmpului electric *I*, 122  
 convecție (curent) *I*, 177  
 convenția sensurilor de referință *I*, 199, 523  
 coordonate simetrice *II*, 244  
 coordonate simetrice (determinare) *II*, 255  
 COULOMB (legea) *I*, 29, 151  
 COULOMB (teorema) *I*, 66  
 cuadripol *II*, 85  
 cuadripoli (lanțuri de) *II*, 615  
 cuplaj magnetic *I*, 368  
 curba de magnetizare *I*, 432  
 curent (vector) *I*, 241  
 curentul alternativ sinusoidal *I*, 464, 506  
 curent de conducție *I*, 163  
 curent de convecție *I*, 177  
 curent de deplasare *I*, 178  
 curent de scurtcircuit (calcul) *II*, 282  
 curenți amperieni *I*, 430  
 curenți sinuoși (principiu) *I*, 316  
 curenți în sisteme polifazate *I*, 601  
 curentul electric *I*, 163

\* Indicațiile : *I*, 17; *II*, 436 se citesc : volumul *I*, pag. 17; volumul *II*, pag. 436.



## D

decalaj *I*, 471  
defazaj *I*, 467  
deformant (regim) *II*, 323  
densitate de curent de conducție *I*, 165  
densitate de curent de convecție *I*, 177  
densitate de curent de deplasare *I*, 178  
densitate de sarcină *I*, 41  
deplasare (curent) *I*, 178  
derivație (circuit) *I*, 208  
dezechilibrat (regim) *II*, 229  
dezvoltării (teorema) *II*, 427, 458  
diagrama cuadripolului *II*, 119  
diagrama dipolului *II*, 130  
diagrame fazoriale *II*, 14  
diagrame loc-geometrice *II*, 155  
dielectrici *I*, 115  
dipol *II*, 129  
dipol electric *I*, 53  
distorsiune (constanta) *II*, 560, 620, 643  
dreapta puterii *II*, 178

## E

echivalență (principiul) *I*, 68  
ecran electric *I*, 72  
efectivă (valoarea) *I*, 511; *II*, 369  
electrizare *I*, 33  
electrocinetica *I*, 163  
electrod semisferic *I*, 287  
electrodinamica *I*, 294  
electrostatica *I*, 20  
elemente corespondente *I*, 67  
energia activă *I*, 568  
energia cîmpului magnetic *I*, 372  
energia electrică *I*, 188, 551  
energia electrostatică *I*, 138  
energia magnetică (localizare) *I*, 383  
energia reactivă *I*, 568

## F

factor de capacitate *I*, 101  
factor de putere *I*, 561, 585, 605; *II*, 391  
FARADAY M. *I*, 16, 115, 126  
fazor *I*, 477, 540  
fazor generalizat *I*, 501  
feromagnetism *I*, 423  
ferorezonanță *II*, 515  
ferorezonanța derivație *II*, 519  
ferorezonanța serie *II*, 516  
filtre de frecvență *II*, 640  
FISCHER HINNEN, J. *I*, 17

flux electric *I*, 37, 130  
flux de inducție magnetică *I*, 307, 444  
flux magnetic total *I*, 352  
FORTESCUE, C. L. *I*, 17; *II*, 245  
forță electromagnetică *I*, 303, 513  
forțe electrodinamice *I*, 296, 515  
forță electromotoare *I*, 181, 506, 590  
forțe generalizate în cîmpul electric *I*, 153  
forțe generalizate în cîmpul magnetic *I*, 389  
forțe în cîmpul electric *I*, 151  
FOUCAULT (pierderi) *II*, 668  
FOURIER *II*, 342, 478  
FOURIER (integrala) *II*, 363, 478, 481  
FOURIER (serii) *II*, 357, 360  
FOURIER (transformata) *II*, 480  
frecvență *I*, 465  
funcția unitate *I*, 400; *II*, 448

## G

GAUSS (teorema lui) *I*, 39  
GHEORGHIU, I. S. *I*, 17  
grafuri de transfer *II*, 51  
GREEN (teorema lui) *I*, 70

## H

HEAVISIDE O. *I*, 16; *II*, 424  
HEAVISIDE (circuitul electric) *II*, 432  
HEAVISIDE (simbolismul lui) *II*, 424  
hertz *I*, 465  
HERTZ (experiențe) *II*, 694  
HERTZ (rezonatorul) *II*, 696  
HORTOPAN, V. *I*, 18  
HURMUZESCU, D. *I*, 17  
HURWITZ (criteriul) *II*, 528

## I

ILIOVICI, I. *I*, 17; *II*, 380  
imagini (metoda) *I*, 74  
impedanță *I*, 527, 545; *II*, 271  
impedanța aparentă *II*, 666  
impedanța caracteristică *II*, 100, 563, 617, 621, 625  
impedanța ciclică *I*, 612  
impedanța lineică *II*, 652  
impedanța proprie *II*, 652, 676  
impedanță (tensor) *I*, 242  
imprimat (cîmp electric) *I*, 133  
inductanță lineică *II*, 550  
inductanță mutuală *I*, 352  
inductanțe proprii *I*, 359  
inductanțe de scăpări (dispersi) *I*, 368



inductanțe de serviciu *I*, 365  
 inducție electrică (cîmp) *I*, 34, 130  
 inducția electromagnetică *I*, 339  
 inducția electromagnetică (legea) *I*, 339  
 inducție magnetică (cîmp) *I*, 294, 297, 444  
 inducția mutuală *I*, 352  
 intensitatea cîmpului electric *I*, 24, 130  
 intensitatea cîmpului magnetic *I*, 311, 445  
 intensitate de magnetizare *I* 426  
 inversiunea fazorială *II*, 153  
 inversiunea geometrică *I*, 143

## J

JANET P. *I*, 16; *II*, 543  
 JOULE-LENZ (legea lui) *I*, 174, 284

## K

KALANTAROV, P.L. *I*, 17  
 KENNELLY, A.E. *I*, 16, 232  
 KIRCHHOFF (teoremele) *I*, 200, 269, 282, 459, 547;  
*II*, 25, 270  
 KRON, G. *I*, 17, 244, 485

## L

LAGRANGE (forțe) *I*, 155, 156,  
 LALESCU, TR. *I*, 17; *II* 346  
 LAPLACE (formula) *I*, 315, 317, 333,  
 LAPLACE (transformata) *II*, 437  
 LEON, M. *I*, 18  
 LIÉNARD, A. *II*, 380  
 linii de cîmp *I*, 26, 166, 299  
 linii lungi *II*, 548  
 linii lungi (ecuații) *II*, 556  
 linii lungi (în gol) *II*, 584  
 linii lungi (în regim caracteristic) *II*, 589  
 linii lungi (în scurtcircuit) *II*, 587  
 linii lungi (regim tranzitoriu) *II*, 602  
 linii foarte lungi *II*, 593  
 linii jumătate de undă *II*, 596  
 linii sfert de undă *II*, 594  
 LORENTZ (relația) *II*, 683  
 lungimea de undă *II*, 564, 575, 692

## M

magnetizație *I*, 426  
 mărime alternativă *I*, 466  
 mărime periodică *I*, 465  
 mărime sinusoidală *I*, 466  
 MARINOV, C. *I*, 18  
 mase magnetice *I*, 424  
 MASON (formula) *II*, 61

matriceal (calcul) *I*, 238; *II*, 39, 307  
 MAXWELL, I. C. *I*, 16  
 MAXWELL (ecuațiile) *I*, 313, 348  
 MAXWELL (teorema) *I*, 216  
 MAXWELL (teorema inductivităților) *I*, 365  
 medle (valoarea) *I*, 509  
 medii anizotrope *I*, 132  
 medii neomogene *I*, 133  
 medii tridimensionale *I*, 278  
 MELLIN-FOURIER (integrala) *I*, 455  
 metoda pas cu pas *II*, 55  
 MITKEVICI, V. F. *I*, 17  
 moment magnetic *I*, 300, 426  
 MORARU, A. *I*, 18  
 multidipol *II*, 81  
 multipol *II*, 80

## N

neliniare (circuite) *I*, 263; *II*, 493  
 NEUMANN (formula) *I*, 353  
 NIȚESCU, M. *I*, 18  
 NORTON (teorema) *I*, 221; *II*, 35  
 NYQUIST (criteriul) *II*, 532

## O

OCNAȘU, I. *I*, 18  
 OHM (legea lui) *I*, 168, 176, 183, 523; *II*, 392  
 operațional (calculul) *II*, 432  
 operatorul a *I*, 609

## P

pelicular (efect) *II*, 648  
 perechi de noduri (metoda) *I*, 225, 257; *II*, 33,  
 42, 72  
 permeabilitatea magnetică 301, 437  
 permitivitatea electrică *I*, 27  
 PERUCCA, E. *I*, 17  
 POISSON (teoria) *I*, 425  
 polarizare dielectrică *I*, 117  
 polarizația electrică (legi) *I*, 121  
 polifazat (sistem) *I*, 500; *II*, 415  
 POPESCU, AL. TH. *I*, 17; *II*, 349  
 potențial electrostatic *I*, 29  
 potențial magnetic scalar *I*, 325  
 potențialul magnetic vector *I*, 330  
 potențiale retardate *II*, 688  
 POYNTING (vectorul lui) *II*, 696, 698  
 PQD-metrul *II*, 385  
 PROCA, A. *I*, 17  
 PROCOPIU, ȘT. *I*, 17  
 propagare (cîmp magnetic) *II*, 663  
 propagare (constanta de) *II*, 559, 619



propagare (ecuații) *II*, 649  
 propagare (unde electromagnetice) *II*, 547  
 propagare (viteza de) *II*, 566, 619  
 propagarea (curenților) *II*, 648  
 propagarea energiei electromagnetice *II*, 696  
 presiune electrostatică *I*, 73  
 pulsație *I*, 467  
 punct neutru (deplasare) *II*, 233, 236  
 punctiformă (sursă) *I*, 286  
 puterea activă 551, 560; *II*, 377  
 puterea aparentă *I*, 551; *II*, 271  
 puterea deformantă *II*, 383  
 puterea electrică *I*, 176, 551  
 puterea fluctuantă *I*, 551, 556; *II*, 276  
 puterea reactivă *I*, 551, 560, 561; *II*, 379  
 puteri în sisteme polifazate *I*, 603

## R

RĂDULEȚ, R. *I*, 17  
 răspuns tranzitoriu *II*, 432  
 reactanță *I*, 524  
 receptoare trifazate *I*, 614, 616  
 reciprocitate (teorema) *I*, 216  
 regim tranzitoriu *I*, 392; *II*, 190, 423  
 relaxare (oscilații de) *II*, 543  
 rețele electrice *I*, 195  
 rețele electrice trifazate *I*, 612  
 rețele electrostatice *I*, 95  
 reziduul deformant *II*, 372  
 rezistența electrică *I*, 169  
 rezistența lineică *II*, 549  
 rezistivitate *I*, 169  
 rezonanța electrică *I*, 573; *II*, 393  
 ROGOWSKI, W. O. *I*, 17  
 ROSEN A. *I*, 232  
 ROȘU, AL. AL. *I*, 18; *II*, 143  
 ROTH L. A. *II*, 353  
 ROUTH (criteriul) *II*, 531  
 ROWLAND (legea) *I*, 334

## S

sarcina electrică *I*, 21  
 sarcini lineice (cîmp) *I*, 55  
 sarcini de polarizație *I*, 127  
 sarcini punctuale (cîmp) *I*, 47  
 sarcini superficiale (cîmp) *I*, 58  
 SAVART, F. *I*, 314  
 scările grafice *II*, 175  
 scheme echivalente *II*, 10  
 scheme funcționale *II*, 45  
 semisferic (electrod) *I*, 287  
 serie (circuit) *I*, 207

sinusoida echivalentă *II*, 394  
 SMITH (diagrama lui) *II*, 570  
 spectre electrice *I*, 26  
 stabilitate *II*, 523 540  
 ȘTEFĂNESCU-RADU, I. *I*, 17  
 STEINMETZ, J. *I*, 17, 440  
 STORVIS, G. *I*, 17; *II*, 245  
 stratul dublu *I*, 62  
 substanțe (clasificare) *I*, 23  
 superpoziție (metoda) *I*, 210; *II*, 31  
 sursă punctiformă *I*, 286  
 sursele unui cîmp electric *I*, 43, 132  
 susceptanță *I*, 535  
 susceptivitate electrică *I*, 121  
 susceptivitate magnetică *I*, 427

## T

tensiune electromotoare *I*, 181  
 tensiune (vector) *I*, 241  
 tensiunea electrică *I*, 130, 180  
 tensiunea de pas *I*, 258  
 tensiuni mecanice în cîmpul electric *I*, 158, 160  
 tensiunile în sisteme polifazate *I*, 599  
 THÉVENIN (teorema) *I*, 219; *II*, 34  
 THOMSON (teorema) *I*, 147  
 transfigurare (metoda) *I*, 97, 230; *II*, 36  
 tridimensionale (medii) *I*, 278  
 tub de cîmp *I*, 26, 166, 299

## Ț

ȚUGULEA, A. *I*, 18

## U

unde armonice *II*, 326  
 unde complexe *II*, 326  
 unde electromagnetice *II*, 680  
 unde electromagnetice plane *II*, 687  
 unde electromagnetice staționare *II*, 692

## V

valoare efectivă *I*, 431, 511  
 valoare medie *I*, 471, 509  
 valoare medie pătratică *I*, 471, 511  
 VASHY (teorema) *I*, 216; *II*, 34  
 VASILESCU KARPEN, N. *I*, 17, 336, 424  
 vecinătate (efect) *II*, 656  
 viteză de grup *II*, 608  
 viteza de propagare *II*, 566, 623  
 virfuri (cîmp și sarcini) *I*, 70  
 VOLTA (efectul) *I*, 134

## Z

ZISSU, S. *I*, 18



## Bibliografie

Abreviații. În această bibliografie au fost utilizate următoarele abreviații:

A.G.I.R.	Asociația Generală a Inginerilor din România
A.T.M.	Archiv für Technische Messen
Atti R. Accad. Sci. Torino	Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino
Bul. A.S.E.	Bulletin de l'Association Suisse des Électriciens
Bul. mat. et phys. de l'École. Polyt.	Bulletin de mathématiques et de physique de l'École Polytechnique de Bucarest.
Bul. I.P.B.	Buletinul Institutului Politehnic București
Bul. I.R.E.	Buletinul Institutului Român de Energie
Bul. S.F.E.	Bulletin de la Société Française des Électriciens
Bul. St. Acad.	
St. Tehn. Chim.	Buletinul științific al Academiei R.P.R., Științe Tehnice și Chimice
C.E.I.	Commission Électrotechnique Internationale
C.I.G.R.E.	Conférence Internationale des Grands Réseaux Électriques.
C.R. Acad. Sc. Paris	Comptes — rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris
E.T.Z.	Elektrotechnischer Zeitschrift
G.M.	Gazeta Matematică
I.R.E.	Institutul Român de Energie
Proc. I.E.E.	Proceedings of the Institution of Electrical Engineering London
R.G.E.	Revue Générale de l'Électricité
Rediconti dell'A.E.I.	Rediconti dell' Associazione Elettrotecnica Italiana
Rev. roum. sci. techn.	Revue roumaine des sciences techniques, série Électrotechnique et Éner-
Electrotechn. et Energ.	gétique.
St. cerc. energ. electr.	Studii și cercetări de energetică și electrotehnică, București.

1. A B A S O H N, E. *Asupra determinării pe cale grafică a armonicilor unei funcții periodice*. Gazeta Matematică, XXVI, București, 1920, p. 81—85 și 105—108.
2. A L E X I U, I. și alții. *Circuite cu semiconductoare. Aparat de măsurat*. București, Editura tehnică, 1970.
3. A M P È R E, A. M. *Mémoires sur l'électromagnétisme et l'électrodynamique*. Paris, Ed. Gauthier Villars, 1921.
4. A N G O T, A. *Compléments de mathématiques*. Paris, Ed. de la Revue d'Optique, 1949.
5. A N T O N I U, I. S. *Étude du fonctionnement des appareils de mesure dans un régime déformant*. Bul. d'Études et de Recherches Techniques, Bucarest, I — 1949, p. 5—82.
6. A N T O N I U, I. S. *Asupra calculului puterii în curent alternativ cu ajutorul cantităților complexe*. Electricitatea nr. 6, București, 1952, p. 34.
7. A N T O N I U, I. S. *Introducere în aplicarea calculului matriceal la studiul circuitelor electrice*. București, Editura Academiei, 1953.
8. A N T O N I U, I. S. *Calculul operațional și aplicațiile lui în electrotehnică*. Electrotehnica nr. 5—6, București, 1955, p. 163.
9. A N T O N I U, I. S. *Operatorul de reprezentare a sistemelor polifazate simetrice*. Electrotehnica nr. 8, București, 1955, p. 364.
10. A N T O N I U, I. S. *Chestiuni speciale de electrotehnică*. București, Editura Academiei, 1956.



11. ANTONIU, I. S. *Funcționarea contoarelor de inducție într-un regim deformant*. Bul. I.P.B., XVIII, București, 1956.
12. ANTONIU, I. S. *Electrotehnică și măsuri electrice*, vol. I, (litografiat). București, Litografia Ministerului Învățământului, 1957.
13. ANTONIU, I. S. *Electrotehnică și măsuri electrice*, vol. II, (litografiat). București, Litografia Ministerului Învățământului, 1957.
14. ANTONIU, I. S. *Electrotehnică și măsuri electrice*, vol. III, (litografiat). București, Litografia Ministerului Învățământului, 1958.
15. ANTONIU, I. S. *Mesure de la puissance réactive en régime déformant*. Bul. I.P.B., XX, București, 1958, p. 75—84.
16. ANTONIU, I. S. *Influence du régime déformant sur les conditions de mesure de la puissance et de l'énergie active*. Rapport no. 301. C.I.G.R.É., Paris, 1958.
17. ANTONIU, I. S. *Calculul matriceal și tensorial în electrotehnică*. București, Editura tehnică, 1962.
18. ANTONIU, I. S. *Semnul puterilor activă și reactivă în circuitele electrice de curent alternativ*. Standardizarea, XIV, 6—7, București, 1962, p. 351—358.
19. ANTONIU, I. S. *Der verformende Betriebszustand der energetischen Systeme und die betreffenden Folgen*. Wissenschaftlichen Zeitschrift der Elektrotechnik, no. 9, Berlin, 1967, p. 81—91.
20. ANTONIU, I. S., ADĂMUȚ, I. *Contribuții la definirea vitezei de propagare a unui semnal pe lanțurile de cuadripoli*. St. cerc. energ.electr., XVI, nr. 3, București, 1966, p. 531—558.
21. ANTONIU, I. S., ADĂMUȚ, I., DAMIAN, I. N. *Contribution au problème de la détermination du temps de propagation sur une chaîne finie de quadripôles à l'aide d'un calculateur électronique digital*. Rev. Roum. Sci. Tech. Electrotechn. et Energ., XIII, no. 2, Bucarest, 1968, p. 199—214.
22. ANTONIU, I. S., CONSTANTINESCU, L. *Linia lungă ca limita unui lanț de cuadripoli infinit*. Bul. I.P.B., XXXIV, nr. 1, București, 1972, p. 51—60.
23. ANTONIU, I. S., LEON, M. *Sur la mesure des grandeurs énergétiques en régime déformant — mesure des puissances*. Documents du Congrès MESUCORA, Paris, 1967, rapport 20 — B — 3.
24. ANTONIU, I. S., LEON, M., TUDUCE, R. *PQD-mètre, appareil pour la mesure des puissances et énergies actives, réactives et déformantes dans un régime énergétique déformant*. Documents du Congrès MESUCORA, Paris, 1973, rapport no. 18.
25. ARNOLD, E. *Wechselstromtechnik*, vol. I, Berlin, Springer Verlag, 1923.
26. ATABEKOV, G. L., MAMIKONIAN, L. G. *Primenenie kompleksnih shem zamesteniice dlia rascieta perehodnih professov*. Elektritsvo, no. 4, Moskva, 1949, p. 67.
27. ATABEKOV, G. I. *Protecția prin relee a rețelelor de înaltă tensiune*. (Traducere din limba rusă) București, Editura tehnică, 1952.
28. ATABEKOV, G. I. *Teoreticheskie osnovi elektrotehniki*, vol. II, Moskva, Izdatelstvo Energhia, 1966.
29. AUGER, M., BERGEROT, I. L. *Influence des harmoniques sur la précision des compteurs (wattheuremètres) à induction*. Bulletin de la Direction des études et recherches de l'Électricité de France — série B, no. 2, Paris, 1972, p. 5—44.
30. BAERWALD, H. G. *Die Eigenschaften Symmetrischen 4n — Pole*. Sitzberichte der Preussische Akademie der Wissenschaften, XXXIII, Berlin, 1931, p. 784—829.
31. BATTISON, M. J. *Some Effects of the Frequency Dependency of Transmission — Line Parameters*. Proc. I.E.E., CXVI no. 7, London, 1969, p. 1209—1216.
32. BARBAGELATA, A. *Sulla misura delle grandezze non sinusoidali di frequenza industriale*. Comunicazione alla XXXVII riunione annuale dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, Firenze, 25 settembre 1932.
33. BAUDOUX, P., BEAUFAYS, O. *Théorie des circuits*, Bruxelles, Ed. Presses Académiques Européennes, 1968.



34. BAYARD, M. *Théorie des réseaux de Kirchhoff*. Paris, Ed. de la Revue d'Optique, 1954.
35. BECKER, R. *Theorie der Elektrizitäts*. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1933.
36. BELFILS, G. Mesure du „residu” des courbes de tension par la méthode du pont filtrant. R.G.E., XIX, Paris, 1926, p. 523—529.
37. BELFILS, G. Note sur la mesure du résidu des courbes de tension alternative par la méthode du pont filtrant. R.G.E., XXXI, Paris, 1932, p. 267.
38. BERCOVICI, M. Calculul matriceal al rețelelor electrice. Bul. I.P.B., XXVIII, București, 1961, p. 147—173.
39. BERGE, C. *Théorie des graphes et ses applications*. Paris, Ed. Dunod, 1958.
40. BESSONOV, L. A. Analiticeskii rasciet elektriceskih šepel s usčietom ghisterezica. Elektricesstvo, nr. 3, Moskva, 1949, p. 47.
41. BESSONOV, L. A. *Applied Electricity for Engineers*. Moscow, Mir Publisher, 1968.
42. BLONDEL, A. Sur les puissances et harmonances mutuelles des courants alternatifs non sinusoïdaux. Buletin I.R.E., București 1930.
43. BLONDEL, A. Sur une méthode d'impédances simples ou mutuelles globales de phase pour le calcul des systèmes polyphasés déséquilibrés. Rapport no. 11, Congrès International d'Électricité, Paris, 1932.
44. BLONDEL, A. *Les courants alternatifs*. Paris, Ed. J. B. Bailliére et Fils, 1933.
45. BLONDEL, A. Introduction aux applications du calcul symbolique de Heaviside aux problèmes de l'électrotechnique. R.G.E. XXXIX, Paris, 1936, p. 83, 133, 179, 219.
46. BOË, L., ROMAIN, P. *Dipôles, quadripôles et calcul matriciel*. Paris, Ed. Chiron, 1963.
47. BOUCHEROT, P. La séparation des puissances réelle et magnétisante dans les calculs relatifs aux courants alternatifs. Revue Electrique, VI, Paris, 1906, p. 289.
48. BOUCHEROT, P. Le transfert des puissances active et réactive d'un réseau à un autre. L'Industrie Electrique, 23<sup>e</sup> année, Paris, 1914, p. 277.
49. BOUCHEROT, P. Sujets spéciaux relatifs aux fonctionnements des machines et appareils à courants alternatifs. Cours de l'École Supérieure de l'Électricité, Paris, 1928—1929, p. 5—9.
50. BOUTHILLON, L. Les tenseurs et l'électricité. Bul. S.F.E., VI<sup>e</sup> série, IX, Paris, 1949, p. 212.
51. BRILLOUIN, L. Les filtres électriques et la théorie des matrices. R.G.E., XXXIX, Paris, 1936, p. 3.
52. BRILLOUIN, L. *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Paris, Ed. Masson, & Cie, 1938.
53. BRILLOUIN, L., PARODI, M. *Propagation des ondes dans les milieux périodiques*. Paris, Ed. Masson, & Cie, 1956.
54. BRUHAT, G. *Cours de physique générale. Electricité*. Paris, Ed. Masson, & Cie, 1944.
55. BRUNN, A. von *Graphische Methoden zur Lösung von Wechselstrom Problemen*. Basel, Benno Schwabe, & Co Verlag, 1938.
56. BUDEANU, C. *Puissances réactives et fictives*. Bucarest, Editura I.P.E., 1927.
57. BUDEANU, C.I. Les différentes opinions et conceptions concernant la notion de puissance réactive en régime quelconque. Bucarest, Editura I.R.E. 1928.
58. BUDEANU, C. Quelques considérations sur le rôle physique des puissances instantanées dans un système de production et de distribution d'énergie électrique. Bul. de Math. et de Phys. de l'École Polyt., 1<sup>er</sup> année, no. 1, Bucarest, 1929, p. 53.
59. BUDEANU, C. Quelques considérations sur les espaces supérieurs. Bul. de Math. et de Phys. de l'École Polyt., VIII, Bucarest, 1936—1937, p. 38.
60. BUDEANU, C. *Curs de măsură electrice*. vol. II (litografat), București, Editură proprie, 1946.
61. BUDEANU, C. Asupra compensării și localizării fenomenelor deformate într-o rețea electrică. Revista Universității „C.I. Parhon” și a Politehnicii, nr. 1, București, 1952, p. 129.
62. BUDEANU, C. Asupra formei de undă a mașinilor electrice. St. cerc. energ. electr., II, București, 1952, p. 17.
63. BUDEANU, C. Aspectul general fizic al fenomenelor reactive electrice și electromagnetice. St. cerc. energ. electr., IV, București, 1954, p. 7.



64. BUDEANU, C. *Metode de calcul în regim de curenți nesinusoidali*. St. cerc. energ. electr., V, București, 1955. p. 531.
65. BUDEANU, C. *Bazele electrotehnicii*. vol. I. București, Editura Ministerului Învățămîntului, 1957.
66. BUDEANU, C. *Sur la présence et la conservation de la puissance réactive dans un phénomène radiant*. C. R. Acad. Sc., CCXLVI, Paris 1957, p. 1571—1574.
67. BUDEANU, C. *Sistemul practic de mărimi și unități*. București, Editura Academiei, 1956.
68. BUDEANU, C. *Sur la corrélation entre la présentation des phénomènes électromagnétiques et le problème des grandeurs et unités* R.G.E., LXVII, Paris, 1958, p. 225—232.
69. BUDEANU, C., ANTONIU, I. S. *L'étude des phénomènes déformants dans une installation industrielle de distribution*. Rapport no. 329, C.I.G.R.É., Paris, 1948.
70. BUDEANU, C., ANTONIU, I. S. *Asupra problemei măsurării puterii și energiei electrice într-un regim deformant*. Electricitatea nr. 1, București, 1951, p. 9.
71. BUDEANU, C., GHEORGHIU, M., HORTOPAN, V., ȘTEFĂNESCU, N. *Bazele teoretice ale electricității. Probleme*. Vol. I. București, Editura tehnică, 1958.
72. CAHEN, F. *Électrotechnique*. T.I. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1962.
73. CAHEN, F. *Électrotechnique*. T. II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1963.
74. CHOLEWICKI, T. *Macierzowa Analiza Obwodów Liniowych*. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1958.
75. CARSON, J. R. *Elektrische Ausgleichvorgänge und Operatorenrechnung*. Berlin, J. Springer Verlag, 1929.
76. CARTIANU, G. *Über das stabilitäts problem der linearen und nicht linearen elektrischen Kreisen*. Wissenschaftlichen Zeitschrift des Hochschule für Elektrotechnik, Ilmenau, 1957, p. 105.
77. CARTIANU, G. *Bazele radiotehnicii*. Vol. II. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
78. CASPER, L. *Einführung in die komplexe Behandlung von Wechselstromaufgaben*. Berlin, Springer Verlag, 1929.
79. CASTELLO, P. *Clé des schémas électriques*. Paris, Ed. Dunod, 1965.
80. CESTNUT, H., MAYER, R.—W. *Servomécismes et Régulation*. T.I. Paris, Ed. Dunod, 1957.
81. CHIODI, C. *Pont filtrant pour la mesure du „residu” des courbes de tension alternative non parfaitement sinusoïdale et des courbes de tension continue non parfaitement constantes et leur analyse harmonique*. C.E.I., rapport no. 2—201, Paris, 1919.
82. CHOLEWICKI, T. *Electrotehnika Teoretyczna*. T.I. & II. Warszawa, Wydawnictwa Naukowe—Techniczne, 1967.
83. CHOW, Y., CASSIGNOL, E. *Théorie et applications des graphes de transfert*. Paris, Ed. Dunod, 1965.
84. CLARKE, E. *Analiza circuitelor sistemelor electroenergetice* (traducere din limba americană). București, Editura tehnică, 1973.
85. COATES, C. L. *Flow-Graph, Solution of linear algebraic Equations*. I.R.E. Transaction on Circuit Theory, CT-6, New-York, 1959, p. 170—187.
86. CONSTANTINESCU, I. *Aspects physiques et mathématiques des phénomènes transitoires*. Bul. de Math. et de Phys. de l'Ecole Polyt., XIII, Bucarest, 1942. p. 131.
87. CONSTANTINESCU, I. *Transmisii electromagnetice*. București, Coop. de editură Politehnica, 1948.
88. CORLĂȚEANU, V., ȘERBAN, G. *Armonicile 5 și 7 la transformatoarele trifazate și metodele de amortizare a acestora*. Electrotehnica nr. 3, București, 1958, p. 77.
89. CRUG, C. A. *Bazele electrotehnicii*. vol. I. București, Editura tehnică, 1952.
90. CRUG, C. A. *Bazele electrotehnicii*, vol. II. București, Editura tehnică, 1953.
91. DACOS, F. *Electricité théorique*. Paris, Ed. Dunod, 1946.
92. DALA VERDE, A. *Le grandi linee di trasmissione d'energia*. Milano, Libreria editrice Politecnica, 1947.
93. D'ANGELO, H. *Time varying Networks*. Boston, Ed. Allyn & Bacon 1969.



94. DEBRUYN, H. P. *Le critère de Nyquist et sa démonstration*. R.G.E., LXV, 7, Paris, 1956, p. 419.
95. DELLA RICCIA, A. *Décomposition et effets des courants polyphasés non équilibrés*. Bulletin Montéfiore, no. 8, Liège, 1930.
96. DENIS PAPIN, M., KAUFMANN, A. *Cours de calcul opérationnel*. Paris, Ed. Albin Michel, 1950.
97. DENIS PAPIN, M., KAUFMANN, A. *Cours de calcul tensoriel appliqué*. Paris, Ed. Albin Michel, 1953.
98. DENIS PAPIN, M., KAUFMANN, A. *Cours de calcul matriciel appliqué*. Paris, Ed. Albin Michel, 1957.
99. DERUSSO, P. M., ROY, R. J., CLOSE, C. M. *State variables for Engineers*. New York, Ed. J. Wiley, 1967.
100. DESOER, C. A., KUH, E. S. I. *Basic Circuit Theory*. New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1969.
101. DITKIN, V. A., PRUDNIKOV, A. P. *Formulaire pour le calcul opérationnel*. Paris, Ed. Masson & Cie, 1967.
102. EDELMANN, H. *Berechnung elektrischer Verbundnetze*. Berlin, Springer Verlag, 1963.
103. EGERVARY, E. *Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer lineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására*. A Magyar Tudományos Akadémia. Alkalmazott Matematikai intézetének közlémenigei, vol. II. Budapest, 1954.
104. ESCANÉ, J. N. *Fonctions d'une variable complexe*. Paris, Ed. Masson & Cie, 1972.
105. FALLOU, J. *Courants de court-circuit*. Paris, Ed. J. B. Baillièrre et. Fils, 1933.
106. FALLOU, J. *Les réseaux de transmission d'énergie électrique*. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1933.
107. FALLOU, J. *Leçons d'électrotechnique générale*, T.I. & II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1939.
108. FARADAY, M. *Experimental Researches in Electricity*. London, Ed. R. Taylor and W. Francis, 1855.
109. FELDTKELLER, R. *Vierpoltheorie*. Leipzig, S. Hirzel Verlag, 1943.
110. FRAENKEL, A. *Theorie der Wechselströme*. Berlin, Springer Verlag, 1930.
111. FRANKLIN, P. *Fourier Methods*. New York, Ed. McGraw-Hill, 1949.
112. FRANSUA, A. *Çiteva precizări în legătură cu aplicarea de către G. Kron a calculului matricial în structura rețelilor electrice complexe*. St. cerc. energ. electr. VI, nr. 4, București, 1956, p. 461.
113. FRECHÉT, M., ROMANN, R. *Représentation des lois empiriques par des formules approchées*. Paris, Ed. L. Eyrolles, 1930.
114. FRYZE, S. *Définition générale de la puissance active, réactive et apparente dans un système à deux fils*. Bul. I.R.E., no. 16, Bucarest, 1932.
115. FRÜHLING, A. *Cours d'Électricité*. T.I. & II, Paris, Ed. Dunod, 1966.
116. GARDNER, M. F., BARNES, J. L. *Transient in linear Systems*. T.I. New York, Ed. J. Wiley & Sons, 1949.
117. GERLACH, M. *Berechnung von Kurzschluss Strömen*. Berlin, Springer Verlag, 1958.
118. GRANIER, J. *Les systèmes oscillants*. Paris, Ed. Dunod, 1936.
119. GRANIER, J. *Introduction à l'étude des champs Physiques*. Paris, Dunod, 1941.
120. GRAY, A., MATHEWS, G. B. *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică* (traducere din limba engleză). București, Editura tehnică, 1958.
121. GRIX, W. *Polaraufnahmen einfacher und kombinierten Wechselstromschwingungen*. E.T.Z. Berlin, 1921, p. 717—720, 752—756.
122. GUELFOND, A. D. *Calcul des différences finies*. Paris, Ed. Dunod, 1963.
123. GUILLEMIN, E. A. *Syntesis of passive Networks*. New York, Ed. J. Wiley, 1957.
124. GUILLEMIN, E. A. *Introductory Circuit Theory*. New York, Ed. J. Wiley, 1958.
125. GUILLEMIN, E. A. *The Mathematics of Circuit Analysis*. New York, Ed. J. Wiley, 1959.
126. GUTENMAHER, I. L. *Elektriceskie modeli*. Moskva, Gosudarstvennoe Izdatelstvo, 1949.
127. HAK, J. *Beitrag zur Analyse von Wechselstromkurven*. E. T. Z., Berlin, 1921, p. 484—486.
128. HAUFFE, G. *Die symbolische Behandlung der Wechselströme*. Berlin, Springer Verlag, 1928.



129. HAUFFE, G. *Ortskurven der Starkstromtechnik*. Berlin, Springer Verlag, 1932.
130. HEAVISIDE, O. *Electromagnetic Theory*. vol. I, 1833, vol. II, 1899; vol. III, 1912, Londra retipărit în Dover Publications, New York, 1950.
131. HERTWIG, H. *Induktivitäten*. Berlin, Verlag für Radio-Foto-Kinotechnik, 1954.
132. HLADIK, J. *La transformation de Laplace à plusieurs variables*. Paris, Ed. Masson & Cie, 1969.
133. HOCHRAINER, A. *Symmetrische Komponenten in Drehstromsystemen*, Berlin, Springer Verlag, 1957.
134. HOMMEL, G. *Die Leistungsgrößen bei einphasigen Wechselströmen*. A.T.M., V 340-1, Berlin, 1934.
135. HOMMEL, G. *Die Leistungsgrößen bei mehrphasigen Wechselströmen*. A.T.M., V 340-2, Berlin, 1934.
136. HORT, W. *Technische Schwingungslehre*. Berlin, Springer Verlag, 1922.
137. HUELSMAN, L. P. *Circuits, Matrices and linear Vector Spaces*. New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1963.
138. HURWITZ, A. *Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt*. Mathematische Annalen, 46, Band, Zürich, 1895, p. 273.
139. HÜTTE *Manualul inginerului*. București, Editura A.G.I.R., 1947.
140. ILIOVICI, A. *Les coordonnées symétriques en électrotechnique*. Paris, Ed. J. B. Bailliére et Fils, 1934.
141. JANET, P. *Leçons d'Électrotechnique générale*, T. II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1926.
142. JANET, P. *Leçons d'Électrotechnique générale*. T. III. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1928.
143. JANET, P. *Le calcul symbolique d'Heaviside et ses applications à l'électrotechnique*. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1938.
144. JAVID, M., BRENNER, L. *Analysis, Transmission and Filtering of Signals*. New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1963.
145. JOSEPS, H. J. *Heaviside's Electric Circuit Theory*. London, Ed. Mathuen, 1946.
146. KAFKA, H. *Die ebene Vectorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik*, T.I. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1926.
147. KAHAN, T. *Précis de physique théorique moderne*, T.I. Paris, Ed. Presses Universitaires de France, 1960.
148. KALANTAROV, P. L., TEITLIN, L. A. *Calculul inductanțelor* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1958.
149. KAPLAN, W. *Operational Methods for linear Systems*. London, Addison-Wesley Publishing, 1962.
150. KEMP, P. *Theory of alternating Current Wave Forms*. London, Ed. Chapman & Hall, 1934.
151. KEMP, P. *The j Operator for electrical Engineers*. London, Ed. MacMillan, 1957.
152. KENNELLY, A. E. *Les applications élémentaires des fonctions hyperboliques à la science de l'ingénieur électricien*. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1922.
153. KOCIN, N. E. *Calculul vectorial și introducerea în calculul tensorial*. București, Editura tehnică, 1954.
154. KÖNIG, H., KROND, M., LANDOLT, M. *L'introduction du système d'unités Giorgi*. Bul. A.S.E. no. 15, Zürich, 1949.
155. KONTOROVICI, M. I. *Calculul operațional și fenomenele tranzitorii în circuitele electrice* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1955.
156. KRAUSE, J. *Lineare Signalflussgraphen in der Antriebstechnik*. Elektrik, 7, Berlin, 1968, p. 275-278.
157. KRON, G. *Tensor Analysis of Networks*. New York, Ed. J. Wiley, 1939.
158. KRON, G. *A short Course in Tensor Analysis for Electrical Engineers*. New York, Ed. J. Wiley, 1942.
159. KRON, G. *The Misapplication of Graph Theory to electrical Network*. Report no. 616 L 142, General Electric Laboratory, Schenectady, New York, 1961.



160. KUO, B. G. *Linear Networks and Systems*. New York, Ed. McGraw-Hill, 1967.
161. KÜPFMÜLLER, K. *Electricité théorique et appliquée*. Paris, Ed. Dunod, 1959.
162. LAGASSE, J. *Étude des circuits électriques*, T.I & II. Paris, Ed. Eyrolles, 1965.
163. LALESCU, T. *Sur les fonctions polygonales périodiques*. R.G.E., V, Paris, 1919, p. 43.
164. LALESCU, T. *Introducerea la teoria ecuațiilor integrale*. București, Editura Academiei, 1958.
165. LANDAU, L., LIFCHITZ, E. *Théorie du Champ*. Moscou, Editions de la Paix, 1964.
166. LANDAU, L., LIFCHITZ, E. *Électrodynamique des milieux continus*. Moscou, Editions Mir, 1969.
167. LANDOLT, M. *Komplexe Zahlen und Zeiger in der Wechselstromlehre*. Berlin, Springer Verlag, 1936.
168. LANGMUIR, I., COMPTON, K. T. *Electric Discharges in Gases*, R.M.Ph., III, New York, 1931, p. 191.
169. LAVANCHY, C. *Calcul électriques des lignes par l'emploi de diagrammes et d'abaques*. Paris, Éditions de la R.G.E., 1926.
170. LAVANCHY, C. *Étude et construction des lignes électriques aériennes*. Paris, Ed. J. Baillière et Fils, 1932.
171. LE CORBEILLER, P. *Matrix Analysis of Electric Networks*. New York, Ed. J. Wiley, 1950.
172. LENIN, I. V. *Materialism și empiriocriticism*. București, Editura politică, 1959.
173. LEVI-CIVITA, T. *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*. Paris, Ed. Felix Alcan, 1932.
174. LOVASS-NAGY, V., GYÖRÝ, T. *Csatolt rezgőkörök matematikai vizsgálata a matrix-számítás segítésével*. A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményeiből, III, Budapest, 1954, p. 65.
175. LURIE, V. S. *Kajustiaiasia mostianost trexfaznoi sistemi*. Elektricesstvo, nr. 1, Moskva, 1951, p. 47.
176. MACFARLANE, A. G. J. *System Matrices*. Proc. I.E.E., CVX, London, 1968, p. 749—754.
177. MALLETT, E. *Vector for Electrical Engineers*. London, Ed. Chapman & Hall, 1933.
178. MANNING, L. A. *Electrical Circuits*. New York, McGraw-Hill, 1966.
179. MANSUROV, N. N., POPOV, V. M. C. *Electrotehnică teoretică* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1952.
180. MARINESCU, M., POPOV, V. M. *Rezolvarea rețelelor cuprinzând elemente neliniare*. Bul. St. Acad. St. Tehn. Chim., IV, București, 1952, p. 73.
181. MASON, S., ZIMMERMANN, H. J. *Electronic Circuits, Signals and Systems*. New York, Ed. J. Wiley, 1962.
182. MAXWELL, J. C. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, T.I & II. Oxford, Ed. Clarendon, Press, 1904.
183. MEEROV, M. V. *Bazele reglării automate a mașinilor electrice*. București, Editura tehnică, 1954.
184. MEEROVICI, E. A., EFROIMOVICI, I. A., *O summe visștih garmonicieckih kratnoi periodičnosti pri nesinusoidalnih peremennih*. Elektricesstvo, nr. 12, Moskva, 1948, p. 76.
185. MEEROVICI, E. A. *Geometriescaia teoria electricieskih ţepej*. Elektricesstvo, nr. 2, Moskva, 1947, p. 30.
186. MEEROVICI, E. A. *Primenenie metoda simmetričnkh sostavliainţtikh dlia issledovaniia neustanovlţţţshla profesov v trexfaznih ţeplah*. Elektricesstvo, nr. 4, Moskva, 1952, p. 19.
187. MIKUSINSKI, J. *Operatoren Rechnung*. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957.
188. MOCANU, C. I. *Cercetări asupra topologiei rețelelor electrice*. Buletinul științific al Academiei Militare Tehnice, II, 2, București, 1956.
189. MOCANU, C. I. *O teoremă în studiul rețelelor electrice prin calculul matriceal*. St. cerc. energ. electr., VI, 4, București, 1956, p. 473.



190. MOGANU, C. I. *Bazele electrotehnicii, III-4. Curenți variabili în conductoare masive* (litografiat). București, I.P.B., 1969.
191. MORAND, M. *Introduction mathématique aux théories physique modernes, 1<sup>ère</sup> partie*. Paris, Ed. Vuibert, 1947.
192. MORARU, A. *Mașini electrice* (litografiat). București, I.P.B., 1972.
193. MÜLLER, O. *Einführung in die symbolische Methode der Wechselstromtechnik*. Leipzig, Dr. Max Jönecké Verlag, 1935.
194. NASLIN, P. *Les régimes variables dans les systèmes linéaires et nonlinéaires*. Paris, Ed. Dunod, 1962.
195. NEIMAN, L. R., KALANTAROV, P. L. *Bazele teoretice ale electrotehnicii* (traducere din limba rusă). vol. I, II & III. București, Editura energetică, 1955.
196. NECULCEA, E. *Problema generală a electrostaticii*. G. M., XIV, București, 1908-1909, p. 5-9.
197. NICOLAU, E. *Cîmpuri și unde electromagnetice*. București, Editura Academiei R.S.R., 1972.
198. NICOLAU, E. *Radiația electromagnetică*. București, Editura Academiei R.S.R., 1973.
199. NICOLESCU, M. *Analiza matematică*, vol. II, București, Editura tehnică, 1958.
200. NOVACU, V. *Introducere în electrodinamică*. vol. I. București, Editura Academiei, 1955.
201. NYQUIST, H. *Regeneration Theory*. Bell System Techn. Journal, XI, New York, 1934, p. 279-331.
202. OBERDORFER, G. *Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik*, München, R. Oldenbourg Verlag, 1934.
203. OBERDORFER, G. *Lehrbuch der Elektrotechnik*, Bd. I & II, Berlin, R. Oldenbourg Verlag, 1944.
204. OERSTÄDT, C. *Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticam*. Annalen der Physik und Chemie, LX, Berlin 1820, p. 295.
205. ONICESCU, O., GALBURA, G. *Algebra*, vol. I. București, Editura Colecția Natura, 1948.
206. ORLICH, E. *Die Theorie der Wechselströme*. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1912.
207. ORSINI, L. Q. *Théorie et pratique des circuits électrotechniques*, Paris, Ed. Dunod, 1957.
208. ORTUSI, J. *Étude mathématique des circuits de l'électronique, T.I. Analyse des circuits*. Paris, Ed. Masson & Cie, 1966.
209. OTS-CHEVALIER, L. *Essai d'une théorie générale des diagrammes vectoriels en électricité*. R.G.E. Paris, T. VII, 1920, p. 315 et 342; T. XI, 1922, p. 563, 603, 643 et 848.
210. PARODI, M. *Introduction à l'étude de l'analyse symbolique*. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1957.
211. PARTENI ANTONI, C., ANTONIU, I. S. *Comportarea mașinilor electrice la unda de șoc*. București, Editura Academiei, 1957.
212. PAVEL, E. *Utilizarea grafurilor de fluență la studiul rețelelor și sistemelor electrice*. Energetica, XIII, nr. 1, București, 1965.
213. PEEK JR., F. W. *Phénomènes diélectriques dans la technique des hautes tensions*. Paris, Ed. Delagrave, 1924.
214. PENESCU, C. *Automatică și telemecanica sistemelor energetice*, vol. I, București, Editura Academiei, 1958.
215. PENESCU, C. *Considérations sur le couplage en parallèle des alternateurs, par la méthode de l'autosynchronisation*. Rapport no. 101, C.I.G.R.É, Paris 1958.
216. PENFIELD, JR., P., SPENCE, R., DUINKER, S., *Tellegen's Theorem an electrical Networks* Massachusetts. Ed. The Massachusetts Institute of Technology, 1970.
217. PEREKALIN, M. A. *Electricieskie fept*. Moskva. Gosenergoizdat, 1950.
218. PERIN, J. *Electricité*. Paris, Ed. Herman, 1941.
219. PEPSON, S. V. *Metod razloženja raboeth karakteristik v riad Furie*. Elektriestvo, nr. 3, Moskva, 1948, p. 61.
220. PRESTARINI, G. M. *Contributo allo studio dei sistemi elettrici polifasi per mezzo dell'analisi in sistemi simmetrici*. Atti R. Accad. Sci., LXXIV-I, 5, Torino, 1939, p. 619.



221. PETROIANU, A. O metodă topologică de determinare directă a impedanțelor proprii și de transfer a rețelelor electrice. Rev. Electrotehnica, nr. 10, București, 1967.
222. PLĂCINTEANU, I. I. Electromagnetismul. București, Editura Academiei Române, 1941.
223. PLANK, M. Electromagnétisme (traduit de l'allemand). Paris, Ed. V. Alean, 1939.
224. POLIVANOV, K. M., ILLINSON, B. I. K raseletu neustanovlştegosla režima v šepnñ shemah. Elektrīcestvo, nr. 4, Moskva, 1948, p. 57.
225. POMEY, J. B. Démonstration du théorème d'Hurwitz sur les conditions nécessaires à l'existence d'un régime oscillatoire. R.G.E., XXVI, Paris, 1929, p. 519.
226. POMEY, J. B. Applications des imaginaires au calcul vectoriel. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1933.
227. PONCELOT, P. Précis d'électromagnétisme théorique. Paris, Ed. Dunod, 1963.
228. POPESCU, A. T. Sur l'application de la méthode des discontinuités à l'analyse harmonique des fonctions périodiques. Bul. I.P.B.T., XX, Bucarest, 1958, p. 69.
229. POPESCU, A. T. Curs de Electrotehnică II, partea I. Analiza armonică a funcțiilor periodice nesinusoidale. București, Ed. I.P.B., 1947.
230. POPESCU, C., LEFTER, G. Materiale electrotehnice. București, Editura didactică și pedagogică, 1970.
231. PÖSCHL, K. Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik. Berlin, Springer Verlag, 1956.
232. POTOLEA, E. Calculul regimului permanent al sistemelor electrice. București, Editura tehnică, 1967.
233. POWER, H. M. Canonical Form for the Matrices of Linear Discrete — Time Systems, Proc. I.E.E., CXVI, London, 1969, p. 1245—1252.
234. PREDĂ, M. O metodă de calcul a schemelor electrice echivalente. Electrotehnica, VIII, București, 1960, p. 131.
235. PUGET, L. Note sur le calcul des coefficients de la série de Fourier, R.G.E., V, Paris, 1919, p. 439.
236. QUADE, W. Wirk-, Blind- und Scheinleistung bei Wechselströmen mit beliebiger Kurvenform. Archiv für Elektrotechnik, XXVIII, Berlin, 1934, p. 130.
237. QUADE, W. Über Wechselströme mit beliebiger Kurvenform in Dreiphasen-system. Archiv für Elektrotechnik, XXVIII, Berlin, 1934, p. 798.
238. QUINET, J. Théorie et pratique des circuits de l'électronique et amplificateurs. T.I, II & III. Paris, Ed. Dunod, 1964.
239. RĂDULEȚ, R. Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol. II (litografiat). București, Editura Energetică de Stat, 1954.
240. RĂDULEȚ, R. Bazele teoretice ale electrotehnicii, vol. III & IV (litografiat). București, Editura Învățămintului, 1955.
241. RĂDULEȚ, R. Système des espèces de grandeurs macroscopiques primitives d'état électromagnétique, Rev. roum. sci. techn. Electrotechn. et Energ., XVI, Bucarest, 1961, p. 189.
242. RĂDULEȚ, R., TIMOTIN, A., ȚUGULEA, A. Introducerea parametrilor tranziției în studiul circuitelor electrice liniare avînd elemente nefiliiforme și pierderi suplimentare. St. cerc. energ. electr. XVI, nr. 4, București, 1966, p. 857.
243. RICHARDSON, D. E. Electrical Network Calculation. New York, Ed. Van Nostrand, 1946.
244. RÍJIC, I. M., GRADSTEIN, J. S. Tabele de integrale, sume, serii și produse (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1955.
245. ROBICHAUD, L. P. A., BOISVERT, M., ROBERT, J. Graphes de fluence. Paris-Quebec, Ed. Elrolles-Laval, 1961.
246. ROSENBROCK, H. H. System Matrices giving positive-real Transfer-Function Matrices. Proc. I.E.E., CXV, London, 1968, p. 328.
247. ROSENBROCK, H. H. System Matrices giving lossless positive-real Transfer-Function Matrices. Proc. I.E.E., CXV, London, 1968, p. 330.
248. ROȘU, A. A., MIRESCU, P. Teoria grafelor. București, Editura militară, 1968.



249. ROUGÉ, R. *Représentation algébrique des caractéristiques magnétiques*. Bull. S.F.E., IV, 2<sup>e</sup> série. Paris, 1936, p. 881.
250. ROUTH, E. J. *Advanced Part of the Dynamics of a System of Rigid Bodies*. London, Ed. MacMillan, 1930.
251. RÜDENBERG, R. *Fenomene tranzitorii în sistemele energetice* (traducere din limba germană). București, Editura tehnică, 1959.
252. SAGAU, A. *Théorie générale des réseaux en régime linéaire*. Paris, Ed. Dunod, 1966.
253. SALVADORI, M. G., BARON, M. I. *Metode numerice în tehnică* (traducere din limba engleză). București, Editura tehnică, 1972.
254. SAVER, R., SZABO, I. *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*. Berlin, Springer Verlag, 1967.
255. SCHNESSL, F. *Die Kurzschlussvorgänge*. Berlin, VEB Verlag Technik, 1959.
256. SHEA, R. F. *Principes des circuits à transistors*. Paris, Ed. Dunod, 1956.
257. SIGORSKI, V. P. *Metodi analiza electricschih shem c mnogopolusnymi elementami*. Kiev, Tehniceskoi Literaturi, 1958.
258. SIGORSKI, V. P. *Analiz elektronnih shem*. Kiev, Tehniceskoi Literaturi, 1960.
259. SIGORSKI, V. P., PETRENKO, A. I. *Osnovi teorii elektronnih shem*. Kiev, Izdatelstvo Tehnika, 1967.
260. SILVA, G. *Galileo Ferraris, il campo magnetico rotante e il motore asincrono*. Rediconti dell'A.E.I., Torino, 1947.
261. STĂNCULESCU, F. *Rezolvarea circuitelor electrice neliniare cu ajutorul transformării Laplace*. St. cerc. energ. electr., X, București, 1960, p. 369.
262. STARKEY, B. J. *Laplace Transforms for Electrical Engineers*. London, Ed. MacMillan, 1954.
263. ȘTEFĂNESCU, N., GHEORGHIU, M. *Precizări în legătură cu noțiunile de sursă de tensiune și sursă de curent*. Buletinul științific al Academiei Militare Tehnice, II, nr. 3, București, 1956.
264. ȘTEFĂNESCU, N., GHEORGHIU, M. *Curenții trifazici*. București, Editura Academiei Tehnice Militare, 1957.
265. ȘTEFĂNESCU, S. *Filtre electrice*. București, Editura tehnică, 1967.
266. STERE, R. *Aparate electronice de măsură și control*. București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
267. STOKVIS, L. G. *Sur la création des harmoniques 3 dans les alternateurs par suite des déséquilibres des phases*, C.R. Acad. Sc., CLIX, Paris, 1914, p. 46—49.
268. STRATTON, J. A. *Electromagnetic Theory*. New York, Ed. Mc Graw-Hill, 1941.
269. STRELCOV, S. P. *Introducere în teoria oscilațiilor*. București, Editura tehnică, 1951.
270. STOILOV, S. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, vol. I & II. București, Editura Academiei, 1954.
271. STURM, C. *Curs d'Analyse*. T. II. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1909.
272. ȘORA, C. *Le quadripôle électrique*. Paris, Ed. Masson & Cie. 1969.
273. TAMM, I. E. *Bazele teoriei electricității* (traducere din limba rusă). București, Editura tehnică, 1956.
274. TEUMIN, I. I. *Îndreptar privind regimurile electrice tranzitorii*. București, Editura tehnică, 1956.
275. THIELEMANS, L. *Calculs, diagrammes et régulation des lignes de transport d'énergie à longue distance*. R.G.E., VIII, Paris, 1920, p. 403.
276. THOMPSON, H. A. *Alternating-Current and Transient Circuit Analysis*. New York, Ed. Mc. Graw-Hill, 1957.
277. TIMASCHIEFF, A. *Stabilität elektrischer Drehstrom Kraftübertragungen*. Berlin, Springer Verlag, 1940.
278. TIMOTIN, A., IORTOPAN, V. *Lecții de Bazele Electrotehnicii*, vol. I. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
279. TOLSTOV, H. P. *Serii Fourier*. București, Editura tehnică, 1955.



280. TURNER, T. H. *Le calcul d'Heaviside*. Paris, Ed. Gauthier-Villars 1950.
281. TUKKERMANN, M. L. *Moskovle shemi i matricinte preobrazovaniia*. Elektricesstvo, no. 4, Moskva, 1948, p. 60.
282. ULIANOV, S. A. *Scurtelecute in sistemele electrice* (litografiat). București, Editura Energetică de Stat, 1954.
283. VASILESCO KARPEN, N. *Recherches sur l'effet magnétique des corps électrisés en mouvement*. Thèses. Paris, Ed. Gauthier-Villars, 1904.
284. VLADIMIROV, V. S. *Les fonctions de plusieurs variables complexes et leur application à la théorie quantiques des champs*. Paris, Ed. Dunod, 1967.
285. VORONOV, R. A. *Obsceskaia teoria cettrehpoliusnikov i mnogopoliusnikov*. Moskva, Gozenergizdat, 1951.
286. WAGNER, C. F., EVANS, R. D. *Symmetrical Components*. New York, Ed. McGraw-Hill, 1933.
287. WEISS, A. von, KLEINWÄCHTER, H. *Übersicht über die Theoretische Elektrotechnik, II-er Teil*. Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft, 1956.
288. WILLERS, F. A. *Harmonische Analyse durch abschnittweise Integration A.T.M.*, V 3620—5, Berlin, 1942.
289. WILLERS, F. A. *Harmonische Analysatoren*. A.T.M., V 3620—6. Berlin, 1942.
290. WILLERS, F. A. *Analyse periodischer Functionen mittels gleichanständiger Ordinaten*. A.T.M., V 3620—7. Berlin, 1942.
291. ZALESKI, A. M. *Transportul energiei electrice*. București, Editura tehnică, 1951.
292. ZEVEKE, G., IONKIN, P., NETUSHIL, A., STRAKHOV, S. *Analysis of Electric Circuits*. Moskaw. Mir Publishers, 1969.
293. ZLATEV, M. P. *Osnovi na elektro tehnikata*. Sofia, Ed. Tehnika, 1964.
294. \* \* \* A.E.F. *Ausschuss für Einheiten und Formelgrößen Elektrotechnischen Zeitschrift*. 62. Jahrgang 1941, p. 717, 733, 749, 765, 781.
295. \* \* \* *Lexiconul Tehnic Român*. ed. II, vol. 4.
296. \* \* \* *Lexiconul Tehnic Român*. ed. II, vol. 7.
297. \* \* \* *Lexiconul Tehnic Român*, ed. II, vol. 12.
298. \* \* \* *Manualul inginerului electrician*. vol. I, București, Editura tehnică, 1953.
299. \* \* \* *Théorie des graphes : Journée Internationale d'études*. Paris, Ed. Dunod, 1967.





# TABLE DES MATIÈRES

## TOME I

### I-ère partie

## LES BASES PHYSIQUES DE L'ÉLECTROTECHNIQUE INTRODUCTION DANS LA THÉORIE DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### Chapitre I

#### ÉLECTROSTATIQUE

1.1. Les charges électriques et leur champ électrique	20
1.1.1. Considérations générales	21
1.1.2. La charge électrique	22
1.1.3. La loi de conservation de la charge électrique	23
1.1.4. Classification des substances	24
1.1.5. Le champ électrique et son intensité	26
1.1.6. Lignes de champ, tube de champ, spectre électrique	27
1.1.7. La permittivité électrique	29
1.1.8. Loi de Coulomb	
1.2. Le potentiel et le flux électrique	29
1.2.1. Le potentiel électrostatique	32
1.2.2. Représentation d'un champ électrique par un potentiel	33
1.2.3. L'électrisation par influence	34
1.2.4. Le champ d'induction électrostatique	37
1.2.5. Le flux électrique	39
1.2.6. Le théorème de Gauss	
1.2.7. Densité de surface de la charge électrique ; densité de volume de la charge électrique ; densité linéique de la charge électrique	41
1.2.8. Continuité du champ électrique	43
1.2.9. Les sources d'un champ électrique	43
1.3. Calcul des champs électriques	
1.3.1. Principe de la superposition des champs électriques	45
1.3.2. Les équations fondamentales du champ électrostatique dans le vide	46
1.3.3. Le champ électrostatique des charges ponctuelles	47
1.3.4. Le champ des charges électriques situées sur des conducteurs filiformes	55
1.3.5. Le champ électrique des charges électriques superficielles	58
1.3.6. Le champ des charges électriques en présence des surfaces conductrices	74
1.4. La capacité électrique. Condensateurs	
1.4.1. La capacité électrique	83
1.4.2. Le condensateur électrique	85
1.4.3. Calcul de la capacité de quelques condensateurs simples	85
1.4.4. Couplage des condensateurs électriques	91
1.4.5. Calcul des réseaux électrostatiques simples	95
1.4.6. Capacités électriques des systèmes multiples	98
1.4.7. Les capacités de service	105



1.5. Étude des diélectriques	115
1.5.1. Constatations expérimentales. L'expérience de Faraday	117
1.5.2. Polarisation du diélectrique	121
1.5.3. Les lois de la polarisation du diélectrique	122
1.5.4. Continuité des composantes du champ électrique	123
1.5.5. Étude quantitatif de la polarisation du diélectrique	126
1.5.6. Explication de l'expérience de Faraday à l'aide des lois générales de la polarisation du diélectrique	127
1.5.7. Le champ électrique à l'intérieur des corps polarisés	132
1.5.8. Milieux anisotropes	133
1.5.9. Milieux non-homogènes	
1.6. L'énergie électrostatique	138
1.6.1. Généralités	141
1.6.2. L'énergie électrostatique d'un conducteur isolé dans l'espace	142
1.6.3. L'énergie électrostatique d'un système de conducteurs chargés	145
1.6.4. Localisation de l'énergie électrostatique dans le champ électrique. Densité d'énergie électrique.	147
1.6.5. Nature potentielle de l'énergie électrostatique. Théorème de Thomson	149
1.6.6. Sur les différentes formes de l'expression de l'énergie électrostatique	
1.7. Forces pondéromotrices dans le champ électrique	151
1.7.1. Calcul des forces à l'aide de la formule de la loi de Coulomb	153
1.7.2. Les coordonnées généralisées	155
1.7.3. Première théorème des forces lagrangiennes généralisées dans le champ électrostatique.	156
1.7.4. Deuxième théorème des forces lagrangiennes généralisées dans le champ électrostatique	158
1.7.5. Tensions mécaniques dans le champ électrique	160
1.7.6. Forces mécaniques à la surface de séparation des deux milieux quelconques	

## Chapitre II

### ÉLECTRODINAMIQUE

2.1. Le courant électrique	
2.1.1. Définition du courant électrique	163
2.1.2. Densité du courant de conduction. L'équation de continuité	165
2.1.3. Loi d'Ohm	168
2.1.4. Loi de Joule-Lenz	174
2.1.5. Le courant électrique de convection	177
2.1.6. Le courant électrique de déplacement de Maxwell	178
2.2. La force électromotrice	
2.2.1. Définition de la force électromotrice	181
2.2.2. Loi d'Ohm généralisée	183
2.2.3. Variation de la tension électrique aux bornes d'une partie d'un circuit électrique	184
2.2.4. L'énergie électrique dissipée dans un circuit électrique	188
2.3. Les bases de la théorie des réseaux électriques à courant continu en régime permanent.	
2.3.1. Notions de topologie appliquées aux réseaux électriques	195
2.3.2. Convention sur les sens de référence dans les circuits à courant continu	199
2.3.3. Le problème général de l'étude des réseaux électriques	200
2.3.4. La méthode des théorèmes de Kirchhoff	200



2.3.5. La méthode de la superposition des effets . . . . .	210
2.3.6. La méthode des mailles . . . . .	212
2.3.7. Théorèmes sur les réseaux électriques complexes servant au calcul de ceux-ci . . . . .	216
2.3.8. La méthode des paires de noeuds . . . . .	225
2.3.9. La méthode de la transfiguration des circuits électriques . . . . .	230
2.4. <i>Emploi du calcul matriciel à l'étude des circuits électriques à courant continu</i> . . . . .	238
2.4.1. Généralités . . . . .	239
2.4.2. Méthode générale de résolution des problèmes de physique . . . . .	241
2.4.3. Les tenseurs utilisés à l'étude des circuits électriques . . . . .	243
2.4.4. La méthode des mailles. Règles de calcul . . . . .	257
2.4.5. La méthode des paires de noeuds. Règles de calcul . . . . .	257
2.5. <i>Systèmes de circuits non-linéaires à courant continu</i> . . . . .	263
2.5.1. Généralités . . . . .	264
2.5.2. Classification des éléments non-linéaires des circuits électriques. . . . .	266
2.5.3. Exemples d'éléments non-linéaires dans les circuits à courant continu. . . . .	269
2.5.4. Calcul des circuits électriques comportant des éléments non-linéaires . . . . .	269
2.6. <i>Le courant continu dans des milieux à trois dimensions</i> . . . . .	278
2.6.1. Généralités . . . . .	278
2.6.2. Étude de la propagation des courants électriques stationnaires dans les milieux à trois dimensions par analogie au champ électrostatique. . . . .	279
2.6.3. Les théorèmes de Kirchhoff pour les milieux à trois dimensions . . . . .	282
2.6.4. La loi de Joule-Lenz pour les milieux conductrices à trois dimensions . . . . .	284
2.6.5. Conditions de limite pour le champ des courants électriques dans les milieux conductrices à trois dimensions . . . . .	285
2.6.6. Exemples de problèmes pour les milieux à trois dimensions . . . . .	286

### Chapitre III

## ÉLECTRODYNAMIQUE

3.1. <i>Le champ d'induction magnétique</i> . . . . .	
3.1.1. Phénomènes généraux électromagnétiques . . . . .	294
3.1.2. La force électrodynamique entre deux conducteurs parallèles . . . . .	295
3.1.3. Le champ d'induction magnétique . . . . .	297
3.1.4. Moyens d'exploration du champ magnétique . . . . .	299
3.1.5. La perméabilité magnétique . . . . .	301
3.1.6. La force électromagnétique . . . . .	303
3.1.7. Le flux d'induction magnétique . . . . .	307
3.1.8. La loi du circuit magnétique . . . . .	309
3.2. <i>Calcul des champs magnétiques</i> . . . . .	
3.2.1. Les expériences de Blot et Savart . . . . .	314
3.2.2. La formule de Laplace . . . . .	315
3.2.3. Le principe des courants sinusoïdaux . . . . .	316
3.2.4. Calcul de champs magnétiques par l'emploi de la formule de Laplace . . . . .	317
3.2.5. Calcul des champs magnétiques par l'utilisation de la loi du circuit magnétique . . . . .	322
3.2.6. Le potentiel magnétique scalaire . . . . .	325
3.2.7. Calcul des champs magnétiques par l'utilisation du potentiel magnétique scalaire. . . . .	329
3.2.8. Le potentiel magnétique vecteur . . . . .	330



3.2.9. Calcul des champs magnétiques par l'utilisation du potentiel magnétique vecteur	333
3.2.10. Calcul des champs magnétiques à l'aide de la représentation conforme	336
3.3. <i>L'induction électromagnétique</i>	
3.3.1. Généralités	339
3.3.2. La loi de l'induction électromagnétique	339
3.3.3. Conséquences de la loi de l'induction électromagnétique	348
3.4. <i>L'induction électromagnétique due aux courants électriques quasistationnaires</i>	
3.4.1. Le flux magnétique total	352
3.4.2. Inductance mutuelle	352
3.4.3. Inductance propre	359
3.4.4. Théorème de Maxwell concernant les inductances propres et mutuelles	365
3.4.5. Inductances de service des lignes électriques	365
3.4.6. Circuits couplés magnétiquement	368
3.5. <i>L'énergie du champ magnétique</i>	
3.5.1. Corrélation entre les phénomènes d'induction magnétique et les phénomènes électromagnétiques	372
3.5.2. L'énergie électromagnétique produite par un courant électrique	376
3.5.3. L'énergie électromagnétique d'un système composé d'un nombre quelconque de circuits électriques	381
3.5.4. Localisation de l'énergie magnétique	383
3.5.5. Les théorèmes des forces généralisées dans le champ magnétique	389
3.6. <i>L'établissement du courant électrique dans les circuits électriques. Le régime transitoire dans les circuits à courant continu</i>	
3.6.1. Généralités	392
3.6.2. Circuits électriques constitués d'une résistance en série avec une inductance	396
3.6.3. Circuits électriques constitués d'un condensateur en série avec une résistance	403
3.6.4. Circuits électriques constitués d'une résistance en série avec une inductance et une capacité	407
3.7. <i>Ferromagnétisme</i>	
3.7.1. Phénomènes magnétiques	423
3.7.2. Théorie générale du ferromagnétisme	424
3.7.3. Aimantation des matériaux ferromagnétiques.	432
3.7.4. L'intensité du champ magnétique et le champ d'induction magnétique à l'intérieur des corps aimantés.	443
3.7.5. Calcul des circuits magnétiques.	451

## II-e partie

### LES COURANTS ALTERNATIFS SINUSOÏDAUX

#### Chapitre IV

#### LE COURANT ALTERNATIF MONOPHASÉ SINUSOÏDAL

4.1. <i>Notions générales sur le courant alternatif</i>	
4.1.1. Introduction	464
4.1.2. Définitions	464
4.1.3. Opérations algébriques sur les fonctions périodiques.	472



4.2. Représentation des grandeurs périodiques alternatives sinusoïdales par des phaseurs	477
4.2.1. Convention de représentation. Vecteurs tournants	479
4.2.2. Représentation analytique d'un phaseur	486
4.2.3. Définitions	487
4.2.4. Opérations avec les phaseurs	500
4.2.5. Grandeurs alternatives généralisées ; fonctions pseudo-sinusoïdales	
4.3. Le courant électrique alternatif sinusoïdal	506
4.3.1. Génération de la force électromotrice alternative sinusoïdale	509
4.3.2. L'effet du courant alternatif sinusoïdal	518
4.3.3. Phénomènes physiques particuliers dans les circuits à courant alternatif	523
4.3.4. La loi d'Ohm dans les circuits électriques à courant alternatif sinusoïdal	533
4.3.5. Circuits en dérivation à courant alternatif sinusoïdal	540
4.3.6. L'utilisation des phaseurs au calcul des circuits électriques à courants alternatifs sinusoïdaux	551
4.3.7. La puissance et l'énergie électrique dans les circuits électriques à courant alternatif	573
4.3.8. La résonance dans les circuits électriques à courant alternatif.	

## Chapitre V

### LE COURANT ALTERNATIF SINUSOÏDAL POLYPHASÉ SYMÉTRIQUE

5.1. Généralités sur les systèmes polyphasés symétriques	
5.1.1. Génération de la force électromotrice alternative polyphasée. Définitions	590
5.1.2. Représentation des forces électromotrices et des courants dans un système polyphasé	590
5.1.3. Connexion des systèmes polyphasés	591
5.1.4. Alimentation des récepteurs dans les systèmes polyphasés	597
5.1.5. Tensions, courants et puissances dans un système polyphasé	598
5.1.6. Les impédances et les admittances cycliques d'un système polyphasé symétrique et équilibré	599
5.2. Le système alternatif sinusoïdal triphasé symétrique	
5.2.1. Propriétés générales	606
5.2.2. Représentation analytique d'un système triphasé symétrique	607
5.3. Résolution des réseaux électriques à courant alternatif triphasé, symétriques et équilibrés	
5.3.1. Généralités	612
5.3.2. Les impédances et les admittances cycliques d'un système triphasé, symétrique et équilibré	612
5.3.3. Récepteurs en étoile	614
5.3.4. Récepteurs en triangle	616
5.4. Le champ magnétique tournant	
5.4.1. Champ magnétique tournant produit par la rotation d'un enroulement, générateur d'un champ magnétique constant dans le temps et ayant une direction fixe dans l'espace	618
5.4.2. Champ magnétique tournant produit par des systèmes de courants alternatifs polyphasés	619
5.4.3. Champ magnétique tournant circulaire	620



## TOME II

### Chapitre VI

#### ÉTUDE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES À COURANTS ALTERNATIFS EN RÉGIME PERMANENT

6.1. Méthodes générales d'étude	9
6.1.1. Généralités	10
6.1.2. Les schémas équivalents des circuits électriques	14
6.1.3. Résolution des circuits à courants alternatifs à l'aide des diagrammes phasorielles	18
6.1.4. Résolution des circuits électriques à courants alternatifs par des méthodes analytiques, sans l'emploi des phaseurs	18
6.2. Méthodes générales de calcul utilisant les phaseurs	23
6.2.1. Généralités	25
6.2.2. Étude des circuits électriques à courants alternatifs à l'aide des théorèmes de Kirchhoff et des méthodes dérivées de ceux-ci	34
6.2.3. Théorèmes sur les réseaux électriques à courants alternatifs complexes, servant à la résolution de ceux-ci	39
6.2.4. Méthodes matricielles de résolution des réseaux électriques	45
6.3. Méthodes de calcul utilisant des schémas spéciaux	51
6.3.1. Schémas fonctionnels des circuits électriques	64
6.3.2. Méthodes des graphes de transfert	75
6.3.3. Utilisation de la théorie des graphes au calcul des réseaux électriques	75
6.3.4. Notions sur les grandeurs relatives et leur utilisation en électrotechnique	78
6.4. Étude de quelques circuits type	80
6.4.1. Généralités	81
6.4.2. Étude du multipôle	85
6.4.3. Étude du multidipôle	129
6.4.4. Étude du quadripôle	
6.4.5. Étude du dipôle	
6.5. Emploi de l'inversion à l'étude des circuits électriques	143
6.5.1. L'inversion géométrique	153
6.5.2. L'inversion phasorielle	
6.6. Diagrammes — lieu géométrique	155
6.6.1. Généralités	157
6.6.2. Propriétés générales des diagrammes	158
6.6.3. Étude de quelques lieux géométriques	175
6.6.4. Sur les échelles graphiques	177
6.6.5. Transposition des diagrammes — lieu géométrique en une courbe caractéristique	178
6.6.6. La droite des puissances	180
6.6.7. Applications	

### Chapitre VII

#### LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES À COURANTS ALTERNATIFS EN RÉGIME TRANSITOIRE

7.1. Méthode générale de calcul	
7.1.1. Généralités	191



7.2. Étude du régime transitoire dans les circuits électriques à courants alternatifs dans lesquels on tient compte seulement d'une seule forme d'énergie . . . . .	191
7.2.1. Formules utilisées . . . . .	191
7.2.2. Circuits électriques formés d'une résistance en série avec une inductance . . . . .	197
7.2.3. Circuits électriques formés d'une résistance en série avec une capacité . . . . .	
7.3. Étude des circuits électriques à courants alternatifs dans lesquels on tient compte des deux formes d'énergie . . . . .	
7.3.1. Circuits électriques formés d'une résistance en série avec une inductance et une capacité . . . . .	202
7.4. Emploi des nombres complexes à l'étude du régime transitoire . . . . .	209
7.4.1. Généralités et définitions . . . . .	211
7.4.2. Méthode générale de calcul des régimes transitoire à l'aide des nombres complexes . . . . .	213
7.4.3. Phénomènes transitoires en électrotechnique . . . . .	215
7.4.4. Applications à l'étude des circuits électriques à constantes localisées . . . . .	
7.5. Le régime transitoire d'un champ tournant . . . . .	
7.5.1. Court-circuit aux bornes d'une armature triphasée produisant un champ magnétique tournant . . . . .	222
7.5.2. Expression générale du régime transitoire d'un champ magnétique tournant . . . . .	224
7.5.3. Exemples . . . . .	226

### III-e partie

## FONCTIONNEMENT DES SYSTÈMES À COURANTS ALTERNATIFS EN RÉGIMES ANORMAUX

### Chapitre VIII

#### LE COURANT ALTERNATIF POLYPHASÉ NON SYMÉTRIQUE. LE RÉGIME DÉSÉQUILIBRÉ

8.1. Généralités . . . . .	
8.2. Méthode directe de calcul des systèmes non symétriques et déséquilibrés . . . . .	
8.2.1. Représentation topographique des tensions . . . . .	231
8.2.2. Calcul des courants dans le cas d'une charge non symétrique et déséquilibrée . . . . .	231
8.3. Systèmes polyphasés non équilibrés. Utilisation des coordonnées symétriques . . . . .	
8.3.1. Généralités . . . . .	244
8.3.2. Décomposition d'un système triphasé quelconque en coordonnées symétriques (Théorème de Stokvis — Fortescue). . . . .	245
8.3.3. Réalité physique des composantes symétriques d'un système triphasé quelconque . . . . .	247
8.3.4. Théorèmes concernant les coordonnées symétriques . . . . .	247
8.3.5. Opérations avec les systèmes triphasés de phaseurs . . . . .	250
8.3.6. Détermination des composantes symétriques d'un système triphasé de phaseurs donné . . . . .	255
8.3.7. Degré de déséquilibre d'un système triphasé de phaseurs . . . . .	260
8.3.8. Mesure des composantes symétriques . . . . .	260
8.3.9. Mesure des réactances directe, inverse et homopolaire d'une machine synchrone . . . . .	267
8.4. Calcul des systèmes non équilibrés à l'aide des coordonnées symétriques . . . . .	
8.4.1. Théorèmes de Kirchhoff en régime déséquilibré . . . . .	270



8.4.2. Impédances d'un réseau triphasé en régime de coordonnées symétriques . . . . .	271
8.4.3. L'expression des puissances en régime déséquilibré . . . . .	274
8.4.4. Calcul des circuits triphasés non équilibrés . . . . .	277
8.4.5. Calcul des courants de court-circuit dans les réseaux électriques triphasés dés- équilibrés . . . . .	282
8.4.6. Emploi du calcul matriciel à l'étude des réseaux électriques triphasés déséquilibrés	307
8.4.7. Régime transitoire des systèmes triphasés . . . . .	316
8.4.8. Champ magnétique tournant elliptique . . . . .	319

## Chapitre IX

### LE COURANT ALTERNATIF MONOPHASÉ NON-SINUSOÏDAL

#### LE RÉGIME DÉFORMANT

9.1. Généralités	
9.2. Étude des ondes complexes	
9.2.1. Ondes harmoniques . . . . .	326
9.2.2. Synthèse des harmoniques . . . . .	333
9.2.3. Analyse harmonique des ondes périodiques non-sinusoïdales pour lesquelles on peut écrire l'équation analytique . . . . .	342
9.2.4. Analyse harmonique des ondes périodiques non-sinusoïdales expérimentales . .	351
9.2.5. Développement en série de Fourier des fonctions non périodiques . . . . .	357
9.2.6. Séries de Fourier à termes complexes . . . . .	360
9.2.7. Intégrale de Fourier . . . . .	363
9.3. Étude particulière du régime déformant	
9.3.1. Les grandeurs caractéristiques du régime déformant . . . . .	369
9.3.2. La puissance en régime déformant . . . . .	377
9.3.3. Les circuits électriques en régime déformant . . . . .	392
9.4. Génération du régime déformant	
9.4.1. Généralités . . . . .	396
9.4.2. Bobine à noyau de fer . . . . .	397
9.4.3. Origine des harmoniques supérieures . . . . .	401
9.4.4. Autres sources d'harmoniques . . . . .	404
9.5 Effets du régime déformant	
9.5.1. Généralités . . . . .	407
9.5.2. Condensateur alimenté avec une tension déformée . . . . .	407
9.5.3. Inductance alimenté avec une tension déformée . . . . .	409
9.5.4. Effets divers . . . . .	410
9.6. Le régime déformant dans les systèmes triphasés équilibrés	
9.6.1. Force électromotrice de phase d'un alternateur . . . . .	415
9.6.2. La tension de ligne aux bornes d'un alternateur triphasé, à connexions en étoile, ayant la force électromotrice de phase non-sinusoïdale. . . . .	417
9.6.3. Connexions en triangle des enroulements d'un alternateur triphasé . . . . .	419
9.6.4. Les effets du fer dans un réseau électrique triphasé . . . . .	420



## Chapitre X

### MÉTHODES SPÉCIALES DE CALCUL DU RÉGIME TRANSITOIRE

#### 10.1. Généralités

#### 10.2. Étude du régime transitoire à l'aide du calcul symbolique de Heaviside

10.2.1. Généralités sur le calcul symbolique de Heaviside . . . . .	424
10.2.2. Exemple de calcul . . . . .	428

#### 10.3. Emploi du calcul opérationnel à l'étude des circuits électriques en régime transitoire

10.3.1. Théorie du circuit électrique de Heaviside . . . . .	432
--	-----

#### 10.4. Emploi de la transformation de Laplace à l'étude des régimes transitoires.

10.4.1. Définitions et théorèmes fondamentaux . . . . .	437
10.4.2. Transformation des équations différentielles et intégral-différentielles . . . . .	444
10.4.3. Images de quelques fonctions usuelles . . . . .	446
10.4.4. Recherche de l'original d'une fonction image . . . . .	455
10.4.5. Méthode générale d'étude des régimes transitoires . . . . .	465
10.4.6. Calcul des phénomènes transitoires provoqués par la fermeture et l'ouverture d'un circuit . . . . .	474

#### 10.5. L'emploi de l'intégrale de Fourier à l'étude du régime transitoire des circuits électriques

10.5.1. Paires de fonctions . . . . .	478
10.5.2. La transformation de Fourier . . . . .	480
10.5.3. Emploi de l'intégrale de Fourier à l'étude des circuits électriques . . . . .	481

## Chapitre XI

### SYSTÈMES NON LINÉAIRES À COURANTS ALTERNATIFS

#### 11.1. Généralités et définitions

11.1.1. Généralités . . . . .	493
11.1.2. Classification des éléments non linéaires des réseaux électriques à courants alternatifs . . . . .	494

#### 11.2. Méthodes générales de calcul des systèmes non linéaires à courants alternatifs

11.2.1. Méthodes de calcul en régime permanent . . . . .	498
11.2.2. Méthodes de calcul en régime transitoire. . . . .	503

#### 11.3. Ferro-résonance des circuits électriques

11.3.1. Généralités . . . . .	515
11.3.2. Ferro-résonance des circuits électriques séries . . . . .	516
11.3.3. Ferro-résonance des circuits électriques dérivation . . . . .	519
11.3.4. Caractéristiques des phénomènes de ferro-résonance . . . . .	520
11.3.5. Exemples de phénomènes de ferro-résonance. . . . .	521

#### 11.4. Stabilité des circuits électriques

11.4.1. Généralités . . . . .	523
11.4.2. Critères de stabilité . . . . .	528
11.4.3. Exemples . . . . .	536
11.4.4. Stabilité des systèmes non linéaires. . . . .	540



IV-e partie  
PROPAGATION DE L'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Chapitre XII  
THÉORIE DES LIGNES LONGUES

12.1. Étude des lignes longues en régime quasistationnaire	
12.1.1. Généralités	548
12.1.2. Paramètres des lignes électriques longues	549
12.1.3. Équations des lignes longues	556
12.1.4. Intégration des équations des lignes longues dans le cas d'un régime périodique alternatif sinusoïdal	558
12.1.5. Interprétation physique des solutions générales	564
12.1.6. Fonctionnement et propriétés générales des lignes de transmission de l'énergie électrique	579
12.2. Étude des lignes longues en régime transitoire	
12.2.1. Généralités	601
12.2.2. Les équations des lignes longues en régime transitoire	602

Chapitre XIII  
CHAÎNES DE QUADRIPOLES

13.1. Chaînes de quadripôles fonctionnant en régime permanent quasistationnaire	
13.1.1. Définitions	615
13.1.2. Équations d'une chaîne de quadripôles en régime permanent	615
13.1.3. Cas particuliers de fonctionnement d'une chaîne de quadripôles	624
13.1.4. Applications	626
13.2. Chaînes de quadripôles fonctionnant en régime transitoire	
13.2.1. Équations d'une chaîne de quadripôles en régime transitoire	631
13.2.2. Cas particuliers	632
13.2.3. Exemples	634
13.3. Filtres de fréquence	
13.3.1. Définitions	640
13.3.2. Exemples	641

Chapitre XIV  
PROPAGATION DES COURANTS ÉLECTRIQUES ET DES CHAMPS  
ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS DES CONDUCTEURS MASSIFS, EN RÉGIME  
HARMONIQUE SINUSOÏDAL

14.1. Distribution du courant électrique dans un conducteur massif de section rectangulaire	
14.1.1. Généralités	648
14.1.2. Étude quantitatif du phénomène, dans le cas d'une barre rectangulaire de longueur infinie et dont la largeur est petite par rapport à sa hauteur	649
14.1.3. Étude du régime transitoire d'établissement du courant électrique dans un conducteur massif de section rectangulaire	652
14.1.4. Répartition du courant électrique dans des barres massives situées dans les encoches des machines électriques	660



14.2. Propagation du champ magnétique dans les lames	663
14.2.1. Établissement de l'équation générale	664
14.2.2. Intégration des équations de propagation dans le cas d'un régime permanent harmonique sinusoïdal	665
14.2.3. L'impédance apparente du circuit d'excitation	668
14.2.4. Pertes d'énergie dans les circuits magnétiques	672
14.3. Répartition du courant électrique dans les conducteurs cylindriques	672
14.3.1. Établissement de l'équation générale	673
14.3.2. Intégration de l'équation dans le cas d'un courant alternatif sinusoïdal, en régime permanent	676
14.3.3. Détermination de l'impédance propre d'un conducteur cylindrique	679
14.3.4. Cable divisé	

## Chapitre XV

### PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

15.1. Ondes électromagnétiques	680
15.1.1. Généralités	682
15.1.2. Propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux diélectriques	692
15.1.3. L'onde électromagnétique stationnaire	
15.2. L'énergie transmise par les ondes électromagnétiques	696
15.2.1. Propagation de l'énergie électromagnétique	701
15.2.2. La présence des phénomènes réactifs dans la propagation de l'énergie électromagnétique	703
15.2.3. Propagation de l'énergie électromagnétique sur les lignes électriques	



# CONTENTS

## VOLUME I

### Part I

#### PHYSICAL FUNDAMENTALS OF ELECTROTECHNICS. INTRODUCTION TO THE THEORY OF ELECTROMAGNETIC FIELD

##### Chapter I

#### ELECTROSTATICS

1.1. <i>Electric Charges and Their Electric Field</i>	20
1.1.1. General View . . . . .	21
1.1.2. Electric Charges . . . . .	22
1.1.3. Law of Electric Charges Conservation . . . . .	23
1.1.4. Classification of Substances . . . . .	24
1.1.5. The Electric Field and Its Strength . . . . .	26
1.1.6. Lines of Electric Field; Electric Field Lines Tube; Electrical Spectra . . . . .	27
1.1.7. Electrical Permittivity . . . . .	29
1.1.8. Coulomb's Law . . . . .	
1.2. <i>Electric Potential and Electric Flux</i>	29
1.2.1. Electrostatic Potential . . . . .	32
1.2.2. Representation of Electric Field by a Potential . . . . .	33
1.2.3. Electrization by Influence . . . . .	34
1.2.4. Electric Induction Field or Electric Displacement . . . . .	37
1.2.5. Electric Flux . . . . .	39
1.2.6. Gauss' Theorem . . . . .	41
1.2.7. Surface Density of Electric Charges; Volume Density of Electric Charges; Linear Density of Electric Charges . . . . .	42
1.2.8. Continuity of Electric Field . . . . .	43
1.2.9. Electric Field Sources . . . . .	
1.3. <i>Electric Fields Calculation</i>	45
1.3.1. Electric Fields Superposing . . . . .	46
1.3.2. Basic Equations of the Electrostatic Field in the Vacuum . . . . .	47
1.3.3. Electrostatic Field of a Point-Charge . . . . .	55
1.3.4. Electrostatic Field Due to a Very Long Charged Conductor . . . . .	58
1.3.5. Electric Field Due to a Superficial Charged Conductor . . . . .	74
1.3.6. The Field of Electric Charges near a Conducting Surface . . . . .	
1.4. <i>Electric Capacitance, Capacitors</i>	83
1.4.1. Electric Capacitance . . . . .	85
1.4.2. Electric Capacitors . . . . .	85
1.4.3. Calculation of Capacitance of Some Simple Capacitors . . . . .	91
1.4.4. Coupling of Capacitors . . . . .	95
1.4.5. Calculation of Simple Electrostatic Networks . . . . .	



	98
1.4.6. Multiple Systems Electric Capacitances . . . . .	105
1.4.7. Service Electric Capacitances . . . . .	
1.5. Study of Dielectrics . . . . .	115
1.5.1. Experimental Determinations. Faraday's Experiment . . . . .	117
1.5.2. Dielectric Polarization . . . . .	121
1.5.3. Electric Polarization Laws . . . . .	122
1.5.4. Continuity of Electric Field Components . . . . .	123
1.5.5. Quantitative Study of Electric Polarization . . . . .	
1.5.6. Explanation of Faraday's Experiment by means of the General Laws of Electric Polarization . . . . .	126
	127
1.5.7. Electric Field inside Polarized Bodies . . . . .	132
1.5.8. Anisotropic Media . . . . .	133
1.5.9. Non-Homogeneous Media . . . . .	
1.6. Electrostatic Energy. . . . .	138
1.6.1. General View . . . . .	141
1.6.2. Electrostatic Energy of a Charged Conductor . . . . .	142
1.6.3. Electrostatic Energy of a System of Charged Conductors . . . . .	
1.6.4. Localization of Electrostatic Energy within the Electric Field. Electrostatic Energy Density . . . . .	145
	147
1.6.5. Potential Nature of Electrostatic Energy. Thomson's Theorem . . . . .	149
1.6.6. About the Forms of Electrostatic Energy Expression . . . . .	
1.7. Forces in Electric Field . . . . .	151
1.7.1. Calculation of Forces Using Coulomb's Law Formula . . . . .	153
1.7.2. Generalized Coordinates . . . . .	155
1.7.3. First Theorem of Generalized Lagrangeian Forces . . . . .	156
1.7.4. Second Theorem of Generalized Lagrangeian Forces . . . . .	168
1.7.5. Mechanical Tensions in Electric Field . . . . .	160
1.7.6. Mechanical Forces at the Separation Surface of Any Two Media . . . . .	

## Chapter II

### ELECTROKINETICS

2.1. Electric Current. . . . .	
2.1.1. Definition of Electric Current . . . . .	163
2.1.2. Density of Conduction Current. The Continuity Equation . . . . .	165
2.1.3. Ohm's Law . . . . .	168
2.1.4. Joule-Lenz's Law . . . . .	174
2.1.5. Convection Current . . . . .	177
2.1.6. Maxwell's Displacement Current . . . . .	178
2.2. Electromotive Force . . . . .	
2.2.1. Definition of the Electromotive Force . . . . .	181
2.2.2. Generalized Ohm's Law . . . . .	183
2.2.3. Voltage Variation at Terminals of an Electric Circuit Section . . . . .	184
2.2.4. Electric Energy Dissipated within an Electric Circuit . . . . .	188
2.3. Fundamentals of Theory of Steady State Direct Current Networks . . . . .	
2.3.1. Notions of Topology Applied to Electric Networks . . . . .	195
2.3.2. Reference Directions Convention in Direct Current Circuits . . . . .	199



2.3.3. General Problem in the Study of Electric Networks . . . . .	200
2.3.4. Kirchhoff's Theorems Method . . . . .	206
2.3.5. Method of Effects Superposition . . . . .	210
2.3.6. Loops Method . . . . .	212
2.3.7. Theorems regarding Complex Electric Networks Used for Their Calculation . . . . .	216
2.3.8. Pair of Nodes Method . . . . .	225
2.3.9. Electric Circuit Transfiguration Method . . . . .	230
2.4. <i>Application of Matrix Calculus to the Study of Direct Current Electric Circuits</i> . . . . .	238
2.4.1. General View . . . . .	239
2.4.2. General Method of Resolving Problems of Physics . . . . .	241
2.4.3. Tensors Used in the Study of Electric Circuits . . . . .	243
2.4.4. Loops Method. Calculus Principles . . . . .	257
2.4.5. Pair of Nodes Method. Calculus Principles . . . . .	
2.5. <i>Systems of Non-Linear Direct Current Circuits</i> . . . . .	262
2.5.1. General View . . . . .	264
2.5.2. Classification of Non-Linear Elements of Electric Circuits . . . . .	265
2.5.3. Examples of Non-Linear Elements in Direct Current Electric Circuits . . . . .	269
2.5.4. Calculus of Electric Circuits Including Non-Linear Elements . . . . .	
2.6. <i>Direct Current in Tridimensional Media</i> . . . . .	278
2.6.1. General View . . . . .	279
2.6.2. Study of Propagation of Stationary Electric Currents in Tridimensional Conductive Media on the Analogy Electrostatic Field . . . . .	282
2.6.3. Kirchhoff's Theorems in Tridimensional Media . . . . .	284
2.6.4. Joule-Lenz's Law in Tridimensional Conductive Media . . . . .	
2.6.5. Boundary Conditions in the Field of Currents in Tridimensional Conductive Media . . . . .	286
2.6.6. Examples of Problems of Tridimensional Media . . . . .	

### Chapter III

## ELECTRODYNAMICS

3.1. <i>Magnetic Induction Field</i>	
3.1.1. General Electromagnetic Phenomena . . . . .	294
3.1.2. Electrodynamie Force between Two Parallel Conductors . . . . .	395
3.1.3. Magnetic Induction Field . . . . .	297
3.1.4. Magnetic Field Operation Means . . . . .	299
3.1.5. Magnetic Permeability . . . . .	301
3.1.6. Electromagnetic Force . . . . .	303
3.1.7. Magnetic Induction Flux . . . . .	307
3.1.8. Magnetic Circuit Law . . . . .	309
3.2. <i>Magnetic Field Calculation</i>	
3.2.1. Experiments of Biot and Savart . . . . .	314
3.2.2. Laplace Formula . . . . .	315
3.2.3. Principle of Sinuous Currents . . . . .	316
3.2.4. Calculation of Fields by Means of Laplace Formula . . . . .	317
3.2.5. Calculation of Fields by Means of Magnetic Circuit Law . . . . .	322
3.2.6. The Scalar Magnetic Potential . . . . .	325
3.2.7. Calculation of Fields by Means of Scalar Magnetic Potential . . . . .	329
3.2.8. The Magnetic Vector Potential . . . . .	330



3.2.9. Calculation of Fields by Means of Magnetic Vector Potential . . . . .	333
3.2.10. Calculation of Fields by Means of Conformal Mapping . . . . .	336
3.3. <i>Electromagnetic Induction</i> . . . . .	339
3.3.1. General View . . . . .	339
3.3.2. The Electromagnetic Induction Law . . . . .	348
3.3.3. Consequences of the Electromagnetic Induction Law . . . . .	
3.4. <i>Electromagnetic Induction Caused by Quasy Stationary Electric Currents</i> . . . . .	352
3.4.1. Magnetic Flux Total . . . . .	352
3.4.2. Mutual Induction . . . . .	359
3.4.3. Self Inductance . . . . .	365
3.4.4. Maxwell's Theorem regarding Self and Mutual Induction . . . . .	365
3.4.5. Service Inductance of Electric Lines . . . . .	368
3.4.6. Magnetically-Coupled Circuits . . . . .	
3.5. <i>Magnetic Field Energy</i> . . . . .	372
3.5.1. Correlation of Magnetic Induction Phenomena and Electromagnetic Phenomena . . . . .	376
3.5.2. Electromagnetic Energy produced by Electric Current . . . . .	381
3.5.3. Electromagnetic Energy of a System Formed of Any Number of Circuits . . . . .	383
3.5.4. Location of Magnetic Energy . . . . .	389
3.5.5. Theorems of Generalized Forces in Magnetic Field . . . . .	
3.6. <i>Determination of Electric Current in Electric Circuits. Transient State in Direct Current Circuits</i> . . . . .	392
3.6.1. General View . . . . .	396
3.6.2. Electric Circuits Consisting of a Resistor Series-connected with an Inductance . . . . .	403
3.6.3. Electric Circuits consisting of a Capacitor Series-connected with an Inductance . . . . .	407
3.6.4. Electric Circuits Consisting of a Resistor, an Inductor and a Capacitance, Series-connected . . . . .	
3.7. <i>Ferromagnetism</i> . . . . .	423
3.7.1. Magnetic Phenomena . . . . .	424
3.7.2. General Theory of Ferromagnetism . . . . .	432
3.7.3. Magnetization of Ferromagnetic Materials . . . . .	443
3.7.4. Intensity of Magnetic Field and Magnetic Induction Field inside Magnetited Bodies . . . . .	451
3.7.5. Calculation of Magnetic Circuits . . . . .	

## Part II

### SINUSOIDAL ALTERNATING CURRENT

#### Chapter IV

#### SINGLE-PHASE SINUSOIDAL ALTERNATING CURRENT

4.1. <i>General Notions of Alternating Currents</i> . . . . .	
4.1.1. Introduction . . . . .	464
4.1.2. Definitions . . . . .	464
4.1.3. Algebraic Operations with Periodical Sinusoidal Alternating Functions . . . . .	472
4.2. <i>Representation of Periodical Sinusoidal Alternating Quantities by Phasors</i> . . . . .	
4.2.1. Representation Convention. Revolving Vectors . . . . .	477



4.2.2. Analytical Representation of a Phasor . . . . .	479
4.2.3. Definitions . . . . .	486
4.2.4. Operations with Phasors . . . . .	487
4.2.5. Generalized Periodical Alternating Quantities; Pseudo-Sinusoidal Functions . . . . .	500
4.3. Sinusoidal Alternating Current . . . . .	506
4.3.1. Production of Electromotive Sinusoidal Alternating Force . . . . .	509
4.3.2. Effect of Sinusoidal Alternating Current . . . . .	518
4.3.3. Particular Physical Phenomena Occuring in Alternating Current Circuits . . . . .	523
4.3.4. Ohm's Law in Series Alternating Current Circuits . . . . .	533
4.3.5. Sinusoidal Alternating Current in Paralleles Branches . . . . .	540
4.3.6. Use of Phasors in Calculation of Electric Circuits . . . . .	551
4.3.7. Electric Power and Energy in Alternating Current Circuits . . . . .	573
4.3.8. Resonance in Alternating Current Circuits . . . . .	

## Chapter V

### SYMMETRICAL MULTI-PHASE SINUSOIDAL ALTERNATING CURRENT

5.1. General View on Symmetrical Multi-Phase Systems . . . . .	590
5.1.1. Production of Multi-Phase Alternating Electromotive Force . . . . .	591
5.1.2. Representation of Electromotive Forces and Currents of a Multi-Phase System . . . . .	597
5.1.3. Multi-Phase Systems Connections . . . . .	598
5.1.4. Supply of Multi-Phase System Receivers . . . . .	599
5.1.5. Voltages, Currents and Powers in Multi-Phase Systems . . . . .	
5.1.6. Effective or Cyclic Impedances and Admittances of a Symmetrical Balanced Multi-Phase System . . . . .	606
5.2. Symmetrical Tri-Phase Sinusoidal Alternating System . . . . .	607
5.2.1. General Properties . . . . .	608
5.2.2. Analytical Representation of a Symmetrical Tri-Phase System . . . . .	
5.3. Resolution of Symmetrical, Balanced Tri-Phase Alternating Current Network . . . . .	612
5.3.1. General View . . . . .	614
5.3.2. Effective or Cyclic Impedances and Admittances of a Symmetrical Balanced Tri-Phase System . . . . .	614
5.3.3. Star Receivers . . . . .	616
5.3.4. Triangle Receivers . . . . .	
5.4. Rotating Magnetic Field . . . . .	
5.4.1. Rotating Magnetic Field Produced by Mechanical Revolution of a Winding, Generator of an Invariable Time, Fixed Direction Magnetic Field . . . . .	618
5.4.2. Rotating Magnetic Field Produced by Multi-Phase Alternating Currents System . . . . .	619
5.4.3. Circular Rotating Magnetic Field . . . . .	620

## VOLUME II

### Chapter VI

#### STUDY OF STEADY STATE ALTERNATING CURRENT CIRCUITS SYSTEMS

6.1. General Methods of Study . . . . .	
6.1.1. General View . . . . .	9
6.1.2. Equivalent Diagrams of Electric Circuits . . . . .	10
6.1.3. Resolution of Alternating Current Circuits with the Phasor-Diagrams . . . . .	14



6.1.4. Resolution of sinusoidal Alternating Current Circuits by Analytical Methods, without Using Phasors . . . . .	18
6.2. General Calculation Methods Based on Phasors . . . . .	23
6.2.1. General View . . . . .	25
6.2.2. Study of Alternating Current Circuits with the Kirchhoff's Theorems and Methods Derived from Them . . . . .	34
6.2.3. Theorem of Complex Alternating Current Networks Serving to Their Study . .	39
6.2.4. Matrix-Based Methods used in Resolution of Electric Networks . . . . .	45
6.3. Calculus Methods Based on Special Diagrams . . . . .	51
6.3.1. Functional Diagrams of Electric Circuits . . . . .	64
6.3.2. Transfer Graph Method . . . . .	75
6.3.3. Application of Graph Theory to Calculation of Electric Networks . . . . .	78
6.3.4. Relative Quantities or Units and Their Use in Electrical Engineering . . . . .	80
6.4. Study of Some Type Circuits . . . . .	81
6.4.1. General View. . . . .	85
6.4.2. Study of Multipole . . . . .	129
6.4.3. Study of Multi-Dipole . . . . .	
6.4.4. Study of Quadripole . . . . .	
6.4.5. Study of Dipole . . . . .	
6.5. Use of Inversion in the Study of Electric Circuits . . . . .	143
6.5.1. Geometrical Inversion . . . . .	153
6.5.2. Phasorial Inversion . . . . .	
6.6. Geometric Locus Diagrams . . . . .	155
6.6.1. General View . . . . .	157
6.6.2. General Properties of Diagrams . . . . .	158
6.6.3. Study of Some Particular Geometric Loci . . . . .	175
6.6.4. About Graphic Scales . . . . .	177
6.6.5. Transposition of a Geometric Locus Diagram in a Characteristic Curve . . . . .	178
6.6.6. The Power's Line . . . . .	180
6.6.7. Applications . . . . .	

## Chapter VII

### TRANSIENT STATE IN ALTERNATING CURRENT CIRCUITS

7.1. General Method of Calculation . . . . .	
7.1.1. General View . . . . .	190
7.2. Study of Transient State Alternating Current Circuits in which One Has to Take Account of a Single Form of Energy . . . . .	
7.2.1. Formulas Used . . . . .	191
7.2.2. Electric Circuits Consisting of a Resistor Series-Connected with an Inductance . .	191
7.2.3. Electric Circuits Consisting of a Resistor Series-Connected with a Capacitor . . .	197
7.3. Study of Alternating Current Circuits in which One Has to Take Account of Both Forms of Energy . . . . .	
7.3.1. Electric Circuits Consisting of a Series-connected Resistor, Inductance and Capacitor	202
7.4. Use of Complex Quantities in the Study of the Transient State . . . . .	
7.4.1. General View and Definitions . . . . .	209



7.4.2. General Method of Calculating Transient States with Complex Quantities . . .	211
7.4.3. Transient Phenomena in Electrical Engineering . . . . .	213
7.4.4. Applications to the Study of Electric Circuits with Localized Constants . . . . .	215
7.5. <i>Transient State of a Rotating Magnetic Field</i>	
7.5.1. Short-Circuiting of the Feed of a Tri-Phase Armature Producing a Rotating Magnetic Field . . . . .	222
7.5.2. General Expression of the Transient State of a Rotating Magnetic Field . . . . .	224
7.5.3. Applications . . . . .	226

### Part III

## ABNORMAL STATE ALTERNATING CURRENT SYSTEMS

### Chapter VIII

#### NON-SYMMETRICAL POLYPHASE ALTERNATING CURRENT UNBALANCED STATE

8.1. <i>General View</i>	
8.2. <i>Direct Method of Calculating Non-Symmetrical Unbalanced Systems</i>	
8.2.1. Topographical Representation of Voltages . . . . .	231
8.2.2. Calculation of Currents; Non-Symmetrical, Unbalanced Loading . . . . .	233
8.3. <i>Unbalanced Polyphase Systems. Calculation with the help of Symmetrical Coordinates</i>	
8.3.1. General View . . . . .	244
8.3.2. Decomposition of Any Tri-Phase System to Symmetrical Coordinates (Theorem of Stokvis-Fortescue) . . . . .	245
8.3.3. Physical Reality of the Symmetrical Components of Any Tri-Phase System . . . . .	247
8.3.4. Theorems Referring to Symmetrical Coordinates . . . . .	247
8.3.5. Operations with Tri-Phase Systems of Phasors . . . . .	250
8.3.6. Determination of the Symmetrical Components of a Given Tri-Phase System of Phasors . . . . .	255
8.3.7. Unbalance Degree of a Tri-Phase System of Phasors . . . . .	260
8.3.8. Measurement of Symmetrical Components . . . . .	260
8.3.9. Measurement of Direct, Inverse and Homopolar Reactance of a Synchronous Machine . . . . .	267
8.4. <i>Calculation of Unbalanced Systems Using Symmetrical Coordinates</i>	
8.4.1. Kirchhoff's Theorems in Unbalanced State . . . . .	270
8.4.2. Impedances of a Symmetrical Coordinates State Tri-Phase Network . . . . .	271
8.4.3. Expression of Unbalanced State Power . . . . .	274
8.4.4. Calculation of Unbalanced Tri-Phase Electric Circuits . . . . .	277
8.4.5. Calculation of Short-Circuit Currents in Tri-Phase Networks . . . . .	282
8.4.6. Use of Matrix Calculus in the study of Unbalanced Tri-Phase Networks . . . . .	307
8.4.7. Transient State Tri-Phase Systems . . . . .	316
8.4.8. Elliptical Rotating Magnetic Field . . . . .	319

### Chapter IX

#### NON-SINUSOIDAL SINGLE-PHASE ALTERNATING CURRENT. DISTORTING STATE

9.1. <i>General View</i>	
9.2. <i>Study of Complex Waves</i>	



9.2.1. Harmonic Waves . . . . .	326
9.2.2. Composition of Harmonics . . . . .	333
9.2.3. Harmonic Analysis of Periodical Non-Sinusoidal Waves for which one can write an Analytical Equation . . . . .	342
9.2.4. Harmonic Analysis of Experimental Non-Sinusoidal Waves . . . . .	351
9.2.5. Fourier Series Development of Non-Periodical Functions . . . . .	357
9.2.6. Fourier Series with Complex Terms . . . . .	360
9.2.7. Fourier Integral . . . . .	363
9.3. <i>Particular Study of Distorting State</i> . . . . .	369
9.3.1. Characteristic Quantities of Distorting State . . . . .	377
9.3.2. Distorting State Power . . . . .	392
9.3.3. Distorting State Electric Current . . . . .	
9.4. <i>Distorting State Generation</i> . . . . .	396
9.4.1. General View . . . . .	397
9.4.2. Iron-Core Coil . . . . .	401
9.4.3. Origin of Higher Harmonics . . . . .	404
9.4.4. Other Sources of Harmonics . . . . .	
9.5. <i>Distorting State Effects</i> . . . . .	407
9.5.1. General View . . . . .	407
9.5.2. Capacitor Fed on Distorting Voltage . . . . .	409
9.5.3. Inductance Fed on Distorting Voltage . . . . .	410
9.5.4. Various Effects . . . . .	
9.6. <i>Distorting State Balanced Tri-Phase Systems</i> . . . . .	415
9.6.1. Phase Electromotive Force of an Alternator . . . . .	
9.6.2. Mains Voltage at the Terminals of a Star-Connected Tri-Phase Alternator: Non- Sinusoidal Phase Electromotive Force . . . . .	417
9.6.3. Mesh Connection of the Windings of a Tri-Phase Alternator . . . . .	419
9.6.4. Iron Effect in Tri-Phase Electric Networks . . . . .	420

## Chapter X

### SPECIAL METHODS OF CALCULATING TRANSIENT STATE

10.1. <i>General View</i> . . . . .	
10.2. <i>Study of Transient State with Heaviside Symbolic Calculus</i> . . . . .	
10.2.1. General View on Heaviside Symbolic Calculus . . . . .	424
10.2.2. Examples of Application . . . . .	428
10.3. <i>Use of Operational Calculus in the Study of Transient State Electrical Circuits</i> . . . . .	
10.3.1. Theory of Heaviside Electric Circuit . . . . .	432
10.4. <i>Use of Laplace Transformation in the Study of Transient State</i> . . . . .	
10.4.1. Fundamental Definitions and Theorems . . . . .	437
10.4.2. Transformation of Differential and Integral-Differential Equations . . . . .	444
10.4.3. Image Function of Some Usual Functions . . . . .	446
10.4.4. Finding the Original Function of an Image Function . . . . .	455
10.4.5. General Method of Calculating Transient States . . . . .	465
10.4.6. Calculation of Transient Phenomena Occuring at Opening and Closing of a Circuit . . . . .	474
10.5. <i>Use of Fourier Integral in the Study of the Transient State of Electric Circuits</i> . . . . .	
10.5.1. Pairs of Functions . . . . .	478



10.5.2. Fourier Transformation . . . . .	480
10.5.3. Application of Fourier Integral to the Study of Electric Circuits . . . . .	481

### Chapter XI

## ALTERNATING CURRENT NON-LINEAR SYSTEMS

11.1. General View and Definitions . . . . .	493
11.1.1. General View . . . . .	494
11.1.2. Classification of Non-Linear Elements of Alternating Current Electric Networks . . . . .	494
11.2. General Methods of Calculating Non-Linear Alternating Current Systems . . . . .	498
11.2.1. Steady State Calculus Methods . . . . .	503
11.2.2. Transient State Calculus Methods . . . . .	503
11.3. Ferro-Resonance of Electric Circuits . . . . .	515
11.3.1. General View . . . . .	516
11.3.2. Ferro-Resonance in Series Electric Circuits . . . . .	519
11.3.3. Ferro-Resonance in Parallels Electric Circuits . . . . .	520
11.3.4. Characteristics of Ferro-Resonance Phenomenon . . . . .	521
11.3.5. Examples of Ferro-Resonance Phenomena . . . . .	521
11.4. Stability of Electric Circuits . . . . .	523
11.4.1. General View . . . . .	528
11.4.2. Stability Criteria . . . . .	536
11.4.3. Examples of Application . . . . .	540
11.4.4. Stability of Non-Linear Systems . . . . .	540

### Part IV

## PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC ENERGY

### Chapter XII

## THEORY OF LONG LINES

12.1. Study of Quasi-Stationary State Long Lines . . . . .	548
12.1.1. General View . . . . .	549
12.1.2. Parameters of Long Electric Lines . . . . .	556
12.1.3. Long Line Equations . . . . .	558
12.1.4. Integration of Equations of Periodical Sinusoidal Alternating State Long Lines . . . . .	564
12.1.5. Physical Interpretation of General Solutions . . . . .	579
12.1.6. Operation and General Features of Electric Energy Transmission Lines . . . . .	579
12.2. Study of Transient State Long Lines . . . . .	601
12.2.1. General View . . . . .	602
12.2.2. Transient State Long Lines Equations . . . . .	602

### Chapter XIII

## CHAINS OF QUADRIPOLES

13.1. Quadripole Chains Operating under Permanent Quasi-Stationary Conditions . . . . .	615
13.1.1. Definitions . . . . .	615
13.1.2. Equations of Steady State Quadripole Chain . . . . .	624
13.1.3. Particular Cases of Quadripole Chain Operation . . . . .	624



13.1.4. Applications . . . . .	626
13.2. <i>Transient State Quadripole Chains Operations</i>	631
13.2.1. Equations of a Transient State Quadripoles Chain . . . . .	632
13.2.2. Particular Cases . . . . .	634
13.2.3. Examples of Application . . . . .	
13.3. <i>Frequency Filters</i>	640
13.3.1. Definitions . . . . .	641
13.3.2. Pure Reactive Multicellular Electric Filters . . . . .	

#### Chapter XVI

### PROPAGATION OF SINUSOIDAL HARMONIC STATE ELECTRIC CURRENTS AND ELECTROMAGNETIC FIELDS THROUGH SOLID WIRES

14.1. <i>Distribution of Electric Current Through a Solid Rectangular-Shaped Wire</i>	648
14.1.1. General View . . . . .	
14.1.2. Quantitative Study of Phenomenon: Case of Rectangular Bar of Endless Length and of Small Width towards Height . . . . .	649
14.1.3. Study of Transient State Determination of Electric Current in a Solid Rectangular Shape Conductor . . . . .	352
14.1.4. Distribution of Electric Current in Solid Bars Laid on Slots . . . . .	660
14.2. <i>Propagation of Magnetic Field in Shells</i>	
14.2.1. Determination of General Equations . . . . .	663
14.2.2. Integration of Propagation Equations: Steady Sinusoidal Harmonic State . .	664
14.2.3. Apparent Impedance of Exciting-Circuit . . . . .	665
14.2.4. Energy Loss in Magnetic Circuits . . . . .	668
14.3. <i>Distribution of Electric Current in Cylindrical Wires</i>	
14.3.1. Determination of General Equation . . . . .	672
14.3.2. Equation Integration: Steady State Sinusoidal Alternating Current . . . . .	673
14.3.3. Determination of Intrinsic Impedance of a Cylindrical Wire . . . . .	676
14.3.4. Divided Cable . . . . .	679

#### Chapter XV

### PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES

15.1. <i>Electromagnetic Waves</i>	
15.1.1. General View . . . . .	680
15.1.2. Propagation of Electromagnetic Waves in Dielectric Media . . . . .	682
15.1.3. Steady State Electromagnetic Wave . . . . .	692
15.2. <i>Energy Transmitted by Electromagnetic Waves</i>	
15.2.1. Propagation of Electromagnetic Energy . . . . .	696
15.2.2. Presence of Reactive Phenomena in Electromagnetic Energy Propagation . .	701
15.2.3. Propagation of Electromagnetic Energy through Electric Lines . . . . .	703



# E R A T Ā

Pag.	Erordul	in loc de:	Se va citi:
90	rel. (6.102)	$A_{12} = - \frac{\mathcal{S}_{11} \mathcal{S}_{22} \cdot \mathcal{S}_{12} \mathcal{S}_{21}}{\mathcal{S}_{21}}$	$A_{12} = - \frac{\mathcal{S}_{11} \cdot \mathcal{S}_{22} - \mathcal{S}_{12} \mathcal{S}_{21}}{\mathcal{S}_{21}}$

Plan editură Nr. 5289 B.  
 Coli de tipar 46,50. Tiraj 5180 ex. legate 1/1.  
 Bun de tipar 12.12.74. Apărut 1974



I. P. „Informația” c. 229



**Vol. I și vol II    Lei 66,20**